

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề.

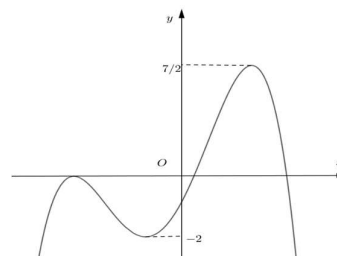
**Câu 1( 7 điểm)**

a) Tìm tất cả giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^2 - 4x}{x + m}$  đồng biến trên  $[1; +\infty)$ .

b) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 \\ x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{y} = 2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

**Câu 2( 5 điểm)**

- a) Cho tập hợp  $A = \{1; 2; 3; 4; \dots; 100\}$ . Gọi  $S$  là tập hợp gồm tất cả các tập con của  $A$ , mỗi tập con này gồm 3 phần tử của  $A$  và có tổng bằng 91. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của  $S$ . Xác suất chọn được phần tử có 3 số lập thành cấp số nhân bằng?
- b) Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương nhỏ hơn 5 của tham số  $m$  để hàm số  $y = |f(x+3) + 5 - m|$  có 5 điểm cực trị?



**Câu 3( 2 điểm)** Một mảnh đất hình chữ nhật  $ABCD$  có chiều dài  $AB = 25m$ , chiều rộng  $AD = 20m$  được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn  $MN$  ( $M, N$  lần lượt là trung điểm  $BC$  và  $AD$ ). Một đội xây dựng làm một con đường đi từ  $A$  đến  $C$  qua vạch chắn  $MN$ , biết khi làm đường trên miền  $ABMN$  mỗi giờ làm được  $15m$  và khi làm trong miền  $CDNM$  mỗi giờ làm được  $30m$ . Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con đường đi từ  $A$  đến  $C$ .

**Câu 4( 6 điểm)**

- a) Cho khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$ . Khoảng cách từ  $C$  đến đường thẳng  $BB'$  bằng  $\sqrt{5}$ , khoảng cách từ  $A$  đến các đường thẳng  $BB'$  và  $CC'$  lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của  $A$  lên mặt phẳng  $(A'B'C')$  là trung điểm  $M$  của  $B'C'$  và  $A'M = \sqrt{5}$ . Thể tích của khối lăng trụ đã cho
- b) Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC$ . Điểm  $I$  thuộc đoạn  $SA$ . Biết mặt phẳng  $(MNI)$  chia khối chóp  $S.ABCD$  thành hai phần, phần chứa đỉnh  $S$  có thể tích bằng  $\frac{7}{13}$  lần phần còn lại. Tính tỉ số  $k = \frac{IA}{IS}$ ?

**Câu 5( 2 điểm)** Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau. Kí hiệu  $S, S_1, S_2, S_3$  lần lượt là diện tích các tam giác  $ABC, OAB, OBC, OCA$ . Chứng minh rằng

$$\frac{S_1^2}{2S_1^2 + S^2} + \frac{S_2^2}{2S_2^2 + S^2} + \frac{S_3^2}{2S_3^2 + S^2} \leq \frac{3}{5}.$$

## ĐÁP ÁN

**Câu 1 a)** Tìm tất cả giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x^2 - 4x}{x + m}$  đồng biến trên  $[1; +\infty)$ .

### Lời giải

$$y = \frac{x^2 - 4x}{x + m} \text{ có tập xác định là } D = \mathbb{R} \setminus \{-m\} \text{ và } y' = \frac{x^2 + 2mx - 4m}{(x + m)^2}.$$

$$\text{Hàm số đã cho đồng biến trên } [1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m < 1 \\ x^2 + 2mx - 4m \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \end{cases}$$

$$x^2 + 2mx - 4m \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow 2m(x - 2) \geq -x^2, \forall x \in [1; +\infty) \quad (1)$$

Do  $x = 2$  thỏa bất phương trình  $2m(x - 2) \geq -x^2$  với mọi  $m$  nên ta chỉ cần xét  $x \neq 2$ .

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \leq \frac{-x^2}{x-2}, \forall x \in [1; 2) \\ 2m \geq \frac{-x^2}{x-2}, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{-x^2}{x-2} \text{ trên } [1; +\infty) \setminus \{2\} \text{ có } f'(x) = \frac{-x^2 + 4x}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|      |   |           |    |           |
|------|---|-----------|----|-----------|
| $x$  | 1 | 2         | 4  | $+\infty$ |
| $y'$ |   |           | 0  |           |
|      |   |           |    |           |
| $y$  | 1 | $+\infty$ | -8 | $-\infty$ |

$$YCBT \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ 2m \leq 1 \\ 2m \geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq \frac{1}{2}.$$

**Câu 1b)**

$$\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 & (1) \\ x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{y-2} & (2). \end{cases} \quad \text{Điều kiện: } -2\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3}; \quad 2 \leq y \leq 12.$$

Ta có  $x\sqrt{12-y} \leq \frac{x^2 + 12 - y}{2}$  và  $\sqrt{y(12-x^2)} \leq \frac{y + 12 - x^2}{2}$   
 nên  $x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} \leq 12$ . Do đó (1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 12 - x^2. \end{cases}$

Thay vào (2) ta được  $x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{10-x^2} \Leftrightarrow x^3 - 8x - 3 + 2(1 - \sqrt{10-x^2}) = 0$   
 $\Leftrightarrow (x-3)\left(x^2 + 3x + 1 + \frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}\right) = 0 \quad (3).$

Do  $x \geq 0$  nên  $x^2 + 3x + 1 + \frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}} > 0$ .

Do đó (3)  $\Leftrightarrow x = 3$ . Thay vào hệ và đối chiếu điều kiện ta được nghiệm:  $(x; y) = (3; 3)$ .

**Câu 2a** Cho tập hợp  $A = \{1; 2; 3; 4; \dots; 100\}$ . Gọi  $S$  là tập hợp gồm tất cả các tập con của  $A$ , mỗi tập con này gồm 3 phần tử của  $A$  và có tổng bằng 91. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của  $S$ . Xác suất chọn được phần tử có 3 số lập thành cấp số nhân bằng?

**Lời giải**

Giả sử tập con bất kì  $\{a, b, c\} \in S$

$$\Rightarrow 1 \leq a, b, c \leq 100; a, b, c \text{ phân biệt.}$$

$$a + b + c = 91.$$

Đây là bài toán chia kẹo Euler nên số bộ  $a, b, c$  là:  $C_{91-1}^{3-1}$

Tuy nhiên trong các bộ trên vẫn chứa các bộ có 2 chữ số giống nhau, số bộ có 2 chữ số giống nhau là  $3.45 = 135$  (bộ). Vậy  $n(\Omega) = (C_{90}^2 - 3.45): 3! = 645$ .

Gọi  $A$  là biến cố: " $a, b, c$  lập thành cấp số nhân"

Gọi  $q$  là công bội của cấp số nhân theo bài ra ta có  $q > 0$

$$a + aq + aq^2 = 91$$

$$\Leftrightarrow a(1 + q + q^2) = 1.91 = 13.7$$

Trường hợp 1:  $\begin{cases} a = 1 \\ 1 + q + q^2 = 91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ q = 9 \end{cases}$

Trường hợp 2:  $\begin{cases} a = 91 \\ 1 + q + q^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 91 \\ q = 0 \end{cases} \text{ (loại)}$

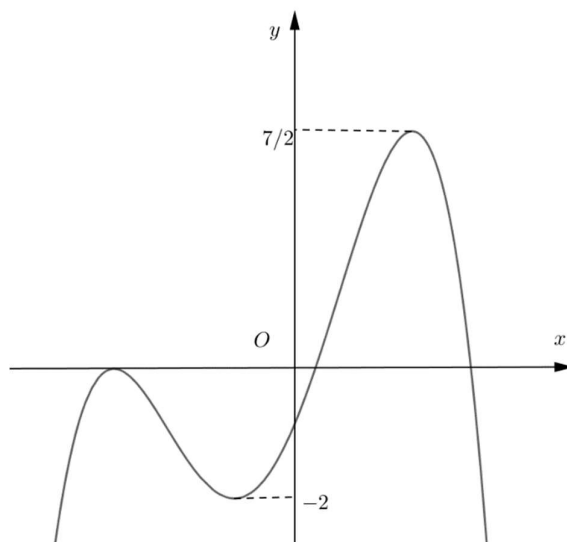
Trường hợp 3:  $\begin{cases} a = 13 \\ 1 + q + q^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 \\ q = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$

Trường hợp 3:  $\begin{cases} a = 7 \\ 1 + q + q^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ q = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$

Vậy  $n(A) = 3$ .

$$P(A) = \frac{3}{645}.$$

**Câu 2b.** Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số  $y = f(x)$



Có bao nhiêu giá trị tham số  $m$  để hàm số  $y = |f(x+3) + 5 - m|$  có 5 điểm cực trị?

**Lời giải**

Đồ thị  $(C')$ :  $y = f(x+3)$  có được bằng cách tịnh tiến đồ thị  $(C)$ :  $y = f(x)$  sang trái 3 đơn vị, nên số giao điểm của đồ thị với trục  $Ox$  là không đổi.

Vì  $0 < m < 5 \Rightarrow 5 - m > 0$  nên  $(C'')$ :  $y = f(x+3) + 5 - m$  có được bằng cách tịnh tiến  $(C')$ :  $y = f(x+3)$  lên trên  $(5 - m)$  đơn vị.

Đặt  $y = g(x) = f(x+3) + 5 - m$  thì hàm số  $y = g(x)$  có 3 điểm cực trị.

Số điểm cực trị của hàm số  $y = |g(x)|$  bằng tổng số điểm cực trị của hàm  $y = g(x)$  và số nghiệm bội lẻ của  $g(x) = 0$ .

+) Nếu  $0 < 5 - m < \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < m < 5$ , hàm  $y = g(x)$  có 3 điểm cực trị và  $g(x) = 0$  có 2 nghiệm bội lẻ, suy ra số điểm cực trị của hàm số  $y = |g(x)|$  bằng 5.

+) Nếu  $5 - m = \frac{7}{2} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ , hàm  $y = g(x)$  có 3 điểm cực trị và  $g(x) = 0$  có 1 nghiệm bội chẵn, suy ra số điểm cực trị của hàm số  $y = |g(x)|$  bằng 3.

+) Nếu  $5 - m > \frac{7}{2} \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$ , hàm  $y = g(x)$  có 3 điểm cực trị và  $g(x) = 0$  không có nghiệm, suy ra số điểm cực trị của hàm số  $y = |g(x)|$  bằng 3.

+) Nếu  $-2 < 5 - m < 0 \Leftrightarrow 5 < m < 7$ , hàm  $y = g(x)$  có 3 điểm cực trị và  $g(x) = 0$  có 4 nghiệm bội lẻ, suy ra số điểm cực trị của hàm số  $y = |g(x)|$  bằng 7.

+) Nếu  $5 - m < -2 \Leftrightarrow m < 7$ , hàm  $y = g(x)$  có 3 điểm cực trị và  $g(x) = 0$  có 2 nghiệm bội lẻ, suy ra số điểm cực trị của hàm số  $y = |g(x)|$  bằng 5.

+) Nếu  $-2 = 5 - m \Leftrightarrow m = 7$ , hàm  $y = g(x)$  có 3 điểm cực trị và  $g(x) = 0$  có 2 nghiệm bội lẻ, 1 bội chẵn suy ra số điểm cực trị của hàm số  $y = |g(x)|$  bằng 5.

+) Nếu  $5 - m = 0 \Leftrightarrow m = 5$ , hàm  $y = g(x)$  có 3 điểm cực trị và  $g(x) = 0$  có 2 nghiệm bội lẻ, 1 nghiệm bội chẵn suy ra số điểm cực trị của hàm số  $y = |g(x)|$  bằng 5.

$$\text{Vậy để hàm số } y = |f(x+3) + 5 - m| \text{ có 5 điểm cực trị thì } \begin{cases} \frac{3}{2} < m < 5 \\ m < 7 \\ m = 7 \\ m = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < m \leq 7.$$

Câu 3) Giả sử con đường đi từ A đến C gặp vách chắn MN tại E.

$$\text{đặt } NE = x(m) (x \in [0; 25]) \Rightarrow AE = \sqrt{x^2 + 10^2};$$

$$CE = \sqrt{(25-x)^2 + 10^2}.$$

Thời gian làm đường đi từ A đến C là:

$$t(x) = \frac{AE}{15} + \frac{CE}{30} = \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{15} + \frac{\sqrt{(25-x)^2 + 100}}{30} (h).$$

$$t'(x) = \frac{x}{15\sqrt{x^2 + 100}} - \frac{(25-x)}{30\sqrt{(25-x)^2 + 100}};$$

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\sqrt{(25-x)^2 + 100} = (25-x)\sqrt{x^2 + 100}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(25-x) \geq 0 \\ 4x^2[(25-x)^2 + 100] = (25-x)^2(x^2 + 100) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 25 \\ 4(25-x)^2(x^2 - 25) + x^2[400 - (25-x)^2] = 0 \end{cases}$$

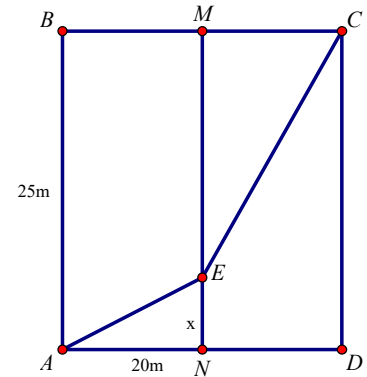
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 25 \\ 4(25-x)^2(x^2 - 5^2) + x^2[20^2 - (25-x)^2] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 25 \\ 4(25-x)^2(x-5)(x+5) + x^2(20-25+x)(20+25-x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 25 \\ 4(25-x)^2(x-5)(x+5) - x^2(x-5)(45-x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 25 \\ (x-5)[4(25-x)^2(x+5) + x^2(45-x)] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 5;$$



$\Rightarrow$  Thời gian ngắn nhất làm con đường từ A đến C là  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$  (giờ).

Ta có  $AJ \perp BB'$  (1).

Từ (1) và (2) suy ra  $BB' \perp (AJK) \Rightarrow BB' \perp JK \Rightarrow JK \parallel CH \Rightarrow JK = CH = \sqrt{5}$ .

Gọi  $F$  là trung điểm  $JK$  khi đó ta có  $AF = JF = FK = \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

$$\cos \widehat{NAF} = \frac{AF}{AN} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{NAF} = 60^\circ. (AN = AM = \sqrt{5} \text{ vì } AN // AM \text{ và } AN = AM).$$

Vậy ta có  $S_{\Delta AJK} = \frac{1}{2} AJ \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1 \Rightarrow S_{\Delta AJK} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{S_{\Delta AJK}}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ .

Xét tam giác  $AMA'$  vuông tại  $M$  ta có  $\widehat{MAA'} = \widehat{AMF} = 30^\circ$  hay  $AM = A'M \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{15}}{3}$ .

Vậy thể tích khối lăng trụ là  $V = AM.S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{15}}{3}.2 = \frac{2\sqrt{15}}{3}$ .

phần chứa đỉnh  $S$  có thể tích bằng  $\frac{7}{13}$  lần phần còn lại. Tính tỉ số  $k = \frac{IA}{IS}$ ?

- A.**  $\frac{1}{2}$ .

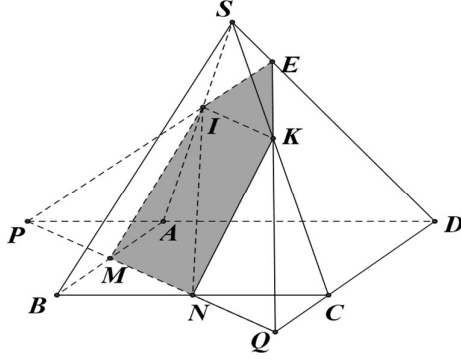
- B.**  $\frac{2}{3}$ .

- C.**  $\frac{1}{3}$ .

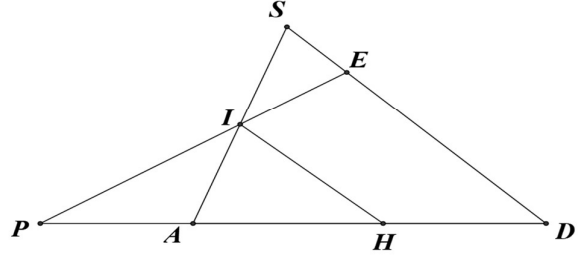
- D.**  $\frac{3}{4}$ .

## Lời giải

### Chọn B



Hình 1



Hình 2

Mặt phẳng  $(MNI)$  cắt khối chóp theo thiết diện như hình 1. Đặt  $V_{S.ABCD} = V$ .

$$\text{Ta có } S_{\triangle APM} = S_{\triangle BMN} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{8} S_{ABCD} \Rightarrow \frac{S_{\triangle APM}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{8}.$$

$$\frac{d(I, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{IA}{SA} = \frac{k}{k+1}.$$

$$\Rightarrow \frac{V_{I.APM}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{\triangle APM}}{S_{ABCD}} \cdot \frac{d(I, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{k}{8(k+1)} \Rightarrow V_{I.APM} = \frac{k}{8(k+1)} V.$$

Do  $MN \parallel AC \Rightarrow IK \parallel AC \Rightarrow IK \parallel (ABCD) \Rightarrow d(I, (ABCD)) = d(K, (ABCD))$ .

$$\text{Mà } S_{\triangle APM} = S_{\triangle NCQ} \Rightarrow V_{I.APM} = V_{K.NCQ} = \frac{k}{8(k+1)} V.$$

Kẻ  $IH \parallel SD$  ( $H \in SD$ ) như hình 2. Ta có :

$$\frac{IH}{SD} = \frac{AH}{AD} = \frac{AI}{AS} = \frac{k}{k+1}.$$

$$\frac{IH}{ED} = \frac{PH}{PD} = \frac{PA}{PD} + \frac{AH}{PD} = \frac{PA}{PD} + \frac{2AH}{3AD} = \frac{1}{3} + \frac{2k}{3(k+1)} = \frac{3k+1}{3(k+1)}.$$

$$\Rightarrow \frac{ED}{SD} = \frac{IH}{SD} \cdot \frac{ID}{ED} = \frac{3k}{3k+1} \Rightarrow \frac{d(E, (ABCD))}{d(S, (ABCD))} = \frac{ED}{SD} = \frac{3k}{3k+1}.$$

$$\frac{S_{\triangle PQD}}{S_{ABCD}} = \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{V_{E.PQD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{27k}{24k+8} \Rightarrow V_{E.PQD} = \frac{27k}{24k+8} V.$$

$$V_{EIKAMNCD} = \frac{13}{20} V \Leftrightarrow V_{E.PDC} - V_{I.APM} - V_{K.NCQ} = \frac{13}{20} V$$

$$\Leftrightarrow \frac{27k}{8(3k+1)} V - \frac{k}{8(k+1)} V - \frac{k}{8(k+1)} V = \frac{13}{20} V$$

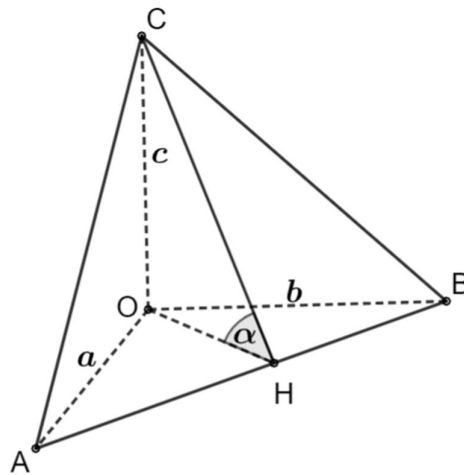
$$\Leftrightarrow \frac{27k}{2(3k+1)} - \frac{k}{k+1} = \frac{13}{5} \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$$

**Câu 5( 2 điểm)** Cho tứ diện  $OABC$  có  $OA, OB, OC$  đôi một vuông góc với nhau. Kí hiệu  $S, S_1, S_2, S_3$  lần lượt là diện tích các tam giác  $ABC, OAB, OBC, OCA$ . Chứng minh rằng

$$\frac{S_1^2}{2S_1^2 + S^2} + \frac{S_2^2}{2S_2^2 + S^2} + \frac{S_3^2}{2S_3^2 + S^2} \leq \frac{3}{5}.$$

**Lời giải**

Đặt  $OA = a, OB = b, OC = c$ . Gọi  $H$  là hình chiếu của  $O$  xuống  $AB$ ,  $\alpha$  là góc giữa  $(ABC)$  và  $(OAB)$ .



$$\text{Ta có } \frac{S^2}{S_1^2} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + 1 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + 1 = \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2 b^2}$$

$$\text{suy ra } \frac{S_1^2}{2S_1^2 + S^2} = \frac{1}{2 + \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2 b^2}} = \frac{a^2 b^2}{3a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}.$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{S_2^2}{2S_2^2 + S^2} = \frac{b^2 c^2}{a^2 b^2 + 3b^2 c^2 + c^2 a^2}, \frac{S_3^2}{2S_3^2 + S^2} = \frac{c^2 a^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + 3c^2 a^2}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = a^2 b^2 \\ y = b^2 c^2 \\ z = c^2 a^2 \end{cases} \text{ và biểu thức } F = \frac{x}{3x + y + z} + \frac{y}{x + 3y + z} + \frac{z}{x + y + 3z}.$$

Do  $F$  là biểu thức thuần nhất nên ta có thể giả sử  $x + y + z = 3$ . Khi đó

$$F = \frac{x}{2x + 3} + \frac{y}{2y + 3} + \frac{z}{2z + 3}.$$

Dễ dàng chứng minh được  $\frac{x}{2x+3} \leq \frac{3x+2}{25}$  với mọi  $x > 0$  (biến đổi tương đương).

Áp dụng cho  $x, y, z$  ta được

$$F \leq \frac{3x+2}{25} + \frac{3y+2}{25} + \frac{3z+2}{25} = \frac{3}{5}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z = 1$  hay  $a = b = c$

### BÀI TẬP

Cho hình chóp  $SABC$ , mặt phẳng  $(P)$  cắt các tia  $SA, SB, SC, SM$  ( $M$  là điểm thuộc miền trong tam giác  $ABC$ ) lần lượt tại các điểm  $A', B', C', M'$ . Chứng minh  $\frac{S_a SA}{SA'} + \frac{S_b SB}{SB'} + \frac{S_c SC}{SC'} = \frac{S \cdot SM}{SM'}$

( $S_a, S_b, S_c, S$  lần lượt là diện tích các tam giác  $MBC, MAC, MAB, ABC$ )

### HƯỚNG DẪN:

$M$  là điểm thuộc miền trong tam giác  $ABC$  thì:  $S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$  (chứng minh bài toán này). Sau đó áp dụng  $A, B, C, M$  đồng phẳng