

C Người làm: Vũ Thị Na
Zalo: Vu Na - số dt zalo: 0774343986
Email: vuna120388@gmail.com

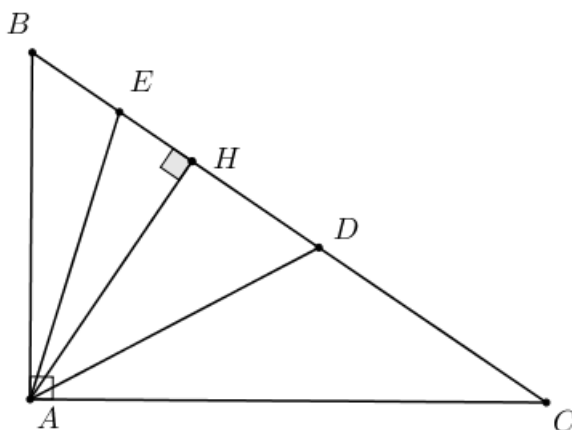
PHẦN HÌNH HỌC

Dạng : Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau

Câu 1: (HSG 7 Đồng Xuân _ Phúc Yên – Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $\angle A = 90^\circ$. Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Tia phân giác của góc HAC cắt cạnh BC ở điểm D và tia phân giác của góc HAB cắt cạnh BC ở E . Chứng minh $AB + AC = BC + DE$.

Lời giải



Áp dụng định lý góc ngoài của tam giác ABE tại đỉnh E , ta có:

$$\angle AEC = \angle ABC + \angle BAE$$

Mà $\angle ABC = \angle HAC$ (cùng phụ với $\angle BAH$) và $\angle BAE = \angle EAH$ (AE là tia phân giác của $\angle BAH$)

Do đó: $\angle AEC = \angle ABC + \angle BAE = \angle HAC + \angle EAH = \angle EAC$
 $\Rightarrow \triangle CAE$ cân tại C .

$$\Rightarrow AC = EC \quad (1)$$

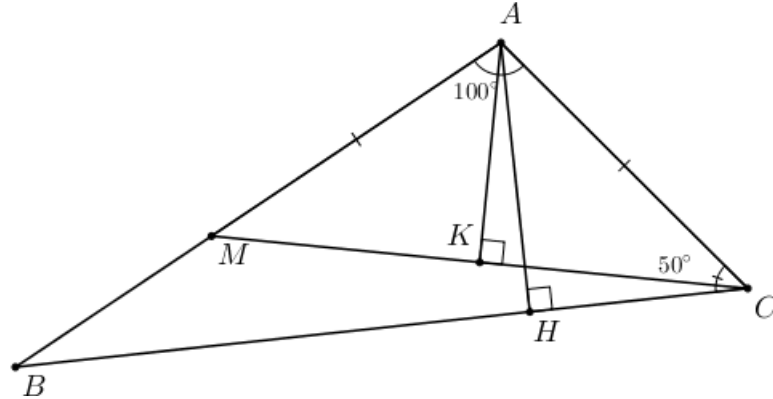
Chứng minh tương tự, ta có $AB = BD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB + AC = BD + CE = BC + ED$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 100^\circ, \angle C = 50^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $MA = AC$. Chứng minh rằng: $CM = AB$.

Lời giải



+ Kẻ $AH \perp BC$ tại H , $AK \perp MC$ tại K

+ Xét $\triangle ABC$ có $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 180^\circ - (100^\circ + 50^\circ) = 30^\circ$

+ $\triangle AHB$ vuông tại H có $\angle HBA = 30^\circ$, lập luận được $AB = 2AH$ (1)

+ Chứng minh $\triangle AKM = \triangle AKC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$$\Rightarrow KM = KC = \frac{1}{2}CM \Rightarrow CM = 2KC \quad (2)$$

$$\triangle AKM = \triangle AKC \Rightarrow \angle KAM = \angle KAC = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ$$

Vì

Xét $\triangle KAC$ và $\triangle HCA$ có :

$$\angle KAC = \angle HCA = 50^\circ$$

$$\angle AKC = \angle CHA = 90^\circ$$

AC chung.

$$\Rightarrow \triangle KAC = \triangle HCA \quad (\text{cạnh huyền – góc nhọn}) \Rightarrow KC = AH \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $CM = AB$.

Dạng : Chứng minh song song, vuông góc.

Câu 1. (HSG 7 Lạng Giang 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm của BC . Lấy điểm D trên đoạn thẳng AB (D khác A và B), đường thẳng vuông góc với MD tại M cắt AC tại E .

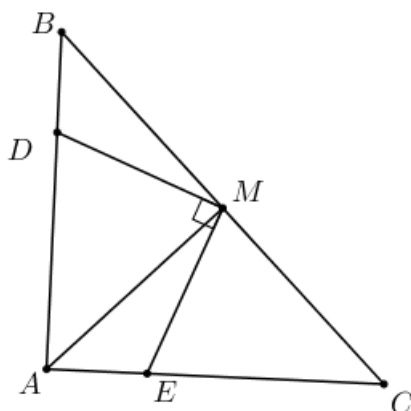
a) Chứng minh: $MD = ME$.

b) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = BD$, DK cắt BC tại I , đường vuông góc với DK tại I cắt AM tại S . Chứng minh: I là trung điểm của DK và SC vuông góc với AK .

c) Chứng minh: $MD + ME \geq AD + AE$.

Lời giải

a)



$\triangle ABC$ vuông tại A

AM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC .

$$\Rightarrow AM = MB = MC = \frac{1}{2}BC$$

$\triangle ABC$ cân tại A

AM là đường trung tuyến nên AM đồng thời là đường cao, là đường phân giác của $\triangle ABC$.

$\Rightarrow \triangle AMB$ và $\triangle AMC$ vuông cân tại M .

$$\triangle AMB \text{ vuông cân tại } M \Rightarrow \angle BMD + \angle BMA = \angle BMA = 90^\circ$$

$$\angle AME + \angle BMA = \angle BME = 90^\circ (DM \perp ME)$$

Mà

$$\Rightarrow \angle BMD = \angle AME.$$

Xét $\triangle MBD$ và $\triangle MAE$ có:

$$AM = MB \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\angle BMD = \angle AME \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\angle MBD = \angle MAE = 45^\circ (\triangle AMB \text{ vuông cân tại } M, AM \text{ là đường phân giác của } \triangle ABC)$$

↳ $ID = IK$ (2 cạnh tương ứng).

Suy ra I là trung điểm của DK .

* Trên cạnh AC lấy điểm Q sao cho $CQ = BD$.

Xét $\triangle MBD$ và $\triangle MCQ$ có:

$$MB = MC \text{ (} M \text{ là trung điểm của } BC \text{)}$$

$$\angle MBD = \angle MCQ = 45^\circ \text{ (} \triangle ABC \text{ vuông cân tại } A \text{)}$$

$$BD = CQ \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle MBD = \triangle MCQ \text{ (c - g - c)}.$$

$$\Rightarrow MD = MQ \text{ (hai cạnh tương ứng)}.$$

Ta lại có: $AD = AQ$ (do $AB = AC, \angle B = \angle C$).

Suy ra: AM là đường trung trực của DQ hay AS là đường trung trực của DQ .

$$\text{Suy ra: } SD = SQ \text{ (1)}$$

Xét $\triangle SBD$ và $\triangle SCK$ có:

$$SD = SK \text{ (} SI \text{ là đường trung trực của } DK \text{)}$$

$SB = SC$ (AS là đường trung trực của BC do $\triangle ABC$ vuông cân tại A , AM là đường trung tuyến)

$$BD = CK$$

$$\Rightarrow \triangle SBD = \triangle SCK \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow SD = SK \text{ (hai cạnh tương ứng)} \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $SQ = SK$.

$\Rightarrow \triangle SQK$ và cân tại S .

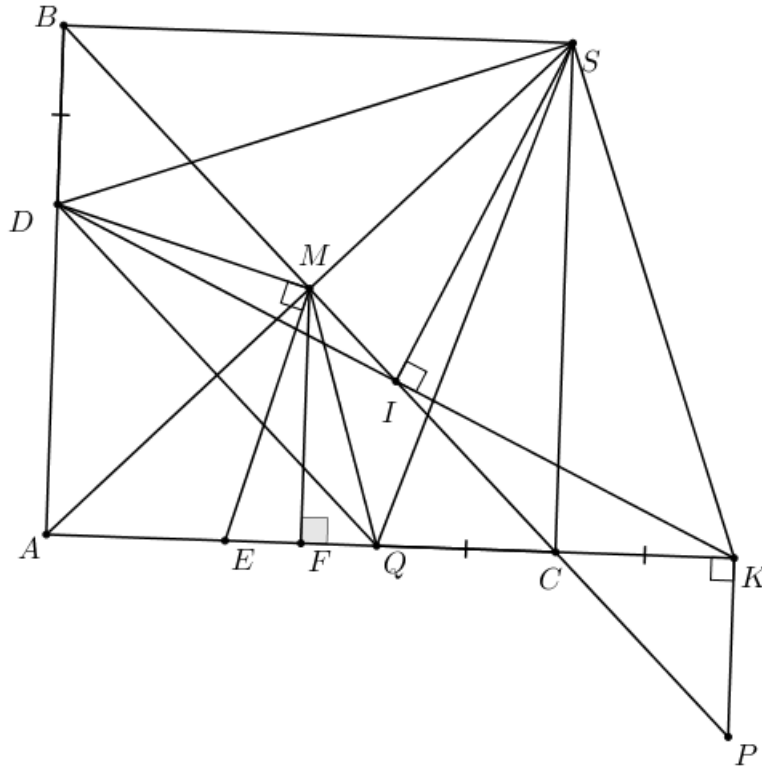
Mà SC là đường trung tuyến của $\triangle SQK$ do $CQ = CK = DB$.

$\Rightarrow SC$ đồng thời là đường cao của $\triangle SQK$.

$$\Rightarrow SC \perp QK$$

$$\Rightarrow SC \perp AK$$

c)



Kẻ $MF \perp AC (F \in AC)$

Ta có $MD = ME$ (chứng minh trên).

$$\Rightarrow MD + ME = 2ME$$

Ta có: $ME \leq MF \Rightarrow 2ME \leq 2MF$

$$\Rightarrow MD + ME \leq 2MF$$

$$\Rightarrow MD + ME \leq 2MF \quad (3)$$

$\triangle AMC$ vuông cân tại M , MF là đường cao của $\triangle AMC$

$\Rightarrow MF$ đồng thời là đường trung tuyến của $\triangle AMC$

$$\Rightarrow MF = FA = FC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow 2MF = AC$$

Mà $AB = AC$ (do $\triangle ABC$ có vuông cân tại A)

$$\Rightarrow 2MF = AB = BD + DB = BD + AE \quad (\text{do } DB = AE \text{ vì } \triangle MBD = \triangle MAE).$$

$$\Rightarrow 2MF = BD + AE \quad (4)$$

$$\text{Từ } (3), (4) \Rightarrow MD + ME \leq BD + AE.$$

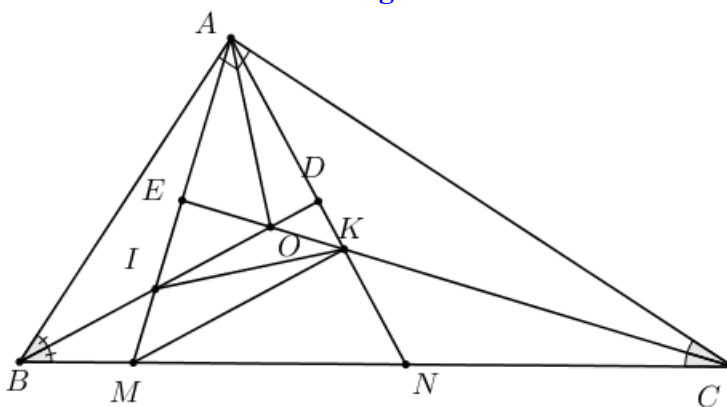
Câu 2. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB < AC$. Trên cạnh BC lấy điểm M và N sao cho $MC = CA, NB = BA$. Tia phân giác của góc B cắt AM tại I và cắt AN tại D , tia phân giác góc C cắt AN tại K và cắt AM tại E . Gọi O là giao điểm của BD và CE .

1. Tính góc BOC .

2. Chứng minh: $BD \perp AN$ và $BD \parallel MK$.

Lời giải



1. Vì BD là tia phân giác của góc $B \Rightarrow \angle DBC = \angle DBA = \frac{1}{2} \angle ABC$

+ Vì CE là tia phân giác của góc $C \Rightarrow \angle ECB = \angle ECA = \frac{1}{2} \angle ACB$

$$\Rightarrow \angle DBC + \angle ECB = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle ACB)$$

+ Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên $(\angle ABC + \angle ACB) = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle DBC + \angle ECB = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ \quad \text{hay} \quad \angle OCB + \angle OBC = 45^\circ$$

Xét $\triangle OBC$ có $\angle BOC + \angle OCB + \angle OBC = 180^\circ \Rightarrow \angle BOC = 180^\circ - (\angle OCB + \angle OBC)$

Mà $\angle OCB + \angle OBC = 45^\circ$ nên $\angle BOC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Vậy $\angle BOC = 135^\circ$

2. Xét $\triangle ABD$ và $\triangle NBD$ có :

$$BA = BN$$

$$\angle DBA = \angle DBN$$

BD chung

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle NBD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle ADB = \angle NDB$$

Mà $\angle ADB + \angle NDB = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\Rightarrow \angle ADB = \angle NDB = 90^\circ \Rightarrow BD \perp AN \text{ tại } D$$

+ Xét $\triangle MCK$ và $\triangle ACK$ có: $MC = CA$; $\angle MCK = \angle ACK$; CK chung.

$$\Rightarrow \triangle MCK = \triangle ACK \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle KMC = \angle KAC$$

+ Vì $NB = BA \Rightarrow \triangle BNA$ cân tại $B \Rightarrow \angle BNA = \angle BAN$

$$\Rightarrow \angle KMC + \angle BNA = \angle KAC + \angle BAN = \angle BAC = 90^\circ \text{ hay } \angle KMN + \angle KNM = 90^\circ$$

+ Xét $\triangle KMN$ có $\angle MKN + \angle KMN + \angle KNM = 180^\circ$ mà $\angle KMN + \angle KNM = 90^\circ$ nên $\angle MKN = 90^\circ$

Suy ra $\Rightarrow MK \perp AN$ tại K

Mà $BD \perp AN \Rightarrow BD \parallel MK$

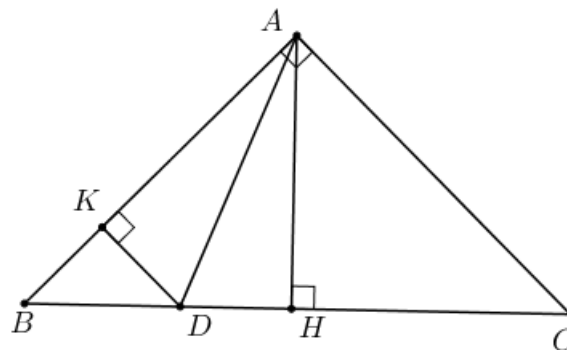
Dạng : Bài toán chứng minh tổng hợp

Câu 1. (HSG 7 huyện Quốc Oai 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH . Tia phân giác của $\angle HAB$ cắt BC tại D . Kẻ $DK \perp AB (K \in AB)$. Chứng minh

- 1) $AH = AK$.
- 2) $\triangle ACD$ cân
- 3) $AB + AC < BC + AH$.

Lời giải



- 1) Xét $\triangle AHD$ và $\triangle AKD$ có

$$\angle AHD = \angle AKD = 90^\circ$$

AD chung

$$\angle HAD = \angle KAD \text{ (vì } AD \text{ là phân giác của } \angle HAB)$$

$$\Rightarrow \triangle AHD = \triangle AKD \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow AH = AK \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

- 2) Do $\triangle AHD$ vuông tại H nên $\angle ADH + \angle DAH = 90^\circ$ (1)

$\triangle ABC$ vuông tại A nên $\angle CAD + \angle DAB = 90^\circ$ (2)

Mà AD là phân giác của $\angle HAB \Rightarrow \angle DAB = \angle DAH$ (3)

Từ (1); (2); (3) suy ra $\angle ADH = \angle ADC$

$\Rightarrow \triangle ACD$ cân tại C

3) Ta có $AB + AC = AK + KB + AC$

$BC + AH = AH + CD + BD$

Theo phần a) $AH = AK$ (4)

Theo phần b) $\triangle ACD$ cân tại C nên $AC = AD$ (5)

Trong $\triangle BKD$ vuông tại K ta có $KB < BD$ (6)

Từ (4); (5); (6) ta có $AK + KB + AC < AH + CD + BD$

Hay $AB + AC < BC + AH$

Câu 2. (HSG 7 huyện Hiệp Hòa 2022 - 2023)

- 1) Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy điểm D và E sao cho $AD = AE$. Qua A và D kẻ đường thẳng vuông góc với BE cắt BC lần lượt tại M và N . Tia ND cắt tia CA tại I .

a) Chứng minh $DI = BE$.

b) Qua N kẻ đường thẳng song song với AC cắt AM tại F . Chứng minh $NF = AI$.

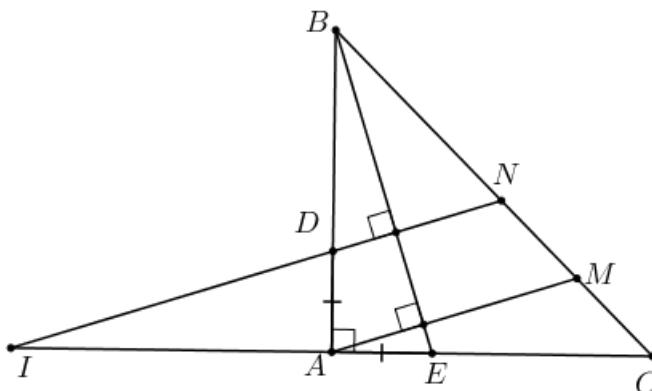
c) Chứng minh $AM = \frac{1}{2}NI$.

- 2) Cho tam giác ABC có $AB < AC < BC$. Điểm E nằm trong tam giác. Chứng minh $EA + EB + EC < AC + BC$.

Lời giải

1)

a)



Ta có: $\angle BDA = \angle BDN$ (hai góc đối đỉnh)

$$\angle BDN = 90^\circ - \angle ABE \quad (1)$$

$$\angle AEB = 90^\circ - \angle ABE \quad (\text{tính chất trong tam giác vuông}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\angle BDN = \angle AEB \Rightarrow \angle BDA = \angle AEB$

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ADI$

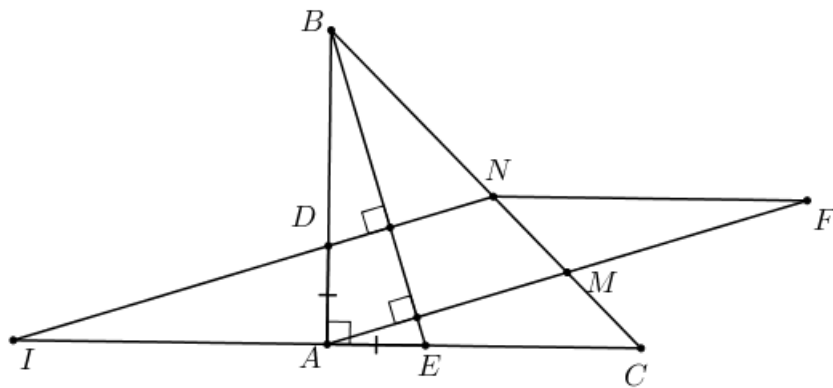
Có: $AD = AE$; $\angle DAI = \angle EAB (= 90^\circ)$; $\angle BDA = \angle AEB$ (cmt)

Suy ra: $\triangle ABE = \triangle ADI$ (cgv-gn)

$\Rightarrow DI = BE$ (hai cạnh tương ứng).

Vậy $DI = BE$

b)



Vì $AM \perp BE$; $DN \perp BE \Rightarrow AM \parallel DN$ hay $IN \parallel AM$

Suy ra: $\angle ANI = \angle NFA$ (2 góc so le trong)

Và $\angle ANI = \angle NAF$ (2 góc so le trong)

Xét $\triangle ANI$ và $\triangle NFA$ có:

$$\angle ANI = \angle NFA \quad (\text{cmt})$$

AN cạnh chung

$$\angle ANI = \angle NAF \quad (\text{cmt})$$

Suy ra $\triangle ANI = \triangle NFA$ (g.c.g)

$\Rightarrow NF = AI$ (2 cạnh tương ứng)

Vậy $NF = AI$

c) Vì $NF \parallel AC \Rightarrow \angle NFM = \angle CAM$ (2 góc so le trong)

Và $\angle ACN = \angle PNC$ (2 góc so le trong)

Vì $NF = AI$ mà $AI = AB; AB = AC \Rightarrow NF = AC$

Xét $\triangle NFM$ và $\triangle AMC$ có:

$$\angle ACN = \angle PNC \text{ (cmt)}$$

$$NF = AC \text{ (cmt)}$$

$$\angle NFM = \angle CAM \text{ (cmt)}$$

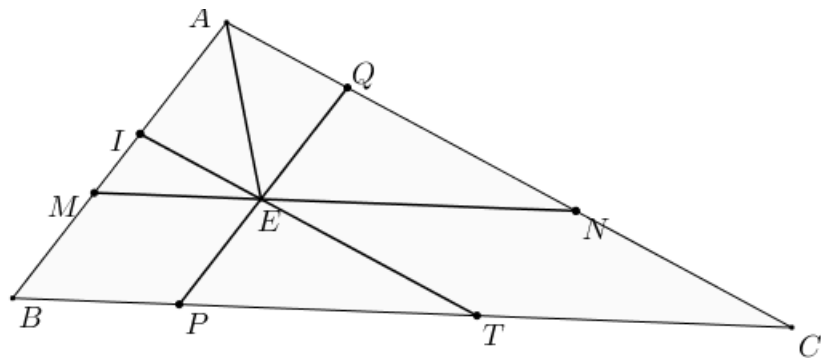
Suy ra $\triangle NMF = \triangle CMA$ (g.c.g)

$$\Rightarrow AM = FM \text{ (2 cạnh tương ứng)} \Rightarrow AM = \frac{1}{2} FA \quad (*)$$

Mặt khác $NI = FA$ ($\triangle ANI = \triangle NAF$) (**)

$$\text{Từ (*) và (**) suy ra } AM = \frac{1}{2} NI$$

2)



Từ E kẻ các đường thẳng MN, PQ, IT theo thứ tự song song với BC, AB, AC

Kết hợp với $AB < AC < BC$ ta xét trong $\triangle PET, \triangle QEN$ ta cũng có $PT > ET > EP$

và $EN > QN > EQ$ (2)

Trong $\triangle BEP, \triangle AEQ, \triangle CET$, ta có :

$$\begin{cases} EA < EQ + AQ \\ EB < BP + TC \\ EC < ET + TC \end{cases} \text{ và do (2) ta có : } \begin{cases} EA < QN < AQ \\ EB < BP + PT \\ EC < TC + NC \end{cases}$$

Lại có $EC = NC$ (hai đoạn thẳng song song chắn giữa hai đường thẳng song song)

Vậy $EA + EB + EC < QN + AQ + NC + BP + PT + TC$

Nên $EA + EB + EC < BC + AC$

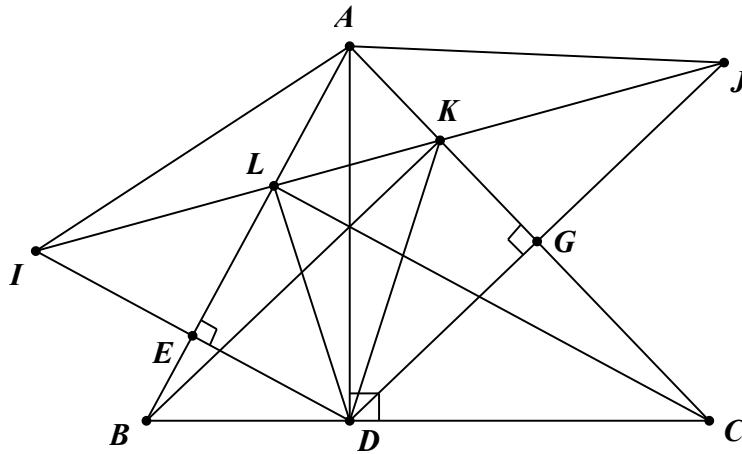
Vậy $EA + EB + EC < BC + AC$

Câu 3. (HSG 7 Mường Lát 2022 - 2023)

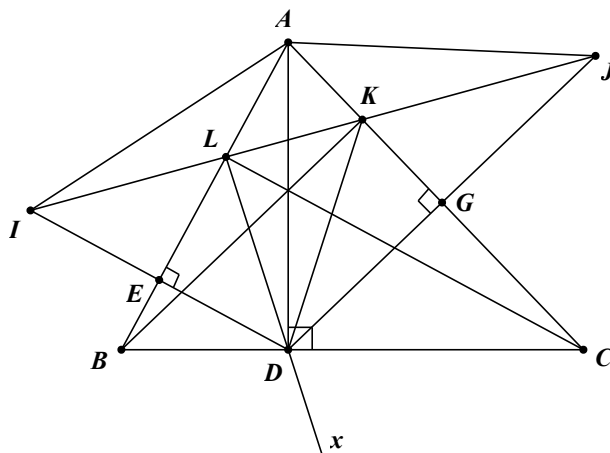
Cho tam giác ABC nhọn, kẻ AD vuông góc với BC tại D . Xác định I, J sao cho AB là trung trực của DI , AC là trung trực của DJ, IJ cắt AB, AC lần lượt tại L và K . Chứng minh rằng:

- $\triangle AIJ$ cân.
- DA là tia phân giác của góc $\angle EDK$.
- $CL \perp AB$; $BK \perp AC$.

Lời giải



- Ta có: AB là trung trực của DI nên $AI = AD$
 AC là trung trực của DJ nên $AJ = AD$
 Do đó $AI = AJ$ nên $\triangle AIJ$ cân tại A .
- Ta có: L nằm trên đường trung trực của DI nên $LI = LD$
 Do đó $\triangle ALI = \triangle ALD$ (c - c - c) suy ra $\angle AIL = \angle ADL$ (1)
 Ta có: K nằm trên đường trung trực của DJ nên $KD = KJ$
 Do đó $\triangle ADK = \triangle AKJ$ (c - c - c) suy ra $\angle ADK = \angle AKJ$ (2)
 Lại có: $\triangle AIJ$ cân tại A nên $\angle AIJ = \angle AJI \Rightarrow \angle AIL = \angle AKJ$ (3)
 Từ (1), (2), (3) suy ra $\angle ADL = \angle ADK$
 Do đó DA là tia phân giác của góc $\angle EDK$.
-



* Chứng minh: $CL \perp AB$

Kẻ tia Dx là tia đối của tia DL

$\triangle DLK$ có DA là đường phân giác trong và $DA \perp DC$ nên DC là đường phân giác ngoài của $\triangle DLK$

Ta có: $\angle GDK = \angle GJK$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle KGD = \angle KJG$ nên KC là tia phân giác của $\angle B K J$ (4)

có DC và KC là hai đường phân giác ngoài cắt nhau tại C nên LC là đường phân giác trong của $\triangle DLK$ (5)

Ta có: $\angle LEI = \angle LED$ (c - c - c) $\Rightarrow \angle LEI = \angle LED$ nên LE là tia phân giác của $\angle HLD$

Do đó LE là đường phân giác ngoài của $\triangle DLK$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $LC \perp LE$ do đó $CL \perp AB$.

* Chứng minh: $BK \perp AC$

$\triangle DLK$ có DA là đường phân giác trong và $DA \perp DB$

Nên DB là đường phân giác ngoài của $\triangle DLK$ (7)

Từ (6) và (7) suy ra $\triangle DLK$ có DB và LE là hai đường phân giác ngoài cắt nhau tại B nên KB là đường phân giác trong của $\triangle DLK$ (8)

Từ (4) và (8) suy ra $KB \perp KC$ do đó $BK \perp AC$.

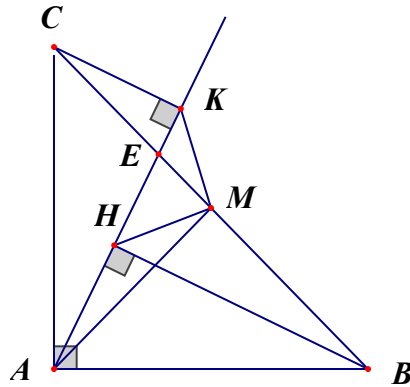
Câu 4. (HSG 7 huyện Đồng Xuân – Phúc Yên – Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm của BC . Lấy điểm E nằm giữa hai điểm C và M . Kẻ BH và CK lần lượt vuông góc với đường thẳng AE (H, K thuộc đường thẳng AE).

a) Chứng minh: $BH = AK$;

b) Chứng minh: $\triangle AHM = \triangle CKM$.

Lời giải



a) Do BH và CK lần lượt vuông góc với đường thẳng AE (H, K thuộc AE) (giả thiết)
nên $\triangle KCA$ và $\triangle HAB$ lần lượt là các tam giác vuông tại K và H

Ta có: $\angle KCA + \angle KAC = 90^\circ$ ($\triangle KCA$ vuông tại K) và $\angle HAB + \angle KAC = 90^\circ$ ($\triangle HAB$ vuông tại H). Nên $\angle KCA = \angle HAB$

Xét $\triangle KCA$ vuông tại K và $\triangle HAB$ vuông tại H có:

$AC = AB$ (chứng minh trên)

$\angle KCA = \angle HAB$ (chứng minh trên)

Suy ra $\triangle KCA = \triangle HAB$ (cạnh huyền- góc nhọn)

$$\Rightarrow BH = AK$$

b) - Ta có $\triangle KCA = \triangle HAB$ (chứng minh trên) $\Rightarrow KC = HA$ (hai cạnh tương ứng)

- Do $\triangle ABC$ vuông cân tại A , M là trung điểm của BC (giả thiết) nên AM là đường trung tuyến, đường cao, đường phân giác của $\triangle ABC$ (học sinh phải chứng minh kết quả này).

$$\Rightarrow AM = CM \text{ và } AM \perp BC$$

- Ta có $\angle KCE$ và $\angle ECK$ là hai góc phụ nhau, $\angle AEM$ và $\angle EAM$ là hai góc phụ nhau, mà $\angle ECK = \angle AEM$ (hai góc đối đỉnh) nên $\angle KCE = \angle EAM$.

- Xét $\triangle AHM$ và $\triangle CKM$ có:

$$KC = HA \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\angle KCE = \angle EAM \text{ (chứng minh trên)}$$

$AM = CM$ (chứng minh trên)

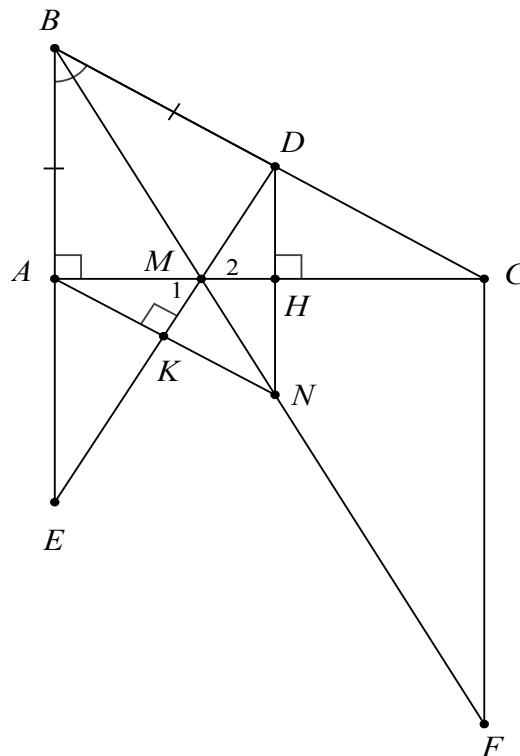
Do đó $\triangle AHM = \triangle CKM$ (c – g – c).

Câu 5. (HSG 7 huyện Tiền Hải 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Tia phân giác của góc B cắt AC tại điểm M , lấy điểm D trên cạnh BC sao cho $BD = BA$. Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng DM và BA .

1. Chứng minh $MA = MD$.
2. Kẻ $DH \perp MC$; $AK \perp ME$ (H thuộc MC ; K thuộc ME), gọi N là giao điểm của hai tia DH và AK . Chứng minh $\triangle MHN = \triangle MKN$ và ba điểm B, M, N thẳng hàng.
3. Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với AC cắt tia BM tại F . Chứng minh $AB + AM < CF + CM$.

Lời giải



1. Chứng minh $MA = MD$.

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle DBM$ có :

$$AB = BD \text{ (gt)}$$

$$\angle ABM = \angle DBM \text{ (vì } BM \text{ là tia phân giác của } \angle ABC)$$

BM cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle DBM \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow MA = MD \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

2. Chứng minh $\triangle MHN = \triangle MKN$ và ba điểm B, M, N thẳng hàng.

Xét $\triangle MAK$ vuông tại K và $\triangle MDH$ vuông tại H có:

$$MA = MD \text{ (cmt)}$$

$$\angle M_1 = \angle M_2 \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\triangle MAK = \triangle MDH \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow MK = MH \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Xét $\triangle MKN$ vuông tại K và $\triangle MHN$ vuông tại H có:

$$MK = MH \text{ (cmt)}$$

MN chung

$$\Rightarrow \triangle MKN = \triangle MHN \text{ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)}$$

$$\text{Vì } \triangle ABM = \triangle DBM \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \angle AMB = \angle DMB = \frac{\angle AMD}{2}$$

$$\text{Mặt khác } \triangle MKN = \triangle MHN \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \angle HMN = \angle KMN = \frac{\angle HMK}{2}$$

$$\text{Mà } \angle AMD = \angle HMK \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\text{Suy ra } \angle AMB = \angle HMN$$

$$\text{Do đó } \angle BMN = \angle AMB + \angle AMN = \angle HMN + \angle AMN = 180^\circ$$

Vậy ba điểm B, M, N thẳng hàng.

3. Chứng minh $AB + AM < CF + CM$.

$$\text{Vì } \triangle ABM = \triangle DBM \text{ (cmt)} \Rightarrow \angle BDM = \angle BAM = 90^\circ.$$

Tam giác MDC vuông tại D nên cạnh huyền MC lớn nhất

$$\Rightarrow MC > MD, \text{ mà } MD = MA \text{ suy ra } \Rightarrow MC > MA \quad (1)$$

Mặt khác vì $AB \perp AC$ (do $\triangle ABC$ vuông tại A) và $CF \perp AC$ (gt) nên $AB \parallel CF$

$$\Rightarrow \angle F = \angle ABM \text{ (so le trong)}$$

$$\text{Mà } \angle ABM = \angle MBC \text{ (do } BM \text{ là phân giác)}$$

$$\Rightarrow \angle F = \angle CBF$$

$$\Rightarrow \triangle BCF \text{ cân tại } C \text{ nên } CF = CB$$

Mà $CB > AB$ ($\triangle ABC$ vuông tại A nên cạnh huyền BC lớn nhất)

Suy ra $CF > AB$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $CM + CF > MA + AB$

Câu 6. (HSG 7 huyện Gia Viễn – Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$), D là trung điểm của BC , trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DE = DA$. Gọi H và K thứ tự là chân đường vuông góc hạ từ B và C xuống đường thẳng AE , M là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AC .

a) Chứng minh $BK = CH$.

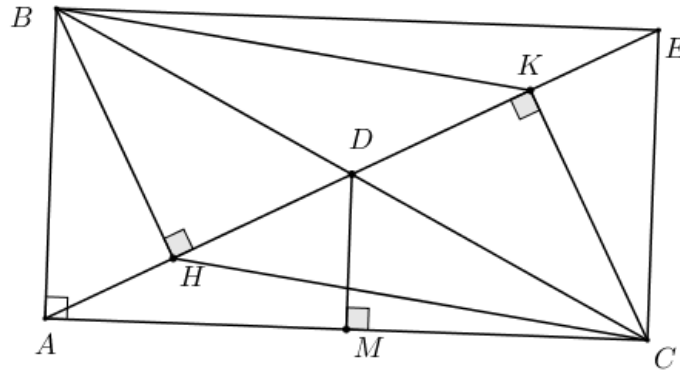
b) Chứng minh $CD > KM$.

c) Từ E kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại P và cắt BH tại N . Chứng minh ba điểm D, M, N thẳng hàng.

d) Giả sử $\angle ACB = 36^\circ$, tia phân giác của $\angle ACB$ cắt AD tại F . Chứng minh $\triangle CEF$ là tam giác cân.

Lời giải

a)



Xét $\triangle HBD$ và $\triangle KCD$ có:

$BD = CD$ (Vì D là trung điểm của BC)

$\angle BDH = \angle CDK$ (Hai góc đối đỉnh)

$\angle BHD = \angle CKD = 90^\circ$

Suy ra $\triangle HBD = \triangle KCD$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $HD = KD$ (Hai cạnh tương ứng)

Xét $\triangle DBK$ và $\triangle DCH$ có:

$BD = CD$ (Vì D là trung điểm của BC)

$\angle BDK = \angle CDH$ (Hai góc đối đỉnh)

$HD = KD$ (Chứng minh trên)

Suy ra $\triangle DBK = \triangle DCH$ (c - g - c)

$\Rightarrow BK = CH$ (Hai cạnh tương ứng)

b) Vì $\triangle ABC$ vuông tại A mà $BD = CD$

Suy ra $BD = CD = AD = \frac{1}{2}BC$ nên $AD = DC$ suy ra $\triangle ADC$ cân tại D .

Chứng minh: $\triangle ADC$ cân tại D , có DM là đường cao nên đồng thời là trung tuyến.

Suy ra M là trung điểm của AC .

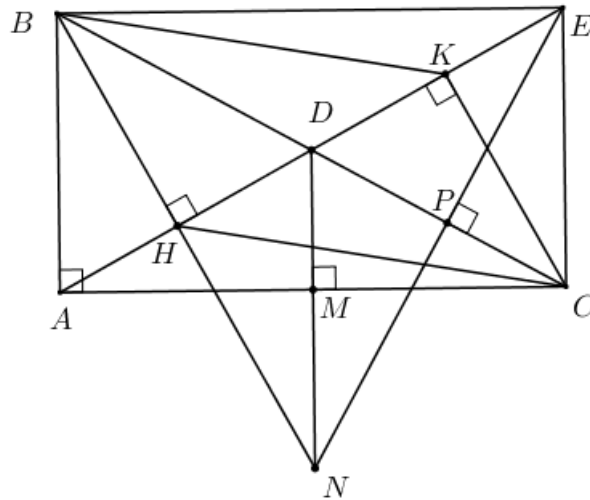
Xét $\triangle ACK$ vuông tại K , có KM là trung tuyến nên $KM = \frac{1}{2}AC$ (1)

Mà $CD = \frac{1}{2}BC$ (2)

Lại có $\triangle ABC$ vuông tại A suy ra $BC > AC$ (3)

Từ (1), (2) và (3) Suy ra $CD > KM$.

c)



Xét $\triangle ADC$ và $\triangle EDB$ có:

$BD = CD$ (Vì D là trung điểm của BC)

$\angle ADC = \angle EDB$ (Hai góc đối đỉnh)

$$AD = DE \quad (\text{gt})$$

$$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle EDB \quad (\text{c - g - c})$$

$$\Rightarrow \angle DAC = \angle DEB \quad (\text{hai góc tương ứng})$$

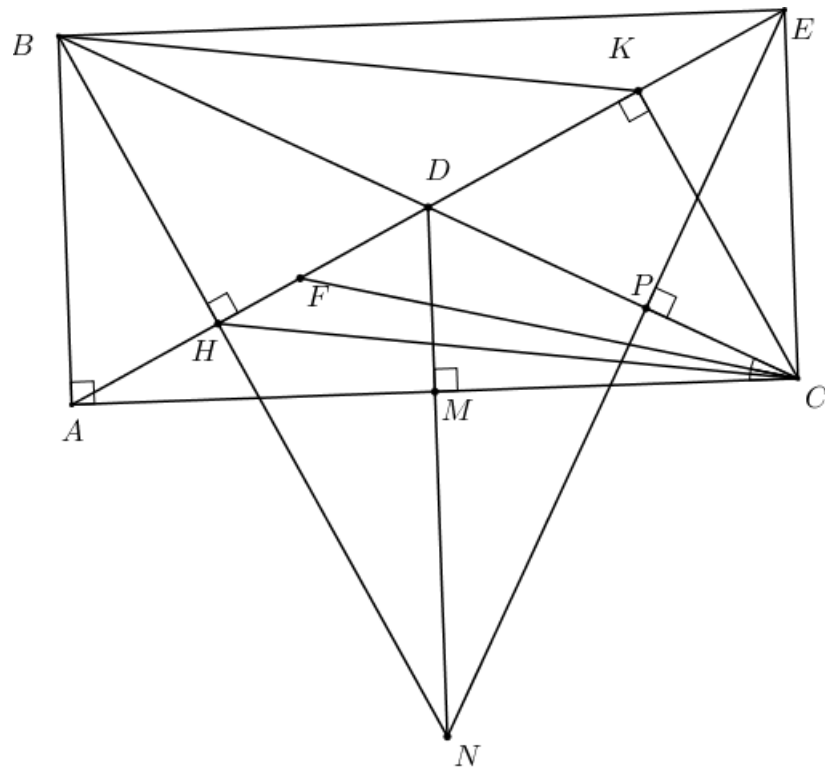
Mà $\angle DAC$ và $\angle DEB$ là hai góc so le trong Suy ra $BE \parallel AC$

Xét $\triangle BEN$ có hai đường cao PB và EH cắt nhau tại D nên điểm D là trực tâm của $\triangle BEN$ suy ra $ND \perp BE$ (4)

Lại có $DM \perp AC$ (gt), mà $BE \parallel AC \Rightarrow NM \perp BE$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra ba điểm D, M, N thẳng hàng.

d)



$\triangle ABC$ vuông tại A , $\angle ACB = 36^\circ$ nên $\angle ABC = 54^\circ$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ECD$ có:

$BD = CD$ (Vì D là trung điểm của BC)

$\angle ADB = \angle EDC$ (hai góc đối đỉnh)

$AD = DE$ (gt)

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ECD \quad (\text{c - g - c})$$

$$\Rightarrow \angle ABD = \angle CDE = 54^\circ \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\text{Do đó } \angle ACE = \angle ACB + \angle BCE = 90^\circ$$

$$\text{Mà } \triangle ACD \text{ cân tại } D \Rightarrow \angle ACB = \angle ADE = 36^\circ$$

$$\text{Mặt khác, } CF \text{ là phân giác } \angle ACB \text{ nên } \angle ACF = \angle BCF = 18^\circ$$

$$\angle FDE \text{ là góc ngoài của } \triangle ACE \text{ nên } \angle FDE = \angle ACF + \angle CAE = 18^\circ + 36^\circ = 54^\circ$$

$$\text{Ta lại có : } BD = AD \text{ suy ra } \triangle ABD \text{ cân tại } D \text{ do đó } \angle ABD = \angle BAD = 54^\circ$$

$$\text{Mà } \triangle ABD = \triangle CED \text{ (chứng minh trên)} \Rightarrow \angle BAD = \angle FED = 54^\circ$$

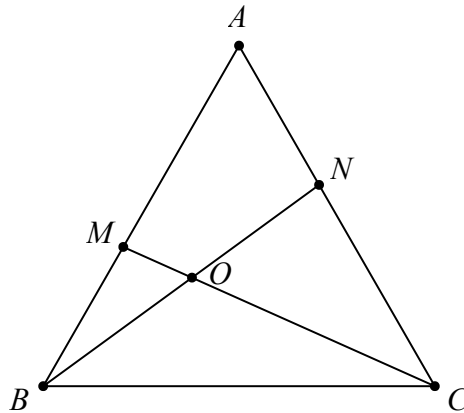
$$\text{Do vậy } \angle FED = \angle FDE = 54^\circ \text{ hay } \triangle CEF \text{ cân tại } C.$$

Câu 7. (HSG 7 Điện Bàn 2022 - 2023).

Cho tam giác đều ABC . Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $AM = CN$ ($M \neq A, M \neq B; N \neq A, N \neq C$). Gọi O là giao điểm của BN và CM .

Chứng tỏ rằng tổng $\angle MAN + \angle MON$ có giá trị không đổi.

Lời giải



Ta có:

$$AC = CB \text{ (vì } \triangle ABC \text{ đều)}$$

$$\angle BCN = \angle CAM \text{ (} \triangle ABC \text{ đều)}$$

$$AM = CN \text{ (gt)}$$

$$\text{Suy ra: } \triangle CBN = \triangle ACM \text{ (c.g.c)}$$

Suy ra $\angle EBO = \angle ACM$, từ đó ta có $\angle EBO + \angle ECB = \angle ACO + \angle ECB = \angle ACB = 60^\circ$

Trong tam giác BOC có $\angle BOC = 180^\circ - (\angle EBO + \angle ECB) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$,

suy ra $\angle MON = \angle BOC = 120^\circ$ (đối đỉnh)

Từ đó ta có: $\angle MAN + \angle MON = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ (không đổi).

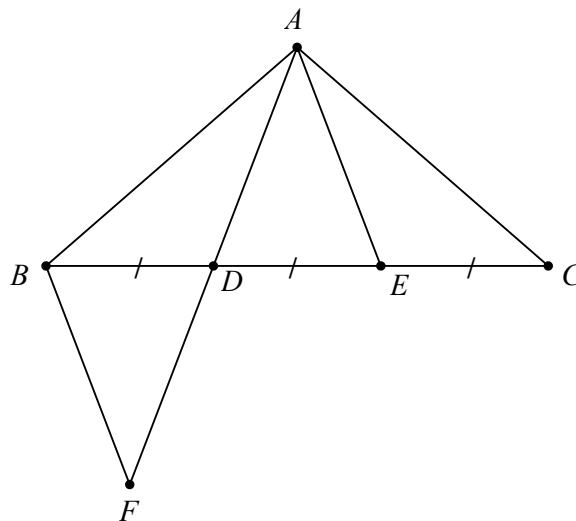
Câu 8. (HSG 7 Điện Bàn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh đáy BC lần lượt lấy hai điểm D và E sao cho $BD = DE = EC$.

a) Chứng minh $AD = AE$

b) So sánh số đo các góc $\angle BAD$ và $\angle DAE$.

Lời giải



a) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ ta có:

$AB = AC$ (ABC cân tại A)

$\angle ABD = \angle ACE$ (ABC cân tại A)

$BD = EC$ (giả thiết)

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACE$ (c.g.c)

suy ra $AD = AE$ (hai cạnh tương ứng)

b) So sánh số đo các góc $\angle BAD$ và $\angle DAE$.

Dựng điểm F sao cho D là trung điểm của AF

Xét $\triangle ADE$ và $\triangle FDB$ ta có:

$$DB = DE \text{ (Giả thiết)}$$

$$\angle BDF = \angle EDA \text{ (đối đỉnh)}$$

$$DA = DF \text{ (cách dựng)}$$

Suy ra : $\triangle ADE = \triangle FDB$ (c.g.c)

$$\text{suy ra } \angle BAE = \angle DFB \text{ (1)}$$

Xét $\triangle ADE$ có $AD = AE$ (cmt) suy ra $\triangle ADE$ cân tại A ; suy ra $\angle ADE$ nhọn.

Mà $\angle ADE$ và $\angle ADB$ kề bù

Suy ra $\angle ADB > 90^\circ \Rightarrow \angle ADB > \angle ABD$ từ đó suy ra trong tam giác ADB thì $AB > AD$
 $\Rightarrow AB > AE$

$$\text{Mà } \triangle ADE = \triangle FDB \text{ (cmt)} \Rightarrow AE = BF$$

Từ đó ta có $AB > BF$, do đó trong tam giác ABF có $\angle DFB > \angle BAD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle BAD < \angle BAE$.

Câu 9. (HSG 7 huyện, tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023).

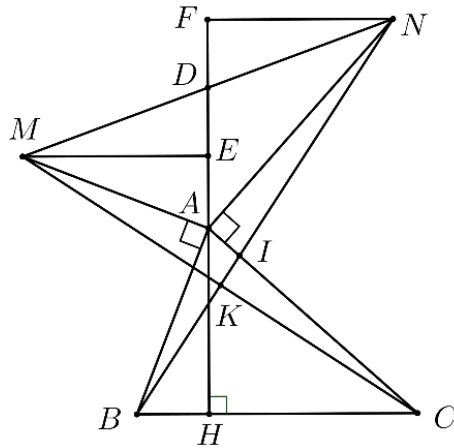
Cho tam giác ABC có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là tam giác ABM và tam giác ACN .

a) Chứng minh hai tam giác AMC và ABN bằng nhau.

b) Chứng minh BN vuông góc với CM .

c) Kẻ AH vuông góc với BC tại H . Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN .

Lời giải



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$ có: $AM = AB$ (vì $\triangle AMB$ vuông cân);

$$\angle C = \angle N \text{ (vì } \triangle ACN \text{ vuông cân); } \angle MAC = \angle NAC (= 90^\circ + \angle BAC)$$

$$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle ABN$$

(c.g.c).

b) Gọi I là giao điểm của BN và AC , K là giao điểm của BN và MC .

$$\triangle AMC = \triangle ABN \Rightarrow \angle KCI = \angle ANI$$

$$\angle ANI + \angle AIN = 90^\circ$$

Từ (2 góc tương ứng) mà (do tam

giác AIN vuông tại A)

$$\angle KIC = \angle AIN$$

và (hai góc đối đỉnh).

$$\angle KIC + \angle KCI = 90^\circ$$

Suy ra $\angle KIC$ suy ra tam giác KIC vuông tại $K \Rightarrow BN \perp MC$.

c) Kẻ $ME \perp AH$ tại E , $NF \perp AH$ tại F . Gọi D là giao điểm của MN và AH .

$$\angle AME = \angle BAH$$

$$\angle MAE$$

Ta có (cùng phụ với $\angle MAE$)

$$\triangle MAE = \triangle ABH$$

$$\Rightarrow ME = AH$$

Ta chứng minh được (cạnh huyền- góc nhọn)

$\Delta AHC = \Delta NFA \Rightarrow AH = NF$
 Chứng minh tương tự ta có (cạnh huyền- góc nhọn) .

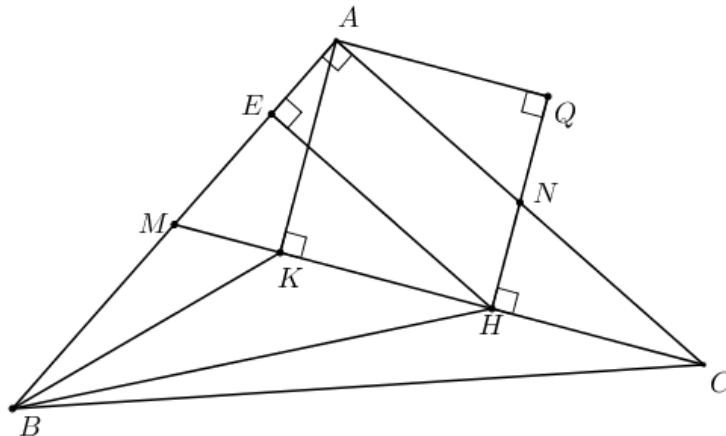
Xét ΔMED và ΔNFD vuông tại E và F có $ME = NF (=AH)$; $\angle EMD = \angle FND$ (2 góc so le trong do $ME \parallel NF \Rightarrow \Delta MED = \Delta NFD \Rightarrow MD = ND$)
 Vậy AH đi qua trung điểm D của MN .

Câu 9. (HSG 7 huyện Quảng Xương 2022 - 2023)

Cho ΔABC vuông cân có đáy là BC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC .
 Kẻ NH vuông góc với CM tại H . Kẻ HE vuông góc với AB tại E . Kẻ AK vuông góc với CM tại K . Kẻ AQ vuông góc với HN tại Q .

- Chứng minh tam giác $\Delta AKM = \Delta CHN = \Delta AQN$
- Chứng minh ΔABH cân.
- Gọi F là điểm di động trên tia CA , P là điểm di động trên tia CB . Xác định vị trí các điểm F, P sao cho ΔHFP có chu vi bé nhất.

Lời giải



- a) Xét hai tam giác vuông MKA và NHC có:

$$AM = CN \left(= \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AC \right)$$

$$\angle MAK = \angle NCH \text{ (cùng phụ với } \angle KAC \text{)}$$

Suy ra $\Delta MKA = \Delta NCH$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$$\Delta MKA = \Delta NQA$$

Tương tự :

$$\Delta MKA = \Delta NCH = \Delta NQA$$

b) Từ câu a suy ra $AK = AQ = HC$

Xét hai tam giác vuông AHC và AKB có: $\angle MAK = \angle NCH$
 $AB = AC; AK = HC$

Suy ra $\triangle AHC = \triangle BKA$ (*)

Mặt khác ta có $AQHK$ là hình chữ nhật nên $AQ = KH$ suy ra $AK = KH$

Vậy: $\triangle AKH$ vuông cân suy ra $\angle AHK = 45^\circ$.

Khi đó: $\angle AHC = 135^\circ$ nên $\angle AKB = 135^\circ$ suy ra $\angle BKH = 135^\circ$

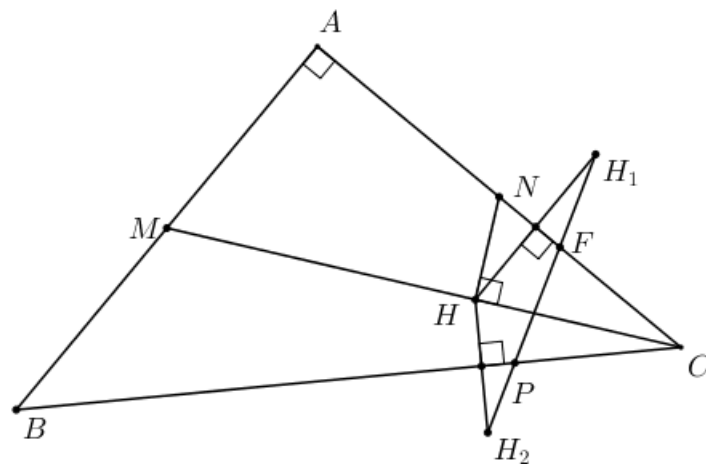
Xét hai tam giác vuông BKH và AKB có

cạnh BK chung; $AK = KH$; $\angle AKB = \angle BKH = 135^\circ$

Suy ra $\triangle ABK = \triangle HBK$ Suy ra $AB = BH$

Vậy tam giác ABH cân tại B

c)



Gọi H_1 là điểm sao cho AC là đường trung trực của HH_1 ; H_2 là điểm sao cho CB là đường trung trực của HH_2 .

Ta có H_1, H_2 cố định, độ dài đoạn thẳng H_1H_2 không đổi. Theo tính chất đường trung trực ta có: $HF = FH_1; HP = PH_2$ Nên $HF + HP + PF = PH_2 + FH_1 + PF \geq H_1H_2$

Vậy chu vi $d \geq H_1H_2$ do đó d nhỏ nhất bằng H_1H_2 khi $H_1; F; P; H_2$ thẳng hàng

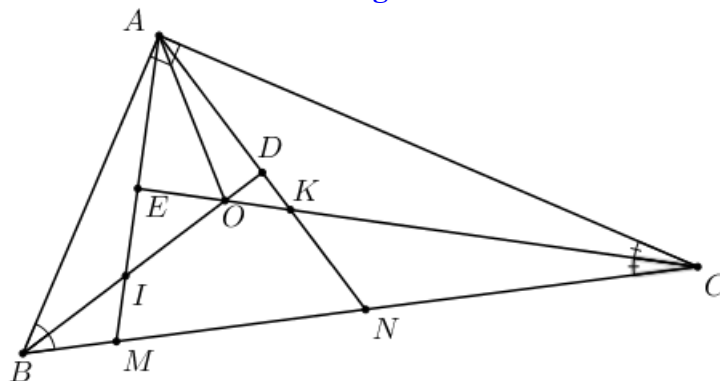
Vậy chu vi $\triangle HFP$ nhỏ nhất khi F là giao điểm của H_1H_2 với AC , P là giao điểm của H_1H_2 với CB .

Câu 10. (HSG 7 Quỳnh Phụ 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có $AB < AC$. Trên cạnh BC lấy điểm M và N sao cho $MC = CA, NB = BA$. Tia phân giác của góc B cắt AM tại I và cắt AN tại D , tia phân giác góc C cắt AN tại K và cắt AM tại E . Gọi O là giao điểm của BD và CE .

1. Tính góc BOC .
2. Chứng minh: $BD \perp AN$ và $BD \parallel MK$.
3. Chứng minh: $AO = IK$.

Lời giải



1. Vì BD là tia phân giác của góc $B \Rightarrow \angle DBC = \angle DBA = \frac{1}{2} \angle ABC$
 + Vì CE là tia phân giác của góc $C \Rightarrow \angle ECB = \angle ECA = \frac{1}{2} \angle ACB$

$$\Rightarrow \angle DBC + \angle ECB = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle ACB)$$

 + Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên $(\angle ABC + \angle ACB) = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle DBC + \angle ECB = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$
 hay $\angle OCB + \angle OBC = 45^\circ$
 Xét $\triangle OBC$ có $\angle BOC + \angle OCB + \angle OBC = 180^\circ \Rightarrow \angle BOC = 180^\circ - (\angle OCB + \angle OBC)$
 Mà $\angle OCB + \angle OBC = 45^\circ$ nên $\angle BOC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Vậy $\angle BOC = 135^\circ$
2. Xét $\triangle ABD$ và $\triangle NBD$ có :
 $BA = BN$
 $\angle DBA = \angle DBN$
 BD chung
 $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle NBD$ (c - g - c)
 $\Rightarrow \angle ADB = \angle NDB$ (cặp góc tương ứng).

Mà $\angle ADB + \angle NDB = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$\Rightarrow \angle ADB = \angle NDB = 90^\circ \Rightarrow BD \perp AN$ tại D

+ Xét $\triangle MCK$ và $\triangle ACK$ có:

$$MC = CA;$$

$$\angle MCK = \angle ACK;$$

CK chung.

$\Rightarrow \triangle MCK = \triangle ACK$ (c – g – c)

$\Rightarrow \angle KMC = \angle KAC$ (cặp góc tương ứng).

+ Vì $NB = BA \Rightarrow \triangle BNA$ cân tại $B \Rightarrow \angle BNA = \angle BAN$

$\Rightarrow \angle KMC + \angle BNA = \angle KAC + \angle BAN = \angle BAC = 90^\circ$ hay $\angle KMN + \angle KNM = 90^\circ$

+ Xét $\triangle KMN$ có $\angle MKN + \angle KMN + \angle KNM = 180^\circ$

mà $\angle KMN + \angle KNM = 90^\circ$ nên $\angle MKN = 90^\circ$

Suy ra $\Rightarrow MK \perp AN$ tại K

Mà $BD \perp AN \Rightarrow BD \parallel MK$.

3. Vì $\triangle MCK = \triangle ACK \Rightarrow KA = KM$ mà $MK \perp AN \Rightarrow \triangle KMA$ vuông cân tại K

Suy ra $\angle KAM = 45^\circ$ hay $\angle DAI = 45^\circ$

+ Chứng minh được $\triangle DAI$ vuông cân tại $D \Rightarrow DA = DI$

+ Chứng minh được $\triangle DOK$ vuông cân tại $D \Rightarrow DO = DK$

Xét $\triangle DAO$ và $\triangle DIK$ có :

$$DA = DI$$

$$\angle ADO = \angle IDK = 90^\circ$$

$$DO = DK$$

$\Rightarrow \triangle DAO = \triangle DIK$ (c – g – c) $\Rightarrow AO = IK$ (đpcm).

Câu 11. (HSG 7 Nghi Lộc – Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm của BC . Lấy điểm D trên đoạn thẳng AB (D khác A và B), trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = BD$; DK cắt BC tại I . Hạ DP, KQ vuông góc với BC lần lượt tại P và Q .

a) Chứng minh rằng : $\triangle BDP = \triangle CKQ$, I là trung điểm của DK .

b) Đường vuông góc với DK tại I cắt AM tại S . Chứng minh: SC vuông góc với AK

c) Đường thẳng vuông góc với MD tại M cắt AC tại E .

Chứng minh rằng : $MD + ME \geq AD + AE$

Lời giải

Từ (1*), (2*) và (3*) suy ra

$\triangle ABS = \triangle ACS$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle ABS = \angle ACS$ (1) (hai góc tương ứng), $BS = CS$ (hai cạnh tương ứng)

+) Xét $\triangle DBS$ và $\triangle KCS$ có :

I là trung điểm của DK , $SI \perp DK$ tại S nên S thuộc đường trung trực của $DK \Rightarrow SD = SK$.

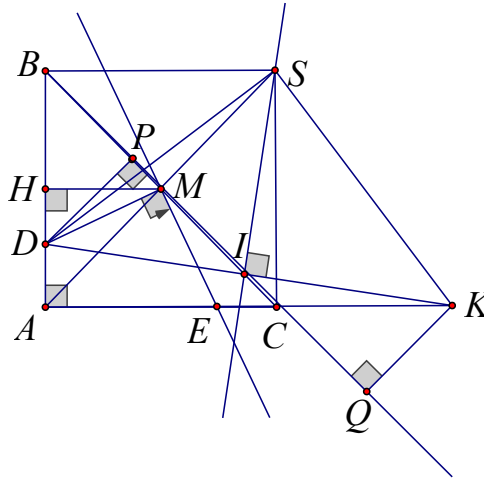
$BS = CS$ (Chứng minh trên)

$BD = CK$ (GT)

Suy ra $\triangle DBS = \triangle KCS$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle SCK = \angle SBD$ (hai cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle ACS = \angle KCS$ mà $\angle ACS$ và $\angle KCS$ là hai góc kề bù
 $\Rightarrow \angle ACS + \angle KCS = 180^\circ \Rightarrow 2\angle ACS = 180^\circ \Rightarrow \angle ACS = 90^\circ \Rightarrow SC \perp AK$

c)



+) Xét $\triangle DBM$ và $\triangle EAM$

$\triangle ABC$ cân tại A có : $AM = BM = \frac{1}{2}BC$ (Tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông)
 Nên AM vừa là đường trung tuyến, vừa là đường phân giác (Chứng minh phần b)

$$\Rightarrow \angle BAM = \angle MAE = \frac{\angle BAC}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

Mà $\angle ABC = \angle ACB = 45^\circ \Rightarrow \angle EAM = \angle DBM$ (cùng bằng 45°), $\angle BMD = \angle AME$ (Cùng phụ với $\angle DMA$) Suy ra $\triangle DBM = \triangle EAM$ (g - c - g) $\Rightarrow DM = ME, BD = AE$ (cặp cạnh tương ứng)

Kẻ $MH \perp AB$ ($H \in AB$)

đường trung tuyến nên $MH = \frac{1}{2}AB$

$$AB = AD + BD \Rightarrow AB = AD + AE$$

The diagram illustrates the construction of the center of gravity (O) of a triangle ABC. The medians AD, BE, and CF intersect at O. The centroid I is marked on each median, dividing them in a 2:1 ratio. The diagram also shows the construction of the circumcenter M and the orthocenter H, with various perpendicularity and congruence markings.

$$BD = CE$$

$$\angle BDM = \angle NEC = 90^\circ$$

$$\angle MBD = \angle NCE$$

$$\Rightarrow \triangle MBD = \triangle NEC \text{ (góc – cạnh – góc)}$$

$$\Rightarrow DM = EN \text{ (2 cạnh tương ứng).}$$

b) $\triangle MDI$ vuông tại D nên $\angle BDI + \angle MID = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông);

$\triangle NEI$ vuông tại E nên $\angle ENI + \angle NIE = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông).

Mà $\angle MID = \angle NIE$ (2 góc đối đỉnh) nên suy ra $IM = IN$ (2 cạnh tương ứng).

Vậy đường thẳng BC cắt MN tại trung điểm I của MN .

c) Ta có $\triangle MDB = \triangle NEC$ (góc – cạnh – góc), suy ra $MB = NC$ (2 cạnh tương ứng).

Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống $BC \Rightarrow AH$ là đường cao đồng thời là trung trực của tam giác ABC cân tại A (tính chất tam giác cân).

Gọi O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN tại I ta có O thuộc trung trực của đoạn thẳng BC và trung trực của đoạn thẳng MN do đó $OC = OB$ và $OM = ON$

$$\Rightarrow \triangle OBM = \triangle OCN \text{ (c.c.c)} \text{ suy ra } \angle OBM = \angle OCN \text{ (2 góc tương ứng). (1)}$$

Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OAC$ có:

$$OA \text{ chung}$$

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

$$OB = OD$$

Suy ra $\triangle OAB = \triangle OAC$ (c – c – c)

$$\Rightarrow \angle OBA = \angle OCA \text{ (2 góc tương ứng) hay } \angle OBM = \angle OCA. \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\angle OCA = \angle OCN$, mặt khác $\angle OCN + \angle OCA = 180^\circ$ (là 2 góc kề bù)

$$\Rightarrow \angle OCA = \angle OCN = 90^\circ \text{ hay } OC \perp AC.$$

Mà AC cố định, đường thẳng OC cố định và đường cao AH cũng cố định nên điểm O cố định. Vậy đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua điểm O cố định khi D thay đổi trên BC .

Câu 13. (HSG 7 Vĩnh Lộc – Thanh Hóa 2022 - 2023)

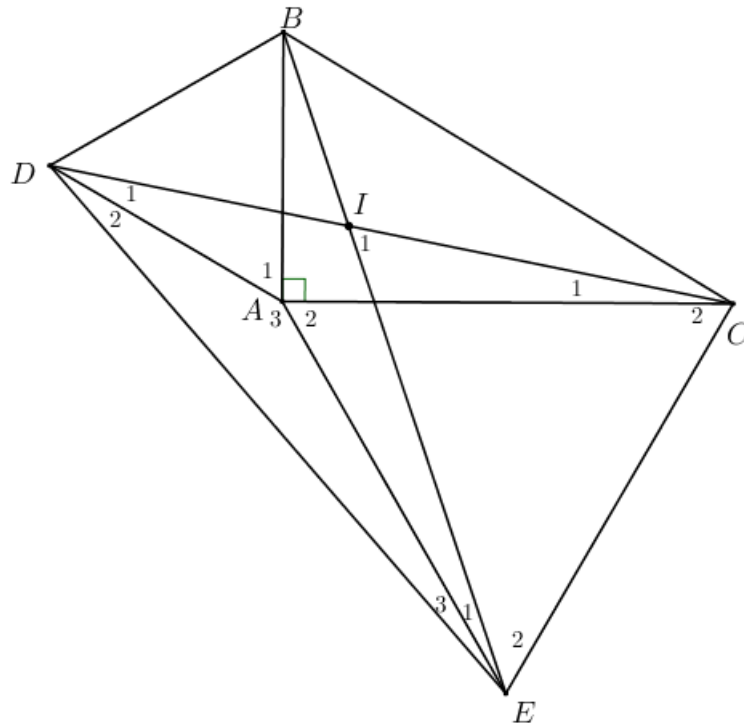
Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao điểm BE và CD . Chứng minh rằng:

$$1. \angle ADC = \angle ABE.$$

$$2. DE = BE.$$

$$3. \angle EIC = 60^\circ \text{ và } IA \text{ là tia phân giác của } \angle DIE.$$

Lời giải



1) Ta có:
$$\begin{cases} \angle BAC = \angle A_1 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \\ \angle BAE = \angle A_2 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle BAC = \angle BAE$$

Xét $\triangle ADC$ và $\triangle ABE$ có:

$$DA = BA \text{ (gt)}$$

$$\angle BAC = \angle BAE \text{ (chứng minh trên)}$$

$$AC = AE \text{ (gt)}$$

Suy ra $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c - g - c).

2) Ta có:
$$\angle A_3 + \angle A_1 + \angle BAC + \angle A_2 = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \angle A_3 + 60^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \angle A_3 = 150^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A_3 = 150^\circ = \angle BAC = 150^\circ$$

Xét $\triangle DAE$ và $\triangle BAE$ có:

$$DA = BA \text{ (gt)}$$

$$\widehat{A_3} = \widehat{BAC} \text{ (Chứng minh trên)}$$

AE : Cạnh chung

$$\Rightarrow \triangle DAE = \triangle BAE \text{ (c - g - c).}$$

$$\Rightarrow DE = BE \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

3) * Ta có: $\triangle ADC = \triangle ABE$ (theo câu 1)) suy ra $\widehat{E_1} = \widehat{E_1}$ (hai góc tương ứng)

Lại có: $\widehat{F_1} + \widehat{E_2} + \widehat{FEC} = 180^\circ$ (Tổng 3 góc trong $\triangle ICE$)

$$\Leftrightarrow \widehat{F_1} + (\widehat{AEC} - \widehat{E_1}) + (\widehat{E_1} + \widehat{E_2}) = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{F_1} + 60^\circ - \widehat{E_1} + \widehat{E_1} + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{F_1} + 120^\circ = 180^\circ \text{ (Vì } \widehat{E_1} = \widehat{E_1})}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{F_1} = 60^\circ$$

* Vì $\triangle DAE = \triangle BAE$ (chứng minh câu b) $\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{E_3}$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow EA$ là tia phân giác của $\widehat{DEI}$ (1)

Vì $\begin{cases} \triangle DAC = \triangle BAE \\ \triangle DAE = \triangle BAE \end{cases} \Rightarrow \triangle DAC = \triangle DAE \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ (Hai góc tương ứng) $\Rightarrow DA$ là tia phân giác của $\widehat{EDC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IA$ là đường phân giác thứ ba trong $\triangle DIE$ hay IA là tia phân giác của $\widehat{DIE}$

Câu 14. (HSG 7 huyện Văn Lâm 2022 - 2023)

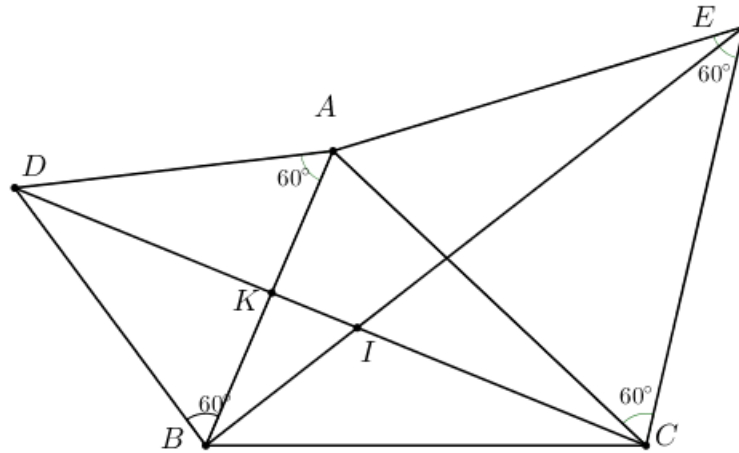
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao của CD và BE , K là giao của AB và DC .

a) Chứng minh rằng: $\triangle ADC = \triangle ABE$.

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.

c) Chứng minh rằng IA là phân giác của góc DIE .

Lời giải



a) Ta có:

$$\angle DAC = \angle BAC + \angle DAB = \angle BAC + 60^\circ$$

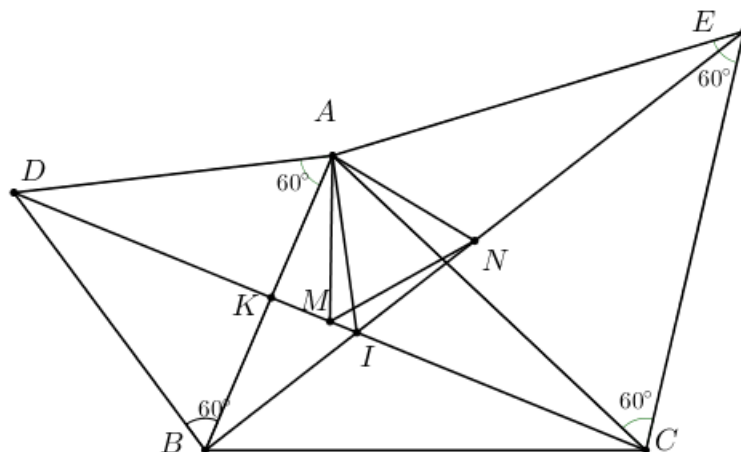
$$\angle BAE = \angle BAC + \angle EAC = \angle BAC + 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DAC = \angle BAE (= \angle BAC + 60^\circ)$$

Lại có: $AD = AB$ (vì $\triangle ABD$ đều); $AC = AE$ (vì $\triangle ACE$ đều).

$$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle ABE \text{ (c - g - c)}.$$

b)



Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a)

$\Rightarrow \angle ABE = \angle ADC$ (hai góc tương ứng)

Ta có: $\angle BKI = \angle AKD$ (đối đỉnh).

$\angle BIK = 180^\circ - \angle BKI - \angle ABE$ (Theo định lý tổng ba góc trong $\triangle BIK$)

$\angle BAK = 180^\circ - \angle AKD - \angle ADC$ (Theo định lý tổng ba góc trong $\triangle DAK$)

$\Rightarrow \angle BIK = \angle BAK = 60^\circ$.

Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow CD = EB$ và $\angle ACD = \angle AEB$

$\Rightarrow CM = EN$ và $\angle ACM = \angle AEN$

Lại có: $AC = AE$ (vì $\triangle ACE$ đều) $\Rightarrow \triangle ACM = \triangle AEN$ (c.g.c)

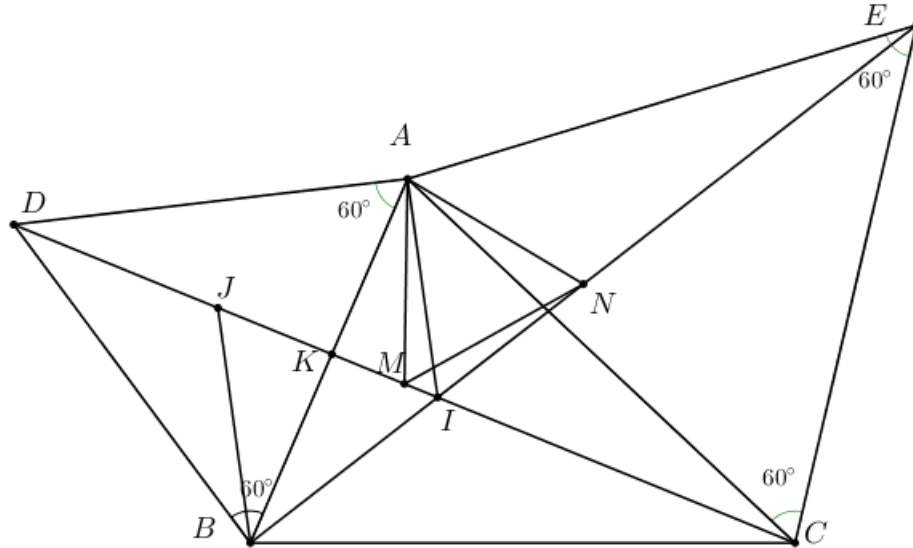
$\Rightarrow AM = AN$ và $\angle CAM = \angle EAN$.

Mặt khác, $\angle MAN = \angle CAM + \angle EAN$; $\angle CAE = \angle EAN + \angle CAN$

$\Rightarrow \angle MAN = \angle CAE = 60^\circ$.

Do đó, $\triangle AMN$ đều. (đpcm).

c)



Trên tia ID lấy điểm J sao cho $IJ = IB$ mà $\angle BIK = 60^\circ$ (cm câu a) $\Rightarrow \triangle BIJ$ đều
 $\Rightarrow BJ = BI$; $\angle JBI = \angle DBA = 60^\circ \Rightarrow \angle JBI - \angle JBA = \angle DBA - \angle JBA \Rightarrow \angle JBA = \angle IBD$,

Ta có: $AD = AB$ (vì $\triangle ABD$ đều).

$\Rightarrow \triangle IBA = \triangle IBD$ (c - g - c) $\Rightarrow \angle AIB = \angle IBD = 120^\circ$ mà $\angle BID = 60^\circ$.

$\Rightarrow \angle DIA = 60^\circ$.

Mà $\angle JIE = 120^\circ \Rightarrow \angle AIE = 60^\circ$.

Hay IA là phân giác của $\angle DIE$.

DẠNG: BÀI TOÁN THỰC TẾ

Câu 1. (HSG 7 quận Hoàng Mai 2022 - 2023)

Ông A chia một khu đất thành 3 mảnh hình chữ nhật có diện tích bằng nhau cho ba người con trai. Biết rằng chiều rộng của các mảnh đất lần lượt là 6 m, 8 m, 10 m. Tổng chiều dài các mảnh đất là 47 m. Tính diện tích khu đất đó.

Lời giải

Gọi chiều dài của 3 mảnh đất lần lượt là x, y, z ($0 < x, y, z < 47$)(m)

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $0 < x < y < z$.

Vì các hình chữ nhật có diện tích bằng nhau nên chiều dài và chiều rộng của mỗi hình chữ nhật ứng với hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Do đó ta có

$$10x = 8y = 6z \Rightarrow \frac{10x}{120} = \frac{8y}{120} = \frac{6z}{120} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{20}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta lại có

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{20} = \frac{x+y+z}{12+15+20} = \frac{47}{47} = 1$$

Suy ra $x=12, y=15, z=20$

Vậy ta có các mảnh đất hình chữ nhật với kích thước như sau

(rộng, dài) $\in \{(6, 20); (8, 15); (10, 12)\}$

Các mảnh đất này có diện tích bằng nhau và bằng $6.20 = 120 \text{ (m}^2\text{)}$

Vậy diện tích khu đất là $3.120 = 420 \text{ (m}^2\text{)}$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>