BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA LỚP 12 THPT NĂM 2009**

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Câu 1. Điều kiện xác định của hệ phương trình: $0 \le x, y \le \dfrac{1}{2}$. (*)

Nhận xét: Với điều kiện (*), ta có

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+2xy}}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Chứng minh: Theo bất đẳng thức Bu-nhia-côp-xki, ta có

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\right)^2 \le 2\left(\frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2}\right) \qquad (1)$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ $\sqrt{1+2x^2} = \sqrt{1+2y^2}$ $\Leftrightarrow$ $x = y$ (do $x, y \ge 0$).

Tiếp theo, ta có

$$\frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2} - \frac{2}{1+2xy} = \frac{2(y-x)^2(2xy-1)}{(1+2xy)(1+2x^2)(1+2y^2)} \le 0 \quad \text{(do (*))}$$

Suy ra: $$\frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2} \le \frac{2}{1+2xy} \qquad (2)$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ $x = y$.

Từ (1) và (2), ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời xảy ra dấu " = " ở (1) và (2) $\Leftrightarrow$ $x = y$.

Từ Nhận xét suy ra hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} x = y \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \dfrac{2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = \dfrac{9-\sqrt{73}}{36} \\ x = y = \dfrac{9+\sqrt{73}}{36} \end{array}\right.$$

Vậy, hệ phương trình đã cho có tất cả 2 nghiệm là hai cặp số (x ; y) vừa nêu trên. ■

Chú ý: Có thể chứng minh rằng với $x, y \in [0; 1/2]$, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với phương trình $x = y$, bằng cách khảo sát hàm số f dưới đây trên đoạn $[0; 1/2]$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} - \frac{2}{\sqrt{1+2xy}},$$

trong đó y được coi là một điểm cố định thuộc đoạn $[0; 1/2]$.

Câu 2. Từ định nghĩa dãy (x_n) dễ thấy $x_n > 0 \quad \forall n \ge 1$. (1)

Viết lại hệ thức xác định dãy (x_n) dưới dạng:

$$2x_n - x_{n-1} = \sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} \qquad \forall n \ge 2.$$

Từ đó suy ra: $x_{n-1} = x_n^2 - x_n x_{n-1} \quad \forall n \ge 2$.

Dẫn tới: $\dfrac{1}{x_n^2} = \dfrac{1}{x_{n-1}} - \dfrac{1}{x_n} \quad \forall n \ge 2$ (do $x_n \ne 0 \ \forall n \ge 2$, theo (*)). (2)

Vì thế, với mọi $n \ge 2$, ta có

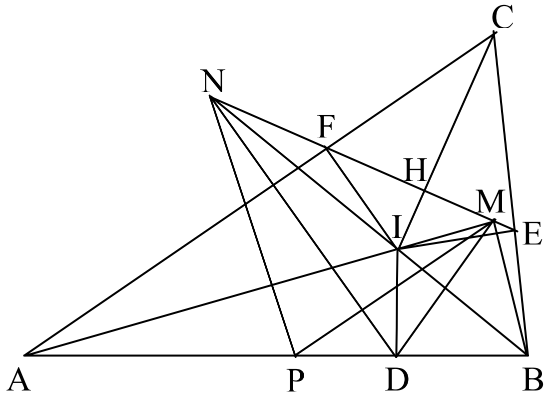
$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} = \frac{1}{x_1^2} + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right) = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_n} = 6 - \frac{1}{x_n}.$$

Từ (2) và (1) dễ dàng suy ra $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ là một dãy giảm, bị chặn dưới bởi 0. Do đó, $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ là dãy hội tụ và từ (2) ta được $\lim \frac{1}{x_n} = 0$. Suy ra (y_n) là dãy hội tụ và $\lim y_n = 6$. ■

Câu 3. 1/ Xét tam giác *AFM*, ta có:

$$\widehat{AMF} = 180^0 - \left(\widehat{MFA} + \widehat{FAM}\right) = 90^0 - \left(\widehat{EFI} + \widehat{FAM}\right) = 90^0 - \left(\widehat{ECI} + \widehat{FAM}\right)$$

$$= 90^0 - \left(\frac{\widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2}\right) = \frac{\widehat{B}}{2} = \widehat{IBA}.$$



Lại có: $\widehat{NIM} = \widehat{AIB}$ (đối đỉnh).

Suy ra: $\Delta IMN \sim \Delta IBA$. (*)

Vì thế, hạ $IH \perp MN$, ta được:

$$\frac{MN}{BA} = \frac{IH}{ID} = \frac{IH}{IF} = \sin\widehat{EFI} = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Do đó: $MN = BA.\sin\frac{\alpha}{2} = \text{const}.$

2/ Dễ thấy các điểm *F* và *D* đối xứng với nhau qua đường thẳng *AM*. Kết hợp điều này với (*), ta được: $\widehat{IMD} = \widehat{IBD}$. Do đó, tứ giác *IMBD* là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{BMA} = 90^0$, hay tam giác *BMA* vuông tại *M*. Vì thế, gọi *P* là trung điểm của *AB*, ta có $\widehat{BPM} = 2\widehat{BAM} = \widehat{BAC}$.

Do các điểm *E* và *D* đối xứng với nhau qua đường thẳng *BN* nên với lưu ý tới (*) ta được:

$$\widehat{MND} = 2\widehat{INM} = 2\widehat{IAB} = \widehat{BAC}.$$

Vì thế, ta có $\widehat{BPM} = \widehat{MND}$. Suy ra, bốn điểm *M*, *N*, *D*, *P* cùng nằm trên một đường tròn. Điều đó chứng tỏ đường tròn ngoại tiếp ΔDMN luôn đi qua điểm cố định *P* - trung điểm của đoạn thẳng *AB*.

Câu 4. Với mỗi số nguyên dương *n*, đặt $T_n = a^n + b^n + c^n$. Theo giả thiết, $T_n \in \mathbb{Z}$ $\forall n \geq 1$.

Ta sẽ chứng minh các số $p = -(a+b+c)$, $q = ab+bc+ca$ và $r = -abc$ thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Thật vậy, theo định lí Vi-et đảo, các số *a*, *b*, *c* là 3 nghiệm của phương trình

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

Hơn nữa, do $p = -T_1$ nên $p \in \mathbb{Z}$. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $q, r \in \mathbb{Z}$.

Dễ thấy, ta có các biểu diễn dưới đây của T_n qua *p*, *q*, *r* :

$$T_1 = -p$$

$$T_2 = p^2 - 2q \quad (1)$$

$$T_3 = -p^3 + 3pq - 3r \quad (2)$$

$$T_{n+3} = -pT_{n+2} - qT_{n+1} - rT_n \quad \forall n \geq 1. \quad (3)$$

Do $T_2, p \in \mathbb{Z}$ nên từ (1) suy ra $2q \in \mathbb{Z}$. (4)

Từ (2) suy ra $2pT_3 = -2p^4 + 6p^2q - 6pr.$

Từ đó, với lưu ý tới (4), dễ dàng suy ra $6pr \in \mathbb{Z}$. (5)

Ở (3), cho $n = 1$ ta được: $T_4 = -pT_3 - qT_2 - rT_1 = p^4 - 4p^2q + 4pr + 2q^2.$

Suy ra $3T_4 = 3p^4 - 12p^2q + 12pr + 6q^2.$

Từ đó, với lưu ý tới (4) và (5), suy ra $6q^2 \in \mathbb{Z}$. Kết hợp với (4), ta được $q \in \mathbb{Z}$.

Vì thế, từ (2) suy ra $3r \in \boldsymbol{Z}$. Do đó r phải có dạng: $r = \dfrac{m}{3}, m \in \boldsymbol{Z}$. (6)

Mặt khác, từ (3) ta có: $rT_n \in \boldsymbol{Z} \quad \forall n \geq 1$. Kết hợp với (6), ta được $mT_n \equiv 0 (\text{mod } 3) \quad \forall n \geq 1$. (7)

- Nếu tồn tại n sao cho $(T_n, 3) = 1$ thì từ (7) suy ra $m \equiv 0(\text{mod } 3)$. Vì thế $r \in \boldsymbol{Z}$.
- Xét trường hợp $T_n \equiv 0(\text{mod } 3) \quad \forall n \geq 1$. Khi đó, do $p = T_1 \equiv 0(\text{mod } 3)$ và $T_3 \equiv 0(\text{mod } 3)$ nên từ (2) dễ dàng suy ra $r \in \boldsymbol{Z}$.

Bài toán được chứng minh. ■

Chú ý: Có thể chứng minh $6q^2 \in \boldsymbol{Z}$ bằng cách sử dụng (1), (2) và hệ thức

$$2q^2 = -T_4 + T_2^2 + 4rT_1.$$

Câu 5. Với mỗi $n \in \boldsymbol{N}^*$, kí hiệu d_n là số cần tìm theo yêu cầu của đề bài.

Xét bảng ô vuông kích thước 2 x n. Điền vào các ô vuông con của bảng, lần lượt từ trên xuống dưới, từ trái qua phải, các số từ 1 đến $2n$. (*Xem Hình 1*).
Gọi ô thứ n của hàng 1 và ô thứ 1 của hàng 2 là hai ô *đặc biệt*.
Khi đó, hai số a, $b \in T$ thỏa mãn $|a - b| \in \{1; n\}$ khi và chỉ khi chúng nằm ở hai ô kề nhau hoặc ở 2 ô đặc biệt.

1	2	....	$n-1$	n
$n+1$	$n+2$	....	$2n-1$	$2n$

Hình 1

Vì thế, d_n chính bằng số cách chọn một số ô của bảng (kể cả số ô được chọn bằng 0) mà ở mỗi cách không có hai ô kề nhau hoặc hai ô đặc biệt được chọn.
Với mỗi $n \in \boldsymbol{N}^*$, kí hiệu:
+ k_n là số cách chọn mà ở mỗi cách không có hai ô kề nhau được chọn; (*)
+ s_n là số cách chọn mà trong các ô được chọn ở mỗi cách có 2 ô đặc biệt và không có hai ô kề nhau.

Ta có: $d_n = k_n - s_n$.

• Trước hết, ta tính k_n.

Dễ thấy, tất cả các cách chọn ô thỏa mãn điều kiện (*) bao gồm:
+ k_{n-1} cách chọn mà ở mỗi cách không có ô nào thuộc cột thứ 1 của bảng được chọn;
+ $2t_{n-1}$ cách chọn mà ở mỗi cách đều có ô thuộc cột thứ 1 của bảng được chọn ;

trong đó, t_n là số cách chọn ô thỏa mãn điều kiện (*) từ bảng khuyết đơn 2 x n. (*Xem Hình 2*).
Do đó $k_n = k_{n-1} + 2t_{n-1}$. (1)
Lại có, tất cả các cách chọn ô thỏa mãn điều kiện (*) từ bảng khuyết đơn 2 x n bao gồm:
+ k_{n-1} cách chọn mà ở mỗi cách ô đánh dấu "x" không được chọn;
+ t_{n-1} cách chọn mà ở mỗi cách ô đánh dấu "x" đều được chọn.

		....		
x		....		

Hình 2

Vì thế: $t_n = k_{n-1} + t_{n-1}$.

Từ đó và (1) suy ra: $k_n = k_{n-1} + 2(k_{n-2} + t_{n-2}) = 2k_{n-1} + k_{n-2} \quad \forall n \geq 3$. (2)

Bằng cách đếm trực tiếp, ta có: $k_1 = 3$ và $k_2 = 7$. (3)

Hệ thức truy hồi (1) có phương trình đặc trưng: $x^2 - 2x - 1 = 0$.

Suy ra: $k_n = C_1\left(1 + \sqrt{2}\right)^n + C_2\left(1 - \sqrt{2}\right)^n \quad \forall n \geq 1$. (4)

Dựa vào (3), ta tìm được: $C_1 = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$ và $C_2 = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}$.

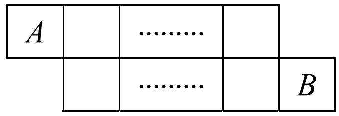
Vậy $k_n = \dfrac{\left(1 + \sqrt{2}\right)^{n+1} + \left(1 - \sqrt{2}\right)^{n+1}}{2}$. (5)

• Tiếp theo, ta tính s_n.

Dễ thấy, $s_1 = 0$, $s_2 = s_3 = 1$ và với $n \geq 4$ ta có:

$$s_n = h_{n-2},$$

trong đó h_n là số cách chọn ô thỏa mãn điều kiện (*) từ bảng khuyết kép $2 \times n$. (*Xem Hình 3*).



Hình 3

Do $s_3 = 1$, đặt $h_1 = 1$. Bằng cách đếm trực tiếp, ta có $h_2 = 4$.

Xét $n \geq 3$.

Dễ thấy, tất cả các cách chọn ô thỏa mãn điều kiện (*) từ bảng khuyết kép $2 \times n$ bao gồm:

+ k_{n-2} cách chọn mà ở mỗi cách cả 2 ô A và B đều không được chọn;
+ $2t_{n-2}$ cách chọn mà ở mỗi cách có đúng một trong 2 ô A, B được chọn;
+ h_{n-2} cách chọn mà ở mỗi cách cả 2 ô A và B cùng được chọn.

Do đó $h_n = k_{n-2} + 2t_{n-2} + h_{n-2} = k_{n-1} + h_{n-2}$. $\quad \forall n \geq 3$. (6)

Từ (2) và (6) suy ra $2h_n - k_n = 2h_{n-2} - k_{n-2} \quad \forall n \geq 3$.

Dẫn tới $2h_n - k_n = (-1)^n \quad \forall n \geq 1$.

Vì thế $s_n = h_{n-2} = \dfrac{k_{n-2} + (-1)^{n-2}}{2} \quad \forall n \geq 3$.

• Vậy $d_1 = 3$, $d_2 = 6$ và $d_n = \dfrac{2k_n - k_{n-2} + (-1)^{n-3}}{2} \quad \forall n \geq 3$,

trong đó k_n được xác định theo (5). ■