

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ với $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Tính $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx$.

A. $-\frac{3}{2}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $-\frac{9}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xét $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Ta có: $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} + 2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 3$

Lấy tích phân 2 vế ta được: $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx + 2 \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 3x dx = \frac{9}{2}$.

Đặt $\frac{1}{x} = t \Rightarrow -\frac{1}{x^2} dx = dt \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 2 \\ x = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \end{cases}$

Khi đó: $2 \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx = 2 \int_2^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t} dt = 2 \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx \Rightarrow 3 \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \frac{3}{2}$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 14 = 0$. Điểm M thay đổi trên (S) , điểm N thay đổi trên (P) . Độ dài nhỏ nhất của MN bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. 1.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu có tâm $I(1; -2; -1)$, bán kính $R = 3$ và $d(I, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - (-2) + 2 \cdot (-1) - 14|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 4 > R$

Do đó mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) không có điểm chung, gọi H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) và K là giao điểm của đoạn IH với mặt cầu (S)

Ta có $MN \geq MK = d(I, (P)) - R = 4 - 3 = 1$

Vậy $\min MN = 1$.

Câu 3: Gọi là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $2my = x^2$, $mx = \frac{1}{2}y^2$, ($m > 0$). Tìm giá trị của m để $S = 3$

- A. $m = 3$. B. $m = 2$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Do $m > 0$ nên suy ra $x > 0, y > 0$.

Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} 2my = x^2 \\ mx = \frac{1}{2}y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2my = x^2 \\ 2mx = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$$

Ta có $S = \int_0^{2m} \left(\sqrt{2mx} - \frac{x^2}{2m} \right) dx = 3$ hay $\frac{4m^2}{3} = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Câu 4: Cho số phức z thỏa mãn $|z + 3 - 4i| = 3$ và $w = 2z + 3 - 2i$. Khi đó $|w|$ có giá trị lớn nhất bằng

- A. $6 - 3\sqrt{5}$. B. $6 + 3\sqrt{5}$. C. 7. D. $3\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

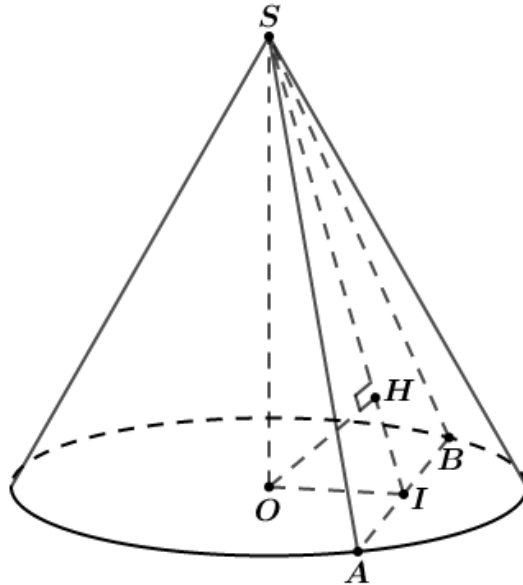
Ta có $|w| = |2z + 3 - 2i| = |2(z + 3 - 4i) - 3 + 6i| \leq |2(z + 3 - 4i)| + |-3 + 6i|$
 $= 6 + \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = 6 + 3\sqrt{5}$.

Câu 5: Cho hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 20$, bán kính đáy $r = 25$. Cắt hình nón đã cho bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và khoảng cách từ tâm của đáy hình nón đến mặt phẳng này bằng 12. Diện tích thiết diện thu được bằng

- A. 500. B. 400. C. 300. D. 406.

Lời giải

Chọn A



Giả sử thiết diện thỏa đề bài là tam giác SAB , chiều cao $SO = 20$, bán kính đáy $OA = 25$.

Gọi I là trung điểm của AB , trong mặt phẳng (SOI) kẻ $OH \perp SI$ tại H .

Ta có $AB \perp OI$ và $AB \perp SO \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow OH \perp AB$. Lại có $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SAB)$.

Do đó khoảng cách từ tâm của đáy đến thiết diện là $OH = 12$.

Xét tam giác vuông SOI vuông tại O có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2} = \frac{1}{225} \Rightarrow OI = 15$$

$$\text{và } SI = \sqrt{OI^2 + SO^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25.$$

Xét tam giác vuông OIA vuông tại I có $IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20 \Rightarrow AB = 40$

$$\text{Vậy diện tích thiết diện } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot SI = \frac{1}{2} 40 \cdot 25 = 500.$$

$$2^{2u_1+1} + 2^{3-u_2} = \frac{8}{\log_3 \left(\frac{1}{4} u_3^2 - 4u_1 + 4 \right)}$$

Câu 6: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn và $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n > 5^{100}$ bằng

A. 233. B. 234. C. 230. D. 231.

Lời giải

Chọn B

Ta có dãy số (u_n) thỏa mãn $u_{n+1} = 2u_n$ với mọi $n \geq 1$ nên dãy số (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 2$.

$$\text{suy ra } u_2 = 2u_1; u_3 = 2u_2 = 4u_1.$$

$$2^{2u_1+1} + 2^{3-2u_1} = \frac{8}{\log_3 \left(\frac{1}{4}u_1^2 - 4u_1 + 4 \right)} \Leftrightarrow 2^{2u_1+1} + 2^{3-2u_1} = \frac{8}{\log_3 (4u_1^2 - 4u_1 + 4)} \quad (1)$$

Do đó

$$\text{Mà } VT(1) = 2^{2u_1+1} + 2^{3-2u_1} \geq 2\sqrt{2^{2u_1+1} \cdot 2^{3-2u_1}} = 8$$

$$2^{2u_1+1} = 2^{3-2u_1} \Leftrightarrow 2u_1 + 1 = 3 - 2u_1 \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{2}$$

Dấu “=” xảy ra

$$\text{Lại có } 4u_1^2 - 4u_1 + 4 = (2u_1 - 1)^2 + 3 \Rightarrow \log_3 (4u_1^2 - 4u_1 + 4) \geq \log_3 3 = 1$$

$$\text{Suy ra } VP(1) = \frac{8}{\log_3 (4u_1^2 - 4u_1 + 4)} \leq 8 \quad \text{Dấu “=” xảy ra } 2u_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Từ (1) suy ra } u_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Khi đó } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = \frac{1}{2}(2^n - 1)$$

$$\text{Suy ra } S_n > 5^{100} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(2^n - 1) > 5^{100} \Leftrightarrow 2^n > 2 \cdot 5^{100} + 1 \Leftrightarrow n > \log_2 (2 \cdot 5^{100} + 1) \approx 233,193$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của n để $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n > 5^{100}$ bằng 234.

Câu 7: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục có đạo hàm $f'(x)$ trên $[0;1]$, $f(1)=0$. Biết $\int_0^1 (f'(x))^2 dx = \frac{1}{3}$, $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{3}$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $-\frac{1}{6}$.

B. $-\frac{11}{48}$.

C. $\frac{6}{23}$.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } I = \int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = f'(x) \\ v = x \end{cases}$$

$$I = x \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot f'(x) dx \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \int_0^1 x \cdot f'(x) dx \Rightarrow 2 \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = \frac{2}{3}.$$

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx - 2 \int_0^1 x f'(x) dx + \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \int_0^1 (f'(x) - x)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) - x = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} + C.$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) dx = -\frac{11}{48}.$$

Theo bài ra

Câu 8: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 8m - 12 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$?

A. 5

B. 6

C. 3

D. 4

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z^2 - 2mz + 8m - 12 = 0$ (*) thì $\Delta' = m^2 - 8m + 12$.

TH1: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ m < 2 \end{cases}$. Khi đó phương trình (*) có 2 nghiệm thực phân

biệt z_1, z_2 và theo yêu cầu bài toán: $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = z_2 \text{ (KTM)} \\ z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (TM)} \end{cases}$

TH2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 6$. Phương trình (*) khi đó có 2 nghiệm $z_{1,2} = m \pm i\sqrt{|\Delta'|}$ luôn thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$. Nên: $m \in [3; 4; 5]$.

Vậy các giá trị m thỏa mãn là: $m \in \{0; 3; 4; 5\}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Biết rằng $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$ và $\angle ASB = 60^\circ$. Tính diện tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S = \frac{13\pi a^2}{2}$

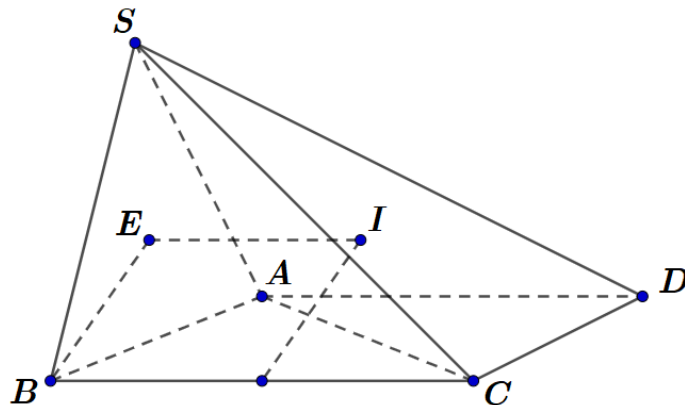
B. $S = \frac{13\pi a^2}{3}$

C. $S = \frac{11\pi a^2}{2}$

D. $S = \frac{11\pi a^2}{3}$

Lời giải

Chọn C



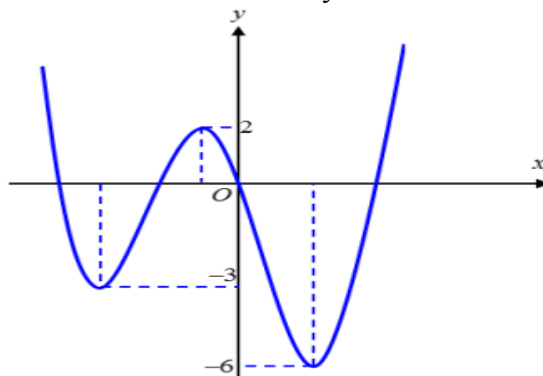
Gọi R , R_{SAB} lần lượt là bán kính khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB , khi đó $R_{SAB} = \frac{AB}{2 \sin \angle ASB} = \frac{a}{2 \sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ cũng là khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Mặt khảm hình chóp $S.ABC$ là một hình chóp có cạnh bên BC vuông góc với mặt đáy nên

$$R = \sqrt{R_{SAB}^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{39}}{6} \Rightarrow S = \frac{13\pi a^2}{3}$$

Câu 10: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số

$y = \left| f(x+2023) + \frac{1}{3}m^2 \right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử của tập S bằng:

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 9.

Lời giải

Chọn A

Đặt
$$h(x) = f(x+2023) + \frac{1}{3}m^2 \Rightarrow h'(x) = f'(x+2023).$$

Ta có
$$y = |A| = \sqrt{A^2} \Rightarrow y' = \frac{A \cdot A'}{\sqrt{A^2}}.$$

Số cực trị của $y = \left| f(x+2023) + \frac{1}{3}m^2 \right|$ là số nghiệm đơn hoặc bội lẻ của $h(x)h'(x) = 0$.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x+2023) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt.

m để hàm số $y = \left| f(x+2023) + \frac{1}{3}m^2 \right|$ có 5 điểm cực trị thì $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x+2023) = -\frac{1}{3}m^2$

$$\begin{cases} -6 < -\frac{1}{3}m^2 < -3 \\ -\frac{1}{3}m^2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 \leq m^2 < 18 \\ m^2 \leq -6 \end{cases}$$

Có 2 nghiệm phân biệt. Dựa vào đồ thị điều kiện

Do m nguyên dương nên $m = 4, m = 3$.

Tổng các giá trị các phần tử của tập S là $3 + 4 = 7$.