LỜI NÓI ĐẦU

Thật khó mà phân biệt một cách rạch ròi giữa các loại toán: *Đại số*, *Giải tích*, *Số học*, *Hình học cũng như Tổ hợp*. Tuy nhiên, nếu để ý trong thời gian qua, các bài toán thi học sinh giỏi các cấp nói chung thì hầu như bài toán thuộc loại nào đều tồn tại một lời giải thuộc loại tương ứng cho nó. Vì vậy, nếu nắm được ý này thì việc định hướng tìm lời giải của thí sinh cũng dễ dàng hơn. Trên tinh thần đó, Tôi cũng đã chia các phương pháp giải phương trình hàm ra thành ba dạng: *Phương pháp đại số*, *Phương pháp giải tích và Phương pháp số học*. Trong sáng kiến kinh nghiệm lần này, Tôi lựa chọn ba phương pháp tương đối phổ biến của đại số để giới thiệu đó là: **Chọn giá trị đặc biệt của đối số; Lập phương trình, hệ phương trình để giải** và **Vận dụng tính đơn ánh, toàn ánh của hàm số cũng như việc xem tập xác định, tập giá trị của hàm số ở một khía cạnh khác.**

Theo Tôi, đối với một học sinh giỏi, việc trình bày lại lời giải của một bài toán khi đã biết cách giải không phải là vấn đề khó. Vì vậy, để bài viết không quá dài Tôi chỉ đưa ra cách phân tích tìm lời giải mà không trình bày lời giải chi tiết.

Mặc dù rất nghiêm túc, cố gắng trong quá trình làm sáng kiến kinh nghiệm này nhưng khó tránh khỏi thiếu sót rất mong sự góp ý của đồng nghiệp.

Pleiku, Tháng 03 năm 2011.

Người viết.

Huỳnh Thanh Luân.

NỘI DUNG CÁC PHƯƠNG PHÁP

Phương pháp I: CHỌN GIÁ TRỊ ĐẶC BIỆT CỦA ĐỐI SỐ.

Trước tiên hãy xem cách tìm lời giải của các bài toán sau:

Bài toán 1: Tìm hàm số $f:(0;+\infty)\to\mathbb{R}$, thỏa mãn điều kiện sau:

$$\begin{cases} f(1)=\dfrac{1}{2} \\ f(xy)=f(x)f\left(\dfrac{3}{y}\right)+f(y)f\left(\dfrac{3}{x}\right), \forall x,y>0 \end{cases} \qquad (1)$$

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Trong tính chất đề cho có chứa phép toán nhân và thương giữa hai đối số nên ta sẽ thử chọn một đối số bằng đơn vị của phép nhân.

Chọn $y=1$ ta được một tính chất của hàm:

$$f(x)=f(3)f(x)+f(1)f\left(\frac{3}{x}\right), \forall x>0 \qquad (2)$$

Như vậy ta có nhu cầu tính $f(3), f(1)$.

Từ tính chất (2) của hàm số, khi chọn đối số lần lượt là 3 và 1 ta được:

$$\begin{cases} f(3)=\left[f(3)\right]^2+f(1).f(3) \\ f(1)=f(1).f(3)+\left[f(1)\right]^2 \end{cases}$$

Từ đó ta tính được $f(1)=f(3)=\dfrac{1}{2}$.

Do đó tính chất (2) trở thành:

$$f(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f\left(\frac{3}{x}\right), \forall x>0 \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{x}\right)=f(x), \forall x>0 \qquad (3)$$

Theo tính chất (3) thì tính chất (1) của hàm số trở thành:

$$f(xy)=2f(x)f(y),\forall x,y>0 \Leftrightarrow 2f(xy)=2f(x)2f(y),\forall x,y>0 \qquad (4)$$

Để nhìn cho dễ ta đặt $g:(0;+\infty)\to\mathbb{R};g(x)=2f(x),\forall x>0$. Khi đó hàm $y=g(x)$ có các tính chất sau:

$$\begin{cases} g(xy)=g(x)g(y),\forall x,y>0 \\ g\left(\dfrac{3}{x}\right)=g(x),\forall x>0 \\ g(1)=g(3)=1 \end{cases}$$

Ta có:

$$g\left(x.\frac{3}{x}\right)=g(x)g\left(\frac{3}{x}\right),\forall x>0 \Leftrightarrow 1=\left[g(x)\right]^2,\forall x>0 \Leftrightarrow g(x)=1,\forall x>0$$

Vì hàm nhân tính luôn nhận giá trị không âm.

Đến đây ta đã tìm ra lời giải cho bài toán.

Lưu ý: Dù hàm $y=g(x)$ nhân tính nhưng ta không suy ra được là hàm lũy thừa vì ta chưa có tính liên tục của nó.

Bài toán 2: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, thỏa

$$f\left((x-y)^2\right)=x^2-2yf(x)+\left[f(y)\right]^2,\forall x,y\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Phân tích tìm lời giải:

Từ tính chất của hàm số mà đề cho ta sẽ nghĩ đến việc thử chọn hai đối số bằng nhau. Khi đó ta được tính chất sau.

$$f(0)=\left[f(x)-x\right]^2,\forall x\in\mathbb{R} \qquad (2)$$

Như vậy ta có nhu cầu tính $f(0)$.

Theo tính chất (2) ta có: $f(0)=\left[f(0)\right]^2 \Rightarrow f(0)=1$ hoặc $f(0)=0$

$TH1: f(0)=0$

Từ tính chất (2) ta được $f(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}.$

$TH2: f(0)=1$

Theo tính chất (2) thì với mỗi số thực bất kỳ x thì $\left[f(x)-x\right]^2=1$ tức $f(x)=x\pm 1.$

Ta cần lưu ý rằng kết quả ta tìm được trên chưa xác định hàm số vì với mỗi phần tử nào đó của tập xác định ta vẫn chưa xác định được ảnh của nó. Khi gặp trường hợp này ta giải quyết như sau:

Đầu tiên ta thử xem hai hàm số $\left[\begin{array}{l} f(x)=x+1,\forall x \\ f(x)=x-1,\forall x \end{array}\right.$ có phải là nghiệm của phương trình hay không. Nếu chúng là nghiệm thì ta sẽ đi chứng minh hoặc $f(x)=x+1,\forall x\in\mathbb{R}$ hoặc $f(x)=x-1,\forall x\in\mathbb{R}$ bằng phản chứng. Tức giả sử tồn tại hai số a,b sao cho $\begin{cases} f(a)=a+1 \\ f(b)=b-1 \end{cases}$ rồi đi tìm mâu thuẫn. Còn nếu thấy hàm số nào không phải là nghiệm thì ta sẽ chứng minh không xảy ra trường hợp tương ứng. Ví dụ trong bài này hàm $f(x)=x-1,\forall x\in\mathbb{R}$ không là nghiệm nên ta sẽ chứng minh $f(x)\neq x-1,\forall x\in\mathbb{R}$ bằng phản chứng. Thật vậy, giả sử $\exists t\in\mathbb{R}: f(t)=t-1$ ta có:

Từ tính chất (1) chọn $\begin{cases} x=t \\ y=0 \end{cases}$ thì ta được $f(t^2)=t^2+1$, còn chọn $\begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases}$ thì ta lại có

$$f(t^2)=-2t+\left[f(t)\right]^2=-2t+(t-1)^2=t^2-4t+1.$$

Suy ra $t^2+1=t^2-4t+1\Leftrightarrow t=0$

Như vậy : $1=f(0)=0-1$ (mâu thuẫn).

Đến đây ta đã tìm ra lời giải cho bài toán.

Bài toán 3: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ thỏa

$$\left(f\left(x+y\right)\right)^2=f\left(x\right)f\left(x+2y\right)+yf\left(y\right),\forall x,y\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Từ tính chất của hàm số mà đề cho ta sẽ nghĩ đến việc thử chọn hai đối số đối nhau. Khi đó ta được các tính chất sau.

Trong (1) nếu chọn $\begin{cases}x=t\\y=-t\end{cases}$ với t bất kỳ thì

$$\left(f\left(0\right)\right)^2=f\left(t\right)f\left(-t\right)-tf\left(-t\right),\forall t\in\mathbb{R}. \qquad (2)$$

Còn nếu chọn $\begin{cases}x=-t\\y=t\end{cases}$ với t bất kỳ thì

$$\left(f\left(0\right)\right)^2=f\left(-t\right)f\left(t\right)+tf\left(t\right),\forall t\in\mathbb{R} \qquad (3)$$

Từ đó suy ra

$$tf\left(t\right)=-tf\left(-t\right),\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f\left(-t\right)=-f\left(t\right),\forall t\neq 0 \qquad (4)$$

Và do đó các tính chất (2), (3) được viết lại.

$$\left(f\left(0\right)\right)^2=-f\left(t\right)^2+tf\left(t\right),\forall t\neq 0 \qquad (5)$$

Ta cần tính $f\left(0\right)$. Vì tính chất (5) chỉ đúng với $t\neq 0$ nên để tính $f\left(0\right)$ ta sẽ biến đổi (5) như sau.

$$\left(f\left(t\right)-\frac{t}{2}\right)^2=\frac{t^2}{4}-\left(f\left(0\right)\right)^2,\forall t\neq 0\Rightarrow\frac{t^2}{4}\geq\left(f\left(0\right)\right)^2,\forall t\neq 0\Rightarrow f\left(0\right)=0$$

Và do đó với mỗi số thực bất kỳ $t\neq 0$ thì

$$0=-f\left(t\right)^2+tf\left(t\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(t\right)=0\\f\left(t\right)=t\end{array}\right.$$

Đến đây, giống như đã lưu ý ở phần trước ta sẽ thử và nhận thấy cả hai hàm $f\left(x\right)=0,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(x\right)=x,\forall x\in\mathbb{R}$ đều là nghiệm của phương trình nên ta sẽ chọn cách chứng minh sau.

Giả sử $\exists ab\neq 0:\begin{cases} f(a)=0\\ f(b)=b\end{cases}$.

Theo tính chất (1) nếu chọn $\begin{cases} x=a\\ y=b\end{cases}$ thì ta có

$$\left(f(a+b)\right)^2=b^2\neq 0\Rightarrow f(a+b)=a+b$$

và do đó

$$(a+b)^2=b^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l} a+b=b\\ a+b=-b\end{array}\right.\Rightarrow a=-2b$$

Cũng lại từ (1) nếu chọn $\begin{cases} x=b\\ y=a=-2b\end{cases}$ thì

$$\begin{aligned}&\left(f(-b)\right)^2=f(b)f(-3b)-2bf(-2b)\Rightarrow b^2=-bf(3b)\\ &\Rightarrow f(3b)=-b\neq 0\Rightarrow f(3b)=3b\Rightarrow 3b=-b\Rightarrow b=0\,(><)\end{aligned}$$

Bài toán đã tìm được lời giải.

Bài toán 4: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, thỏa

$$f\left(f(x)+y\right)=f\left(x^2-y\right)+4yf(x),\forall x,y\in\mathbb{R}\qquad (1)$$

Phân tích tìm lời giải:

Do trong tính chất của hàm mà giả thiết cho có dạng "vi phân cấp 2" $\left\{f\left(f(x)+y\right)\right\}$ nên ta thử chọn đối số sao cho hai số hạng $f\left(f(x)+y\right)$ và $f\left(x^2-y\right)$ triệt tiêu.

Ta thấy $f(x)+y=x^2-y\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}\left[x^2-f(x)\right]$, nên với t là một số thực tùy ý theo tính chất (1) chọn $\begin{cases} x=t\\ y=\frac{1}{2}\left[x^2-f(x)\right]\end{cases}$ ta được

$$2\left[t^2 - f(t)\right]f(t) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(t) = 0 \\ f(t) = t^2 \end{array}\right.$$

Cách giải quyết khi gặp tình huống này ta đã biết.

Giả sử: $\exists ab \neq 0 : \begin{cases} f(a) = 0 \\ f(b) = b^2 \end{cases}$. Từ tính chất (1) của hàm số

*) Nếu chọn $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ thì có

$$f\left(f(a) + b\right) = f\left(a^2 - b\right) + 4bf(a)$$

$$\Rightarrow f\left(a^2 - b\right) = b^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow f\left(a^2 - b\right) = \left(a^2 - b\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(a^2 - b\right)^2 = b^2 \rightarrow a^2 = 2b$$

Tức ta có tính chất sau: Nếu $\begin{cases} ab \neq 0 \\ f(a) = 0 \\ f(b) = b^2 \end{cases}$ thì $a^2 = 2b$ (2)

*) Nếu chọn $\begin{cases} x = a \\ y = 2b \end{cases}$ thì có

$$f\left(f(a) + 2b\right) = f\left(a^2 - 2b\right) + 8bf(a)$$

$$\Rightarrow f(2b) = 0$$

Suy ra $\begin{cases} b.(2b) \neq 0 \\ f(2b) = 0 \\ f(b) = b^2 \end{cases}$ theo (2) ta có $(2b)^2 = 2b \Rightarrow b = \dfrac{1}{2}$.

Như vậy ta lại được tính chất mới của hàm số đã cho $\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \\ f(x)=0, \forall x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$.

*) Cũng lại từ (1) nếu chọn $\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=0 \end{cases}$ thì

$$f\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=\text{f}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 0=\frac{1}{4}(><)$$

Bài toán đã tìm được lời giải.

Bài toán 5: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ thỏa

$$f(f(x-y))=f(x)-f(y)+f(x)f(y)-xy, \forall x,y\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

<u>**Phân tích tìm lời giải:**</u>

Cũng có nhận xét tương tự **bài toán 4**, tuy nhiên với giả thiết này Ta không chọn được giá trị của đối số làm cho hai số hạng nào đó triệt tiêu được nên Ta chỉ có thể chọn để xuất hiện các số hạng đặc biệt, rồi sau đó tìm cách tính giá trị hàm tương ứng để chuyển về dạng "vi phân cấp 1".

Chọn hai đối số bằng nhau: $f(f(0))=[f(x)]^2-x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. (2)

Cần tính $f(0)$. Đặt $f(0)=a$ Ta ghi lại tính chất (2)

$$f(a)=[f(x)]^2-x^2, \forall x\in\mathbb{R} \qquad (3)$$

Từ tính chất (3) ta có:

$$*)x=0\to f(a)=a^2 \Rightarrow [f(x)]^2-x^2=a^2, \forall x\in\mathbb{R}$$

$$*)x=a\to[f(a)]^2-a^2=a^2 \Rightarrow a^4-a^2=a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Ta dự đoán rằng $a=0$.

Cũng lại từ (3), $x=a^2 \to \left[f\left(a^2\right)\right]^2-a^4=a^2$, cần tính $f\left(a^2\right)$. Vì $f\left(a^2\right)=f\left(f\left(a\right)\right)$ nên từ (1) ta chọn $\begin{cases} x=a \\ y=0 \end{cases}$. Khi đó,

$$f\left(f\left(a\right)\right)=f\left(a\right)-f\left(0\right)+f\left(a\right)f\left(0\right)\Rightarrow f\left(a^2\right)=a^2-a+a^3$$

Suy ra $\begin{cases} \left(a^2-a+a^3\right)^2=a^4+a^2 \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\pm\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a=0.$

Như vậy, (3) được viết lại, với mỗi số thực x bất kỳ thì

$$\left[f\left(x\right)\right]^2=x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=x \\ f\left(x\right)=-x \end{array}\right. .$$

Cách xử lý tính chất này đã tương đối quen thuộc. Do ta nhận thấy hàm $f\left(x\right)=-x, \forall x\in\mathbb{R}$ không là nghiệm của phương trình nên Ta làm theo hướng.

Giả sử $\exists x_0\in\mathbb{R}: f\left(x_0\right)=-x_0$. Từ (1) có:

$$*)\begin{cases} x=x_0 \\ y=0 \end{cases} \to f\left(-x_0\right)=-x_0.$$

$$*)\begin{cases} x=0 \\ y=x_0 \end{cases} \to f\left(-x_0\right)=-f\left(x_0\right)$$

Suy ra $-x_0=-\left(-x_0\right)\Leftrightarrow x_0=0$. Với những tính chất đã tìm ra thì ta có thể tìm được lời giải cho bài toán.

Tổng kết:

Một cách tương tự như việc biến đổi khi giải "*Phương trình số*" mà Ta đã quen thuộc, nhằm chuyển điều kiện của giả thiết thành các điều kiện đơn giản hơn, thì trong giải *Phương trình hàm*, việc lựa chọn các biến số phù hợp với mục đích từ tính chất của hàm mà đề cho Ta thu được các tính chất khác của hàm đơn giản hơn mà có lợi trong việc tìm ra hàm số.

Hai định hướng chính cho Ta chọn đối số, *một là:* chọn đối số sao cho xuất hiện các giá trị hàm có thể tính được; *hai là*: xuất hiện các số hạng có thể triệt tiêu nhau. Lưu ý rằng việc lựa chọn phải có tính kế thừa, tức là việc chọn đối số sau phải lưu ý dùng kết quả đã chọn trước.

Phương pháp II: LẬP PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH.

Chắc không cần phải chú thích thêm gì vì phương pháp giải bài toán bằng cách lập phương trình và hệ phương trình đã được làm quen với người học toán từ lớp 9, Ta hãy xem phương pháp đó áp dụng trong loại toán này như thế nào qua các bài toán sau:

Bài toán 6: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ thỏa

$$i) f(-x)=-f(x),\forall x\in\mathbb{R}$$
$$ii) f(x+1)=f(x)+1,\forall x\in\mathbb{R}$$
$$iii) f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f(x)}{x^2},\forall x\neq 0.$$

Phân tích tìm lời giải:

Ta tính $f\left(\frac{t+1}{t}\right),\forall t\neq -1;0$ .theo $f(t)$ bằng hai cách.

$$C_1: f\left(\frac{t+1}{t}\right)=f\left(1+\frac{1}{t}\right)=1+f\left(\frac{1}{t}\right)=1+\frac{f(t)}{t^2}$$

$$C_2: f\left(\frac{t+1}{t}\right)=\frac{f\left(\frac{t}{t+1}\right)}{\left(\frac{t}{t+1}\right)^2}=\frac{f\left(1-\frac{1}{t+1}\right)}{\left(\frac{t}{t+1}\right)^2}=\frac{1-f\left(\frac{1}{t+1}\right)}{\left(\frac{t}{t+1}\right)^2}=\frac{1-\frac{f(t+1)}{(t+1)^2}}{\left(\frac{t}{t+1}\right)^2}=\frac{1-\frac{1+f(t)}{(t+1)^2}}{\left(\frac{t}{t+1}\right)^2}$$

Bài toán đã tìm được lời giải.

Bài toán 7: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ thỏa

$$f\left(x^3-y^3\right)=x^2f(x)-y^2f(y),\forall x,y\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

Phân tích tìm lời giải:

Trước tiên ta sẽ dùng phương pháp I để chuyển tính chất của hàm mà đề cho thành các tính chất dễ dùng.

Trong (1), $y=0\to f\left(x^3\right)=x^2f\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}$ và do đó tính chất (1) cũng có thể viết.

$$f\left(x^3-y^3\right)=f\left(x^3\right)-f\left(y^3\right),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

hay

$$f\left(x-y\right)=f\left(x\right)-f\left(y\right),\forall x,y\in\mathbb{R} \qquad (2)$$

Trong (2), $x=y\to f\left(0\right)=0;x=0\to f\left(-y\right)=-f\left(y\right),\forall y\in\mathbb{R}$ và do đó (2) được viết

$$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right),\forall x,y\in\mathbb{R} \qquad (3)$$

Hàm có tính cộng tính nên ta dễ dàng có được

$$f\left(kx\right)=kf\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R},\forall k\in\mathbb{Q}.$$

Bây giờ ta tổng kết lại các tính chất của hàm đã tìm được:

$$\begin{cases} f\left(x^3+y^3\right)=x^2f\left(x\right)+y^2f\left(y\right),\forall x,y\in\mathbb{R}\\ f\left(x^3\right)=x^2f\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}\\ f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right),\forall x,y\in\mathbb{R}\\ f\left(kx\right)=kf\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R},\forall k\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

Với những tính chất đó ta có thể tính $f\left(\left(x-1\right)^3+\left(x+1\right)^3\right)$ theo $f\left(x\right)$ bằng hai cách như sau (việc lựa chọn biểu thức đối số là $\left(x-1\right)^3+\left(x+1\right)^3$ sẽ được giải thích khi xem xong hai cách tính).

Cách 1:

$$f\left(\left(x-1\right)^3+\left(x+1\right)^3\right)=f\left(2x^3+6x\right)=f\left(2x^3\right)+f\left(6x\right)=2x^2f\left(x\right)+6f\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}$$

Cách 2:

$$f\left(\left(x-1\right)^3+\left(x+1\right)^3\right)=f\left(x-1\right)^3+f\left(x+1\right)^3=\left(x-1\right)^2f\left(x-1\right)+\left(x+1\right)^2f\left(x+1\right)$$

$$=\left(x-1\right)^2\left[f\left(x\right)-f\left(1\right)\right]+\left(x+1\right)^2\left[f\left(x\right)+f\left(1\right)\right]=\left(2x^2+2\right)f\left(x\right)+4xf\left(1\right),\forall x\in\mathbb{R}$$

Từ đó ta có:

$$2x^2 f(x) + 6f(x) = (2x^2+2) f(x) + 4xf(1), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(1)x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Ta đã tìm được lời giải cho bài toán.

Lưu ý: *Việc lựa chọn biểu thức đối số để tính như trong hai ví dụ trên xuất phát từ các tính chất của hàm số mà ta có.*

Bài toán 8: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, thỏa

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4, \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Phân tích tìm lời giải:

Tính chất (1) có thể viết

$$(1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4, \forall x \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

Như vậy, với mỗi số thực bất kỳ x ta có hệ.

$$\begin{cases} x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4 \\ (1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4 \end{cases}$$

Định thức của hệ:

$$D = \begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ 1 & (1-x)^2 \end{vmatrix} = (x^2-x-1)(x^2-x+1); D_{f(x)} = (1-x^2)(x^2-x-1)(x^2-x+1)$$

Suy ra, $f(x) = 1-x^2, \forall x \in \mathbb{R}: x^2-x-1 \neq 0$.

Nếu gọi a,b là hai nghiệm của pt $x^2-x-1=0$. Khi đó ta có:

$$f(x) = (1-x^2), \forall x \neq a,b.$$

Để xác định giá trị của hàm tại a,b ta thay nó vào lập hệ để giải. Lưu ý dùng định lý Viete.

$$\begin{cases} x = a \to a^2 f(a) + f(b) = 2a - a^4 \\ x = b \to b^2 f(b) + f(a) = 2b - b^4 \end{cases}$$

Hệ có $D = D_x = D_y$ nên nghiệm của hệ chính là nghiệm của phương trình

$$a^2 f(a) + f(b) = 2a - a^4 \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \\ f(b) = 2a - a^4 - a^2\alpha \end{cases}$$

Bài toán đã tìm được lời giải.

Đến đây chắc ta sẽ đặt câu hỏi là nếu hệ ta lập có định thức $D = 0$, hay nói cách khác là ta không thu thêm được tính chất nào mới khi tiến hành đổi biến thì vấn đề sẽ giải quyết ra sao? Hãy tìm hiểu chúng qua các bài toán tiếp.

Bài toán 9: Tìm hàm số $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, thỏa

$$f\left(\frac{2x-5}{x-2}\right) + f(x) = 3, \forall x \neq 2$$

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Đầu tiên ta sẽ chuẩn hóa, tức làm cho vế phải bằng 0.

$$f\left(\frac{2x-5}{x-2}\right) + f(x) = 3, \forall x \neq 2 \Leftrightarrow f\left(\frac{2x-5}{x-2}\right) - \frac{3}{2} + f(x) - \frac{3}{2} = 0, \forall x \neq 2$$

Nếu xét hàm mới $g(x) = f(x) - \frac{3}{2}, \forall x \neq 2$ thì hàm này có tính chất:

$$g\left(\frac{2x-5}{x-2}\right) + g(x) = 0, \forall x \neq 2$$

Ta lưu ý là dãy $\begin{cases} x_1 = x \neq 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{2x_n - 5}{x_n - 2}, n \geq 1 \end{cases}$ tuần hoàn chu kỳ $n_0 = 2$ nên ta không thu được tính chất mới của hàm từ việc đổi biến. Lúc này ta cần hằng đẳng thức hiển nhiên sau:

$$a + b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}[a - b].$$

Do đó,

$$g\left(\frac{2x-5}{x-2}\right)+g(x)=0,\forall x\neq 2$$

$$\Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{2}\left[g(x)-g\left(\frac{2x-5}{x-2}\right)+\right],\forall x\neq 2$$

Ta sẽ chứng minh

$$g(x)=\frac{1}{2}\left[g(x)-g\left(\frac{2x-5}{x-2}\right)+\right],\forall x\neq 2$$

$$\Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{2}\left[k(x)-k\left(\frac{2x-5}{x-2}\right)+\right],\forall x\neq 2,$$

với $y=k(x)$ là hàm số tùy ý xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Thật vậy.

$\Rightarrow|$ Ta chỉ việc chọn hàm $k(x)=g(x),\forall x\neq 2$

$$\Leftarrow|\ \forall x\neq 2, g(x)-g\left(\frac{2x-5}{x-2}\right)=\frac{1}{2}\left[k(x)-k\left(\frac{2x-5}{x-2}\right)\right]-\frac{1}{2}\left[k\left(\frac{2x-5}{x-2}\right)-k(x)\right]$$

$$=k(x)-k\left(\frac{2x-5}{x-2}\right)=2g(x)$$

Thử một bài toán nữa để tìm câu trả lời.

Bài toán 10: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}\to\mathbb{R}$, thỏa

$$f(\omega(\omega(x)))+f(\omega(x))+f(x)=0,\forall x\neq -1;0,$$

trong đó $\omega(x)=\frac{-1}{x+1},\forall x\neq -1$

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Cũng tương tự như bài toán 9, dãy số tương ứng ở đây $\begin{cases} x_1 = x \neq -1 \\ x_{n+1} = \omega(x_n), n \geq 1 \end{cases}$ là tuần hoàn chu kỳ $n_0 = 3$, nên Ta cũng không giải bài này bằng phương pháp lập hệ. Hãy dùng đẳng thức sau:

$$a + b + c = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}(2a - b - c)$$

Khi đó,

$$f(\omega(\omega(x))) + f(\omega(x)) + f(x) = 0, \forall x \neq -1; 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{3}\left[2f(x) - f(\omega(\omega(x))) - f(\omega(x))\right], \forall x \neq -1; 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{3}\left[2g(x) - g(\omega(\omega(x))) - g(\omega(x))\right], \forall x \neq -1; 0$$

trong đó $y = g(x)$ là hàm số tùy ý xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$.

Hãy chứng minh điều tương đương thứ hai để hiểu cách chọn hằng đẳng thức.

Phương pháp III: VẬN DỤNG TÍNH ĐƠN ÁNH, TOÀN ÁNH CỦA HÀM SỐ; VIẾT LẠI TẬP XÁC ĐỊNH, TẬP GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ DƯỚI DẠNG KHÁC.

Trong loại này ta sẽ tìm những tính chất của hàm mà có thể trả lời hai câu hỏi sau:

*) Có hay không số a sao cho $f(a)=b$ với số b ta muốn nào đó?

*) Một số thực bất kỳ có thể biểu diễn như thế nào thông qua các giá trị của hàm?

Bài toán 11: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ thỏa

$$f\left(f(x)+y\right)=2x+f\left(f(y)-x\right),\forall x,y\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

<u>**Phân tích tìm lời giải:**</u>

Từ giả thiết Ta nhận thấy nếu tồn tại số $a: f(a)=0$, thì trong (1) với việc chọn $x=a$ ta có:

$$f(y)=2a+f\left(f(y)-a\right),\forall y\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f(y)-a=a+f\left(f(y)-a\right),\forall y\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f\left(f(y)-a\right)=\left[f(y)-a\right]-a,\forall y\in\mathbb{R}$$

$\forall y\in\mathbb{R},$ đặt $x=f(y)-a$ thì ta được: $f(x)=x-a.$

Vấn đề bây giờ là liệu có số a như đã yêu cầu. Hơn nữa, việc đặt $x=f(y)-a,\forall y\in\mathbb{R}$ liệu đã quét hết các giá trị trong tập xác định của hàm. Hai thắc mắc đó sẽ được giải quyết nếu hàm là toàn ánh.

Với số thực y bất kỳ ta cần tìm $x\in\mathbb{R}: f(x)=y.$

Để sử dụng được giả thiết của bài toán ta sẽ tìm x ở hai dạng.

Dạng 1: $x=f(\alpha)+\beta$

Khi đó ta có $f(x)=f\left(f(\alpha)+\beta\right)=2\alpha+f\left(f(\beta)-\alpha\right)$

Cần chọn α,β: $\begin{cases} 2\alpha+f\left(f(\beta)-\alpha\right)=y \\ f(\beta)-\alpha=0 \end{cases}$

Hay $\begin{cases} \alpha=\dfrac{y-f(0)}{2} \\ \beta=? \end{cases}$, dạng này không chọn được β.

Dạng 2: $x=f(\alpha)-\beta$

Khi đó, $f(x)=f\left(f(\alpha)-\beta\right)=f\left(f(\beta)+\alpha\right)-2\beta$

Cần chọn α,β: $\begin{cases} f\left(f(\beta)+\alpha\right)-2\beta=y \\ f(\beta)+\alpha=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=\dfrac{f(0)-y}{2} \\ \alpha=-f(\beta) \end{cases}$

Bài toán đã tìm ra được lời giải.

Dấu hiệu 1: Nếu trong đẳng thức thể hiện tính chất của hàm mà tồn tại biến độc lập không phải là đối số của hàm thì có khả năng hàm là song ánh.

Bài toán 12: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, thỏa

$$f\left(x^2+f(y)\right)=xf(x)+y,\forall x,y\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

<u>Phân tích tìm lời giải:</u>

Từ (1) chọn $x=0$ ta được

$$f\left(f(y)\right)=y,\forall y\in\mathbb{R} \qquad (2)$$

Hàm số có tính chất (2) dễ dàng chứng minh là một song ánh.

Xét số $a: f(a)=0$. (tính toàn ánh của hàm số)

Từ (1) Ta có:

*) $\begin{cases} x=0 \\ y=a \end{cases} \to f(0)=a.$

$*)\begin{cases} x=a \\ y=0 \end{cases} \to f\left(a^2+a\right)=0=f\left(a\right) \to a^2+a=a \to a=0.$

$*) y=0 \to f\left(x^2\right)=xf\left(x\right), \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra, với mỗi số thực x thì

$$f\left(x^2\right)=xf\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right).f\left(x\right), \text{ vì } x=f\left(f\left(x\right)\right)$$

$$=f\left(x\right).f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(\left(f\left(x\right)\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2=\left(f\left(x\right)\right)^2, \text{ vì tính đơn ánh của hàm}$$

$$\Leftrightarrow f\left(x\right)=\pm x$$

Việc giải quyết vấn đề này sẽ không nhắc lại tại đây.

Dấu hiệu 2: Nếu $f\left(f\left(x\right)\right)=ax+b, \forall x \in \mathbb{R}$ thì f là song ánh.

Bài toán 13: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ thỏa

$$f\left(x-f\left(y\right)\right)=2f\left(x\right)+x+f\left(y\right), \forall x,y \in \mathbb{R}$$

__**Phân tích tìm lời giải:**__

Trong (1) nếu chọn $y=0$ ta được.

$$f\left(x-a\right)=2f\left(x\right)+x+a, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ ở đây ta ký hiệu } f\left(0\right)=a$$

$$\Leftrightarrow f\left(x-a\right)-2f\left(x\right)=x+a, \forall x \in \mathbb{R}$$

Điều này có nghĩa là với mọi số thực t luôn tồn tại $u,v: f\left(u\right)-2f\left(v\right)=t.$

Hay tập xác định $\mathbb{R}=\left\{f\left(x\right)-2f\left(y\right): x,y \in \mathbb{R}\right\}$. Do vậy mà ta bắt đầu từ:

$$\forall x,y \in \mathbb{R}: f\left(f\left(x\right)-2f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)-f\left(y\right)\right)$$

$$=2f\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)+f\left(x\right)-f\left(y\right)+f\left(y\right)=2f\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)+f\left(x\right)$$

Như vậy yêu cầu đặt ra là phải tính $f\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)$. Ta có:

$$f\left(f(x)-f(y)\right)=2f\left(f(x)\right)+f(x)+f(y)$$

Yêu cầu tiếp theo là tính $f\left(f(x)\right)$.

Trong (1) với việc chọn $x-f(y)=0$ ta được

$f(0)=2f\left(f(y)\right)+f(y)+f(y),\forall y\in\mathbb{R}$, tức $f\left(f(x)\right)=-f(x)+a,\forall x\in\mathbb{R}$

Cuối cùng ta đã tính được

$$f\left(f(x)-2f(y)\right)=-\left[f(x)-2f(y)\right]+2a,\forall x,y\in\mathbb{R}$$

Vì tập $\{f(x)-2f(y):x,y\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$ nên từ đó ta suy ra $f(x)=-x+a,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài toán đã tìm ra lời giải.

Bài toán 14: Tìm hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$, thỏa

$$xf\left(xf(y)\right)=f\left(f(y)\right),\forall x,y>0 \qquad (1)$$

Phân tích tìm lời giải:

Tính chất (1) được viết lại

$$xf\left(xf(y)\right)=f\left(f(y)\right),\forall x,y>0\Leftrightarrow x=\frac{f\left(f(y)\right)}{f\left(xf(y)\right)},\forall x,y>0$$

Tức ta có $(0;+\infty)=\left\{\dfrac{f(u)}{f(v)}:u,v>0\right\}$.

Tương tự bài trước ta lại bắt đầu:

$$\forall x,y>0: f\left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)=\frac{1}{f(x)}f\left(\frac{f(y)}{f(x)}\right).f(x)=f\left(f(y)\right).f(x)$$

Cần tính $f\left(f(y)\right)=\dfrac{1}{f(y)}f(1)=\dfrac{a}{f(y)}$, ở đây ta kí hiệu $a=f(1)$.

Như vậy cuối cùng ta tính được

$$f\left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)=\frac{a}{f(y)/f(x)},\forall x,y>0$$

Suy ra $f(x)=\frac{a}{x},\forall x>0.$ Bài toán đã tìm ra lời giải.

MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài toán 15: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ thỏa

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

Bài toán 16: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ thỏa

$$f(x+yf(x))=f(f(x))+xf(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

Bài toán 17: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ thỏa

$i)\, f(x-f(y))+f(y)=f(x-y),\forall x,y\in\mathbb{R}$

$ii)\, f^{-1}(0)$ là tập hữu hạn.

Bài toán 18: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},$ thỏa

$$\begin{cases} i)\, f(1)=1 \\ ii)\, f\left(\dfrac{1}{x+y}\right)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f\left(\dfrac{1}{y}\right) & ;\forall x,y\in\mathbb{R}:xy(x+y)\neq 0 \\ iii)(x+y)f(x+y)=xyf(x)f(y) \end{cases}$$

Bài toán 19: Tìm hàm số f thỏa một trong các tính chất sau:

$(a)\, 2f(x)+5xf(-x)=4x+3,\forall x\in\mathbb{R}$

$(b)\, xf(x)+2f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=1,\forall x\neq -1$

$(c)\, f\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\dfrac{3+x}{1-x}\right)=x,\forall x\neq \pm 1$

$(d)\, f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=1+x,\forall x\neq 0;1$

Bài toán 20: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ thỏa

$$f\left(xf\left(x\right)+f\left(y\right)\right)=\left(f\left(x\right)\right)^2+y,\forall x,y\in\mathbb{R}$$

Bài toán 21: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ thỏa

$$f\left(x-f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(y\right)\right)+xf\left(y\right)+f\left(x\right)-1,\forall x,y\in\mathbb{R}$$

Bài toán 22: Tìm hàm số $f:\left(0;+\infty\right)\to\left(0;+\infty\right),$ thỏa

$$f\left(\frac{f\left(x\right)}{y}\right)=yf\left(y\right).f\left(f\left(x\right)\right),\forall x,y>0$$

Bài toán 23: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ thỏa

$$f\left(x+f\left(y\right)\right)=\left[f\left(y\right)\right]^2+2xf\left(y\right)+f\left(-x\right),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

Bài toán 24: Tìm hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ thỏa

$$f\left(xf\left(y\right)+x\right)=xy+f\left(x\right),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

KẾT LUẬN

Các phương pháp viết trong sáng kiến này Tôi đã dùng giảng dạy cho đội tuyển học sinh giỏi Toán của trường THPT chuyên Hùng Vương năm 2011. Đa số các em hiểu bài, vận dụng được phương pháp và từ đó tự tin hơn khi gặp các bài toán về phương trình hàm. Hầu hết các em đều giải quyết được các bài toán phương trình hàm trong các kỳ thi chọn đội tuyển của trường và kỳ thi học sinh giỏi cấp Tỉnh vừa qua.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Văn Mậu, *Phương trình hàm*, NXB Giáo dục năm 1999.

2. Nguyễn Trọng Tuấn, *Một số bài toán hàm số qua các kỳ thi Olimpic*, Nhà xuất bản Giáo dục năm 2004.

3. B.J. Venkatachala, *Functional Equations - A problem Solving Approach*, PRISM 2002.

4. Conhiagghin …, *Các đề vô địch Toán các nước*, Nhà xuất bản Hải phòng 1993.

5. Các tạp chí Kvant, Toán học và tuổi trẻ, tư liệu Internet.