

**Nguyễn Hữu Điển**

**OLYMPIC TOÁN NĂM 1997-1998**  
**48 ĐỀ THI VÀ LỜI GIẢI**  
**(Tập 6)**

**NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC**



# Lời nói đầu

Để thử gói lệnh lamdethi.sty tôi biên soạn một số đề toán thi Olympic, mà các học trò của tôi đã làm bài tập khi học tập  $\text{\LaTeX}$ . Để phục vụ các bạn ham học toán tôi thu thập và gom lại thành các sách điện tử, các bạn có thể tham khảo. Mỗi tập tôi sẽ gom khoảng 51 bài với lời giải.

Rất nhiều bài toán dịch không được chuẩn, nhiều điểm không hoàn toàn chính xác vậy mong bạn đọc tự ngẫm nghĩ và tìm hiểu lấy. Nhưng đây là nguồn tài liệu tiếng Việt về chủ đề này, tôi đã có xem qua và người dịch là chuyên về ngành Toán phổ thông. Bạn có thể tham khảo lại trong [1].

Rất nhiều đoạn vì mới học TeX nên cấu trúc và bố trí còn xấu, tôi không có thời gian sửa lại, mong các bạn thông cảm.

Hà Nội, ngày 2 tháng 1 năm 2010

**Nguyễn Hữu Điển**

# Mục lục

|                                           |    |
|-------------------------------------------|----|
| Lời nói đầu .....                         | 3  |
| Mục lục .....                             | 4  |
| Chương 1. Đề thi olympic Russian.....     | 5  |
| Chương 2. Đề thi olympic Nam Phi.....     | 9  |
| Chương 3. Đề thi olympic Tây Ban Nha..... | 12 |
| Chương 4. Đề thi olympic Đài Loan .....   | 16 |
| Chương 5. Đề thi olympic Thổ Nhĩ Kỳ ..... | 23 |
| Chương 6. Đề thi olympic Ukraina .....    | 27 |
| Chương 7. Đề thi olympic Anh.....         | 34 |

# Chương 1

## Đề thi olympic Russian

▷**1.1.** Chứng minh rằng các số từ 1 đến 16 có thể viết được trên cùng 1 dòng nhưng không viết được trên 1 đường tròn, sao cho tổng của 2 số bất kỳ đứng liền nhau là 1 số chính phương.

**Lời giải:** Nếu các số đó viết trên 1 đường tròn thì đứng cạnh số 16 là số  $x, y$  khi đó  $16 + 1 \leq 16 + x$ ,  $16 + y \leq 16 + 15$ , suy ra:  $16 + x = 16 + y = 25$  mâu thuẫn. Các số đó có thể được sắp xếp trên 1 dòng như sau:

$$16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.$$

▷**1.2.** Trên cạnh  $AB$  và  $BC$  của tam giác đều  $ABC$  lấy điểm  $D$  và  $K$  trên cạnh  $AC$  và lấy điểm  $E$  và  $M$  sao cho  $DA + AE = KC + CM = AB$ . Chứng minh rằng góc giữa  $DM$  và  $KE$  bằng  $\frac{\pi}{3}$ .

**Lời giải:** Ta có:  $CE = AC - AE = AD$ .

Và tương tự:  $CK = AM$ .

Xét phép quay tâm là tâm của tam giác  $ABC$ , góc quay  $\frac{2\pi}{3}$  biến  $K$  thành  $M$ , biến  $E$  thành  $D$ , từ đó suy ra điều phải chứng minh.

▷**1.3.** Một công ty có 50.000 công nhân, với mỗi công nhân tổng số người cấp trên trực tiếp và cấp dưới trực tiếp của anh ta là 7. Vào thứ 2 mỗi công nhân đưa ra một số chỉ dẫn và gửi bản photo của nó cho mỗi cấp dưới trực tiếp của anh ta (nếu anh ta có). Mỗi ngày sau đó mỗi

công nhân giữ tất cả các chỉ dẫn mà anh ta nhận được vào ngày hôm trước và gửi bản photo của chúng cho tất cả cấp dưới trực tiếp của anh ta nếu anh ta có hoặc anh ta phải tự thực hiện nếu không có cấp dưới trực tiếp. Cứ như thế cho đến thứ 6 không còn chỉ dẫn nào đưa ra. Hay chỉ ra rằng có ít nhất 97 công nhân ko có cấp trên trực tiếp.

**Lời giải:** Giả sử  $k$  là số công nhân ko có cấp trên trực tiếp, vào ngày thứ 2 số chỉ dẫn được đưa ra nhiều nhất là  $7k$ , vào ngày thứ 3 nhiều nhất là  $6.7k$  vào ngày thứ 4 nhiều nhất là  $36.7k$  vào ngày thứ 5 mỗi công nhân nhận được 1 chỉ dẫn ko có cấp dưới trực tiếp, vì vậy mỗi công nhân có 7 cấp trên trực tiếp, mỗi người đưa ra nhiều nhất là 6 chỉ dẫn và có nhiều nhất là  $216.7k/7$  công nhân nhận được chỉ dẫn. Chúng ta có:

$$50.000 \leq k + 7k + 42k + 252k + 216k = 518k \text{ và } k \geq 97.$$

- ▷ **1.4.** Các cạnh của tam giác nhọn  $ABC$  là các đường chéo của hình vuông  $K_1, K_2, K_3$ . Chứng minh rằng miền trong của tam giác  $ABC$  có thể được phủ bởi 3 hình vuông.

**Lời giải:** Gọi  $I$  là giao điểm của 3 đường phân giác của tam giác  $ABC$ , vì các góc là nhọn nên  $IAB, \widehat{IBA} < 45^\circ$  vì vậy tam giác  $IAB$  có thể được phủ bởi hình vuông mà đường chéo của nó là  $AB$  và tương tự đối với tam giác  $IBC$  và tam giác  $ICA$ .

- ▷ **1.5.** Các số từ 1 tới 37 có thể được viết trên 1 dòng sao cho mỗi số là ước của tổng tất cả các số đứng trước nó. Nếu số đầu tiên là 37 và số thứ 2 là 1 thì số thứ 3 là bao nhiêu.

**Lời giải:** Gọi số cuối cùng là  $x$ ,  $x$  phải là ước của tổng tất cả các số là  $\overline{37x19}$ , vì  $x = 19$  và số thứ 3 phải là ước của 38 khác 1 hoặc 19, vậy số thứ 3 là 2.

- ▷ **1.6.** Tìm các cặp số nguyên tố  $p, q$  sao cho  $p^3 - q^5 = (p + q)^2$ .

**Lời giải:** Chỉ có nghiệm duy nhất là  $(7, 3)$ , đầu tiên giả sử cả  $p$  và  $q$  đều không bằng 3. Nếu chúng đồng dư với Module 3, về trái thì chia hết cho 3 nhưng về phải thì không, nếu chúng không cùng đồng dư

module 3 thì về phải chia hết cho 3 nhưng về trái thì không vì thế không xảy ra khả năng này. Nếu  $p = 3$  ta có  $q^5 < 27$ , không có số nguyên tố nào thỏa mãn. Vì vậy  $q = 3$  và  $p^3 - 243 = (p + 3)^2$  chỉ có nghiệm duy nhất là  $p = 7$ .

- ▷ **1.7.** (a) a. Ở thành phố Mehico để hạn chế giao thông mỗi xe oto riêng đều phải đăng ký 2 ngày trong 1 tuần vào 2 ngày đó oto đó không được lưu thông trong thành phố. Một gia đình cần sử dụng ít nhất 10 chiếc oto mỗi ngày. Hỏi họ phải có ít nhất bao nhiêu chiếc oto nếu họ có thể chọn ngày hạn chế cho mỗi chiếc oto.
- (b) b. Luật được thay đổi để cấm mỗi oto chỉ 1 ngày trong 1 tuần nhưng cảnh sát được quyền chọn ngày cấm đó. Một gia đình hỏi lộ cảnh sát để gia đình đó được quyền chọn 2 ngày liên tiếp không bị cấm cho mỗi xe và ngay lập tức cảnh sát cấm xe oto vào 1 trong những ngày khác. Hỏi gia đình đó cần ít nhất bao nhiêu xe oto nếu họ sử dụng 10 chiếc mỗi ngày.

**Lời giải:**

- (a) Nếu  $n$  xe oto được sử dụng, số ngày được sử dụng là  $5n$ . Mà mỗi gia đình sử dụng ít nhất là 10 xe nên  $7 \times 10 \leq 5n$  vì thế  $n \geq 14$ . Trong thực tế 14 xe thỏa mãn yêu cầu của đầu bài toán: 4 xe bị cấm vào ngày thứ 2 và thứ 3, 4 xe bị cấm vào ngày thứ 4 và thứ 5, 2 xe bị cấm vào ngày thứ 6 và thứ 7, 2 xe bị cấm vào ngày thứ 7 và chủ nhật, 2 xe bị cấm vào ngày chủ nhật và thứ 6.
- (b) 12 xe oto là số xe họ cần, đầu tiên chúng ta chỉ ra rằng  $n \leq 11$  xe không thỏa mãn. Khi đó có  $n$  ngày xe bị cấm, mỗi ngày nhiều nhất là  $\frac{bn}{7}$  xe được lưu thông nhưng  $n \leq 11, \frac{bn}{7} < 10$ . Đối với  $n = 12$ , gia đình đó cần đưa ra 2 ngày liên tiếp cho mỗi xe trong những ngày đó xe ko bị cấm lưu thông.
- ▷ **1.8.** Một đa giác đều 1997 đỉnh được chia bởi các đường chéo ko cắt nhau tạo thành các tam giác. Hãy chỉ ra rằng có ít nhất một tam giác nhọn.

**Lời giải:** Đường tròn ngoại tiếp đa giác đều 1997 đỉnh cũng là đường tròn ngoại tiếp mỗi tam giác. Vì tâm của các đường tròn không nằm

trên bất kỳ đường chéo nào nên nó phải nằm trong một tam giác, vì thế tam giác đó phải là tam giác nhọn.

- ▷ **1.9.** Viết các số từ 1 đến 1000 trên bảng, Hai người chơi lần lượt xóa đi 1 số trong các số đó, cuộc chơi kết thúc khi còn lại 2 số:

Người chơi thứ 1 thắng nếu tổng các số còn lại chia hết cho 3, các trường hợp còn lại người chơi thứ 2 thắng. Người chơi nào có chiến thuật chiến thắng.

**Lời giải:** Người chơi thứ 2 có chiến thuật chiến thắng, nếu người chơi thứ 1 xóa đi số  $x$ , người chơi thứ 2 xóa đi số  $1001 - x$  vì thế tổng của 2 số cuối cùng là 1001.

- ▷ **1.10.** Có 300 quả táo, không có quả nào nặng hơn 3 lần quả khác. Hãy chỉ ra rằng có thể chia các quả táo này thành 4 nhóm mà không có nhóm nào có cân nặng hơn  $\frac{11}{2}$  lần nhóm khác.

**Lời giải:** Sắp xếp các quả táo tăng dần theo trọng lượng, và ghép từng đôi một quả nhẹ nhất với quả nặng nhất, sau đó lại đem 1 quả nhẹ nhất tiếp theo với 1 quả nặng nhất tiếp theo tiếp tục cho đến hết. Chú ý rằng không cặp nào nặng hơn 2 lần cặp khác. Nếu  $a, d$  và  $b, c$  là 2 nhóm với

$$a \leq b \leq c \leq d \text{ thì } a + d \leq 4a \leq 2b + 2c$$

$$b + c \leq 3a + d \leq 2a + 2d.$$

Bây giờ các cặp nặng nhất và nhẹ nhất tạo thành 4 nhóm, không cân nặng của nhóm nào gấp  $2/3$  lần nhóm khác vì

$$e \leq f \leq g \leq h \text{ là các cặp thì } e + h \leq 3e \leq \frac{3}{2}(f + g)$$

$$f + g \leq 2e + h \leq \frac{3}{2}(e + h).$$



## Chương 2

### Đề thi olympic Nam Phi

► **2.11.** Cho  $\triangle A_0B_0C_0$  và một dãy  $\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2 \dots$  được xây dựng như sau:

$A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1}$  là điểm tiếp xúc của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle A_kB_kC_k$  với các cạnh  $B_kC_k, C_kA_k, A_kB_k$  theo thứ tự.

(a) hãy xác định  $\angle A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}$  từ  $\angle A_kB_kC_k$

(b) chứng minh:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \angle A_kB_kC_k = 60^\circ$

**Lời giải:**

(a) Ta có  $A_kB_{k+1} = A_kC_{k+1}$  (vì đây là 2 tiếp tuyến xuất phát từ một điểm). Vì vậy  $\triangle A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}$  là tam giác cân với  $\angle A_kB_{k+1}C_{k+1} = 90^\circ - \frac{\angle A_k}{2}$ . Tương tự ta có:  $\angle C_kB_{k+1}C_{k+1} = 90^\circ - \frac{\angle C_k}{2}$ . Hơn nữa  $\angle B_{k+1} = \frac{(\angle A_k + \angle C_k)}{2} = 90^\circ - \frac{\angle B_k}{2}$

(b) Ta có  $\angle B_{k+1} - 60^\circ = 90^\circ - \frac{\angle B_k}{2} - 60^\circ = \frac{\angle B_k - 60^\circ}{2}$

Vì  $\angle B_k - 60^\circ = \frac{\angle B_0 - 60^\circ}{(-2)^k}$  Hiển nhiên  $\lim_{k \rightarrow \infty} \angle B_k = 60^\circ$

► **2.12.** Tìm tất cả các số tự nhiên thoả mãn: khi chuyển chữ số đầu tiên xuống cuối, số mới bằng 3,5 lần số ban đầu.

**Lời giải:**

Các chữ số như thế có dạng sau: 153846153846153846... 153846  
Hiển nhiên những số thoả mãn giả thiết phải bắt đầu bởi 1 hoặc 2.  
Trường hợp 1: Số đó có dạng:  $10^N + A$  với  $A < 10^N$ . Vì  $\frac{7}{2}(10^N + A) =$

$$10A + 1 \Rightarrow A = \frac{(7 \cdot 10^N - 2)}{13}$$

Ta có  $10^N \equiv 1, 3, 4, 9, 10, 12 \pmod{13}$ . Vì thế A sẽ là một số nguyên tố nếu:  $N \equiv 5 \pmod{6}$ . Từ đó ta có kết quả như trên.

Trường hợp 2: Số đó có dạng  $2 \cdot 10^N + A, A < 10^N$ . Theo chứng minh trên  $A = \frac{(14 \cdot 10^N - 4)}{13}$ . Nhưng vì  $A < 10^N$ , tức  $10^N < 4$ . Vô lý.

▷ **2.13.** Tìm tất cả các hàm:  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  sao cho:

$$f(m + f(n)) = f(m) + n, \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

**Lời giải:**

Rõ ràng:  $f(n) = kn$  với  $k = 1, k = -1$ . Ta sẽ chứng minh đây là kết quả duy nhất. Cho  $n = 0$  ta có  $f(m + f(0)) = f(m)$ . Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1:  $f(0) = 0$ . cho  $m = 0$  có  $f(f(n)) = n$ . Gán  $f(n)$  bởi  $n$  ta có:  $f(m + f(f(n))) = f(m + n) = f(m) + f(n) \Rightarrow f(n) = nf(1)$  và  $n = f(f(n)) = n(f(1))^2 \Rightarrow f(1) = \pm 1$ . Đây là kết quả trên.

Trường hợp 2:  $f(0) \neq 0$ .  $f(n)$  là hàm tuần hoàn và bị chặn. Đặt  $f(M) \geq f(n), \forall n$ . nhưng  $f(M + f(1)) = f(M) + 1$ . Mâu thuẫn giả thiết.

▷ **2.14.** Cho một đường tròn và một điểm P phía trên đường tròn trong mặt phẳng tọa độ. Một hạt nhỏ di chuyển dọc theo một đường thẳng từ P đến điểm Q trên đường tròn dưới ảnh hưởng của trọng lực. Khoảng cách đi từ P trong thời gian  $t$  là:  $\frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha$  với  $g$  không đổi và  $\alpha$  là góc giữa PQ với mặt phẳng nằm ngang. Hãy chỉ ra vị trí điểm Q sao cho thời gian di chuyển từ P đến Q là ít nhất.

**Lời giải:**

Câu hỏi là tìm giá trị nhỏ nhất của  $\frac{PQ}{\sin \alpha}$  hoặc giá trị lớn nhất của  $\frac{\sin \alpha}{PQ}$ . Biểu diễn một phép nghịch đảo điểm P với ảnh là quỹ đạo của chính nó. Điểm cực đại trên sơ đồ cũ (gọi là Q) sẽ vạch ra một điểm Q' với giá trị lớn nhất  $PQ' \sin \alpha$ , với độ cao khác nhau giữa P và Q'. Như vậy P là điểm phía trên đường tròn, Q' là điểm phía đáy đường tròn. Để tìm Q hãy chú ý rằng P, Q, Q' cùng thuộc một đường thẳng. Do đó cách tìm như sau:

(a): Tìm điểm phía đáy đường tròn gọi là Q'

(b): Tìm giao của PQ' với đường tròn, đó là điểm cần tìm.

- **2.15.** Có 6 điểm được nối với nhau từng đôi một bởi những đoạn màu đỏ hoặc màu xanh..chứng minh rằng:Có một chu trình 4 cạnh cùng màu.

**Lời giải:**

Gọi các điểm là A,B,C,D,E,F. Dễ thấy luôn có một chu trình tam giác cùng màu(Thật vậy:Xét một số đỉnh nào đó,sẽ có 5 cạnh từ các đỉnh ấy mà ít nhất 3 trong số chúng cùng màu.giả sử đó là màu đỏ và các cạnh này đi đến A,B,C.Nếu một số cạnh giữa A,B,C là màu đỏ ta có điều phải chứng minh,nếu không ta cũng có điều phải chứng minh) Không mất tính tổng quát,gọi các cạnh AB,BC,CA là màu đỏ.Nếu một trong các đỉnh của cạnh màu đỏ khác chạy đến A,B,C,ta có điều cần tìm.Nếu 2 trong 3 điểm D,E,F của cạnh màu xanh chạy đến 2 trong số các đỉnh cùng màu A,B,C,ta cũng có điều cần tìm.Trường hợp duy nhất không xảy ra là nếu một trong các điểm D,E,F của cạnh màu đỏ tạo bởi những điểm khác A,B,C;không mất tính tổng quát giả sử AD,BE,CF là màu đỏ.Các cạnh không theo lý thuyết là DE,EF,FD.Nếu một cạnh trong số chúng màu đỏ ta có dạng hình tròn(ví dụ nếu DE màu đỏ thì DABE là đỏ)Nếu một trong số chúng màu xanh thì DCEF màu xanh.Ta đã chứng minh được bài toán.

## Chương 3

### Đề thi olympic Tây Ban Nha

▷ **3.16.** Tính tổng bình phương của 100 số hạng đầu tiên của một cấp số cộng, với giả thiết tổng 100 số hạng bằng  $-1$  và tổng các số hạng thứ hai, thứ tư, ..., thứ một trăm bằng 1

**Lời giải:**

Gọi 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng là  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}$  và  $d$  là công sai của cấp số cộng theo giả thiết thứ nhất ta có:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{100} = \frac{1}{2} (x_1 + x_{100}) \cdot 100 = -1 \Rightarrow x_1 + x_{100} = -\frac{1}{50}.$$

Theo giả thiết thứ 2 ta có

$$x_2 + x_4 + \dots + x_{100} = \frac{1}{2} ((x_1 + d) + x_{100}) \cdot 50 = 1 \Rightarrow x_1 + x_{100} + d = \frac{1}{25}.$$

Suy ra  $d = \frac{3}{50}$  và  $x_1 + x_{100} = x_1 + (x_1 + 99d) = -\frac{1}{50}$  hay  $x_1 = -\frac{149}{50}$ . Từ đó ta tìm được:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2 = 100x_1^2 + 2dx_1(1 + \dots + 99) + (1^2 + \dots + 99^2).$$

Vậy

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2 = \frac{14999}{50}$$

▷ **3.17.**  $A$  là một tập gồm 16 điểm tạo thành một hình vuông trên mỗi cạnh có 4 điểm. Tìm số điểm lớn nhất của tập  $A$  mà không có 3 điểm nào trong số các điểm đó tạo thành một tam giác cân

**Lời giải:** Số điểm lớn nhất cần tìm là 6 có được bằng cách lấy các điểm ở hai cạnh kề nhau nhưng bỏ đi điểm chung của hai cạnh đó. Đầu tiên giả 4 điểm bên trong không được chọn, những điểm còn lại tạo thành 3 hình vuông, nên nhiều nhất 2 đường thẳng đứng từ mỗi hình vuông được chọn. Như vậy chúng ta có thể cho rằng một trong số các điểm trong được chọn trong sơ đồ sau là điểm O

$$\begin{array}{cccc} D & A_1 & A_2 & A_3 \\ C & Z_1 & O & Z_2 \\ E & B_1 & B_2 & B_3 \\ C & D & C & E \end{array}$$

Không có điểm nào cùng tên gọi  $A, B, C, D, E$  được chọn, vậy nếu ta không chọn  $Z_1, Z_2$  một lần nữa nhiều nhất 6 điểm có thể được chọn. Nếu chọn  $Z_1$  nhưng không chọn  $Z_2$  thì  $A_1, A_2, B_1, B_2$  cũng không được chọn, và cả  $A_3$  và  $B_3$  cũng không được chọn, vì vậy một trong hai điểm  $A$  và  $B$  phải bỏ đi, một lần nữa số điểm lớn nhất là 6. Trường hợp chọn  $Z_2$  nhưng không chọn  $Z_1$  tương tự. Cuối cùng nếu  $Z_1$  và  $Z_2$  được chọn thì cả  $A_i$  và  $B_i$  đều không được chọn, vì vậy số điểm lớn nhất là 6.

► **3.18.** Với mỗi Parabol  $y = x^2 + px + q$  cắt hai trục tọa độ tại 3 điểm phân biệt, vẽ một đường tròn đi qua 3 điểm đó. Chứng minh rằng tất cả các đường tròn đó đều đi qua một điểm cố định

**Lời giải:** Tất cả các đường tròn đều đi qua điểm  $(0, 1)$ . Giả sử  $(0, q), (r_1, 0), (r_2, 0)$  là 3 điểm mà Parabol đi qua, do đó  $r_1 + r_2 = -p$ . Giả sử  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  là đường tròn luôn đi qua 3 điểm trên do đó  $a = -\frac{p}{2}$  và

$$\frac{1}{4}p^2 + (q - b)^2 = \left(r - \frac{p}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{1}{4}(r_1 - r_2)^2 + b^2$$

hay  $q^2 - 2.qb = -q$  do đó  $b = \frac{q+1}{2}$ , khi đó điểm đối xứng với điểm  $(0, q)$  qua đường kính nằm ngang là điểm  $(0, 1)$

► **3.19.** Cho  $p$  là số nguyên tố. Tìm tất cả  $k \in \mathbb{Z}$  sao cho  $\sqrt{k^2 - pk}$  là số nguyên dương.

**Lời giải:** Giá trị  $k$  cần tìm là  $k = \frac{(p+1)^2}{4}$  với  $p$  là số lẻ (trừ trường hợp  $p=2$ ). Trước hết xét  $p=2$ , trong trường hợp này ta cần  $k^2 - 2k = (k-1)^2 - 1$  là một số chính phương trường hợp này không thể xảy ra vì chỉ có duy nhất hai số chính phương liên tiếp là 0 và 1

Giả sử  $p$  là số lẻ. Đầu tiên ta xét trường hợp  $k$  chia hết cho  $p$ , hay  $k = np$ , khi đó  $k^2 - pk = p^2n(n-1)$ ,  $n$  và  $n-1$  là hai số nguyên tố liên tiếp. Do đó cả hai không thể là số chính phương.

Giả sử  $k$  và  $p$  là hai số nguyên tố cùng nhau, khi đó  $k$  và  $k-p$  cũng là hai số nguyên tố cùng nhau. Để  $k^2 - pk$  là số chính phương khi và chỉ khi  $k$  và  $k-p$  là các số chính phương,  $k = m^2, k-p = n^2$ . Do đó  $p = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$ . Suy ra  $m+n = p, m-n = 1$  và  $k = \frac{(p+1)^2}{4}$ , hoặc  $m+n = 1, m-n = p$  và  $k = \frac{(p-1)^2}{4}$

► **3.20.** Chứng minh rằng trong tất cả các tứ giác lồi có diện tích bằng 1, thì tổng độ dài các cạnh và các đường chéo lớn hơn hoặc bằng  $2(2 + \sqrt{2})$

**Lời giải:** Thực tế ta cần chỉ ra rằng tổng độ dài các cạnh của tứ giác lồi lớn hơn hoặc bằng 4 và tổng độ dài các đường chéo của tứ giác lồi lớn hơn hoặc bằng  $2\sqrt{2}$ . Đối với trường hợp đường chéo ta sử dụng công thức tính diện tích  $A = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \theta$ , với  $\theta$  là góc giữa hai đường chéo. Từ giả thiết cho diện tích tứ giác bằng 1 suy ra  $d_1d_2 \geq 2$ , áp dụng bất đẳng thức AG-GM suy ra  $d_1 + d_2 \geq 2\sqrt{2}$ , đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi độ dài hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau.

Đối với trường hợp cạnh ta sử dụng công thức tính diện tích

$$A = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2 \frac{B+D}{2},$$

với  $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ ,  $B$  và  $D$  là hai góc đối diện nhau. Từ giả thiết cho diện tích tứ giác bằng 1 ta suy ra  $(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \geq 1$ , lại sử dụng bất đẳng thức AG-MG ta lại suy ra

$$4 \leq (s-a) + (s-b) + (s-c) + (s-d) = a+b+c+d$$

, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = d$ .

Từ đó ta suy ra kết luận, để cả hai đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tứ giác lồi là hình vuông.

- ▷ **3.21** *Lượng gas chính xác để một chiếc ô tô hoàn thành một vòng đường đua được đặt trong  $n$  bình gas đặt dọc đường đua. Chứng minh rằng có một vị trí mà xe có thể bắt đầu ở đó với một bình gas rỗng, có thể hoàn thành một vòng đường đua mà không sợ hết gas ( giả sử xe có thể chứa một lượng gas không giới hạn)*

**Lời giải:** Ta sử dụng phương pháp qui nạp theo  $n$ , trường hợp  $n = 1$  dễ dàng thấy được. Cho  $n + 1$  bình chứa phải có một bình chứa  $A$  mà từ đó ô tô có thể tới được bình chứa  $B$  mà bình đó không có đủ gas cho một vòng đua. Nếu chúng ta dồn bình  $B$  vào bình  $A$  và bỏ bình  $B$  đi, theo giả thiết qui nạp có 1 điểm xuất phát mà xe có thể hoàn thành vòng đua, cùng điểm xuất phát như thế cho hoàn thành vòng đua với lượng phân phát ban đầu của bình chứa.

## Chương 4

### Đề thi olympic Đà Loan

▷**4.22.** Cho  $a$  là một số hữu tỷ,  $b, c, d$  là các số thực và  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$  là 1 hàm thỏa mãn:

$$f(x + a + b) - f(x + b) = c[x + 2a + [x] - 2[x + a] - [b]] + d$$

với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Chứng minh rằng hàm  $f$  tuần hoàn, tức là tồn tại số  $p > 0$  sao cho  $f(x + p) = f(x)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

**Lời giải:** Với mọi số nguyên  $n$  ta có:

$$f(x + n + a) - f(x + n)$$

$$= c[x - b + n] + 2a + [x - b + n] - 2[x - b + n + a] - [b] + d$$

$$= c[x - b] + n + 2a + [x - b] + n - 2[x - b + a] + n - [b] + d$$

$$= c[x - b] + 2a + [x - b] - 2[x - b + a] - [b] + d$$

$$= f(x + a) - f(x)$$

Lấy số nguyên dương  $m$  sao cho  $am$  là một số nguyên. Khi đó với mọi số tự nhiên  $k$  ta có:



$$\begin{aligned}
 & f(x + kam) - f(x) \\
 &= \sum_{j=1}^x \sum_{i=1}^m (f(x + jam + ai) - f(x + jam + a(i-1))) \\
 &= k \sum_{i=1}^m (f(x + ai) - f(x + a(i-1))) \\
 &= k(f(x + am) - f(x))
 \end{aligned}$$

Do  $f(x) \in [-1; 1]$ ,  $f(x + kam) - f(x)$  bị chặn nên  $f(x + kam) - f(x)$  phải bằng 0. Suy ra  $f(x + kam) = f(x)$ , vì vậy  $f(x)$  là hàm tuần hoàn.

►**4.23.** Cho đoạn thẳng  $AB$ . Tìm tất cả các điểm  $C$  trong mặt phẳng sao cho tam giác  $ABC$  sao cho đường cao kẻ từ  $A$  và trung tuyến kẻ từ  $B$  có độ dài bằng nhau.

**Lời giải:** Gọi  $D$  là chân đường cao kẻ từ  $A$  và  $E$  là chân đường trung tuyến kẻ từ  $B$ . Gọi  $F$  là chân đường vuông góc kẻ từ  $E$  xuống  $BC$ . Khi đó  $EF \parallel AD$  và  $E$  là trung điểm của  $AC$ , vì vậy  $EF = 1/2(AD) = 1/2(BE)$  và  $\widehat{EBC} = \pm \pi/6$  (tất cả các góc đều có hướng trừ khi được). Bây giờ, cho  $P$  là một điểm sao cho  $B$  là trung điểm của  $AP$ . Khi đó  $BE \parallel PC$ , vì thế  $\widehat{PCB} = \widehat{EBC}$  và không đổi. Quỹ tích tất cả các điểm  $C$  sao cho  $\widehat{PCB}$  không đổi là một đường tròn. Do đó, quỹ tích các điểm  $C$  bao gồm hai đường tròn bằng nhau, cắt nhau tại  $B, P$  (Một tương ứng với góc  $\pi/6$  và một tương ứng với góc  $-\pi/6$ ). Trong trường hợp đặc biệt, khi tam giác  $ABC$  cân ta thấy rằng mỗi đường tròn đều có bán kính  $AB$  và tâm sao cho  $ABQ = 2\pi/3$  (không có hướng).

►**4.24.** Cho số nguyên  $n \geq 3$ , giả thiết rằng dãy số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  thoả mãn  $a_{i-1} + a_{i+1} = k_i a_i$  với dãy  $k_1, k_2, \dots, k_n$  là dãy số nguyên dương bất kỳ. (trong đó  $a_0 = a_n$  và  $a_{n+1} = a_1$ ). Chứng minh rằng

$$2n \leq k_1 + k_2 + \dots + k_n \leq 3n$$

**Lời giải:** Bất đẳng

$$2n \leq k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

được chứng minh dựa vào AM-GM với chú ý rằng:

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_i}$$

Để chứng minh được bất đẳng  $k_1 + k_2 + \dots + k_n \leq 3n$ , ta cần chứng minh  $k_1 + k_2 + \dots + k_n \leq 3n - 2$  với  $n \geq 2$ , bằng phương pháp quy nạp theo  $n$ . Với  $n = 2$ , nếu  $a_1 \geq a_2$  thì  $2a_2 = k_1 a_1$ , vì thế hoặc  $a_1 = a_2$  và  $k_1 + k_2 = 4 = 3 \cdot 2 - 2$ , hoặc  $a_1 > a_2$  và  $k_1 + k_2 = 4 = 3 \cdot 2 - 2$ . Với  $n > 2$ , ta có thể giả thiết tất cả các  $a_i$  không bằng nhau, khi tồn tại  $i$  sao cho  $a_i \geq a_{i-1}, a_{i+1}$  mà dấu bằng không xảy ra ở ít nhất một trong hai trường hợp. Khi đó  $a_i a_{i-1} + a_{i+1} < 2a_i$  và do đó  $k_i = 1$ . Ta kết luận rằng dãy mà bỏ đi số hạng  $a_i$  cũng thỏa mãn điều kiện đã cho với  $k_{i-1}$  và  $k_{i+1}$  giảm đi 1 đơn vị và bỏ đi số hạng  $k_i$ . Theo giả thiết quy nạp, tổng của  $k_i$  số hạng nhỏ hơn hoặc bằng  $3(n-1) - 2$ , tổng của các số  $k_i$  ban đầu nhỏ hơn hoặc bằng  $3n - 2$ , do đó ta có điều phải chứng minh.

▷**4.25.** Cho  $k = 2^{2^n} + 1$  với  $n$  là số nguyên dương bất kỳ. Chứng minh rằng  $k$  là một số nguyên tố khi và chỉ khi  $k$  là một ước của  $3^{(k-1)/2} + 1$ .

**Lời giải:** Giả sử  $k$  là một ước của  $3^{(k-1)/2} + 1$ . Điều này tương đương với  $3^{(k-1)/2} \equiv -1 \pmod{k}$ . Vì vậy  $3^{k-1} \equiv 1 \pmod{k}$ . Với  $d$  sao cho  $3^d \equiv 1 \pmod{k}$ . Vì vậy,  $d$  không là ước của  $(k-1)/2$  nhưng là ước của  $k-1$ , mặt khác  $(k-1)$  là ước của  $d$  nên  $d = k-1$  (bởi vì  $d$  phải nhỏ hơn  $k$ ). Do đó,  $k$  là số nguyên tố.

Ngược lại, nếu  $k$  là số nguyên tố  $\left(\frac{3}{k}\right) = \left(\frac{k}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1$   
 $3^{(k-1)/2} \equiv \left(\frac{3}{k}\right) \equiv -1$

▷**4.26.** Cho tứ diện  $ABCD$ . Chứng minh rằng:

- (a) Nếu  $AB = CD, AD = BC, AC = BD$  thì các tam giác  $ABC, ACD, ABD, BCD$  là các tam giác nhọn.  
 (b) Nếu các tam giác  $ABC, ACD, ABD, BCD$  có cùng diện tích thì  $AB = CD, AD = BC, AC = BD$

**Lời giải:** (a) Theo giả thiết 4 mặt của tứ diện bằng nhau, ta có góc tam diện ở mỗi đỉnh được tạo bởi ba góc khác nhau của một mặt. Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Theo bất đẳng thức trong tam giác,

$AM + MD > AD = BC = 2MC$ . Các tam giác  $ABC$  và  $DBC$  là bằng nhau, vì thế  $AM = DM$ . Do đó  $2MD > 2MC$ ; nghĩa là,  $MD$  lớn hơn bán kính của đường tròn nằm trên mặt phẳng  $BCD$  với đường kính  $BC$ . Do đó,  $D$  nằm ngoài đường tròn và góc  $BDC$  là góc nhọn. Tương tự như vậy, ta chứng minh được các góc còn lại (bài toán này là bài toán USAMO tháng 2/1972, tham khảo các cách giải khác ở quyển sách USAMO của Klamkin).

(b) Vì  $AB$  và  $CD$  không song song (vì  $ABCD$ ) là hình tứ diện), ta có thể chọn hai mặt phẳng song song là mặt phẳng  $(P)$  chứa  $AB$  và  $(Q)$  chứa  $CD$ . Gọi khoảng cách giữa mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  là  $d$ . Gọi  $A', B'$  lần lượt là hình chiếu của  $A, B$  trên  $(Q)$ , gọi  $C', D'$  lần lượt là hình chiếu của  $C, D$  trên  $(P)$ . Vì các tam giác  $ACD$  và  $BCD$  có cùng diện tích và chung đáy  $CD$ , nên chúng có cùng chiều cao  $h$ . Ta vẽ hình trụ với trục  $CD$  và bán kính  $h$ ; rõ ràng  $A, B$  thuộc hình trụ này. Hai điểm này cũng thuộc mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(P)$  giao với hình trụ tại một hoặc hai đường thẳng song song với  $CD$ .

$A$  và  $B$  không thể cùng nằm trên một trong hai đường thẳng này, vì thế hình trụ và mặt phẳng  $(P)$  sẽ giao nhau tại hai đường thẳng, một đường thẳng đi qua  $A$  và một đường thẳng đi qua  $B$ . Hai đường thẳng song song với nhau và cách đều đường thẳng  $C'D'$  một khoảng là  $(h^2 - d^2)^{1/2}$ . Vì vậy, đường thẳng  $C'D'$  chia đôi đoạn thẳng  $AB$ .

Tương tự, ta chứng minh được đường thẳng  $A'B'$  chia đôi đoạn thẳng  $CD$ , qua phép chiếu, mặt phẳng  $(Q)$  biến thành mặt phẳng  $(P)$ , đường thẳng  $AB$  chia đôi đoạn thẳng  $C'D'$ .  $AB$  và  $C'D'$  cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên  $AC'BD'$  là hình bình hành, do đó ta có  $AC' = BD'$  (gọi khoảng cách giữa chúng là  $x$ ) và  $BC' = AD'$  (gọi khoảng cách giữa chúng là  $y$ ). Vậy ta có:

$$\begin{aligned} AC &= (AC'^2 + C'C^2)^{1/2} = (x^2 + d^2)^{1/2} \\ &= (BD'^2 + D'D^2)^{1/2} = BD \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= (BC'^2 + C'C^2)^{1/2} = (y^2 + d^2)^{1/2} \\ &= (AD'^2 + D'D^2)^{1/2} = AD \end{aligned}$$

Sử dụng hai cặp cạnh khác lúc đầu, ta cũng có  $AB = CD$

▷ **4.27.** Cho  $X$  là một tập hợp các số nguyên cho bởi công thức:

$$a_{2k}10^{2k} + a_{2k-2}10^{2k-2} + \dots + a_210^2 + a_0$$

Với  $k$  là một số nguyên không âm và  $a_{2i} \in \{1, 2, \dots, 9\}$  với  $i = 0, 1, \dots, k$ . Chứng minh rằng, mọi số nguyên có dạng  $2^p 3^q$ , với  $p, q$  là những số nguyên không âm, chia hết một phần tử nào đó của  $X$ .

**Lời giải:** Mọi số nguyên không chia hết cho 10 thì đều chia hết cho một số hạng nào đó của  $X$ . Ta nhận thấy rằng luôn tồn tại một phần tử trong  $X$  có  $2p - 1$  chữ số là bội của  $4^p$ , với mọi số nguyên  $p$  không âm. Điều này dẫn tới phép quy nạp theo  $p$ : với  $p = 0, 1$  và nếu  $x$  là một bội số với  $p = k$ , thì ta có thể chọn  $a_{2k}$  sao cho  $x + a_{2k}10^{2k} \equiv 0 \pmod{4^{k+1}}$  vì  $10^{2k} \equiv 1 \pmod{4^k}$

Bây giờ, ta chứng minh rằng bất kỳ số nguyên  $n$  nào không chia hết cho 10 thì chia hết cho một số hạng nào đó của  $x$ . Gọi  $n = 2^p k$  với  $k$  lẻ. Khi đó với bổ đề bên trên ta có thể tìm ra bội số của  $2^p$  trong tập hợp  $X$ . Gọi  $m$  là bội số và  $d$  là số chữ số của  $m$  và  $f = 10^{d+1} - 1$ . Bằng hệ quả Euler của định lý Fermat,  $10^{\phi(fk)} \equiv 1 \pmod{fk}$ . Vì vậy  $m(10^{(d+1)\phi(fk)} - 1) / (10^{d+1} - 1)$  chia hết cho  $2^p k$  và thuộc  $X$

▷ **4.28.** Xác định tất cả các số nguyên dương  $k$  để tồn tại một hàm  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  thỏa mãn:

$$(a) f(1997) = 1998$$

$$(b) \text{ Với mọi } a, b \in \mathbb{N}, f(ab) = f(a) + f(b) + kf(\gcd(a, b))$$

**Lời giải:** Hàm  $f$  như trên tồn tại với  $k = 0$  và  $k = -1$ . Ta lấy  $a = b$ , thay vào (b) ta có  $f(a^2) = (k + 2)f(a)$ . Áp dụng hai lần ta có:

$$f(a^4) = (k + 2)f(a^2) = (k + 2)^2 f(a)$$

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned} f(a^4) &= f(a) + f(a^3) + kf(a) = (k + 1)f(a) + f(a^3) \\ &= (k + 1)f(a) + f(a) + f(a^2) + kf(a) \\ &= (2k + 2)f(a) + f(a^2) = (3k + 4)f(a) \end{aligned}$$

Chọn  $a = 1997$  để  $f(a) \neq 0$  suy ra  $(k+2)^2 = 3k+4$  có nghiệm  $k=0; k=-1$ .

Với  $k=0$  ta có:

$$f(p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n}) = e_1 g(p_1) + \dots + e_n g(p_n)$$

với  $m$  là ước nguyên tố của 1997,  $g(m) = 1998$  và  $g(p) = 0$  với mọi số nguyên tố  $p \neq m$ .

Với  $k=1$  ta có

$$f(p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n}) = g(p_1) + \dots + g(p_n)$$

► **4.29.** Cho tam giác  $ABC$  nhọn với  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp và bán kính  $R$ .  $AO$  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $OBC$  ở  $D$ ,  $BO$  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $OCA$  ở  $E$ , và  $CO$  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $OAB$  ở  $F$ . Chứng minh rằng  $OD.OE.OF \leq 8R^3$ .

**Lời giải:** Gọi  $D', E', F'$  lần lượt là giao điểm của  $AO$  và  $BC$ ,  $BO$  và  $CA$ ,  $CO$  và  $AB$ . Do đó chúng là ảnh của  $D, E, F$  qua phép của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ , Do đó  $OD'.OD = OE'.OE = OF'.OF = R^2$ . Vì vậy, bất đẳng thức của bài toán tương đương với:

$$\frac{AO}{OD'} \cdot \frac{BO}{OE'} \cdot \frac{CO}{OF'} \geq 8$$

Gọi  $h_1, h_2, h_3$  lần lượt là khoảng cách từ  $O$  đến  $AB, BC, CA$ . Khi đó  $AO/OD = [AOB]/[BOD'] = (ABh_1)/(BD'h_2)$ , tương tự  $BO/OE' = (BCh_2)/(CE'h_3)$  và  $CO/OF' = (CAh_3)/(AF'h_1)$ . Do đó ta có:

$$\begin{aligned} \frac{AB.BC.CA}{AF'.BD'.CE'} &= \frac{(AF' + F'B)(BD' + D'C)(CE' + E'A)}{AF'.BD'.CE'} \\ &\geq 8 \sqrt{\frac{AF'.F'B.BD'.D'C.CE'.E'A}{AF'.BD'.CE'}} \\ &= 8 \sqrt{\frac{F'B.D'C.E'A}{AF'.BD'.CE'}} = 8 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $AF' = F'B, BD' = D'C, CE' = E'A$ , hay  $ABC$  là tam giác đều.

► **4.30.** Cho  $X = 1, 2, \dots, n$  với  $n \geq k \geq 3$  và  $F_k$  là một tập con gồm  $k$  phần tử của  $X$  sao cho hai tập  $F_k$  bất kỳ có nhiều nhất  $k-2$  phần tử chung.

Chỉ ra rằng tồn tại một tập  $M_k$  của  $X$  có ít nhất  $\lceil \log_2 n \rceil + 1$  phần tử không được chứa trong một tập con nào của  $F_k$ .

**Lời giải:** Nếu  $k \geq \log_2 n$  thì điều phải chứng minh hiển nhiên đúng, vì thế ta giả sử  $k < \log_2 n$ . Đặt  $m = \lceil \log_2 n \rceil + 1$ . Với mỗi tập con  $k-1$  số hạng của tập  $X$  thuộc tối đa một tập con của  $F_k$  và mỗi số hạng của  $F_k$  bao gồm các tập con  $k(k-1)$  phần tử. Ta có:

$$(F_k) \leq \frac{1}{k} \binom{n}{k-1} = \frac{1}{n-k+1} \binom{n}{k}$$

Mặt khác, chọn một tập con  $m$  số hạng bất kỳ của  $X$ , số số hạng của  $F_k$  là:

$$\binom{m}{k} \frac{(F_k)}{\binom{n}{k}} \leq \frac{1}{n-k+1} \binom{m}{k}$$

Điều đó có thể chứng minh rằng con số sau nhỏ hơn 1, vì thế một tập con  $m$  phần tử nào đó không được chứa số hạng nào của  $F_k$ .

Hiển nhiên  $\binom{m}{k} \leq \sum_i \binom{m}{i} = 2^m$  và ta cũng có thể chứng minh

$\binom{m}{k} \leq 3 \cdot 2^{m-3}$  với  $m \geq k \geq 3$  bằng phương pháp quy nạp theo  $m$ . Vì vậy ta có:

$$\frac{1}{n-k+1} \binom{m}{k} \leq \frac{3n}{4(n-k+1)} < 1$$

với  $n \geq 3$ . Ta có điều phải chứng minh.

## Chương 5

### Đề thi olympic Thổ Nhĩ Kỳ

►**5.31.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , gọi  $H$  là chân đường cao kẻ  $A$ . Chứng minh rằng tổng bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác  $ABC$ ,  $ABH$ ,  $ACH$  bằng  $AH$ .

**Lời giải:** Đặt  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$  và  $s = \frac{a+b+c}{2}$ . Các tam giác  $ABH$  và  $ACH$  đồng dạng với tam giác  $ABC$  với tỉ số tương ứng  $a/c$  và  $b/c$ . Áp dụng công thức diện tích tam giác bằng bán kính đường tròn nội tiếp nhân với nửa chu vi, suy ra bán kính cần tìm là  $\frac{ab}{a+b+c}$ ;  $\frac{a}{c} \frac{ab}{a+b+c}$ ;  $\frac{b}{c} \frac{ab}{a+b+c}$  và tổng của chúng là  $\frac{ab}{c} = AH$

►**5.32.** Dãy số  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  được cho bởi:

$$a_1 = \alpha, b_1 = \beta, a_{n+1} = \alpha a_n - \beta b_n, b_{n+1} = \alpha a_n + \beta b_n \text{ với mọi } n \geq 1$$

Có bao nhiêu bộ số thực  $(\alpha, \beta)$  thỏa mãn  $a_{1997} = b_1$  và  $b_{1997} = a_1$ ?

**Lời giải:** Lưu ý rằng  $a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(a_n^2 + b_n^2)$ , trừ  $\alpha = \beta = 0$ . Chúng ta cần  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ . Vì vậy có thể đặt  $\alpha = \cos \theta$ ,  $\beta = \sin \theta$ , từ đó bằng phương pháp quy nạp ta chỉ ra  $\alpha = \cos n\theta$ ,  $\beta = \sin n\theta$ . Từ đó có 1998 bộ số:  $(0; 0)$  và  $(\cos \theta; \sin \theta)$  với  $\theta = \pi \frac{k}{3998}$ ,  $k = 1, 3, \dots, 3997$

►**5.33.** Trong một hiệp hội bóng đá, khi một cầu thủ chuyển từ đội  $X$  có  $x$  cầu thủ sang đội  $Y$  có  $y$  cầu thủ, liên đoàn nhận được  $y - x$  triệu đôla từ đội  $Y$  nếu  $y \geq x$  nhưng phải trả lại  $x - y$  triệu đôla cho đội  $X$  nếu

$x > y$ . Một cầu thủ có thể di chuyển tùy thích trong suốt mùa chuyển nhượng. Hiệp hội bao gồm 18 đội, tất cả các đội đều bắt đầu mùa chuyển nhượng với 20 cầu thủ. Kết thúc mùa chuyển nhượng, 12 đội kết thúc với 20 cầu thủ, 6 đội còn lại kết thúc với 16, 16, 21, 22, 22, 23 cầu thủ. Tổng số tiền lớn nhất mà liên đoàn có thể kiếm được trong suốt mùa chuyển nhượng là bao nhiêu?

**Lời giải:** Chúng ta thừa nhận rằng số tiền lớn nhất kiếm được bởi không bao giờ cho phép một cầu thủ chuyển đến đội nhỏ hơn. Chúng ta cũng có thể giữ kỷ lục đó bằng một cách khác. Một đội bóng có  $x$  cầu thủ thì được ghi là  $-x$  trước khi giao dịch một cầu thủ hoặc  $x$  trước khi nhận một cầu thủ và số tiền mà liên đoàn kiếm được bằng tổng của các số đó. Bây giờ ta xem xét các số được ghi bởi một đội mà kết thúc có nhiều hơn 20 cầu thủ. Nếu số lượng cầu thủ tối đa của đội đó trong suốt quá trình chuyển nhượng là  $k > n$  thì các số  $k-1$  và  $-k$  xuất hiện liên tiếp và bỏ đi 2 số đó thì tổng sẽ tăng lên. Vì thế tổng của các số trong đội bóng đó ít nhất là  $20 + 21 + \dots + (n-1)$ . Tương tự như vậy, tổng của các số trong đội bóng kết thúc có  $n < 20$  cầu thủ ít nhất là  $-20 - 19 - \dots - (n+1)$ . Vì những con số này chính xác là những con số có được bởi việc luân chuyển cầu thủ từ đội kết thúc ít hơn 20 cầu thủ sang đội kết thúc có nhiều hơn 20 cầu thủ. Sự sắp xếp đó dẫn đến số tiền kiếm được là lớn nhất. Trong trường hợp đó, tổng là:

$$(20 + 20 + 21 + 20 + 21 + 20 + 21 + 22) - 2(20 + 19 + 18 + 17) = 17$$

▷ **5.34.** Ngũ giác  $ABCDE$  lồi có các đỉnh nằm trên đường tròn đơn vị, cạnh  $AE$  đi qua tâm đường tròn đó. Giả sử  $AB = a, BC = b, CD = c, DE = d$  và  $ab = cd = 1/4$ . Tính  $AC + CE$  theo  $a, b, c$ .

**Lời giải:** Nếu gọi  $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$  là các cung chắn bởi các cạnh  $a, b, c, d$  tương ứng thì:

$$AC = 2 \sin(\alpha + \beta) = \frac{a}{2} \sqrt{1 - \frac{b^2}{4}} + \frac{b}{2} \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$$

Tương tự với  $CD$ .

Tổng quát với  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp ngũ giác, thế thì



$$AC^2 + BD^2 = 1 \text{ mà}$$

$$AC = a\sqrt{R^2 - b^2} + b\sqrt{R^2 - a^2}$$

Khi đó, dẫn đến biểu thức chứa  $R^2$  dưới dấu căn và ta giải phương trình đối với  $R$  theo các số  $a, b, c, d$ .

►**5.35.** Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố  $p \geq 7$ , tồn tại một số nguyên dương  $n$  và các số nguyên  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$  không chia hết cho  $p$  sao cho:

$$x_1^2 + y_1^2 \equiv x_2^2 \pmod{p}$$

$$x_2^2 + y_2^2 \equiv x_3^2 \pmod{p}$$

.....

$$x_n^2 + y_n^2 \equiv x_1^2 \pmod{p}$$

**Lời giải:** Gọi  $n$  là cấp của  $5/3 \pmod{p}$ , và đặt  $x_i = 3^{n-1-i}5^{i-1}, y_i = 43^{n-1}5^{i-1}$  thì mọi đồng dư trên là tương đương trừ hệ thức cuối cùng. Hệ thức đó có dạng  $5^{2n} \equiv 3^{2n} \pmod{p}$  (đúng). Vậy ta có điều phải chứng minh.

►**5.36.** Cho các số nguyên  $n \geq 2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$\frac{x_1^5}{x_2 + x_3 + \dots + x_n} + \frac{x_2^5}{x_3 + x_4 + \dots + x_n + x_1} + \dots + \frac{x_n^5}{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}$$

Với  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực thỏa mãn  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ .

**Lời giải:** Đặt  $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

Sử dụng BĐT Chebyshev's cho hai dãy  $\frac{x_i}{S-x_i}$  và  $x_i^4$  (cả hai dãy đều là dãy tăng). Ta có:

$$\sum \frac{x_i^5}{S-x_i} \geq \left( \frac{x_1}{S-x_1} + \frac{x_2}{S-x_2} + \dots + \frac{x_n}{S-x_n} \right) \left( \frac{x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4}{n} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức hàm lồi ta có:

$$\frac{x_1}{S-x_1} + \frac{x_2}{S-x_2} + \dots + \frac{x_n}{S-x_n} \geq \frac{1}{n-1}$$

Áp dụng bất đẳng thức giá trị trung bình ta có:

$$\left(\sum \frac{x_i^4}{n}\right)^{1/2} \geq \sum \frac{x_i^2}{n} = \frac{1}{n}$$

Ta có kết luận:

$$\sum \frac{x_i^5}{S - x_i} \geq n \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n(n-1)}$$

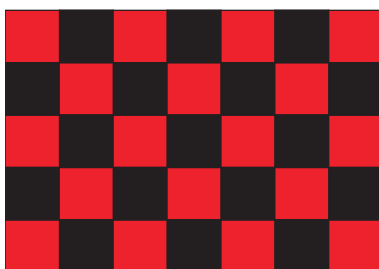
Đẳng thức xảy ra khi  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

## Chương 6

### Đề thi olympic Ukraina

► **6.37** Một lưới hình chữ nhật được tô màu theo kiểu bàn cờ, và trong mỗi ô có một số nguyên. Giả sử rằng tổng các số trong mỗi hàng và tổng các số trong mỗi cột là số chẵn. Chứng minh rằng tổng tất cả các số trong ô đen là chẵn.

**Lời giải:** Giả sử các màu tô là đỏ và đen, trong đó ô vuông góc trái trên là màu đỏ. (Vì tổng tất cả các số trong lưới hình chữ nhật là chẵn nên điều cần chứng minh cũng tương đương với tổng các ô màu đỏ là số chẵn.)



Tổng các hàng thứ nhất, thứ ba, ... (từ trên xuống), và các cột thứ nhất, thứ ba, ... (từ trái sang) bằng tổng các số trong các ô màu đen trừ đi hai lần tổng tất cả các số trong các ô màu đỏ. Vì tổng này là số chẵn nên tổng các số trong các ô đen là chẵn.

▷ **6.38.** Tìm tất cả các nghiệm thực của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{1997} = 1997 \\ x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{1997}^4 = x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_{1997}^3. \end{cases}$$

**Lời giải:** Ta sẽ chứng minh hệ trên chỉ có nghiệm  $x_1 = x_2 = \cdots = x_{1997} = 1$ .

Đặt  $S_n = x_1^n + \cdots + x_{1997}^n$ . Theo bất đẳng thức lũy thừa trung bình<sup>1</sup>,

$$\left( \frac{S_4}{1997} \right)^{1/4} \geq \frac{S_1}{1997} = 1$$

và

$$\left( \frac{S_4}{1997} \right)^{1/4} \geq \left( \frac{S_3}{1997} \right)^{1/3} = \left( \frac{S_4}{1997} \right)^{1/3}$$

do đó  $\frac{S_4}{1997} \leq 1$ .

Vì vậy bất đẳng thức lũy thừa trung bình xảy ra dấu bằng, nghĩa là  $x_1 = \cdots = x_{1997} = 1$

▷ **6.39.** Kí hiệu  $d(n)$  là số lẻ lớn nhất trong các ước số của số tự nhiên  $n$ . Ta xác định hàm  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sao cho

$$f(2n-1) = 2^n \quad \text{và} \quad f(2n) = n + \frac{2n}{d(n)} \quad \text{với mọi } n \in \mathbb{N}$$

Tìm tất cả các số  $k$  sao cho  $f(f(\cdots f(1) \cdots)) = 1997$ , ở đó  $f$  được lặp  $k$  lần.

**Lời giải:** Chỉ có một giá trị của  $k$  là 499499.

Với mỗi số chẵn  $(2^a)b$ , ở đó  $b$  là số lẻ và  $a \geq 1$ ,

$$f((2^a)b) = (2^{a-1})b + \frac{(2^a)b}{b} = (2^{a-1})b + 2^a = (2^{a-1})(b+2).$$

Do đó lũy thừa cao nhất của hai trong  $f((2^a)b)$  bằng một nửa lũy thừa cao nhất của hai trong  $(2^a)b$ . Vì vậy, lấy lặp  $a$  lần của  $f$  tại  $(2^a)b$  để được một số lẻ.

---

<sup>1</sup>"power mean inequality" (trong bản tiếng Anh), tạm dịch là "bất đẳng thức lũy thừa trung bình" (ND)

Ngoài ra, ước lẻ lớn nhất của  $f((2^a)b)$  là  $b + 2$ , lớn hơn ước lẻ lớn nhất của  $(2^a)b$  hai đơn vị. Vì vậy sau  $a$  lần lặp  $f$  tại  $(2^a)b$ , ước lẻ lớn nhất là  $b + 2a$ . Do sau  $a$  lần lặp  $f$  ta nhận được số lẻ nên  $f^a((2^a)b)$  phải bằng  $b + 2a$ .

Sau một lần lặp  $f$  tại  $2n - 1$ , ở đó  $n \geq 1$ , ta nhận được  $2^n$ . Đặt  $a = n$  và  $b = 1$ . Ta thấy phải lặp thêm  $n$  lần nữa mới nhận được số lẻ, số đó là,  $b + 2a = 2n + 1$ . Vì vậy phải lặp  $n + 1$  lần cho  $f$  tại  $2n - 1$  để nhận được số lẻ tiếp theo,  $2n + 1$ .

Ta dễ thấy là không có số lẻ nào xuất hiện hai lần khi lặp  $f$  tại 1, bởi vì dãy các số lẻ nhận được từ việc lặp  $f$  tại bất kì số nguyên dương nào cũng là một dãy tăng ngặt. Đặc biệt, tồn tại một giá trị  $k$  sao cho  $f^{(k)}(1) = 1997$ , và số  $k$  đó là duy nhất.

Bây giờ ta chứng minh bằng quy nạp rằng

$$f^{\frac{n(n+1)}{2}-1}(1) = 2n - 1.$$

Dễ thấy điều đó đúng tại  $n = 1$ . Sau đó giả sử nó đúng với  $n = k$ ,

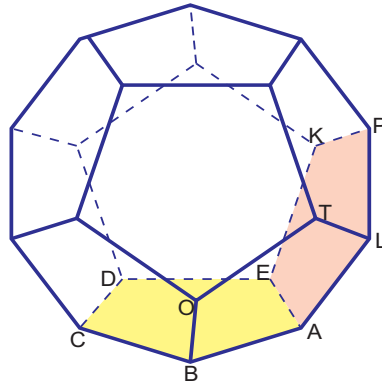
$$f^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}-1}(1) = f^{k+1}\left(f^{\frac{k(k+1)}{2}-1}(1)\right) = f^{k+1}(2k - 1) = 2k + 1$$

Vì  $1997 = 2(999) - 1$ , ta có

$$f^{\frac{999 \cdot 1000}{2}-1}(1) = f^{499499}(1) = 1997,$$

nên  $k = 499499$  thoả mãn yêu cầu đề bài, và do lập luận trên,  $k$  là duy nhất.

- **6.40.** Hai ngũ giác đều  $ABCDE$  và  $AEKPL$  trong không gian sao cho  $\widehat{DAK} = 60^\circ$ . Chứng minh rằng hai mặt phẳng  $ACK$  và  $BAL$  vuông góc.



**Lời giải:** Nếu ta quay  $AEKPL$  quanh trục  $AE$ , bắt đầu ở vị trí trùng nhau với  $ABCDE$ , thì góc  $\widehat{DAK}$  tăng cho đến khi  $AEKPL$  lại nằm trên mặt phẳng chứa  $ABCDE$ . (Điều này có thể nhận được bằng cách tính toán thấy tích vô hướng của vectơ  $AD$  và  $AK$  tăng trong một khoảng xác định). Vì vậy có một góc duy nhất giữa các mặt phẳng sao cho góc  $\widehat{DAK} = 60^\circ$ . Thật vậy, điều này xảy ra khi các hình ngũ giác là hai mặt của khối mười hai mặt đều <sup>2</sup> (do tính chất đối xứng, tam giác  $DAK$  là đều trong trường hợp này). Đặc biệt, mặt phẳng  $BAL$  là mặt phẳng chứa mặt thứ ba qua đỉnh  $A$  của khối mười hai mặt đều, ta gọi mặt đó là  $BALTO$ .

Sử dụng thêm dấu phẩy sau tên điểm để ký hiệu hình chiếu tương ứng của các điểm xuống mặt phẳng  $ABCDE$ . Khi đó  $K'$  nằm trên đường phân giác của góc  $\widehat{DEA}$ . Lập hệ trục tọa độ sao cho  $ABCDE$  nằm trên mặt phẳng  $Oxy$  theo chiều kim đồng hồ, và  $\overrightarrow{K'E}$  cùng chiều với chiều dương của trục  $Ox$ . Xét hai vectơ  $\overrightarrow{EK}$  và  $\overrightarrow{EA}$ . Vectơ thứ nhất không có thành phần  $y$ , và vectơ thứ hai không có thành phần  $z$ . Do đó tích vô hướng của hai vectơ đó bằng tích các thành phần  $x$  của chúng. Vì  $AE$  và  $K'E$  tạo với nhau góc  $54^\circ$ ,  $\overrightarrow{EA}$  có thành phần  $x$  được tính bởi  $AE(\cos 54^\circ) = \cos 54^\circ$ .  $\overrightarrow{EK}$  có thành phần  $x$  là  $-K'E$ . Do đó tích vô hướng của chúng bằng  $-K'E(\cos 54^\circ)$ . Mặt khác  $\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{EA} = EK \cdot EA \cdot \cos \widehat{KEA} = (1) \cdot (1) \cdot \cos(108^\circ) = -\cos 72^\circ$ . Lập phương trình từ hai kết quả trên ta nhận được  $K'E = \frac{\cos 72^\circ}{\cos 54^\circ}$ .

Các tính toán trên vectơ sau đây sẽ chứng tỏ  $K'A$  và  $AC$  vuông góc:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{K'A} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{K'E} + \overrightarrow{EA}) \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= K'E \cdot AC \cos 54^\circ - CA \cdot AC \cos 72^\circ \\ &= \frac{\cos 72^\circ}{\cos 54^\circ} \cos 54^\circ - \cos 72^\circ = 0 \end{aligned}$$

Vì  $BO'$  vuông góc với  $AC$  và  $BO$  song song với  $AT$ , nên  $AT'$  vuông góc với  $AC$ . Vì vậy các điểm  $K', A, T'$  thẳng hàng. Vì  $K, A, T$  không thẳng hàng nên mặt phẳng  $AKT$  vuông góc với mặt phẳng chứa  $ABCDE$ . Quay xung quanh  $A$ , ta suy ra mặt phẳng  $ACK$  vuông góc với mặt

<sup>2</sup>khối thập nhị diện đều (ND)

phẳng chứa *BALTO*, từ đó có điều phải chứng minh.

- **6.41.** Cho phương trình  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  có ba nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình sau có bao nhiêu nghiệm thực:

$$4(ax^3 + bx^2 + cx + d)(3ax + b) = (3ax^2 + 2bx + c)^2$$

**Lời giải:** Đặt  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  và  $Q(x) = 2P(x)P''(x) - [P'(x)]^2$ , ta sẽ đếm số nghiệm thực của  $Q(x) = 0$ . Ta có thể thực hiện một số phép rút gọn mà không thay đổi số nghiệm thực của  $Q(x)$ . Trước tiên ta chia  $P$  cho một hệ số tỉ lệ sao cho  $a = 1$ . Sau đó ta tịnh tiến  $x$  sao cho nghiệm đứng giữa của  $P$  là 0, tức là  $d = 0$  và  $c < 0$ . Khi đó:

$$Q(x) = 3x^4 + 4bx^3 + 6cx^2 - c^2.$$

Bây giờ ta áp dụng quy tắc dấu Descartes để đếm số nghiệm của  $Q(x)$ . Dấu của  $Q(x)$  là  $+, s, -, -$  và của  $Q(-x)$  là  $+, -s, -, -$ , ở đó  $s$  là dấu của  $b$ . Trong trường hợp nào thì mỗi dãy trên cũng chỉ có đúng một lần đổi dấu. Vì vậy  $Q$  có một nghiệm âm và một nghiệm dương, tức là  $Q$  có tất cả hai nghiệm thực.

- **6.42.** Kí hiệu  $\mathbb{Q}^+$  là tập tất cả các số hữu tỉ dương. Tìm tất cả các hàm số  $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$  sao cho với mọi  $x \in \mathbb{Q}^+$ :

(a)  $f(x+1) = f(x) + 1$

(b)  $f(x^2) = f(x)^2$ .

**Lời giải:** Chỉ có một hàm số thoả mãn là  $f(x) = x$ . Từ (a),  $f(x+n) = f(x) + n$  với mọi  $n$  nguyên dương. Đặt  $x = \frac{p}{q}$  với  $p, q$  nguyên dương. Ta có:

$$f\left(\frac{p+q^2}{q}\right)^2 = \left(q + f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^2 = q^2 + 2qf\left(\frac{p}{q}\right) + f\left(\frac{p}{q}\right)^2.$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p+q^2}{q}\right)^2 &= f\left(\frac{(p+q^2)^2}{q^2}\right) \\ &= f\left(q^2 + 2p + \frac{p^2}{q^2}\right) = q^2 + 2p + f\left(\frac{p}{q}\right)^2. \end{aligned}$$

Từ hai phương trình trên suy ra

$$2qf\left(\frac{p}{q}\right) = 2p$$

vì vậy  $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$ .

▷ **6.43.** *Tìm số nguyên  $n$  nhỏ nhất sao cho với mỗi  $n$  số nguyên tùy ý, tồn tại 18 số nguyên trong đó có tổng chia hết cho 18.*

**Lời giải:** Giá trị nhỏ nhất của  $n$  là  $n = 35$ ; tập hợp 34 phần tử gồm 17 số không và 17 số một cho ta thấy rằng  $n \geq 35$ . Vì vậy ta chỉ còn phải chứng minh rằng với 35 số nguyên bất kì luôn tìm được 18 số trong đó có tổng chia hết cho 18. Thực ra ta sẽ chứng minh rằng với mọi  $n$ , trong  $2n - 1$  số nguyên luôn tìm được  $n$  số có tổng chia hết cho  $n$ .

Ta sẽ chứng minh khẳng định trên bằng quy nạp theo  $n$ . Dễ thấy điều đó đúng với  $n = 1$ . Nếu  $n$  là hợp số, viết  $n = pq$ , ta có thể lấy ra tập  $p$  số nguyên mà tổng chia hết cho  $p$  cho đến khi còn lại ít nhất  $2p - 1$  số; ta có  $2q - 1$  tập như vậy, và lại theo giả thiết quy nạp, có  $q$  tập trong số đó có tổng (của  $pq$  số) chia hết cho  $q$ .

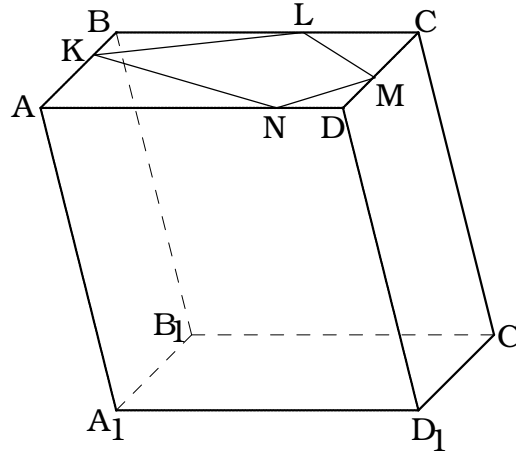
Bây giờ giả sử  $n = p$  là số nguyên tố. Số  $x$  chia hết cho  $p$  nếu và chỉ nếu  $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Vì vậy nếu khẳng định trên sai thì tổng các số dạng  $(a_1 + \dots + a_p)^{p-1}$  trên mọi tập con  $\{a_1, \dots, a_p\}$  của các số đã cho đồng dư với  $C_{2p-1}^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ . Mặt khác, tổng của các số dạng  $a_1^{e_1} \dots a_p^{e_p}$  với  $e_1 + \dots + e_p \leq p - 1$  luôn chia hết cho  $p$ : nếu  $k \leq p - 1$  các số  $e_i$  khác không thì mỗi tích được lặp lại  $C_{2p-1-k}^{p-k}$  lần, và cuối cùng là một bội của  $p$ . Sự mâu thuẫn đó chứng tỏ khẳng định ở trên là đúng trong trường hợp này. (Chú ý: để chứng minh bài toán đã cho, cần phải chứng minh trực tiếp cho trường hợp  $p = 2, 3$ .)

▷ **6.44.** *Các điểm  $K, L, M, N$  nằm trên các cạnh  $AB, BC, CD, DA$  của hình hộp (không cần là hình hộp đứng)  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Chứng minh rằng các tâm mặt cầu ngoại tiếp của các tứ diện  $A_1 AKN, B_1 BKL, C_1 CLM, D_1 DMN$  là các đỉnh của một hình bình hành.*

**Lời giải:** Đưa vào hệ tọa độ với  $ABCD$  song song với  $z = 0$ . Gọi  $E, F, G, H$  là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác



$AKN, BKL, CLM, DMN$  và gọi  $W, X, Y, Z$  là tâm mặt cầu ngoại tiếp các tứ diện  $A_1AKN, B_1BKL, C_1CLM, D_1DMN$ . Với mỗi điểm  $Q$  ta kí hiệu  $Q_1, Q_2, Q_3$  là các tọa độ  $x, y, z$  của  $Q$ .



Trước tiên ta sẽ chứng minh  $EFGH$  là hình bình hành, bằng cách chứng minh trung điểm của  $EG$  và  $FH$  trùng nhau. Chỉ cần chứng minh điều đó với hình chiếu của các đoạn thẳng trên hai phương khác nhau (chẳng hạn, xây dựng hệ trục theo các phương đó). Nhưng rõ ràng với phép chiếu trên  $AB$ , vì  $E$  và  $F$  chiếu tương ứng xuống trung điểm của  $AK$  và  $BK$ , nên đoạn thẳng giữa chúng có chiều dài  $\frac{AB}{2}$ , tương tự với  $CD$ . Ta cũng có lập luận như vậy với phép chiếu trên  $CD$ .

Bây giờ ta có  $E_1 + G_1 = F_1 + H_1$  và  $E_2 + G_2 = F_2 + H_2$ . Hơn nữa, vì  $W$  và  $E$  cách đều  $AKN$ ,  $WE$  vuông góc với  $AKN$  nên vuông góc với mặt phẳng  $z = 0$ . Vậy  $W_1 = E_1$  và  $W_2 = E_2$ , tương tự với  $X, Y, Z$ . Vật  $W_1 + Y_1 = X_1 + Z_1$  và  $W_2 + Y_2 = X_2 + Z_2$ . Ta chỉ còn phải chứng minh  $W_3 + Y_3 = X_3 + Z_3$ . Chú ý rằng cả  $W$  và  $X$  đều nằm trên mặt phẳng vuông góc với  $ABB_1A_1$  và đi qua trung điểm của  $AA_1$  và  $BB_1$ . Do đó  $W_3 = aW_1 + bW_2 + c$  và  $X_3 = aX_1 + bX_2 + c$  với  $a, b, c$  là các hằng số. Tương tự,  $Y$  và  $Z$  đều nằm trên mặt phẳng vuông góc  $CDD_1C_1$  và qua trung điểm của  $CC_1, DD_1$ . Vì  $DCC_1D_1$  song song và bằng  $ABB_1A_1$ , ta có  $Y_3 = aY_1 + bY_2 + d$  và  $Z_3 = aZ_1 + bZ_2 + d$  với  $d$  là một hằng số khác, còn  $a, b$  là các hằng số ở công thức trên. Bởi vậy  $W_3 + Y_3 = X_3 + Z_3$ , từ đó hoàn thành chứng minh rằng  $WXYZ$  là hình bình hành.

# Chương 7

## Đề thi olympic Anh

▷**7.45.** Giả sử  $M$  và  $N$  là hai số nguyên dương có 9 chữ số có tính chất là nếu bất kì chữ số của  $M$  được thay bởi chữ số của  $N$  tương ứng thì ta được một bội của 7. Chứng minh rằng với bất kì một số đạt được bằng cách thay một chữ số của  $N$  tương ứng bởi một chữ số của  $M$  cũng là một bội của 7.

Tìm một số nguyên  $d > 9$  sao cho kết quả trên vẫn còn đúng khi  $M$  và  $N$  là hai số nguyên dương có  $d$  chữ số.

**Lời giải:** Kết quả đúng với bất kì  $d \equiv 2 \pmod{7}$ . Viết  $M = \sum_k 10^k m_k$ ,  $N = \sum_k 10^k n_k$ , ở đây  $m_k, n_k$  là các chữ số. Thì với bất kì  $k$ ,  $10^k(n_k - m_k) \equiv 0 - M \pmod{7}$ . Lấy tổng theo  $k$ , chúng ta được  $M - N \equiv dM \equiv 2M \pmod{7}$ , vì vậy  $N \equiv -M \pmod{7}$ , được  $10^k(m_k - n_k) \equiv -N \pmod{7}$ . Vậy khi thay bất kì chữ số trong  $N$  bởi chữ số tương ứng trong  $M$  chúng ta đạt được một số chia hết cho 7.

▷**7.46.** Trong tam giác nhọn  $ABC$ ,  $CF$  là một đường cao, với  $F$  trên  $AB$ , và  $BM$  là một trung tuyến, với  $M$  trên  $CA$ . Cho  $BM = CF$  và  $\angle MBC = \angle FCA$ , chứng minh rằng tam giác  $ABC$  là đều.

**Lời giải:** Giả sử  $\angle ACF = \angle CBM = A$ , và giả sử  $CM = AM = m$ . Thì  $MB = CF = 2m \cos A$ . Theo định lí hàm số Sin,

$$\frac{CM}{\sin \angle CBM} = \frac{MB}{\sin \angle MCB},$$

và vì vậy  $\sin \angle MCB = 2 \cos A \sin A = \sin 2A$ .

Điều này đưa đến hai khả năng. Nếu  $\angle MCB + 2A = 180^\circ$ , thì  $\angle CMB = A = \angle MBC$ . Khi đó  $CB = MC$  và  $MB = 2MC \sin A$ . Cũng có  $MB = CF = AC \cos A = 2MC \cos A$ . Do đó  $\sin A = \cos A$  vì vậy  $A \geq 45^\circ \geq \angle MCB \geq 90^\circ$ , mâu thuẫn.

Vì vậy chúng ta có  $\angle MCB = 2A$ , vì vậy  $\angle ACF = \angle BCF$ . Do đó tam giác  $ACF$  đồng dạng với tam giác  $CBM$ , vì vậy  $\angle CAF = \angle BCM$ . Do đó  $BC = AB$ , vậy tam giác  $ABC$  là đều.

► **7.47.** Tìm số các đa thức bậc 5 với các hệ số khác nhau từ tập  $\{1, 2, \dots, 9\}$  mà chia hết cho  $x^2 - x + 1$ .

**Lời giải:** Cho phương trình bậc 5 là  $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$ . Các nghiệm của  $x^2 - x + 1$  không phải là các nghiệm thực của  $x^3 + 1$ , đó là  $e^{\pi i/3}$  và  $e^{5\pi i/3}$ . Do đó đa thức bậc 5 là chia hết cho  $x^2 - x + 1$  nếu và chỉ nếu

$$ae^{5\pi i/3} + be^{4\pi i/3} + ce^{\pi i} + de^{2\pi i/3} + ee^{\pi i/3} + f = 0.$$

Nói các khác, vì vậy  $i \sin 60(-a - b + d + e = 0)$ , hoặc  $a - d = e - b$  và  $a/2 - b/2 - c - d/2 + e/2 + f = 0$ , hay  $e + 2f + a = b + 2c + d$  hoặc (vì  $a - d = e - b$ )  $a - d = c - f = e - b$ . Điều này kéo theo 1/12 của đa thức sẽ có các hệ số  $p + k, q, r + k, p, q + k, r$  với  $k > 0$  và  $p \leq q \leq r$ .

Với  $k$  đã cho, có  $C_{9-k}^3$  các giá trị của  $p, q, r$  sao cho  $r + k \leq 9$ . Tuy nhiên, các hệ số phải khác nhau, nên chúng ta phải trừ đi. Có  $9 - 2k$  cách lựa chọn 2 số khác nhau theo  $k$ , và  $7 - k$  cách lựa chọn các số còn lại. Tuy nhiên, chúng ta đếm được các số dạng  $x, x + d, x + 2d$  sinh đôi, và có  $9 - 2k$  số.

Do đó, với  $k$  cho trước, chúng ta có

$$C_{9-k}^3 - (9 - 2k)(7 - k) + 9 - 3k$$

đa thức. Cộng lại, có  $(1+4+10+20+35+56) - (42+25+12+3) + (3+6) = 53$  đa thức dạng trên, và  $53 \cdot 12 = 636$  các đa thức tất cả.

► **7.48.** Tập  $S = \{1/r : r = 1, 2, 3, \dots\}$  các số nguyên dương nghịch đảo lập thành cấp số cộng với độ dài tùy ý. Chẳng hạn,  $1/20, 1/8, 1/5$  là một

cấp số như vậy, với độ dài là 3 với phương sai là  $3/40$ . Hơn nữa, có một cấp số cực đại trong  $S$  với độ dài 3 vì nó không thể mở rộng thêm về bên phải và bên trái của  $S$  ( $-1/40$  và  $11/40$  không là phần tử của  $S$ ).

(a) Tìm một cấp số cực đại trong  $S$  có độ dài 1996.

(b) Có hay không một cấp số trong  $S$  có độ dài 1997?

**Lời giải:** Có một cấp số cực đại có độ dài  $n$ , với mọi  $n > 1$ . Theo định lý Dirichlet kéo theo rằng có một số nguyên tố  $p$  có dạng  $1 + dn$  với mỗi số nguyên dương  $d$ . Bây giờ xét cấp số

$$\frac{1}{(p-1)!}, \frac{1+d}{(p-1)!}, \dots, \frac{1+(n-1)d}{(p-1)!}.$$

Vì các mẫu số chia hết từ số, nên mỗi phân thức là một số nguyên nghịch đảo, nhưng với  $(1+nd)/(p-1)! = p/(p-1)!$  không phải vì  $p$  là số nguyên tố. Do đó có dãy cấp số cực đại. (Để giải (a), đơn giản lấy  $p = 1997$ .)