

Người làm:

Zalo: Khuong Minh Hao

Email: minh hao76@gmail.com

- số đt zalo: 0982495811

CD11: ĐỒNG DƯ THỨC

Dạng 1. Sử dụng đồng dư thức chứng minh chia hết

A. Trắc nghiệm (nếu có): Không

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Nông Cống 2022 - 2023)

Viết 6 số tự nhiên vào 6 mặt của một con xúc xắc. Chứng tỏ rằng khi ta gieo xúc xắc xuống mặt bàn thì trong 5 mặt có thể nhìn thấy bao giờ cũng tìm được một hay nhiều mặt để tổng các số trên mặt đó chia hết cho 5.

Lời giải

Gọi các số trên mặt là $a_1; a_2; a_3; a_4; a_5$.

Xét 5 tổng:

$$S_1 = a_1; S_2 = a_1 + a_2; S_3 = a_1 + a_2 + a_3; S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4; S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

+ Nếu một trong 5 tổng đó chia hết cho 5 thì bài toán đã giải xong.

+ Nếu không có tổng nào chia hết cho 5 thì tồn tại hai tổng có cùng số dư khi chia cho 5 (vì có 5 tổng mà có 4 số dư khác 0 là 1; 2; 3; 4). Nên hiệu của hai tổng đó chia hết cho 5.

+ Gọi 2 tổng đó là S_m và S_n ($1 \leq m < n \leq 5$) thì $S_m - S_n \vdots 5$ hay

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m \vdots 5$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu 2. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh $a + b + c + d$ chia hết cho 3

Lời giải

$$\text{Ta có } a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3c^3 - 15d^3$$

$$\text{Mà } (3c^3 - 15d^3) \vdots 3 \text{ nên } (a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \vdots 3 \quad (1)$$

$$a \text{ cho } 3 \text{ là } \{0; \pm 1\}$$

Dư trong phép chia

$$\text{Suy ra dư trong phép chia } a^3 \text{ cho } 3 \text{ cũng là } \{0; \pm 1\} \text{ hay } a \equiv a^3 \pmod{3}$$

$$\text{Tương tự ta có } b \equiv b^3 \pmod{3}; c \equiv c^3 \pmod{3}; d \equiv d^3 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow a + b + c + d \equiv a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \pmod{3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a + b + c + d$ chia hết cho 3

Dạng 2. Sử dụng đồng dư thức tìm số dư

Không

Dạng 3. Tìm điều kiện của biến để chia hết

Không

Dạng 4. Sử dụng đồng dư thức tìm chữ số tận cùng

Không

Dạng 5. Sử dụng đồng dư trong bài toán về số chính phương

A. Trắc nghiệm (nếu có): Không

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Quan Sơn 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ biết rằng $2\overline{ab} + 1$ và $3\overline{ab} + 1$ đều là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $2\overline{ab} + 1 = m^2$ và $3\overline{ab} + 1 = n^2$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$)

Nếu $\overline{ab}$ chia cho 5 dư 1 thì $2\overline{ab} + 1$ chia cho 5 dư 3. Điều này là vô lí.

Nếu $\overline{ab}$ chia cho 5 dư 2 thì $3\overline{ab} + 1$ chia cho 5 dư 2. Điều này cũng vô lí.

Nếu $\overline{ab}$ chia cho 5 dư 3 thì $2\overline{ab} + 1$ chia cho 5 dư 2. Đây là điều vô lí.

Nếu $\overline{ab}$ chia cho 5 dư 4 thì $3\overline{ab} + 1$ chia cho 5 dư 3. Điều này là vô lí.

Vậy $\overline{ab} : 5$

Mặt khác do m lẻ nên m^2 chia cho 8 dư 1 suy ra $\overline{ab} : 4$

Nếu $\overline{ab}$ chia cho 8 dư 4 thì $3\overline{ab} + 1$ chia cho 8 dư 5. Điều này là vô lí.

Vậy $\overline{ab} : 8$

Mà $(5; 8) = 1$ nên $\overline{ab} : 40$

Suy ra $\overline{ab} = 40$ hoặc $\overline{ab} = 80$

Thử lại trực tiếp ta có $\overline{ab} = 40$ thỏa mãn.

Dạng 6. Sử dụng đồng dư trong bài toán về số nguyên tố, hợp số

A. Trắc nghiệm (nếu có): Không

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Nông Cống 2022 - 2023)

Cho số nguyên n ($n > 1$) thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố.

Chứng minh n chia hết cho 5.

Lời giải

Với mọi số nguyên n thì n^2 chia cho 5 dư 0; 1 hoặc 4.

+ Nếu n^2 chia 5 dư 1 thì $n^2 = 5k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow n^2 + 4 = 5k + 1 + 4 = (5k + 5) : 5$.

Do đó nên $n^2 + 4$ không là số nguyên tố. Loại trừ trường hợp này.

+ Nếu n^2 chia 5 dư 4 thì $n^2 = 5k + 4$ ($k \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow n^2 + 16 = (5k + 20) : 5$.

Do đó $n^2 + 16$ không là số nguyên tố. Loại trừ trường hợp này.

Vậy $n^2 : 5$, suy ra $n : 5$.

Dạng 7. Sử dụng đồng dư trong bài toán tìm nghiệm nguyên

A. Trắc nghiệm (nếu có): Không

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Thường Xuân, tỉnh Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + x = 3^{2020 \cdot y} + 1$

Lời giải

+) Trường hợp $y < 0$, ta có:

$VP = x^2 + x = x(x+1)$ là số nguyên

$VT = 3^{2020 \cdot y} + 1$ không là số nguyên (vì $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ với $a \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$)

$\Rightarrow$ Trường hợp này loại.

+) Trường hợp $y = 0$, ta có: $x^2 + x = 3^{2020 \cdot 0} + 1$

$$\Rightarrow x(x+1) = 2 = 1 \cdot 2 = (-2)(-1)$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x < x+1 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$

Khi đó: $x = 1$ thì $y = 0$; $x = -2$ thì $y = 0$

+) Trường hợp $y > 0$, ta có:

$VP = x^2 + x = x(x+1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên $x^2 + x$ chia hết cho 3 hoặc chia cho 3 dư 2.

$VT = 3^{2020 \cdot y} + 1$ chia cho 3 dư 1.

$\Rightarrow$ Trường hợp này loại.

Vậy: Cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là: $(1; 0); (-2; 0)$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>