

Thời gian làm bài: 150 phút  
(Đề thi có 03 trang)

**I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN: (16 câu; 8,0 điểm)**

**Câu 1.** Cho  $a$  là nghiệm của phương trình  $\sqrt{(x-3)(x-6)} - 4\sqrt{3-x} = 0$  với  $x < 3$ .

Khi đó  $a^2 - a$  bằng

- A. 110. B. 100. C. 90. D. - 110.

**Câu 2.** Số các giá trị hữu tỉ của  $x$  để biểu thức  $B = \frac{\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} + 1}$  nhận giá trị nguyên là

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

**Câu 3.** Đường thẳng  $(d): y = (2 - 2m)x + 8m - 10$  luôn đi qua điểm  $M(x_0; y_0)$  với mọi giá trị của  $m$ . Khi đó biểu thức  $A = x_0^3 + y_0^3$  có giá trị bằng

- A. - 56. B. 56. C. 72. D. - 72.

**Câu 4.** Số các giá trị của  $m$  để phương trình  $x^2 - (m+1)x + m = 0$  có 2 nghiệm phân biệt và nghiệm này bằng một nửa nghiệm kia là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

**Câu 5.** Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba điểm  $A(-2; 3); B(-4; -4); C(5; -1)$ . Kẻ  $AH \perp BC$  tại  $H$ . Tọa độ của điểm  $H$  là

- A.  $\left(\frac{1}{10}; -\frac{28}{10}\right)$ . B.  $(-3; 7)$ . C.  $\left(-\frac{1}{10}; -\frac{27}{10}\right)$ . D.  $(-3; 4)$ .

**Câu 6.** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} mx - 2y = m - 2 \\ (m-1)^2 x - y = m^2 - 1 \end{cases}$ . Tổng tất cả các giá trị nguyên của  $m$  để hệ phương trình đã cho có nghiệm nguyên là

- A. 5. B. 7. C. 8. D. 10.

**Câu 7.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho Parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = mx + 1$  (với  $m$  là tham số) cắt nhau tại  $A$  và  $B$ . Giá trị của  $m$  để đoạn thẳng  $AB$  có độ dài nhỏ nhất là

- A.  $m = -1$ . B.  $m = 2$ . C.  $m = 2\sqrt{2}$ . D.  $m = 0$ .

**Câu 8.** Cho phương trình  $x^2 - 2x + m - 1 = 0$  với  $m$  là tham số. Có bao nhiêu giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt  $x_1; x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = 2m^2 + |m - 3|$ ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

**Câu 9.** Cho hình thang  $ABCD$  có đáy nhỏ  $AB$  và hai cạnh bên vuông góc với nhau. Kẻ  $AH \perp CD (H \in CD)$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A.  $AH^2 = HD \cdot HC$ . B.  $AH^2 = AD \cdot BC$ .

C.  $AH(DC - AB) = AD \cdot BC$ .

D.  $AH \cdot DC = AD \cdot BC$ .

**Câu 10.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Giá trị của  $\sin \angle AMD$  là

A.  $\frac{4}{5}$ .

B.  $\frac{3}{5}$ .

C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

D.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**Câu 11.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 14\text{cm}$ ;  $AC = 35\text{cm}$ , đường phân giác  $AD$  bằng  $12\text{cm}$ . Diện tích của tam giác  $ADC$  là

A.  $588\text{ cm}^2$ .

B.  $440\text{ cm}^2$ .

C.  $84\text{ cm}^2$ .

D.  $168\text{ cm}^2$ .

**Câu 12.** Cho tam giác  $ABC$ , vẽ hình bình hành  $AMON$  sao cho  $M \in AB$ ;  $O \in BC$ ;  $N \in AC$ . Biết  $S_{MOB} = a^2$ ;  $S_{NOC} = b^2$  (đvdt). Diện tích  $S$  của hình bình hành  $AMON$  bằng bao nhiêu?

A.  $S = ab$ .

B.  $S = 2ab$ .

C.  $S = 0,5(a^2 + b^2)$ .

D.  $S = (a^2 + b^2)$ .

**Câu 13.** Cho tứ giác  $ABCD$  ngoại tiếp  $(O; R)$  có  $AB = 130\text{cm}$ ;  $BC = 110\text{cm}$ ;  $AD = 90\text{cm}$ . Khi đó độ dài cạnh  $CD$  là

A.  $60\text{cm}$ .

B.  $70\text{cm}$ .

C.  $80\text{cm}$ .

D.  $100\text{cm}$ .

**Câu 14.** Cho hai đường tròn  $(O; R)$  và  $(O'; r)$  tiếp xúc ngoài tại  $A$  và cùng tiếp xúc với đường thẳng  $d$  lần lượt tại các tiếp điểm  $S$  và  $T$ . Khi đó độ dài  $AT$  bằng

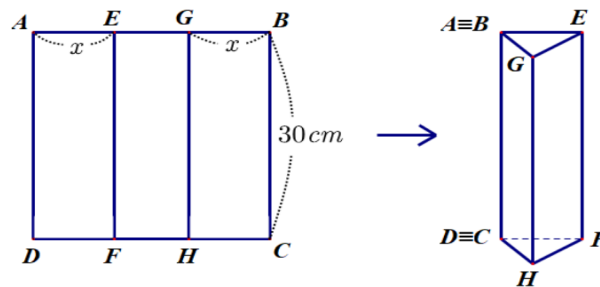
A.  $\frac{2R\sqrt{r}}{\sqrt{R+r}}$ .

B.  $\frac{2r\sqrt{R}}{\sqrt{R+r}}$ .

C.  $\frac{4R^2r}{\sqrt{R+r}}$ .

D.  $\frac{4Rr^2}{\sqrt{R+r}}$ .

**Câu 15.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh là  $30\text{ cm}$ . Trên cạnh  $AB$  lấy hai điểm  $E, G$  sao cho  $AE = BG = x$  (cm) và điểm  $E$  nằm giữa hai điểm  $A$  và điểm  $G$ . Qua  $E$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AB$  cắt  $CD$  tại  $F$ . Qua  $G$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AB$  cắt  $CD$  tại  $H$ . Người ta gấp hình vuông theo hai cạnh  $EF$  và  $GH$  sao cho cạnh  $AD$  trùng với cạnh  $BC$  như hình vẽ để tạo thành hình lăng trụ đứng khuyết đáy. Tìm  $x$  để thể tích hình lăng trụ lớn nhất.



A.  $10\text{ cm}$ .

B.  $3\text{ cm}$ .

C.  $15\text{ cm}$ .

D.  $5\text{ cm}$ .

**Câu 16.** Trong một đề thi có 3 bài toán (bài 1, bài 2, bài 3). Có 25 thí sinh tham gia giải đề, mỗi thí sinh đều đã giải được ít nhất một trong 3 bài toán đó. Biết rằng, trong số thí sinh không giải được bài 1 thì số thí sinh đã giải được bài 2 nhiều gấp hai lần số thí sinh đã giải được bài 3. Số thí sinh chỉ giải được bài 1 nhiều hơn số thí sinh giải được bài 1 và thêm bài khác là một thí sinh. Số thí sinh chỉ giải được bài 1 bằng số thí sinh chỉ giải được bài 2 cộng với số thí sinh chỉ giải được bài 3. Hỏi có bao nhiêu thí sinh chỉ giải được bài 2?

A. 4 thí sinh.

B. 5 thí sinh.

C. 6 thí sinh.

D. 8 thí sinh.



## II. PHẦN TỰ LUẬN: (4 câu; 12,0 điểm)

### Câu 1 (3,0 điểm).

- a) Tìm các số nguyên dương  $x, y$  thỏa mãn  $y^2 + 2y - 3 = x^2 - 3x$ .
- b) Cho hai số tự nhiên  $a, b$  thỏa mãn  $b > a$  và  $(2a - 1)^2 = 12b^2 - 4ab - a^2$ .

Chứng minh rằng:  $6b + a$  là một số chính phương.

### Câu 2 (4,0 điểm).

- a) Cho các số thực  $a; b; c$  thỏa mãn  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 4$ ;

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} = 1 \text{ (với } abc \neq 0; (a+b)(b+c)(c+a) \neq 0).$$

Tính giá trị của biểu thức:  $P = abc$ .

- b) Giải phương trình:  $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = (2 - x)\sqrt[3]{x^4 - x^2}$ .

- c) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x - 12y + 7 = 3x^2 - 6y^2 \\ (y - 3)^5 + (x + 3)^5 = (2x + 1)^5 \end{cases}$$

### Câu 3. (4,0 điểm).

Cho  $(O; R)$  và điểm  $A$  cố định sao cho  $OA = 2R$ , đường kính  $BC$  quay quanh tâm  $O$  sao cho tam giác  $ABC$  là tam giác nhọn. Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  cắt đường thẳng  $OA$  tại điểm thứ hai là  $I$ . Các đường thẳng  $AB, AC$  cắt đường tròn  $(O; R)$  lần lượt tại điểm thứ hai là  $D$  và  $E$ . Gọi  $K$  là giao điểm của  $DE$  với  $OA$ .

- a) Chứng minh rằng  $AK \cdot AI = AE \cdot AC$ .
- b) Tính độ dài đoạn thẳng  $AK$  theo  $R$ .
- c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ADE$  luôn thuộc một đường cố định khi đường kính  $BC$  quay quanh tâm  $O$  sao cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn là tam giác nhọn.

### Câu 4 (1,0 điểm).

Với  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $ab + bc + ca + abc = 2$ .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:  $M = \frac{a+1}{a^2+2a+2} + \frac{b+1}{b^2+2b+2} + \frac{c+1}{c^2+2c+2}$ .

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh:.....SBD:.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.



I. Một số chú ý khi chấm bài tự luận.

- Hướng dẫn chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm thi giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.
- Thí sinh làm bài theo cách khác với hướng dẫn chấm mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của hướng dẫn chấm.
- Điểm bài thi là tổng điểm các câu không làm tròn số.

### III. Đáp án – Thang điểm.

#### Phần I. TRẮC NGHIỆM (8,0 điểm).

Mỗi câu trắc nghiệm đúng được 0,5 điểm

| Câu  | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 12  | 13  | 14  | 15  | 16  |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Đ Án | A   | C   | B   | C   | C   | C   | D   | C   | C   | A   | D   | B   | B   | B   | A   | C   |
| Điểm | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |

#### Phần II. TỰ LUẬN (12,0 điểm).

| Câu                                 | NỘI DUNG                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Điểm       |
|-------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Câu 1</b><br><br><b>3,0 Điểm</b> | a) Tìm các số nguyên dương $x, y$ thỏa mãn $y^2 + 2y - 3 = x^2 - 3x$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <b>1,5</b> |
|                                     | PT $\Leftrightarrow 4y^2 + 8y - 12 = 4x^2 - 12x \Leftrightarrow (2y+2)^2 - (2x-3)^2 = 7$<br>$\Leftrightarrow (2y+2x-1)(2y-2x+5) = 7$                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,5        |
|                                     | Với $x, y$ nguyên dương thì $2y+2x-1 > 0$ .<br>Nên ta có $\begin{cases} 2y+2x-1=1 \\ 2y-2x+5=7 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2y+2x-1=7 \\ 2y-2x+5=1 \end{cases}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0,5        |
|                                     | Trường hợp 1: $\begin{cases} 2y+2x-1=1 \\ 2y-2x+5=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-6=-6 \\ 2y+2x-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ (loại).<br>Trường hợp 2: $\begin{cases} 2y+2x-1=7 \\ 2y-2x+5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-6=6 \\ 2y+2x-1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ (TM).<br>Vậy phương trình có nghiệm là $(x; y) = (3; 1)$ . | 0,5        |
|                                     | b) Cho hai số tự nhiên $a, b$ thỏa mãn $b > a$ và $(2a-1)^2 = 12b^2 - 4ab - a^2$ .<br>Chứng minh rằng: $6b+a$ là một số chính phương.                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <b>1,5</b> |
|                                     | Ta có $(2a-1)^2 = 12b^2 - 4ab - a^2 \Leftrightarrow (2a-1)^2 = (2b-a)(6b+a)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0,25       |
|                                     | Vì $(2a-1)^2$ là số chính phương lẻ nên $2b-a; 6b+a$ là các số tự nhiên $\Rightarrow a$ lẻ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,25       |
|                                     | Gọi $d = (2b-a; 6b+a)$ với $d \in \mathbb{N}^* \Rightarrow d$ lẻ.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0,25       |

|                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |      |
|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>Câu<br/>2<br/>4,0<br/>Điểm</b> | Suy ra $\begin{cases} 2b - a : d \\ 6b + a : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6b - 3a : d \\ 6b + a : d \end{cases} \Rightarrow 4a : d$                                                                                                                                                                                                 | 0,25 |
|                                   | Mặt khác $\begin{cases} 2b - a : d \\ 6b + a : d \end{cases} \Rightarrow (2b - a)(6b + a) : d^2$<br>suy ra $(2a - 1)^2 : d^2 \Rightarrow 2a - 1 \Rightarrow 4a - 2 : d \Rightarrow 4a - (4a - 2) : d \Rightarrow 2 : d \Rightarrow d \in \{1; 2\}$<br>Mà $d$ lẻ nên $d = 1$ . Hay $(2b - a; 6b + a) = 1$ .                                     | 0,25 |
|                                   | Từ đó suy ra $2b - a; 6b + a$ đều là số chính phương.<br>Vậy $6b + a$ là một số chính phương.                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,25 |
|                                   | a) Cho các số thực $a; b; c$ thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 4$ ;<br>$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} = 1$ (với $abc \neq 0; (a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$ ).<br>Tính giá trị của biểu thức $P = abc$ .                                                            | 1,0  |
|                                   | Ta có<br>$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 4 \Rightarrow \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 = 7$<br>$\Rightarrow (a+b+c) \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) = 7$                                                                                                               | 0,25 |
|                                   | Suy ra $a+b+c = 7$ (1) (vì $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} = 1$ )<br>Mặt khác từ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 4 \Rightarrow ab+bc+ca = 4abc$ (2)                                                                                                                                                                  | 0,25 |
|                                   | Ta lại có $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} = 1$<br>$\Rightarrow (a+b)(b+c) + (b+c)(c+a) + (c+a)(a+b) = (a+b)(b+c)(c+a)$<br>Hay $a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3bc + 3ca = (a+b)(b+c)(c+a)$<br>$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 + ab + bc + ca = (a+b)(b+c)(c+a)$<br>$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 + ab + bc + ca = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$ (3) | 0,25 |
|                                   | Từ (1); (2) và (3) suy ra $7^2 + 4abc = 7 \cdot 4abc - abc \Rightarrow 23abc = 49 \Rightarrow abc = \frac{49}{23}$                                                                                                                                                                                                                             | 0,25 |
|                                   | b) Giải phương trình: $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = (2-x)\sqrt[3]{x^4 - x^2}$ (*)                                                                                                                                                                                                                                                                     | 1,5  |
|                                   | PT (*) $\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 4x - x + 2 = (2-x)\sqrt[3]{x^4 - x^2}$<br>$\Leftrightarrow x(x-2)^2 - (x-2) + (x-2)\sqrt[3]{x^4 - x^2} = 0$<br>$\Leftrightarrow (x-2) \left( x^2 - 2x - 1 + \sqrt[3]{x^4 - x^2} \right) = 0$                                                                                                              | 0,25 |
|                                   | TH1: $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,25 |
|                                   | TH2: $x^2 - 2x - 1 + \sqrt[3]{x^4 - x^2} = 0$<br>Ta có $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.<br>Với $x \neq 0$ chia cả 2 vế của phương trình cho $x$ ta được:<br>$x - \frac{1}{x} - 2 + \sqrt[3]{x - \frac{1}{x}} = 0$ .                                                                                                                   | 0,25 |

|                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |      |
|------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|                                    | <p>Đặt <math>\sqrt[3]{x - \frac{1}{x}} = y</math> ta có PT: <math>y^3 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y^2 + y + 2) = 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \quad \left( \text{Do } y^2 + y + 2 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} &gt; 0 \right)</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0,5  |
|                                    | <p>Với <math>y = 1 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad (TM)</math></p> <p>Vậy tập nghiệm của phương trình là <math>S = \left\{ 2; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 0,25 |
|                                    | <p>c) Giải hệ phương trình <math>\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x - 12y + 7 = 3x^2 - 6y^2 &amp; (1) \\ (y - 3)^5 + (x + 3)^5 = (2x + 1)^5 &amp; (2) \end{cases}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 1,5  |
|                                    | <p>Từ PT(1) ta có <math>(x - 1)^3 = (y - 2)^3 \Leftrightarrow x - 1 = y - 2 \Leftrightarrow y = x + 1 \quad (3)</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,25 |
|                                    | <p>Thay (3) vào (2) ta được pt: <math>(x + 1 - 3)^5 + (x + 3)^5 = (2x + 1)^5</math></p> <p><math>\Rightarrow (x - 2)^5 + (x + 3)^5 = (2x + 1)^5 \quad (*)</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 0,25 |
|                                    | <p>Đặt <math>a = x - 2; b = x + 3 \Rightarrow a + b = 2x + 1</math> thay vào (*) ta được</p> <p><math>a^5 + b^5 = (a + b)^5</math></p> <p><math>\Leftrightarrow a^5 + b^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5</math></p> <p><math>\Leftrightarrow 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 = 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow 5ab(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3) = 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow 5ab[(a + b)^3 - ab(a + b)] = 0</math></p> <p><math>\Leftrightarrow 5ab(a + b)(a^2 + ab + b^2) = 0</math></p>                                                                                                                                                                                                                                             | 0,5  |
|                                    | <p>+) Với <math>a = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2</math> suy ra <math>y = 2 + 1 = 3</math>.</p> <p>+) Với <math>b = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3</math> suy ra <math>y = -3 + 1 = -2</math>.</p> <p>+) Với <math>a + b = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}</math> suy ra <math>y = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}</math>.</p> <p>+) Với <math>a^2 + ab + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow x - 2 = x + 3 = 0</math> (vô lí).</p> <p>Vậy <math>S = \left\{ (2; 3); (-3; -2); \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \right\}</math></p>                                                                                                                                                                                | 0,5  |
| <p><b>Câu 3</b><br/><b>4,0</b></p> | <p>Cho <math>(O; R)</math> và điểm <math>A</math> cố định sao cho <math>OA = 2R</math>, đường kính <math>BC</math> quay quanh tâm <math>O</math> sao cho tam giác <math>ABC</math> là tam giác nhọn. Đường tròn ngoại tiếp tam giác <math>ABC</math> cắt đường thẳng <math>OA</math> tại điểm thứ hai là <math>I</math>. Các đường thẳng <math>AB, AC</math> cắt đường tròn <math>(O; R)</math> lần lượt tại điểm thứ hai là <math>D</math> và <math>E</math>. Gọi <math>K</math> là giao điểm của <math>DE</math> với <math>OA</math>.</p> <p>a) Chứng minh rằng <math>AK \cdot AI = AE \cdot AC</math>.</p> <p>b) Tính độ dài đoạn thẳng <math>AK</math> theo <math>R</math>.</p> <p>c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác <math>ADE</math> luôn thuộc một</p> | 4,0  |



|                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |            |
|-----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
|                                   | tiếp tam giác $ADE$ luôn thuộc đường trung trực của đoạn thẳng $AF$ cố định.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |            |
| <b>Câu<br/>4<br/>1,0<br/>Điểm</b> | Với $a, b, c$ là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 2$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{a+1}{a^2+2a+2} + \frac{b+1}{b^2+2b+2} + \frac{c+1}{c^2+2c+2}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <b>1,0</b> |
|                                   | <p>Ta có: <math>ab + bc + ca + abc = 2 \Leftrightarrow (a+1)(b+1)(c+1) = (a+1) + (b+1) + (c+1)</math></p> <p><math>\Leftrightarrow \frac{1}{(a+1)(b+1)} + \frac{1}{(b+1)(c+1)} + \frac{1}{(c+1)(a+1)} = 1</math> vì <math>a, b, c &gt; 0</math></p> <p><math>M = \frac{a+1}{(a+1)^2+1} + \frac{b+1}{(b+1)^2+1} + \frac{c+1}{(c+1)^2+1} = \frac{\frac{1}{a+1}}{1+\frac{1}{(a+1)^2}} + \frac{\frac{1}{b+1}}{1+\frac{1}{(b+1)^2}} + \frac{\frac{1}{c+1}}{1+\frac{1}{(c+1)^2}}</math></p> <p>Đặt <math>\frac{1}{a+1} = x; \frac{1}{b+1} = y; \frac{1}{c+1} = z</math></p> <p>Khi đó : <math>xy + yz + zx = 1</math> và <math>M = \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2}</math></p> | 0,25       |
|                                   | <p>Ta có: <math>1+x^2 = xy + yz + zx + x^2 = (x+z)(x+y)</math></p> <p>Tương tự <math>1+y^2 = (y+x)(y+z); 1+z^2 = (z+x)(z+y)</math></p> <p>Khi đó</p> <p><math>M = \frac{x}{(x+y)(z+x)} + \frac{y}{(x+y)(y+z)} + \frac{z}{(z+x)(y+z)} = \frac{x(y+z) + y(z+x) + z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}</math></p> <p><math>M = \frac{2(xy + yz + zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{2}{(x+y)(y+z)(z+x)}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0,25       |
|                                   | <p>Dễ dàng chứng minh được <math>(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz</math></p> <p><math>\Rightarrow 9(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8(x+y)(y+z)(z+x) + 8xyz</math></p> <p><math>\Leftrightarrow 9(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8(x+y+z)(xy + yz + zx)</math></p> <p><math>\Leftrightarrow 9(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8(x+y+z)</math>. (vì <math>xy + yz + zx = 1</math>)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0,25       |
|                                   | <p>Mặt khác: <math>(x+y+z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \Rightarrow (x+y+z)^2 \geq 3 \Leftrightarrow x+y+z \geq \sqrt{3}</math></p> <p><math>\Rightarrow 9(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8\sqrt{3} \Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x) \geq \frac{8\sqrt{3}}{9}</math></p> <p><math>\Rightarrow \frac{1}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{9}{8\sqrt{3}}</math></p> <p><math>\Rightarrow M = \frac{2}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{18}{8\sqrt{3}} = \frac{9}{4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}</math></p> <p>Dấu "=" xảy ra <math>\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{3} - 1</math></p>                                                                                        | 0,25       |

.....**Hết**.....

**Hướng dẫn Câu 16:**

Gọi  $a$  số thí sinh chỉ giải được bài 1,  $b$  là số thí sinh chỉ giải được bài 2,  $c$  là số thí sinh chỉ giải được bài 3,  $d$  là số thí sinh giải được 2 bài bài 2 và bài 3 nhưng không giải được bài 1. Khi đó số thí sinh giải được bài 1 và thêm ít nhất một bài trong hai bài còn lại (bài 2 và bài 3) là:

$$25 - a - b - c - d$$

Từ giả thiết ta có  $b + d = 2(c + d)$ ;  $a = 1 + 25 - a - b - c - d$  và  $a = b + c$ .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} 4b + c = 26 \\ d = b - 2c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 7 \\ 8b + 2c = 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 7 \\ 52 < 9b \end{cases} \Rightarrow b = 6; c = 2$$

Đáp số 6 thí sinh