

Câu 1: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 3i| = \sqrt{13}$ và $\frac{z}{z+2}$ là số thuần ảo?

A. Vô số.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Đặt $z = x + yi, |z + 3i| = \sqrt{13} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6y = 4. \quad (1)$

$$\frac{z}{z+2} = \frac{x+yi}{(x+2)+yi} = \frac{x^2+y^2+2x}{(x+2)^2+y^2} + \frac{2yi}{(x+2)^2+y^2}$$

là số thuần ảo khi và chỉ khi:

$$\frac{x^2+y^2+2x}{(x+2)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2x=0 \quad (2)$$

Lấy (1) - (2): $3y - x = 2 \Leftrightarrow x = 3y - 2$ thay vào (1):

$$(3y-2)^2 + y^2 + 6y = 4 \Leftrightarrow 5y^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-\frac{1}{5} \end{cases}$$

Thử lại thấy $z = -2$ không thỏa điều kiện.

Vậy có 1 số phức $z = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$.

Câu 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z+3|=5$ và $|z-2i|=|z-2-2i|$. Tính $|z|$.

A. $|z|=17$.

B. $|z|=\sqrt{17}$.

C. $|z|=\sqrt{10}$.

D. $|z|=10$.

Lời giải

Gọi $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$.

Ta có: $|z+3|=5 \Leftrightarrow |a+bi+3|=5 \Leftrightarrow (a+3)^2 + b^2 = 25$.

Ta lại có:

$$|z-2i|=|z-2-2i| \Leftrightarrow |a+bi-2i|=|a+bi-2-2i|$$

$$\Leftrightarrow a^2 + (b-2)^2 = (a-2)^2 + (b-2)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = (a-2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a-2=a \\ a-2=-a \end{cases} \Leftrightarrow a=1$$

Thế vào $\Rightarrow 16 + b^2 = 25 \Leftrightarrow b^2 = 9$.

Vậy $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 9} = \sqrt{10}$.

Câu 3: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i|=2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo?

A. 0

B. 4

C. 3

D. 2

Lời giải

Gọi số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), vì $(z - 1)^2 = [(x - 1)^2 - y^2] + 2(x - 1)yi$ là số thuần ảo nên

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 = 8 & (1) \\ (x-1)^2 = y^2 & (2) \end{cases}$$

theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$(2) \quad y = \pm(x - 1)$$

Từ suy ra:

• Với $y = x - 1$ (1), thay vào $(x+2)^2 + (x-2)^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Suy ra: $z = -i$.

• Với $y = -(x - 1)$ (1), thay vào (1), ta được:

$$(x+2)^2 + (-x)^2 = 8 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}.$$

$$z = (-1 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})i \quad z = (-1 - \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3})i$$

Suy ra: ;

Vậy có 3 số phức thỏa mãn.

Câu 4: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0$ và $|z| > 1$. Tính $P = a + b$.

A. $P = -1$

B. $P = -5$

C. $P = 3$

D. $P = 7$

Lời giải

Ta có: $z + 2 + i - |z|(1 + i) = 0 \Leftrightarrow a + bi + 2 + i - \sqrt{a^2 + b^2}(1 + i) = 0$

$$\Leftrightarrow a + 2 - \sqrt{a^2 + b^2} + (b + 1 - \sqrt{a^2 + b^2})i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 & (1) \\ b + 1 - \sqrt{a^2 + b^2} = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được: $a - b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = a + 1$. Thế vào (1) ta được:

$$a + 2 - \sqrt{a^2 + (a+1)^2} = 0 \Leftrightarrow a + 2 = \sqrt{2a^2 + 2a + 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ a^2 + 4a + 4 = 2a^2 + 2a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ a^2 - 2a - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ a = 3 \quad (tm) \\ a = -1 \quad (tm) \end{cases}$$

Với $a = 3 \Rightarrow b = 4$; $a = -1 \Rightarrow b = 0$.

$$|z| > 1 \Rightarrow z = 3 + 4i \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow P = a + b = 3 + 4 = 7$$

Vì

Câu 5: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z^2| = 2|z + \bar{z}| + 4$ và $|z - 1 - i| = |z - 3 + 3i|$?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 4|a| + 4 \\ \sqrt{(a-1)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (b+3)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4|a| + 4 \\ a^2 + b^2 - 2a - 2b + 2 = a^2 + b^2 - 6a + 6b + 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4|a| + 4 \\ 4a = 8b + 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2b+4)^2 + b^2 = 4|2b+4| + 4 \\ a = 2b+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b^2 + 16b + 12 = |8b+16| \\ a = 2b+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b+4 \\ \begin{cases} 5b^2 + 16b + 12 = 8b + 16 \\ b \geq -2 \end{cases} \\ \begin{cases} 5b^2 + 16b + 12 = -8b - 16 \\ b < -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b+4 \\ \begin{cases} 5b^2 + 8b - 4 = 0 \\ b \geq -2 \end{cases} \\ \begin{cases} 5b^2 + 24b + 28 = 0 \\ b < -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b+4 \\ b \in \left\{ -\frac{14}{5}; -2; \frac{2}{5} \right\} \end{cases}$$

Vậy có 3 số phức $z_1 = -2i, z_2 = \frac{24}{5} + \frac{2}{5}i, z_3 = -\frac{8}{5} - \frac{14}{5}i$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6: Cho số phức z thỏa mãn $3(\bar{z} - i) - (2 + 3i)z = 7 - 16i$. Môđun của số phức z bằng.

- A.** $\sqrt{5}$ **B.** 5. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 3.

Lời giải

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $3(\bar{z} - i) - (2 + 3i)z = 7 - 16i \Leftrightarrow 3(x - yi - i) - (2 + 3i)(x + yi) = 7 - 16i$

$$\Leftrightarrow 3x - 3yi - 3i - 2x - 2yi - 3xi + 3y = 7 - 16i$$

$$\Leftrightarrow (x + 3y) - (3x + 5y + 3)i = 7 - 16i \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 7 \\ 3x + 5y + 3 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 7 \\ 3x + 5y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Do đó $z = 1 + 2i$. Vậy $|z| = \sqrt{5}$.

Câu 7: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn

của số phức w thỏa mãn $w = \frac{5 + iz}{1 + z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

- A.** 52. **B.** $2\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{11}$. **D.** 44.

Lời giải

Ta có $w = \frac{5 + iz}{1 + z} \Leftrightarrow w(1 + z) = 5 + iz \Leftrightarrow z(w - i) = -w + 5$.

Lấy môđun hai vế ta được $\sqrt{2} \cdot |w - i| = |-w + 5|$

Giả sử $w = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$ ta có $2[x^2 + (y - 1)^2] = (5 - x)^2 + (-y)^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 10x - 4y - 23 = 0.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức w đường tròn có bán kính $R = 2\sqrt{13}$.

Câu 8: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 5 - i) + 2i = (6 - i)z$?

A. 1

B. 3

C. 4

D. 2

Lời giải

$$\text{Ta có } |z|(z - 5 - i) + 2i = (6 - i)z \Leftrightarrow (|z| - 6 + i)z = 5|z| + (|z| - 2)i \quad (1)$$

Lấy môđun hai vế của (1) ta có:

$$\sqrt{(|z| - 6)^2 + 1} \cdot |z| = \sqrt{25|z|^2 + (|z| - 2)^2}$$

Bình phương và rút gọn ta được:

$$|z|^4 - 12|z|^3 + 11|z|^2 + 4|z| - 4 = 0 \Leftrightarrow (|z| - 1)(|z|^3 - 11|z|^2 + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ |z|^3 - 11|z|^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ |z| = 10,9667... \\ |z| = 0,62... \\ |z| = -0,587... \end{cases}$$

Do $|z| \geq 0$, nên ta có $|z| = 1$, $|z| = 10,9667...$, $|z| = 0,62...$. Thay vào (1) ta có 3 số phức thỏa mãn đề bài.

Câu 9: Xét số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$.

B. $|z| > 2$.

C. $|z| < \frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

Lời giải

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}.$$

Ta có

$$(1 + 2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$$

Vậy

$$\Leftrightarrow (|z| + 2) + (2|z| - 1)i = \left(\frac{\sqrt{10}}{|z|^2} \right) \bar{z} \Rightarrow (|z| + 2) + (2|z| - 1)i = \left| \left(\frac{\sqrt{10}}{|z|^2} \right) \bar{z} \right|$$

$$\Rightarrow (|z| + 2)^2 + (2|z| - 1)^2 = \left(\frac{10}{|z|^4} \right) \cdot |z|^2 = \frac{10}{|z|^2}. \quad \text{Đặt } |z| = a > 0.$$

$$\Rightarrow (a + 2)^2 + (2a - 1)^2 = \left(\frac{10}{a^2} \right) \Leftrightarrow a^4 + a^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ a^2 = -2 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow |z| = 1.$$

Câu 10: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z\bar{z}=1$ và $|z - \sqrt{3} + i| = m$. Tìm số phần tử của S .

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

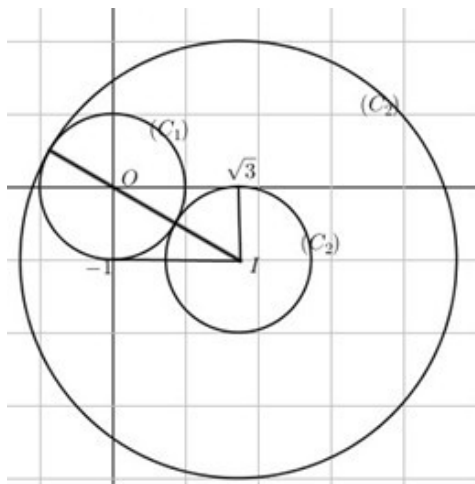
Chọn A.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có hệ
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1(1) \\ (x - \sqrt{3})^2 + (y + 1)^2 = m^2 (m \geq 0) \end{cases}$$

Ta thấy $m = 0 \Rightarrow z = \sqrt{3} - i$ không thỏa mãn $z\bar{z} = 1$ suy ra $m > 0$.

Xét trong hệ tọa độ Oxy tập hợp các điểm thỏa mãn là đường tròn (C_1) có $O(0;0)$, $R_1 = 1$, tập hợp các điểm thỏa mãn là đường tròn (C_2) tâm $I(\sqrt{3}; -1)$, $R_2 = m$, ta thấy $OI = 2 > R_1$ suy ra I nằm ngoài (C_1) .

Để có duy nhất số phức z thì hệ có nghiệm duy nhất khi đó tương đương với (C_1) , (C_2) tiếp xúc ngoài và tiếp xúc trong, điều kiện này xảy ra khi $OI = R_1 + R_2 \Leftrightarrow m + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $R_2 = R_1 + OI \Leftrightarrow m = 1 + 2 = 3$.



Câu 11: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực).

Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 8$?

A. 4.

B. 3

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Trường hợp 1: $z_0 = 8$. Thay vào phương trình ta có:

$$64 - 16(m+1) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 16m + 48 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = 12 \end{cases}$$

Thử lại: $m = 4, m = 12$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $z_0 = -8$. Thay vào phương trình ta có:

$$64 + 16(m+1) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 16m + 80 = 0 \Rightarrow \text{PTVN}$$

Trường hợp 3: $z_0 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$).

Ta phải có $\Delta' = (m+1)^2 - m^2 = 2m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$.

Khi đó hai nghiệm của phương trình sẽ là z_0 và $\overline{z_0}$.

Theo định lí Viet ta có $z_0 \cdot \overline{z_0} = m^2 \Rightarrow m^2 = |z_0|^2 \Rightarrow m = \pm 8$.

Kết hợp với điều kiện $m < -\frac{1}{2} \Rightarrow m = -8$.

Vậy tóm lại có 3 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu của đề ra.

Câu 12: Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m \in S$ có đúng một số phức thỏa mãn

$|z+1-i|=m$ và $\frac{z}{z-2}$ là số thuần ảo. Tính tổng bình phương tất cả các phần tử của S

A. $2\sqrt{5}$

B. 21

C. 12

D. 22

Lời giải

Điều kiện: $z \neq 2$

Dễ thấy trường hợp $m \leq 0$ không thỏa mãn, do đó ta chỉ cần xét trường hợp $m > 0$.

Gọi $M(x; y), I(-1; 1), B(2; 0)$ lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức

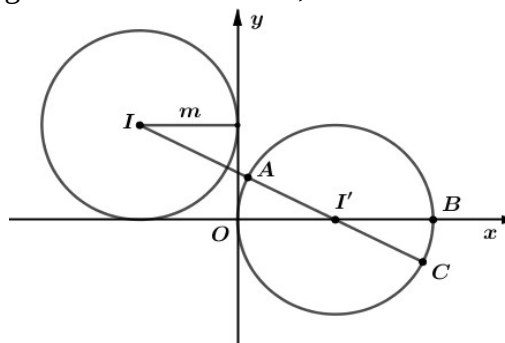
$z = x + yi (x, y \in \mathbb{R}), z_2 = -1 + i; z_1 = 2$.

Suy ra điểm M thuộc đường tròn (T_1) tâm $I(-1; 1)$, bán kính $R_1 = m$.

Lại có $\frac{z}{z-2} = \frac{x+iy}{x-2+iy} = \frac{(x+iy)(x-2-iy)}{(x-2)^2 + y^2} = \frac{x(x-2) + y^2 - 2iy}{(x-2)^2 + y^2}$.

Do đó $\frac{z}{z-2}$ là số thuần ảo khi $x(x-2) + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$.

Suy ra điểm M thuộc đường tròn (T_2) tâm $I'(1; 0)$, bán kính $R_2 = 1$ và bỏ đi điểm B



Tính được $IA = \sqrt{5} - 1; IB = \sqrt{10}; IC = \sqrt{5} + 1$. Suy ra $m \in [\sqrt{5} - 1; \sqrt{10}; \sqrt{5} + 1]$ thỏa mãn yêu cầu

bài toán. Từ đó ta có $T = (\sqrt{5} - 1)^2 + (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{5} + 1)^2 = 22$

Câu 13: Xét các số thực m, n sao cho phương trình $z^2 + m.z + n = 0$ có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa

mãn $|z_1 + 1 - 4i| = 1$ và $|z_2 - 3 + 4i| = 3$. Giá trị của biểu thức $m^2 + n^2$ bằng

A. 256.

B. 16.

C. 234.

D. 255.

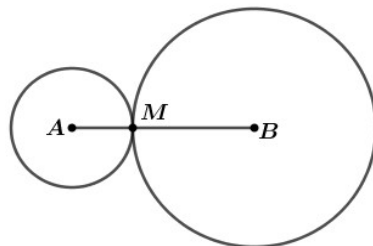
Lời giải

Để thấy trường hợp $\Delta = m^2 - 4n > 0$ không thỏa mãn nên ta chỉ xét trường hợp $\Delta = m^2 - 4n < 0$

Do z_1, z_2 là hai nghiệm phức nên $z_2 = \bar{z}_1$. Suy ra $|z_2 - 3 + 4i| = 3 \Leftrightarrow |z_1 - 3 - 4i| = 3$

Gọi $M(x, y), A(-1; 4), B(3; 4)$ lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức

$z_1 = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$; $-1 + 4i; 3 + 4i$. Suy ra M thuộc giao điểm giữa hai đường tròn (T_1) và (T_2) . Với (T_1) là đường tròn tâm $A(-1; 4)$, bán kính $R_1 = 1$ và (T_2) là đường tròn $B(3; 4)$ bán kính $R_2 = 3$



Ta có $AB = 4 = R_1 + R_2$ suy ra $AM = \frac{1}{4}AB \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow M(0; 4)$

Do đó $z_1 = 4i \Rightarrow z_2 = -4i$. Lại có $\begin{cases} z_1 + z_2 = -m \\ z_1 \cdot z_2 = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ n=16 \end{cases}$ suy ra $m^2 + n^2 = 256$

Câu 14: Có bao nhiêu cặp số thực $(m; n)$ sao cho phương trình $z^2 + m.z + n = 0$ có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 1 - 2i| = 3$ và $|z_2 - 2 + i| = 4$?

A. 6.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

TH1: $\Delta = m^2 - 4n > 0$. Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt z_1, z_2

Lại có $|z_1 - 1 - 2i| = 3 \Leftrightarrow (z_1 - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow z_1 = 1 \pm \sqrt{5}$; $|z_2 - 2 + i| = 4 \Leftrightarrow z_2 = 5 \pm \sqrt{15}$

Với mỗi một cặp giá trị z_1, z_2 ta sẽ tìm được một cặp số thực $(m; n)$. Do đó trường hợp này có tất cả 4 cặp số thực $(m; n)$ thỏa mãn bài toán.

TH2: $\Delta = m^2 - 4n < 0$. Do z_1, z_2 là hai nghiệm phức nên $z_2 = \bar{z}_1$.

Suy ra $|z_2 - 2 + i| = 4 \Leftrightarrow |z_1 - 2 - i| = 4$

Gọi $M(x, y), A(1; 2), B(2; 1)$ lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức

$z_1 = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$; $1 + 2i; 2 + i$. Suy ra M thuộc giao điểm giữa hai đường tròn (T_1) và (T_2) .

Với (T_1) là đường tròn tâm $A(1; 2)$, bán kính $R_1 = 3$ và (T_2) là đường tròn $B(2; 1)$ bán kính $R_2 = 4$

Ta có $AB = \sqrt{2} < R_1 + R_2$ suy ra (T_1) cắt (T_2) tại hai điểm phân biệt. Do đó ta sẽ có hai cặp giá trị z_1, z_2 . Suy ra trường hợp này có 2 cặp số thực $(m; n)$ thỏa mãn bài toán.

Từ hai trường hợp trên ta tìm được tất cả 6 cặp số thực $(m; n)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 15: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2az + b^2 + 2 = 0$ (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a; b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i$?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

TH1: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 - 2 > 0$ nên các nghiệm z_1, z_2 là nghiệm thực.

$$z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 3 \\ z_2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 2a \\ z_1 \cdot z_2 = b^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{4} \\ b = \pm \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

Khi đó

TH2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 - 2 < 0$, khi đó z_1, z_2 là hai nghiệm phức và có $z_1 = \overline{z_2}$.

Đặt $z_1 = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z_2 = x - yi$.

Khi đó $z_1 + 2iz_2 = 3 + 3i \Leftrightarrow (x + yi) + 2i(x - yi) = 3 + 3i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Suy ra } z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - i$$

$$\text{Lại có } \begin{cases} z_1 + z_2 = 2a \\ z_1 \cdot z_2 = b^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Vậy có ba cặp số $(a; b)$ là $(1; 0); \left(-\frac{9}{4}; \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ và $\left(-\frac{9}{4}; -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

Câu 16: Cho phương trình $z^2 - 2mz + 6m - 8 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 thỏa $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$?

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2!

Lời giải

Phương trình $z^2 - 2mz + 6m - 8 = 0$ (*) có biệt số $\Delta' = m^2 - 6m + 8$.

$$\text{Giả thiết } z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2} \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|. \quad (1)$$

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < 2. \end{cases}$$

Xét

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

$$\text{Xét } \Delta' < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 4.$$

Khi đó phương trình (*) có hai nghiệm phức liên hợp với nhau nên (1) luôn đúng.

Mà m nguyên nên $m = 3$.

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 17: Cho phương trình $z^2 - 2(m-2)z + m^2 - 5 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đó có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|^2 + |z_2|^2 \leq 8$?

- A. 5. B. 7. C. 2. D. 1.

Lời giải

Phương trình $z^2 - 2(m-2)z + m^2 - 5 = 0$ (1) có $\Delta = (m-2)^2 - m^2 + 5 = -4m + 9$.

TH1: Phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt, tức là $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}$.

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = 2(m-2) \\ z_1 \cdot z_2 = m^2 - 5 \end{cases}$.

Khi đó $|z_1|^2 + |z_2|^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = 4(m-2)^2 - 2(m^2 - 5) = 2m^2 - 16m + 26$.

Theo bài $|z_1|^2 + |z_2|^2 \leq 8 \Leftrightarrow 2m^2 - 16m + 26 \leq 8 \Leftrightarrow 2m^2 - 16m + 18 \leq 0 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{7} \leq m \leq 4 + \sqrt{7}$.

Vì $4 - \sqrt{7} \leq m \leq 4 + \sqrt{7}$, $m < \frac{9}{4}$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 2$.

TH2: Phương trình (1) có hai nghiệm phức liên hợp, tức là $\Delta < 0 \Leftrightarrow m > \frac{9}{4}$.

Theo bài $|z_1|^2 + |z_2|^2 \leq 8 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_1|^2 \leq 8 \Leftrightarrow |z_1|^2 \leq 4$.

Giả sử $z_1 = m-2 + i\sqrt{4m-9}$ thì $|z_1|^2 = (m-2)^2 + 4m-9 = m^2 - 5$.

Thì $m^2 - 5 \leq 4 \Leftrightarrow m^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 3$.

Vì $-3 \leq m \leq 3$, $m > \frac{9}{4}$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 3$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn YCBT.

Câu 18: Có bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình $4z^2 + 4(m-1)z + m^2 - 3m = 0$ có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = 2$?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 1.

Lời giải

Ta có: $\Delta' = 2(m-1)^2 - 2(m^2 - 3m) = 2m + 2$.

TH1: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$.

Khi đó phương trình có hai nghiệm thực z_1, z_2 .

Ta có $|z_1| + |z_2| = 2 \Leftrightarrow (|z_1| + |z_2|)^2 = 4 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 + 2|z_1 z_2| = 4$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 - 2 \cdot \frac{m^2 - 3m}{4} + 2 \left| \frac{m^2 - 3m}{4} \right| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m \geq 0 \\ (m-1)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3(n) \\ m = -1(n) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m < 0 \\ (m-1)^2 - (m^2 - 3m) = 4 \end{cases} \quad (vn)$$

TH2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -1$.

Khi đó phương trình có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 .

Ta có $|z_1| + |z_2| = 2 \Leftrightarrow 2|z_1| = 2 \Leftrightarrow |z_1| = 1$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-2(m-1) + i\sqrt{-(2m+2)}}{2} \right| = 1 \Leftrightarrow 4(m-1)^2 - 2m - 2 = 2 \Leftrightarrow 4m^2 - 10m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0(l) \\ m = \frac{5}{2}(l) \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 19: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 8m - 12 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$?

- A. 6. B. 4. C. 5. D. 3.

Lời giải

Xét phương trình $z^2 - 2mz + 8m - 12 = 0$ (1) có $\Delta' = m^2 - 8m + 12$.

+) TH1: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 6$.

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm phức z_1, z_2 là hai số liên hợp của nhau nên $|z_1| = |z_2|$.

Vậy $2 < m < 6$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+) TH2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$.

Khi đó phương trình có hai nghiệm thực z_1, z_2 phân biệt mà $|z_1| = |z_2|$
 $\Rightarrow z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Từ hai trường hợp trên kết hợp với $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 3; 4; 5\} \Rightarrow$ có 4 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 20: Cho số phức w và hai số thực a, b . Biết rằng $w + 2i$ và $2w - 1 - 11i$ là hai nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

- A. $P = 28$. B. $P = \frac{1}{9}$. C. $P = 24$. D. $P = -\frac{5}{9}$.

Lời giải

Ta có $w + 2i$ và $2w - 1 - 11i$ là hai nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$ nên

$$2w - 1 - 11i = \overline{w + 2i} \Leftrightarrow 2(x + yi) - 1 - 11i = x - yi - 2i$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1) + (2y - 11)i = x + (-y - 2)i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = x \\ 2y - 11 = -y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Suy ra $z_1 = w + 2i = 1 + 5i$ và $z_2 = 2w - 1 - 11i = 1 - 5i$ là hai nghiệm của phương trình. Theo

$$\text{định lý Vi-ét, ta có } \begin{cases} z_1 + z_2 = -a \\ z_1 \cdot z_2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 26 \end{cases} \Rightarrow a + b = 24$$

Câu 21: Cho m là số thực, biết phương trình $z^2 - 2mz + 9 = 0$ có hai nghiệm z_1, z_2 không phải là số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho $z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} < 16$?

A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Phương trình $z^2 - 2mz + 9 = 0$ (1) có $\Delta' = m^2 - 9$.

Vì phương trình (1) có hai nghiệm phức nên $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

Vì z_1, z_2 là hai số phức liên hợp nên $\overline{z_2} = \overline{z_1} = |z_1| = \sqrt{m^2 + 9 - m^2} = 3$.

Khi đó $z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} < 16 \Leftrightarrow z_1 |z_1| + z_2 |z_1| < 16 \Leftrightarrow |z_1|(z_1 + z_2) < 16$.

Theo định lý Viet ta có $z_1 + z_2 = 2m$.

Suy ra $|z_1|(z_1 + z_2) < 16 \Leftrightarrow 3 \cdot 2m < 16 \Leftrightarrow m < \frac{8}{3}$.

Vì $m < \frac{8}{3}$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 22: Biết phương trình $z^2 + mz + 8 - m^2 = 0$ (m là tham số thực) có hai nghiệm z_1, z_2 . Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 và $z_0 = 2$. Có bao nhiêu giá trị của m để ΔABC đều?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Để tồn tại ΔABC thì z_1, z_2 phải là hai nghiệm không thuần thực của phương trình $z^2 + mz + 8 - m^2 = 0$.

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 32 < 0 \Leftrightarrow m^2 < \frac{32}{5} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{32}{5}} < m < \sqrt{\frac{32}{5}}$$

Suy ra

$$z_{1,2} = \frac{-m \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} \quad A\left(\frac{-m}{2}; \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right), B\left(\frac{-m}{2}; -\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right), C(2; 0)$$

Khi đó

. Suy ra

$$\begin{cases} AB^2 = |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)^2 - 4z_1z_2 = m^2 - 4(8 - m^2) = 5m^2 - 32 \Rightarrow AB = \sqrt{32 - 5m^2} \\ AC = BC = \sqrt{\left(2 + \frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{-4m^2 + 8m + 48} \end{cases}$$

Ta có

Để $\triangle ABC$ đều thì

$$AB = AC \Leftrightarrow \sqrt{32 - 5m^2} = \frac{1}{2}\sqrt{-4m^2 + 8m + 48}$$

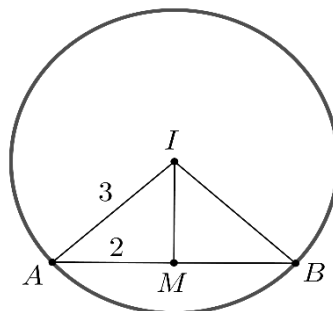
$$\Leftrightarrow 32 - 5m^2 = -m^2 + 2m + 12 \Leftrightarrow -4m^2 - 2m + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{5}{2}(n) \\ m = 2(n) \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị của m để $\triangle ABC$ đều.

Câu 23: Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 2i| = 3$. Xét hai số phức $z_1, z_2 \in S$ thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 4$. Khi z_1, z_2 thay đổi thì điểm biểu diễn số phức $z_1 + z_2$ luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

- A. $\sqrt{5}$. B. $2\sqrt{5}$. C. $2\sqrt{10}$. D. $\sqrt{10}$.

Lời giải



Đặt $z = x + yi$.

$|z + 1 - 2i| = 3 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ (S) là đường tròn tâm $I(-1; 2)$ bán kính $R = 3$.

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là các điểm biểu diễn của số phức $z_1, z_2 \in S$.

$|z_1 - z_2| = 4 \Leftrightarrow AB = 4$. Gọi M là trung điểm của AB , ta có $IM^2 = IA^2 - MA^2 = 9 - 4 = 5$.

Mà $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i = 2x_M + 2y_M i = 2(x_M + y_M i)$. Có M thuộc đường tròn tâm $I(-1; 2)$ bán kính $R_M = \sqrt{5} \Rightarrow z_1 + z_2$ có điểm biểu diễn là những điểm thuộc đường tròn tâm I bán kính $R = 2\sqrt{5}$.

Câu 24: Cho z_1, z_2 là hai số phức khác 0 thỏa mãn $z_1^2 - z_1 \cdot z_2 + z_2^2 = 0$ và $|z_1| = 2$. Giá trị của biểu thức $P = 2|z_2|^2 + 3|z_1 - z_2|$ bằng

- A. 4. B. 15. C. 14. D. 8

Lời giải

Ta có $z_1^3 + z_2^3 = (z_1 + z_2)(z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2) = 0$ nên $z_1^3 = -z_2^3 \Rightarrow |z_1|^3 = |z_2|^3 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = 2$.

Mặt khác $(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2 - z_1 z_2 = -z_1 z_2$ suy ra

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = 4 \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = 2.$$

Do đó $P = 2|z_2|^2 + 3|z_1 - z_2| = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = 14$.

Câu 25: Trên tập số phức, xét phương trình $z^2 + 2mz + m + 1 = 0$ (1) (m là tham số thực thỏa $m^2 - m - 1 < 0$); z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình (1); A, B lần lượt là điểm biểu diễn của hai nghiệm phức đó trên mặt phẳng Oxy . Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để ΔOAB vuông tại O ?

A. 2

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

$$z^2 + 2mz + m + 1 = 0 \quad (1)$$

Có $\Delta' = m^2 - m - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < m < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow (1)$ có hai nghiệm

$$z_1 = -m + i\sqrt{-m^2 + m + 1}; z_2 = -m - i\sqrt{-m^2 + m + 1}$$

Gọi $A(-m; \sqrt{-m^2 + m + 1}); B(-m; -\sqrt{-m^2 + m + 1})$ lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2

$$\Delta OAB \text{ vuông tại } O \Leftrightarrow OA \cdot OB = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1; \quad m = -\frac{1}{2}.$$

Câu 26: Cho số phức $z = m - 2 + (m^2 - 1)i$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi (C) là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của số phức z trong mặt phẳng tọa độ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành bằng

A. $\frac{32}{3}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. 1.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R}). \text{ Ta có: } \begin{cases} x = m - 2 \\ y = m^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x + 2 \\ y = (x + 2)^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow y = x^2 + 4x + 3.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z trong mặt phẳng tọa độ là là đường cong (C) có phương trình: $y = x^2 + 4x + 3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là: $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$.

$$\text{Diện tích hình phẳng cần tìm là: } S = \int_{-3}^{-1} |x^2 + 4x + 3| dx = - \int_{-3}^{-1} (x^2 + 4x + 3) dx = \frac{4}{3}.$$

Câu 27: Có bao nhiêu số nguyên m để tồn tại 2 số phức z thỏa mãn $|z - m + i| = |z - 1 + 2mi|$ và $|z| = \frac{3}{2}$

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Đặt $z = x + yi$. Khi đó $|z| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ (1) và $|z - m + i| = |z - 1 + 2mi|$
 $\Leftrightarrow (x - m)^2 + (y + 1)^2 = (x - 1)^2 + (y - 2m)^2 \Leftrightarrow 2(m - 1)x + 2(2m - 1)y + 3m^2 = 0$ (2).

Để tồn tại hai số phức thỏa mãn bài toán $\Leftrightarrow$ Đường tròn (C) trong (1) và đường thẳng

$$d \text{ trong (2) có hai điểm chung} \Leftrightarrow d(O, d_m) < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3m^2}{\sqrt{4(m-1)^2 + 4(2m-1)^2}} < \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow m^4 < 5m^2 - 6m + 2 \Leftrightarrow (m-1)^2(m^2 + 2m - 2) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 2 < 0 \\ m - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 - \sqrt{3} < m < -1 + \sqrt{3}$$

Do đó $m \in (-2; -1; 0]$.

Câu 28: Biết rằng tập hợp các điểm trên mặt phẳng Oxy biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $3|z + \bar{z}| + 4|z - \bar{z}| = 24$ là hình thoi (H). Diện tích của (H) bằng

A. 48.

B. 24.

C. 16.

D. 32.

Lời giải

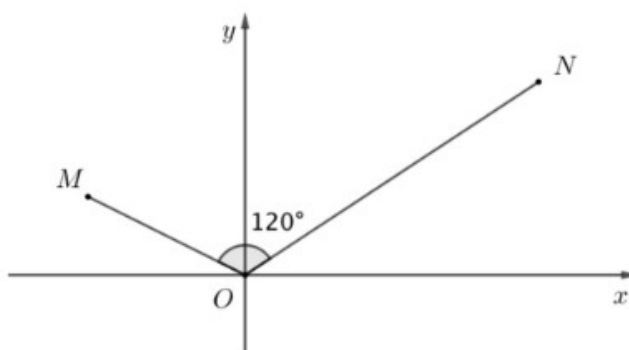
Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Từ điều kiện đề bài ta có: $3|z + \bar{z}| + 4|z - \bar{z}| = 24 \Leftrightarrow 3|x| + 4|y| = 12$

Đây là các cạnh của hình thoi ABCD có các đỉnh là $A(-4; 0); B(0; 3); C(4; 0); D(0; -3)$

Vậy $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 24$

Câu 29: Hai điểm N, M trong hình vẽ bên dưới lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 .



Biết $ON = 2OM = 2\sqrt{5}$. Giá trị của $|z_1^2 + z_2^2|$ bằng

A. $5\sqrt{13}$.B. $5\sqrt{37}$.C. $5\sqrt{21}$.D. $5\sqrt{11}$.

Lời giải

$$\begin{cases} ON = |z_1| = 2\sqrt{5} \\ OM = |z_2| = \sqrt{5} \\ \angle MON = 120^\circ \end{cases}$$

Từ giả thiết ta có:

$$\Rightarrow |z_1 - z_2| = MN = \sqrt{OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cdot \cos \angle MON} = \sqrt{35}$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 2 \\ \left| \frac{z_1}{z_2} - 1 \right| = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_2|} = \sqrt{7} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \frac{z_1}{z_2} = a + bi \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ (a - 1)^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ -2a + 5 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = -1 \pm \sqrt{3}i \Rightarrow |z_1^2 + z_2^2| = |z_2|^2 \left| \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 + 1 \right| = 5 |(-1 \pm \sqrt{3}i)^2 + 1| = 5 |-1 \pm 2\sqrt{3}i| = 5\sqrt{13}$$

Câu 30: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = 1, |z_2| = \sqrt{7}, |z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ và giá trị của $|3z_1 + 2z_2|$ bằng

A. 78.

B. 73.

C. $\sqrt{73}$!

D. $\sqrt{78}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = 2 \hat{=} z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 3$$

$$\text{Khi đó: } |3z_1 + 2z_2| = \sqrt{9|z_1|^2 + 4|z_2|^2 + 12(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)} = \sqrt{9 + 4 \cdot 7 + 12 \cdot 3} = \sqrt{73}$$

Câu 31: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z + 2w| = \sqrt{58}$ và $|z - 2w| = 5\sqrt{2}$. Giá trị của biểu thức $P = \bar{z} \cdot w + z \cdot \bar{w}$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

$$\text{Ta có } |z|^2 = z \cdot \bar{z}, \overline{az_1 + bz_2} = a\bar{z}_1 + b\bar{z}_2 \text{ nên}$$

$$|z + 2w| = \sqrt{58} \Leftrightarrow |z + 2w|^2 = 58 \Leftrightarrow (z + 2w)(\bar{z} + 2\bar{w}) = 58$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 + 2\bar{z} \cdot w + 2z \cdot \bar{w} + 4|w|^2 = 58 \Leftrightarrow |z|^2 + 2P + 4|w|^2 = 58$$

$$\text{Tương tự } |z - 2w| = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow |z - 2w|^2 = 50 \Leftrightarrow |z|^2 - 2P + 4|w|^2 = 50$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} |z|^2 + 2P + 4|w|^2 = 58 \\ |z|^2 - 2P + 4|w|^2 = 50 \end{cases} \Rightarrow 4P = 8 \Rightarrow P = 2$$

Câu 32: Cho số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z + w \neq 0$ và $\frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{6}{z+w}$. Khi đó $\left| \frac{z}{w} \right|$ bằng:

A. 3. B. $\frac{1}{3}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$!

Lời giải

Với hai số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z + w \neq 0$, ta có:

$$\frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{6}{z+w} \Leftrightarrow \frac{w+3z}{zw} = \frac{6}{z+w} \Leftrightarrow (w+3z)(z+w) = 6zw \Leftrightarrow 3z^2 - 2zw + w^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{z}{w}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{w}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z}{w} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i \\ \frac{z}{w} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i \end{cases}$$

Suy ra $\left| \frac{z}{w} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 33: Xét các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2|z_2| = 2$ và $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của $z_1, z_1 + z_2, \frac{2z_1 + z_2}{3}$. Số đo góc $\angle ABC$ bằng

A. 60° . B. 30° . C. 90° . D. 45° .

Lời giải

Từ giả thiết suy ra:

$$AB = |(z_1 + z_2) - z_1| = |z_2| = 1; \quad AC = \left| \frac{2z_1 + z_2}{3} - z_1 \right| = \frac{1}{3}|z_2 - z_1| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$BC = \left| \frac{2z_1 + z_2}{3} - (z_1 + z_2) \right| = \frac{1}{3}|z_1 + 2z_2|$$

Ta có: $3 = |z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) \Rightarrow (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) = 2$

Mặt khác: $|z_1 + 2z_2|^2 = (z_1 + 2z_2)(\overline{z_1} + 2\overline{z_2}) = |z_1|^2 + 4|z_2|^2 + 2(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) = 12$

Suy ra $BC = \frac{1}{3}|z_1 + 2z_2| = \frac{\sqrt{12}}{3}$.

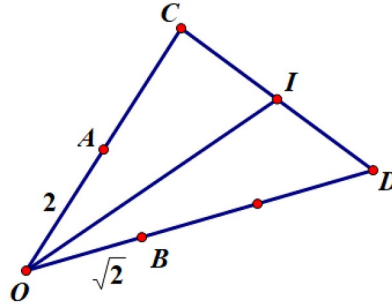
Áp dụng định lý côsin cho tam giác ABC , ta có

$$\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle ABC = 30^\circ$$

Câu 34: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2, |z_2| = \sqrt{2}$. Gọi A và B là các điểm biểu diễn cho z_1 và iz_2 . Biết $\angle AOB = 45^\circ$, hãy tính $S = |4z_1^2 + 9z_2^2|$.

A. $8\sqrt{2}$. B. 8. C. $\sqrt{245}$. D. $2\sqrt{145}$!

Lời giải



Ta có $S = |4z_1^2 + 9z_2^2| = |(2z_1)^2 - (3iz_2)^2| = |2z_1 - 3iz_2| \cdot |2z_1 + 3iz_2|$

Gọi C là điểm biểu diễn số phức $2z_1$ và D là điểm biểu diễn số phức $3iz_2$.

Khi đó ta có $S = |2z_1 - 3iz_2| \cdot |2z_1 + 3iz_2| = |OC - OD| \cdot |OC + OD| = |DC| \cdot |2OI| = 2DC \cdot OI$ với I là trung điểm của CD .

$$CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2OC \cdot OD \cdot \cos \angle COD = 4^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 10 \Rightarrow CD = \sqrt{10}.$$

$$OI^2 = \frac{OC^2 + OD^2}{2} - \frac{CD^2}{4} = \frac{4^2 + (3\sqrt{2})^2}{2} - \frac{10}{4} = \frac{29}{2} \Rightarrow OI = \frac{\sqrt{58}}{2}.$$

Vậy $S = 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{58}}{2} = 2\sqrt{145}$.

Câu 35: Cho $z_1; z_2$ là hai số phức thỏa mãn phương trình $|2z - i| = |2 + iz|$, biết $|z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2|$.

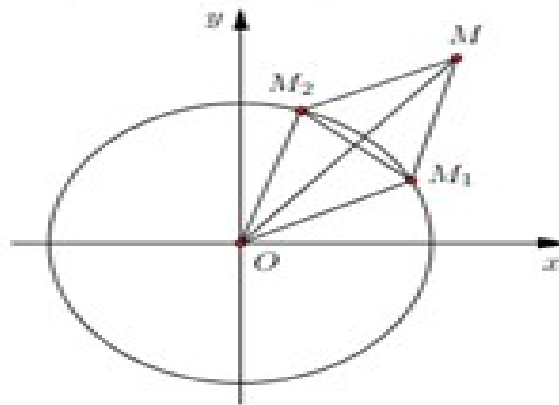
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) ta có $2z - i = 2x + (2y - 1)i$ và $2 + iz = 2 - y + xi$.

$$|2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + (2y - 1)^2} = \sqrt{(y - 2)^2 + x^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow \begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_2| = 1 \end{cases}$$

Khi đó

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 là đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$.

Gọi $M_1(z_1), M_2(z_2) \Rightarrow OM_1 = OM_2 = 1$.

Ta có $|z_1 - z_2| = |OM_1 - OM_2| = |M_2M_1| = 1 \Rightarrow \Delta OM_1M_2$ là tam giác đều.

Mà $|z_1 + z_2| = |OM_1 + OM_2| = |OM| = OM$ với M là điểm thỏa mãn OM_1MM_2 là hình thoi cạnh bằng 1. $\Rightarrow OM = \sqrt{3} \Rightarrow P = \sqrt{3}$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>