

RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

(Lê Phúc Lữ, ĐH FPT TP.HCM)

I) Những suy nghĩ về các bài toán phương trình (PT), hệ phương trình (HPT) và bất phương trình (BPT)

PT là một dạng Toán cơ bản nhưng cũng rất quan trọng trong lĩnh vực đại số. Chúng ta làm quen với các bài về PT từ những ngày đầu học Toán. Ở cấp Tiểu học, chúng ta đã biết đến những bài toán tìm x với các quy tắc giải phải thuộc nằm lòng như: “muốn tìm số hạng chưa biết, ta lấy tổng trừ đi số hạng đã biết; muốn tìm số bị chia, ta lấy thương nhân với số chia,”... Đến những năm THCS, các bài toán PT ấy được mở rộng ra thêm với nhiều dạng nữa; cùng với kiến thức về đại số như: biểu thức đại số, phân tích đa thức thành nhân tử, số thực, căn thức,... các bài toán về PT bậc hai, PT vô tỉ đã được xây dựng và biến đổi ở những hình thức rất phong phú. Rồi ở bậc THPT, các kiến thức về PT đã được bổ sung trộn vện với PT lượng giác và PT mũ – logarit cùng các phương pháp giải tích dành cho những bài toán dạng này. Bên cạnh đó, ta cũng không thể không nhắc đến HPT, BPT là hai dạng toán khác có liên quan mật thiết với PT, chúng bổ sung cho nhau, phối hợp lại tạo nên vẻ đẹp thật giản dị mà cũng thật sâu sắc cho Đại số sơ cấp.

Có thể nói từ đề thi tuyển sinh ĐH – CĐ đến đề thi HSG các cấp, những bài toán về PT, HPT và BPT là rất phổ biến. Có lẽ cũng chính vì thế mà các bài toán dạng này đa số đã được nghiên cứu kĩ và có rất nhiều phương pháp giải đề ra gần như có thể giải quyết mọi PT, HPT, BPT, hệ BPT được quan tâm. Chúng ta đã quá quen với: phương pháp biến đổi tương đương, phương pháp đặt ẩn phụ, phương pháp đánh giá, phương pháp hàm số,...; chúng đã trở thành công cụ chủ yếu để giải các bài toán dạng này dù là mẫu mực hay không mẫu mực.

Tuy quen thuộc như thế nhưng vẫn có nhiều bạn không thể làm tốt được các dạng toán này. Họ lúng túng khi gặp một bài PT, HPT với hình thức “kinh khủng”, không biết phải áp dụng cái nào trong những phương pháp đã học để rồi cứ thế vào, cứ khai triển, bình phương, đi đến một PT đa thức bậc thật cao và than thở rằng nó không giải được; ở các BPT cũng dễ bị nhầm lẫn về dấu, miền nghiệm,... Đặc biệt là trong những năm gần đây, các bài toán về PT, HPT, BPT trong những kì thi lớn lại được chăm chút hơn, tuy không mới nhưng những hình thức lạ chính là điều khiến cho những người đi tìm lời giải dễ bị bế tắc trong hướng suy nghĩ thông thường.

Thế thì làm sao để có thể thành công trong việc rèn luyện dạng toán này, làm sao tự tin và sáng suốt khi đứng trước một bài toán PT, HPT, BPT nào đó và không quá khó khăn để phát hiện được bản chất của nó rồi đi tìm lời giải. Các câu hỏi đó cũng là một “bài toán khó” cho các bạn học sinh THPT từ trước đến nay. Với mục đích nhằm giải quyết phần nào khó khăn đó, nội dung dưới đây xin trình bày một cách nhìn tổng quát về PT, HPT và BPT, về một số cách giúp rèn luyện kĩ năng giải toán dạng này cũng như các liên hệ giữa chúng, phân tích thử xem làm thế nào để có một hướng đi nhất quán để giải các bài toán PT, HPT, BPT.

Mong rằng qua đây, các bạn sẽ tìm được cho mình một ý tưởng mới nào đó cho việc học tập và rèn luyện dạng Toán chứa đựng nhiều điều thú vị này!

II) Một số phương pháp đi tìm lời giải một PT, HPT

1. Hãy nhìn bài toán dưới góc độ của một người ra đề

Có khi nào chúng ta thử đặt mình vào vị trí của người ra đề và tự hỏi, làm sao để có một bài toán PT hay và đẹp không? Công việc này, trên thực tế, có rất nhiều lợi ích. Ta không nói đến những dạng chuẩn mực như: PT trùng phương, PT đối xứng bậc 4, HPT đẳng cấp bậc 2,... vì khi cho những dạng toán này, tác giả chỉ cần thay số vào công thức và việc làm của người giải đề như chúng ta không khác gì công việc điền số vào chỗ trống. Vậy khi một người ra đề muốn có một PT, HPT, BPT khó, họ sẽ bắt đầu như thế nào? Tất nhiên có rất nhiều cách!

- Đi từ một hằng đẳng thức, khai triển và biến đổi thêm cho rối rắm.
- Đi từ điều kiện xảy ra dấu bằng của BĐT.
- Đi từ một bài toán cũ, đổi biến để khử tính đối xứng, tính đồng bậc,...
- Chuyển đổi giữa các yếu tố đại số, lượng giác,...

Quả thật nếu chúng ta đã từng thử sáng tạo ra một bài cụ thể nào đó thì mới biết được những con đường mà tác giả đã đi qua để có được một PT, HPT thật đẹp. Ở dưới nét đẹp đó còn có rất nhiều điều, rất nhiều điều đã bị che giấu. Chúng ta hãy xét thử một số VD minh họa:

1.1. Xuất phát từ hàm số

VD1: Giải PT sau:
$$\sqrt[3]{\frac{x^9 + 9x^2 - 1}{3}} = 2x + 1$$

Chúng ta đã biết rằng PT quen thuộc $x^3 = 3x + 1$ giải được rất dễ dàng bằng lượng giác. Để phức tạp hóa bài toán này, ta sẽ sử dụng phương pháp hàm số đơn điệu với tính chất $f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$. Ta chọn hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, thay hai biểu thức ở VT và VP vào, ta được: $x^9 + 3x^3 = (3x + 1)^3 + 3(3x + 1)$. Nhưng để như thế thì quá lộ liễu, ta khai triển, biến đổi thêm chút; như thế là có ngay VD ở trên. Một PT nhìn thật đáng sợ nhưng thật ra tác giả không tốn nhiều công sức để đi biến đổi được như vậy.

VD2: Giải PT:
$$x^3 + \sqrt{x^3} = (x + 4)(x + 5)$$

Cũng dựa theo cách trên, đi từ hàm số $f(x) = x + \sqrt{x+1}, x \in [-1; +\infty)$ và hai biểu thức $x^3 - 1, x^2 + 8x + 15$ để nhận được VD2 vừa nêu. Chúng ta không thể phủ nhận rằng chúng có hình thức tương đối lạ và đẹp.

1.2. Xuất phát từ các hằng đẳng thức

VD3: Giải HPT:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{2y} = 2(y^4 - x^4) \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = (3x^2 + y^2)(3y^2 + x^2) \end{cases}$$

Bài này nhìn vào số mũ lớn và sự thiếu đối xứng của các biểu thức dễ làm chúng ta bối rối, thế nhưng thực tế là nó xuất phát từ: $(x \pm y)^5 = x^5 \pm 5x^4y + 10x^3y^2 \pm 10x^2y^3 + 5xy^4 \pm y^5$.

Khi đó: $(x + y)^5 + (x - y)^5 = 2x^5 + 20x^3y^2 + 10xy^4$, $(x + y)^5 - (x - y)^5 = 2y^5 + 20x^2y^3 + 10x^4y$.

Đến đây, người ta đề cho các biểu thức trên nhận giá trị cụ thể (ở đây là 4 và 2) rồi chia $2x$, $2y$ tương ứng để được: $\frac{2}{x} = x^4 + 10x^2y^2 + 5y^4$, $\frac{1}{y} = y^4 + 10x^2y^2 + 5x^4$, cộng và trừ lần lượt hai biểu thức trên, ta được đề bài đã cho. Như thế quay ngược lại biểu thức ban đầu, ta có:

$$(x+y)^5 = 3, (x-y)^5 = 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt[5]{3}+1}{2}, y = \frac{\sqrt[5]{3}-1}{2}.$$

1.3. Xuất phát từ lượng giác

VD4: Giải PT: $32x^5 + 32x^4 - 16x^3 - 16x^2 + 2x + 1 = 0$.

Chúng ta đã không còn lạ gì với bài toán: $x^3 - 3x = \sqrt{x+2}$ với cách nhận xét PT chỉ có nghiệm thuộc $[-2; 2]$, sau đó đặt ẩn phụ đưa về PT lượng giác: $\cos 3x = \cos \frac{x}{2}$. Thế nhưng nếu không đi theo con đường này mà biến đổi đại số thêm ngay từ PT ban đầu, cụ thể là bình phương hai vế, ta được:

$$(x^3 - 3x)^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^6 - 6x^4 + 9x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 1) = 0$$

Ta chỉ xét biểu thức thứ hai, tức là: $x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$, lại đặt thêm ẩn phụ để che lấp vấn đề kĩ hơn: thay x bởi $2x$, ta được ngay VD5. PT này tuy ở dạng đa thức thông thường nhưng lại chứa đủ các nghiệm ở dạng lượng giác của PT ban đầu; các phương pháp nhằm nghiệm, đánh giá, hàm số đều sẽ thất bại trước một bài thế này. Lời giải cho bài này chắc chắn phải đi ngược lại từ dưới lên trên nhưng ngay ở bước nhân thêm $x-2$ thì thật quá khó khăn để nhận ra. Chúng ta đừng nghĩ cách cho đề kiểu này quá khó và không thể áp dụng trên các kì thi HSG bởi vì VD5 này chính là câu 1 của đề thi HSG ĐBSCL 2009!

VD5: Giải PT: $\frac{x(3+2x^2-x^4)}{3x^4+2x^2-1} = \sqrt{3}$

Cũng với cách biến đổi thiếu tự nhiên, ta đi từ PT: $\tan 4x = \tan(x - \frac{\pi}{3})$. Dùng công thức lượng giác cho cả hai vế: $\frac{4x-4x^3}{x^4-6x^2+1} = \frac{x-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}x} \Rightarrow (4x-4x^3)(1+\sqrt{3}x) = (x-\sqrt{3})(x^4-6x^2+1)$.

Sau đó, nhóm các số hạng có và không có chứa $\sqrt{3}$ lại rồi chia xuống, ta được VD5.

Qua những VD minh họa trên, có lẽ chúng ta đã nhận ra một điều rằng các cách giải PT không có gì là mới nhưng chúng ta phải làm sao để kết hợp chúng lại theo một cách thích hợp. Người cho đề đã cố che giấu bản chất thật sự của bài toán dưới những đẳng thức và những sự kết hợp đó. Nhiều khi với sự tình cờ, lời giải của chúng ta ngắn gọn hơn bởi sự đặc biệt nào đó của biểu thức nhưng đa số trường hợp thì phải đi ngược lại cách mà tác giả bài toán đã làm. Chúng ta hãy tự đặt ra cho mình những bài toán PT, HPT theo những ý tưởng, những cách khác nhau, sáng tạo cái mới hay phát triển cái cũ tùy thích; hãy đi lại con đường mà những người ra đề đã đi và bằng cách trải qua những suy nghĩ của họ như thế, ta sẽ có cảm giác tự tin hơn và tư tưởng sẽ thoải mái hơn khi giải một bài toán thực tế.

2. Hãy nhắm nghiệm bất cứ khi nào có thể

Có lẽ một việc làm như là thói quen của chúng ta trước khi giải một PT nào đó là nhắm nghiệm của nó. Nếu PT có nghiệm đẹp thì chúng ta càng tự tin rằng khả năng ta giải được nó sẽ cao hơn. Điều này tưởng chừng như chỉ có ý nghĩa lý thuyết thôi nhưng trên thực tế thì nó lại hoàn toàn xác đáng.

Đó là đối với những bài toán được sáng tác không phải dựa trên một biểu thức hay một bài toán có sẵn nào, chúng được tạo ra bằng cách chọn trước một nghiệm rồi thay ngẫu nhiên vào các biểu thức; trong trường hợp này, có khi người ra đề vẫn chưa biết cách giải bài toán đó. Nhưng những bài toán dạng này lại “thân thiện” hơn, hình thức cũng phong phú và đẹp mắt không kém cách phát triển từ những kết quả có sẵn. Có lẽ đa số các bài toán PT, HPT hay và khó xuất hiện trên nhiều diễn đàn Toán hiện nay đều đi theo con đường này. Chúng ta có một số cách giải quyết cơ bản cho dạng bài này như sau:

- Đối với PT đa thức: phân tích thành nhân tử, hạ bậc rồi đánh giá thêm.
- Đối với những PT chứa căn, PT phân thức: hãy dùng phương pháp nhân lượng liên hợp.
- Đối với các bài PT mũ – logarit: hãy dùng phương pháp giải tích hoặc đánh giá để chứng minh các nghiệm nhắm được đã vét cạn hết tập nghiệm của bài toán.

Các VD dưới đây sẽ cho ta thấy một điều khá thú vị rằng: “*Khi đã nhắm được nghiệm của PT, HPT nào đó, chúng ta đã đi được hơn nửa chặng đường đến lời giải*”.

2.1. **Phương pháp nhân lượng liên hợp với các PT căn thức, PT phân thức:**

Tư tưởng chính của dạng này chính là khi đã nhắm được nghiệm, chúng ta tiến hành trừ vào từng biểu thức trong PT đã cho chính giá trị mà nó nhận được khi thay nghiệm đó vào, nhân lượng liên hợp vào chắc chắn sẽ làm một nhân tử chứa nghiệm xuất hiện; vấn đề là chứng minh biểu thức còn lại luôn khác 0 (phương pháp này thành công chỉ khi làm được điều này). Thông thường thì biểu thức đó vô nghiệm rõ ràng hoặc có thể sử dụng miền xác định của x để bổ sung thêm giả thiết cho việc chứng minh. Nếu không thực hiện được điều này nghĩa là cách này đã thất bại và hãy đổi phương pháp khác ngay! Trong trường hợp ta nhắm được nhiều hơn một nghiệm, ta có thể phát triển phương pháp này lên bằng cách thay vì trừ vào một số, ta trừ vào các biểu thức chứa biến tìm được thông qua một vài bước dùng tham số.

VD6: Giải PT: $\sqrt[3]{x^2-1} + x = \sqrt{x^3-2}$

PT này không quá phức tạp và chúng ta cũng dễ dàng nhận ra nó có nghiệm là $x = 3$. Nếu như biến đổi tương đương thì ra PT bậc rất cao; nếu khảo sát hàm số thì khi giải PT đạo hàm bằng 0 còn phức tạp hơn cả PT cần giải; nếu dùng BĐT thì cũng không được vì không có bên nào lớn hẳn hơn bên nào. Bỏ qua những hướng không sáng sủa đó, ta còn một lựa chọn sáng suốt và quen thuộc là nhân lượng liên hợp.

Khi thay 3 vào, các biểu thức có giá trị lần lượt là 2, 3, 5. Ta trừ tương ứng các số này vào và biến đổi với điều kiện xác định ban đầu là $x \geq \sqrt[3]{2}$:

$$(\sqrt[3]{x^2-1}-2) + (x-3) = (\sqrt{x^3-2}-5) \Leftrightarrow (x-3) \left[1 + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{(x^2-1)} + 4} \right] = (x-3) \cdot \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 1 + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{(x^2-1)} + 4} = \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} \quad (*) \end{cases}$$

Vấn đề còn lại là chứng minh (*) vô nghiệm. Đến đây thì cứ đánh giá thoải mái! Chẳng hạn, ta có một cách đánh giá như sau:

$$VP = \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} > 2 \Leftrightarrow x^2+3x-1 > 2\sqrt{x^3-2} \Leftrightarrow (x^2+3x-1)^2 - 4(x^3-2) > 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 6x + 9 > 0 \Leftrightarrow (x^2+x)^2 + (x-3)^2 + 5x^2 > 0, \forall x \geq \sqrt[3]{2}$$

$$VT = 1 + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{(x^2-1)} + 4} < 2 \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{(x^2-1)} + 1$$

Đặt $t = \sqrt[3]{(x^2-1)} > 0$, ta cần chứng minh: $\sqrt{t^3+1} < t^2 + 2t + 1 \Leftrightarrow t^4 + 3t^3 + 6t^2 + 4t > 0, \forall t > 0$.

Như thế thì $VT < 2 < VP$, tức là (*) vô nghiệm. PT đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

Bài toán được giải quyết thành công!

VD7: Giải PT: $x(x+1)(x-3) + 3 = \sqrt{4-x} + \sqrt{1+x}$

Ở bài này do nhầm được hai nghiệm là $x = 0, x = 3$ nên ta thử trừ tương ứng các biểu thức để nhận được ngay nhân tử: $x(x-3)$. Bằng cách sử dụng tham số, chẳng hạn như với $\sqrt{4-x}$, cần tìm một nhị thức nhận giá trị bằng $\sqrt{4-0} = 2$ tại $x = 0$ và nhận giá trị bằng $\sqrt{4-3} = 1$ tại $x = 3$, đó chính là $-\frac{1}{3}x + 2$; tương tự với biểu thức $\sqrt{1+x}$ là: $\frac{1}{3}x + 1$. Ta giải tiếp tục như sau:

$$\begin{aligned} x(x+1)(x-3) &= \sqrt{4-x} - \left(-\frac{1}{3}x + 2\right) + \sqrt{1+x} - \left(\frac{1}{3}x + 1\right) \\ \Leftrightarrow x(x+1)(x-3) &= \frac{-x^2+3x}{9\sqrt{4-x}+(-x+6)} + \frac{-x^2+3x}{9\sqrt{1+x}+(x+3)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3) = 0 \\ x+1 + \frac{1}{9\sqrt{4-x}+(-x+6)} + \frac{1}{9\sqrt{1+x}+(x+3)} = 0 \end{cases}$$

Ta thấy VT của PT thứ hai luôn dương với mọi $x \in [-1, 4]$ nên PT này vô nghiệm.

Do đó, PT đã cho chỉ có hai nghiệm là $x = 0, x = 3$.

Phương pháp này tuy đơn giản nhưng có thể giải quyết được các PT chứa căn hoặc phân thức một cách rất hữu hiệu. Những bài toán sáng tác dựa trên phương pháp này cũng rất phong phú do chỉ cần chọn sẵn một nghiệm rồi xây dựng các biểu thức thỏa mãn đẳng thức xảy ra. Những PT dạng này có khó hay không phụ thuộc vào việc chứng minh PT còn lại (sau khi đã tách biểu thức nhân tử chung) là vô nghiệm.

2.2. Phương pháp đánh giá với các phương trình mũ – logarit

Những PT mũ – logarit thuộc loại PT siêu việt, nó không như những dạng PT đại số thông thường, muốn giải chúng được thì những PT đó phải nằm trong các dạng:

- Đặt ẩn phụ được để chuyển về PT đại số.
- Có thể biến đổi rồi tìm được nghiệm theo các công thức liên quan.
- Có thể tính được số nghiệm (kể cả vô nghiệm) và có thể nhẩm được tất cả nghiệm đó.

Trong các trường hợp còn lại, PT dạng này không thể giải được. Chẳng hạn: ta thấy PT $2^x + 3^x = 4^x$ dù rất đơn giản, có thể chứng minh được nó có đúng 1 nghiệm nhưng không thể nhẩm ra được nó là gì. Ngược lại, trong trường hợp ta đã nhẩm được nghiệm rồi, ta có thể tiến hành giải nó bằng một số phương pháp chính như sau (ta không xét những PT giải bằng phương pháp biến đổi, đặt ẩn phụ thông thường):

- + Khảo sát hàm số để chứng minh nó có hữu hạn nghiệm (là các nghiệm đã nhẩm được).
- + Dùng định lí Lagrang để đánh giá.
- + Dùng BĐT để đánh giá.

2.2.1. Khảo sát hàm số để xác định số nghiệm của PT

Nội dung phương pháp này dựa trên hệ quả của định lí Lagrange quen thuộc:

“Trên miền xác định, nếu đạo hàm cấp k của một hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì

PT $f(x) = 0$ có không quá k nghiệm phân biệt.”

Sau khi đã chứng minh được rằng PT ban đầu có không quá k nghiệm và trước đó ta đã nhẩm được các nghiệm này thì xem như lời giải đã hoàn thành.

VD8: Giải PT: $(1+x)(2+4^x) = 3 \cdot 4^x$

Bằng cách thử với các nghiệm thông thường và quen thuộc, ta thấy PT có 3 nghiệm là $x = 0, x = 1, x = \frac{1}{2}$. Khi ta chứng minh đạo hàm cấp 3 không đổi dấu hoặc đạo hàm cấp hai có

đúng một nghiệm thì lời giải hoàn tất. Do VP dương nên VT cũng dương $\Rightarrow x+1 > 0$.

Ta xét hàm số: $f(x) = (1+x)(2+4^x) - 3 \cdot 4^x = (x-2) \cdot 4^x + 2(x+1)$ trên $(-1, +\infty)$.

$$\Rightarrow f'(x) = (x-2) \cdot 4^x \cdot \ln 4 + 4^x + 2 \Rightarrow f''(x) = (x-2) \cdot 4^x \cdot (\ln 4)^2 + 2 \cdot 4^x \cdot \ln 4$$

$$\Rightarrow f'''(x) = (x-2) \cdot 4^x \cdot (\ln 4)^3 + 3 \cdot 4^x \cdot (\ln 4)^2 = 4^x \cdot (\ln 4)^2 [(x-2) \cdot \ln 4 + 3]$$

Suy ra: $f'''(x) = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 2) \ln 4 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = 2 - \frac{3}{\ln 4}$. Ta thấy: hàm $f''(x_0)$ nghịch biến

trên $(-1, x_0)$, đồng biến trên $(x_0, +\infty)$ và $f''(-1) < 0, f''(x_0) < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = +\infty$ nên PT

$f''(x) = 0$ có đúng một nghiệm. Do đó, $f'(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm và dẫn đến PT đã cho có không quá 3 nghiệm. Đến đây thì lời giải thành công vì ta đã nhẩm trước được 3 nghiệm đó.

VD9: Giải PT: $12^x + 13^x + 14^x = 2^x + 3^x + 4^x + 870x^3 - 2400x^2 + 1560x$

Tuy PT nhìn rất phức tạp nhưng ta vẫn có thể nhẩm được rằng nó có 4 nghiệm rất đẹp là $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$. Như thế thì cũng giải tương tự bài trên, với hàm số sau:

$f(x) = 12^x + 13^x + 14^x - (2^x + 3^x + 4^x + 870x^3 - 2400x^2 + 1560x)$, ta sẽ chứng minh đạo hàm cấp 4 của nó luôn dương hoặc luôn âm với các giá trị x có thể nhận được.

Ta có: $f^{(4)}(x) = 12^x \cdot (\ln 12)^4 + 13^x \cdot (\ln 13)^4 + 14^x \cdot (\ln 14)^4 - 2^x \cdot (\ln 2)^4 - 3^x \cdot (\ln 3)^4 - 4^x \cdot (\ln 4)^4$. Hơn nữa, trong PT đã cho, x phải không âm vì nếu ngược lại, theo BĐT Bernoulli cho số x âm, ta có: $12^x > x(12-1)+1 = 11x+1$, tương tự: $13^x > 12x+1$, $14^x > 13x+1$.

Suy ra: $VT = 12^x + 13^x + 14^x > 36x + 3$. Đồng thời:
 $VP = 2^x + 3^x + 4^x + 870x^3 - 2400x^2 + 1560x < 3 + 36x + x(870x^2 - 2400x + 1524) < 3 + 36x$.
 Do đó: $12^x + 13^x + 14^x > 2^x + 3^x + 4^x + 870x^3 - 2400x^2 + 1560x$, tức là PT không có nghiệm âm.
 Với $x \geq 0$ thì rõ ràng: $f^{(4)}(x) > 0$ nên PT đã cho có không quá 4 nghiệm.
 Vậy PT đã cho có 4 nghiệm là: $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$.

2.2.2. Dùng các BĐT để đánh giá

Nhiều PT dạng này lại không đánh giá được bằng đạo hàm (do các đạo hàm chưa hẳn đã luôn dương, luôn âm hoặc là miền giá trị của x cần thiết khó xác định được), khi đó ta sẽ dựa vào đặc trưng của biểu thức mà sử dụng các BĐT, các đánh giá cho phù hợp.

VD10: Giải PT: $(1+2^x)(1+3^x)(1+36^x) = (1+6^x)^3$

Thực ra bài toán này đang cố che giấu một BPT quen thuộc trong đại số. Khi nhẩm được nghiệm $x = 0$, ta càng dễ dàng thấy được điều đó qua đẳng thức: $2^x = 3^x = 36^x = 6^x$ với $x = 0$.

Trước hết, ta có BĐT: $(1+x)(1+y)(1+z) \geq (1+\sqrt[3]{xyz})^3$ với x, y, z dương.

Áp dụng vào bài toán:

$$(1+2^x)(1+3^x)(1+36^x) \geq (1+\sqrt[3]{2^x \cdot 3^x \cdot 36^x})^3 = (1+6^x)^3.$$

Như thế thì đẳng thức phải xảy ra và $x = 0$ là nghiệm duy nhất cần tìm.

VD11: Giải PT: $x = \frac{4 \cdot 2^x - 2^{x^2}}{4 \cdot 2^x - 2}$.

Ta cũng nhẩm được PT này có nghiệm là $x = 1$. Tiến hành quy đồng biến đổi biểu thức với điều kiện xác định là $x \neq -1$, ta được: $2^{x^2-1} + (x-1) \cdot 2^{x+1} - x = 0$. Ta sẽ xét các trường hợp:

- Nếu $x = 1$ thì đẳng thức đúng.
- Nếu $x \neq 1$, từ điều kiện xác định là $x \neq -1$, ta tiếp tục biến đổi như sau:

$$2^{x^2-1} + (x-1) \cdot 2^{x+1} - x = 0 \Leftrightarrow 2^{x^2-1} - 1 + (x-1) \cdot (2^{x+1} - 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{2^{x^2-1} - 1}{x^2 - 1} + \frac{2^{x+1} - 1}{x + 1} = 0.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{2^t - 1}{t}, t \neq 0$. Khi đó: nếu $t < 0 \Rightarrow 2^t - 1 < 0 \Rightarrow \frac{2^t - 1}{t} > 0$, tương tự, nếu $t > 0 \Rightarrow 2^t - 1 > 0 \Rightarrow \frac{2^t - 1}{t} > 0$; tức là: $f(t) > 0, \forall t \neq 0$. PT trên chính là: $f(x^2 - 1) + f(x + 1) = 0$ vô nghiệm. Từ đó suy ra PT ban đầu chỉ có nghiệm $x = 1$.

2.2.3. Dùng định lý Lagrange

Khi những PT không thể sử dụng BĐT để đánh giá và không thể dùng đạo hàm để khảo sát hàm số, ta hãy thử cách này. Phương pháp dùng định lý Lagrange chỉ giải được một vài lớp PT nhất định nhưng nó phát huy tác dụng rất rõ ràng, dường như những PT được đề cập đến chỉ có thể giải bằng cách này mà thôi.

VD12: Giải PT: $9^x(3^x + 2^x) = 2^x(8^x + 7^x) + 5^x(5^x - 2^x)$.

PT này chứa toàn các hàm số mũ x , cơ số thì không có liên quan gì nhiều với nhau, dấu của các biểu thức cũng rất rắc rối nên hai phương pháp trước mất tác dụng. Ta sẽ dùng định lý Lagrange sau khi đã đưa được biểu thức trên về dạng $f(a) = f(b)$. Điều này không quá khó:

$$\begin{aligned} 9^x(3^x + 2^x) &= 2^x(8^x + 7^x) + 5^x(5^x - 2^x) \Leftrightarrow 10^x - 16^x - 25^x = 14^x - 18^x - 27^x \\ \Leftrightarrow 10^x + 12^x - 16^x - 25^x &= 12^x + 14^x - 18^x - 27^x \quad (*) \end{aligned}$$

Đến đây, ta xét hàm số: $f(t) = t^x + (t+2)^x - (t+6)^x - (t+15)^x, t > 0$, trong đó x là nghiệm của PT đã cho. Do đó: $(*) \Leftrightarrow f(10) = f(12)$.

Hàm $f(t)$ liên tục trên đoạn $[10, 12]$ nên theo định lý Lagrange, tồn tại $c \in (10, 12)$ sao cho:

$$f'(c) = \frac{f(10) - f(12)}{10 - 12} = 0. \text{ Do đó, nếu } x \text{ là nghiệm của PT đã cho thì nó phải thỏa:}$$

$$x \left[c^{x-1} + (c+2)^{x-1} - (c+6)^{x-1} - (c+15)^{x-1} \right] = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee c^{x-1} + (c+2)^{x-1} = (c+6)^{x-1} + (c+15)^{x-1}$$

Đẳng thức thứ hai cho ta $x = 1$ vì nếu $x < 1 \Rightarrow x-1 < 0 \Rightarrow c^{x-1} + (c+2)^{x-1} > (c+6)^{x-1} + (c+15)^{x-1}$, nếu $x > 1 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow c^{x-1} + (c+2)^{x-1} < (c+6)^{x-1} + (c+15)^{x-1}$, luôn mâu thuẫn.

Thử trực tiếp thấy hai giá trị $x = 0, x = 1$ thỏa nên PT đã cho có hai nghiệm là $x = 0, x = 1$.

VD13: Giải PT: $e^x + (x^3 - x) \ln(x^2 + 1) = e^{\sqrt[3]{x}}$

Ta cũng nhận thấy được PT này có 3 nghiệm là $x = 0, x = \pm 1$. Ta sẽ chứng minh trong trường hợp $x \neq 0, x \neq \pm 1$ thì PT đã cho vô nghiệm. Thật vậy: giả sử có số $x_0 \neq 0, x_0 \neq \pm 1$ là nghiệm của PT đã cho, khi đó rõ ràng là: $x_0 \neq \sqrt[3]{x_0}$ và $e^{x_0} + (x_0^3 - x_0) \ln(x_0^2 + 1) = e^{\sqrt[3]{x_0}}$ (*)

Hàm số $f(t) = e^t$ liên tục nên tồn tại một giá trị c nằm giữa hai số $x_0, \sqrt[3]{x_0}$ sao cho:

$$e^c = \frac{e^{x_0} - e^{\sqrt[3]{x_0}}}{x_0 - \sqrt[3]{x_0}}. \text{ Nhưng từ (*), ta lại có: } \frac{e^{x_0} - e^{\sqrt[3]{x_0}}}{x_0 - \sqrt[3]{x_0}} = -(x_0^2 - x_0 \cdot \sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}) \ln(x_0^2 + 1) < 0, \text{ tức là:}$$

$e^c < 0$, vô lí. Do đó, ta có đpcm. PT đã cho chỉ có 3 nghiệm là $x = 0, x = \pm 1$.

Nói chung, việc nhận trước được nghiệm của các PT rất có lợi cho việc giải bài toán, bằng các lập luận đại số và giải tích, ta chứng minh được nó có một số chính xác các nghiệm. Ý tưởng này tuy đơn giản và việc lập luận cũng theo một đường lối nhất quán nhưng với nó, chúng ta có thể giải được một lớp rất rộng các bài toán.

3. Hãy thử và chọn những phương pháp quen thuộc

3.1. Lựa chọn con đường giải thích hợp

Giải một bài toán nói chung hay PT, HPT, BPT nói riêng là đi từ giả thiết, thông qua các lập luận để tìm đến kết luận. Các bước lập luận cần dùng càng dài, càng thiếu tự nhiên thì bài toán càng khó. Do đó, kinh nghiệm thể hiện vai trò không kém phần quan trọng trong việc giải dạng toán này. Có những kinh nghiệm cơ bản mà ai cũng phải biết là về cách giải các dạng PT, HPT quen thuộc như: hệ lập, hệ đối xứng các loại, PT đa thức bậc 3, 4,... nhưng cũng có những kinh nghiệm phải tích lũy thông qua quá trình rèn luyện. Trên thực tế, các PT, HPT được giải bằng cách phương pháp quen thuộc hoặc là sự kết hợp của chúng, không có phương pháp và công cụ nào mới mẻ và phức tạp. Vấn đề là làm sao để biết lựa chọn các đúng phương pháp và trong quá trình lựa chọn đó, nếu gặp phải một hướng giải sai thì phải biết nhận ra để thay đổi.

VD14: Giải HPT:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = y \\ y^2 - 1 = z \\ z^2 - 1 = x \end{cases}$$

Rõ ràng đây là một hệ lập 3 biến và nó quen thuộc, cứ đánh giá và chứng minh rằng x, y, z phải cùng dấu rồi bằng cách xếp thứ tự các biến suy ra $x = y = z$. Lập luận đó nói chung cũng khá khó. Và cái khó của bài toán không dừng lại ở đó khi mà với hình thức đơn giản của bài toán, theo thói quen muốn tìm đến những cái quen thuộc để giải, nhiều bạn sẽ dùng phép thế để khử các biến y, z rồi đi đến một PT đa thức: $x^8 - 4x^6 + 4x^4 - x - 1 = 0$. Dự đoán ban đầu từ HPT đã cho là cần có $x = y = z$ nên trong PT này, chắc chắn khi phân tích thành nhân tử phải có biểu thức: $x^2 - x - 1$. Ta dễ dàng biến đổi thành: $(x^2 - x - 1)(x^6 + x^5 - 2x^4 - x^3 + x^2 + 1) = 0$. Công việc còn lại là chứng minh biểu thức trong dấu ngoặc thứ hai luôn dương là xong. Điều này đúng nhưng biểu thức này có thể đạt những giá trị rất nhỏ mà việc đánh giá đó dường như là không thể thực hiện được. Nếu ta cứ lún sâu vào việc cố gắng dùng BĐT hoặc xét các trường hợp nhỏ thì rất bất lợi, nhất là trong điều kiện thời gian hạn chế của một kì thi.

Thế nhưng, nhiều khi phương pháp thế lại tỏ ra hiệu quả trong một số trường hợp:

VD15: Giải HPT:

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 3xy) + 2x^2y^2 = (x + y)(y^2 + 16) \\ x(y^3 - x^3) = 26 \end{cases}$$

Ta khai thác PT thứ nhất của hệ:

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 3xy) + 2x^2y^2 = (x + y)(y^2(x + y) + 16)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + 4x^2y^2 + 3x^3y + 3xy^3 = 2xy^3 + x^2y^2 + y^4 + 16(x + y)$$

$$\Leftrightarrow x(x + y)^3 = 16(x + y) \Leftrightarrow (x + y)[x(x + y)^2 - 16] = 0$$

- Nếu $x + y = 0$ thì thay vào PT thứ hai, ta được: $-y \cdot 2y^3 = 26 \Leftrightarrow y^4 = -13$, vô nghiệm.
- Nếu $x(x + y)^2 = 16$, ta có một HPT mới, đơn giản hơn như sau:

$$\begin{cases} x(x+y)^2 = 16 \\ x(y^3 - x^3) = 26 \end{cases}$$

Nhằm thấy HPT này có nghiệm là $(x, y) = (1, 3)$ nhưng việc tìm các quan hệ đẹp hơn hoặc đánh giá đều không thể áp dụng. Ta chỉ còn cách thay trực tiếp y từ PT thứ hai

$$x(y^3 - x^3) = 26 \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{26}{x} + x^3} \text{ vào PT thứ nhất, ta được: } x(x + \sqrt[3]{\frac{26}{x} + x^3})^2 = 16.$$

Đến đây, ta sẽ chứng minh hàm số bên vế trái đồng biến rồi suy ra nghiệm. Thật vậy:

Xét hàm số: $f(t) = t(t + \sqrt[3]{\frac{26}{t} + t^3})^2, t > 0$. Viết lại $f(t)$ dưới dạng:

$$f(t) = t(t + \sqrt[3]{\frac{26}{t} + t^3})^2 = t^3 + 2t^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{26}{t} + t^3} + t \sqrt[3]{(\frac{26}{t} + t^3)^2} = t^3 + 2t \sqrt[3]{26t^2 + t^6} + \sqrt[3]{t(26 + t^4)^2}$$

Ta thấy khi t tăng thì $f(t)$ cũng tăng nên $f(t)$ đồng biến trên $(0, +\infty)$. Suy ra PT (*) có nghiệm duy nhất. Đến đây thì lời giải đã thành công!

VD16: Giải PT: $\log_{1-x}(2x) + \log_x(2-2x) = 0$

Bài này có thể giải bằng nhiều cách nhưng tốt nhất vẫn là dùng biến đổi đại số kết hợp BĐT.

Điều kiện: $0 < x < 1$. Đặt $a = \log_2 x, b = \log_2(1-x)$. Dễ thấy: $a + b = \log_2(x(1-x)) \leq \log_2 \frac{1}{4} = -2$.

PT đã cho viết lại là: $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + a + b = 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 + (b+1)^2 - (a+b+2) = 0$.

Do $a + b \leq -2 \Rightarrow -(a+b+2) \geq 0$, suy ra biểu thức trên không âm; đẳng thức chỉ xảy ra khi:

$$a = b = -1 \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2(1-x) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{2}$.

3.2. Phát hiện ra các biểu thức đã bị che giấu

Các HPT hai biến thông thường được xây dựng chủ yếu từ một PT với một biểu thức được giấu trong đó, PT còn lại không quan trọng và chủ yếu dùng để thay vào mà tìm nghiệm thôi. Biểu thức bị giấu đó hay gặp nhất là $x = y$ sau đó mới đến những quan hệ phức tạp giữa x, y . Còn một dạng che giấu khác là dùng các phép đổi biến số, chẳng hạn trong một HPT đối xứng, ta chỉ cần thay toàn bộ biến x bởi $x+1, 3x, x-y, \dots$ và thêm một chút biến đổi nữa là mất ngay tính đối xứng và bài toán sẽ không còn dễ dàng như trước. Những cách này cũng rất hay được sử dụng trong các đề thi HSG và ĐH – CĐ, chẳng hạn như đề thi ĐH khối B và D năm 2008, 2009, khối A năm 2010; đề HSGQG năm 2009, 2010, ... Kinh nghiệm qua rèn luyện nhiều sẽ giúp ta nhận ra được bản chất đó và biết đặt thêm ẩn phụ, biết cộng trừ nhân chia thích hợp.

VD17: Giải HPT:

$$\begin{cases} 2+6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}} = x+3y-2 \end{cases}$$

HPT này hơi phức tạp và nhu cầu cần phải tìm một quan hệ giữa x và y đơn giản hơn là rất rõ ràng. Để làm được điều đó, ta thấy PT thứ nhất là có khả năng nhất, ta viết nó lại là:

$$2+6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x-2y} \Leftrightarrow x-2y - y\sqrt{x-2y} - 6y^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x-2y} + 2y)(\sqrt{x-2y} - 3y) = 0$$

Đến đây ta có thể biểu diễn đại lượng $\sqrt{x-2y}$ bởi các biểu thức đơn giản hơn và bài toán đã gần như hoàn thành. Thật vậy:

- Nếu $\sqrt{x-2y} = -2y$ (*) thì từ PT thứ hai, ta có:

$$\sqrt{x-2y} = x+3y-2 \Leftrightarrow -2y = x+3y-2 \Leftrightarrow x = 2-5y, \text{ tiếp tục thay vào (*), ta có:}$$

$$\sqrt{2-7y} = -2y, \text{ giải PT này, kết hợp với các điều kiện, ta có nghiệm: } (x, y) = (12, -2).$$

- Nếu $\sqrt{x-2y} = 3y$ (**) thì từ PT thứ hai, ta có:

$$\sqrt{x+3y} = x+3y-2 \Leftrightarrow (\sqrt{x+3y}-2)(\sqrt{x+3y}+1) = 0 \Leftrightarrow x+3y = 4, \text{ thay vào (**):}$$

$$\sqrt{4-5y} = 3y, \text{ tiến hành giải và so sánh điều kiện, ta có nghiệm là: } (x, y) = \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{9}\right).$$

Vậy HPT đã cho có hai nghiệm như trên.

Nói chung trong bài này, biểu thức bị giấu đi chưa khéo lắm, ta hãy quan sát bài toán sau:

VD18: Giải HPT:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

Cũng với nhu cầu đi tìm một quan hệ mới đơn giản hơn của x và y , ta chọn và khai thác PT thứ nhất của hệ:

$$x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16 \Leftrightarrow (x+y)^3 - 2xy(x+y) + 8xy = 16(x+y)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)[(x+y)^2 - 16] - 2xy[(x+y) - 4] = 0$$

$$\Leftrightarrow [(x+y) - 4][(x+y)(x+y+4) - 2xy] = 0 \Leftrightarrow [(x+y) - 4][x^2 + y^2 + 4(x+y)] = 0$$

Với điều kiện $x+y > 0$ cần có của HPT, ta suy ra biểu thức trong dấu ngoặc thứ hai luôn dương,

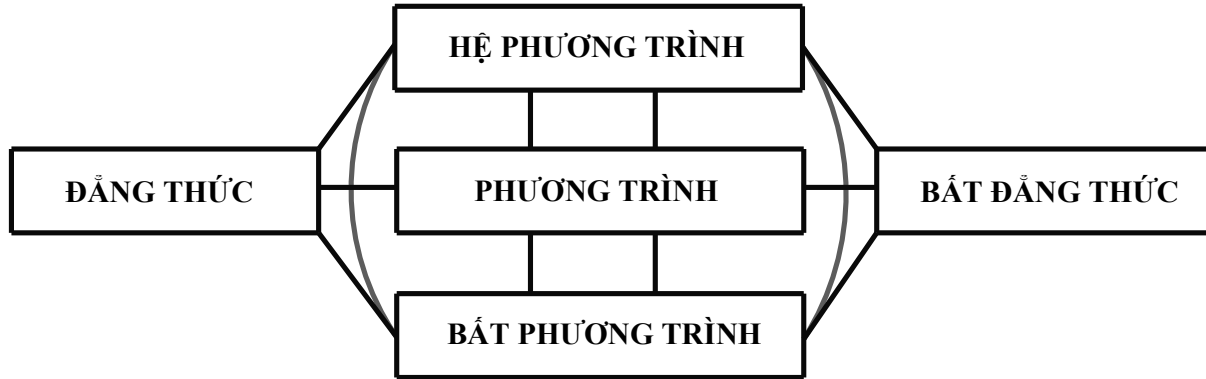
tức là: $x+y = 4$, thay vào PT thứ hai, ta có: $\sqrt{4} = x^2 - (4-x) \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3$

Từ đó, ta tìm được hai nghiệm của hệ là: $(x, y) = (2, 2); (-3, 7)$.

4. Hãy sáng tạo trong quá trình giải các PT, HPT, BPT

4.1. Thay vì giải một BPT, hãy giải một PT

Như chúng ta đã biết, PT, BPT, HPT và các phần đẳng thức và BĐT có một mối quan hệ khăng khít, ranh giới giữa một HPT và PT gần như chỉ qua một phép thế các biến, giữa một PT và một đẳng thức chỉ thông qua việc thay số cụ thể, ... Nội dung dưới đây sẽ nêu lên một cách sử dụng mối quan hệ đó để giải các bài toán BPT bằng một ý tưởng hết sức đơn giản và bất ngờ:



Trước hết, ta phát biểu một mệnh đề sau:

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên miền D và PT $f(x) = 0$ có n nghiệm phân biệt trên D là: $x_1 < x_2 < \dots < x_n \in D$. Khi đó, trên các khoảng: $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n)$, dấu của $f(x)$ không đổi và nó trùng với dấu của một điểm bất kì thuộc các khoảng đó.

Chứng minh: Giả sử ngược lại, trên một khoảng nào đó, dấu của $f(x)$ thay đổi; chẳng hạn trên (x_i, x_{i+1}) , dấu của $f(x)$ thay đổi từ âm sang dương. Do $f(x)$ liên tục nên theo định lý trung gian, PT $f(x) = 0$ phải có nghiệm $a \in (x_i, x_{i+1})$ khác các nghiệm đã nêu, mâu thuẫn. Ta có đpcm.

Một ứng dụng trực tiếp của mệnh đề này chính là: thay vì phải giải một BPT với các điều kiện phức tạp về dấu cần xét, ta chỉ cần giải một PT tương ứng khi thay dấu BĐT bởi dấu “=”.

VD19: Giải BPT: $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x-10} > \sqrt[3]{x-2}$.

Ta thấy rằng khi biến BPT trên thành PT thì bài toán giải dễ dàng bằng cách lập phương hai vế và sử dụng phép thế. Nhưng nếu giữ nguyên phát biểu ở dạng BPT như ban đầu thì phép thế để đơn giản biểu thức sẽ không đúng nữa và nếu ta giải BPT theo cách đã giải PT thì không thành công. Và khi đó, mệnh đề trên phát huy tác dụng, ta sẽ tiến hành giải BPT đã cho như sau:

Trước hết, ta giải PT: $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x-10} = \sqrt[3]{x-2}$.

Lập phương hai vế, ta được:

$$4x - 11 + 3\sqrt{(2x-1)(2x-10)} \cdot (\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x-10}) > x - 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(2x-1)(2x-10)} \cdot (\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x-10}) > 3 - x$$

Thay $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x-10}$ bởi $\sqrt[3]{x-2}$, ta được PT hệ quả của PT đã cho là:

$\sqrt[3]{(2x-1)(2x-10)(x-2)} > 3 - x$. Tiếp tục lập phương lên và khai triển, ta được PT bậc 3:

$$5x^3 - 39x^2 + 81x - 47 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(5x^2 - 34x + 47) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{17-3\sqrt{6}}{5}, x_3 = \frac{17+3\sqrt{6}}{5}.$$

Thay ngược lại vào PT đang xét, ta thấy cả 3 nghiệm $x_1 < x_2 < x_3$ này đều thỏa mãn.

Ta lại thấy: $f(x) < 0, x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2, x_3)$, $f(x) > 0, \forall x \in (x_1, x_2) \cup (x_3, +\infty)$.

Vậy nghiệm của BPT đã cho là: $(1, \frac{17-3\sqrt{6}}{5}) \cup (\frac{17+3\sqrt{6}}{5}, +\infty)$.

Hãy theo dõi thêm một VD nữa về các BPT, ta sẽ thấy lợi ích của phương pháp này:

VD20: Giải BPT: $\sqrt{5+4\sqrt{9-\sqrt{2x}}} \geq 2\sqrt{13}(13-x)$

Ta thấy các biểu thức ở bài này có nhiều lớp căn và nếu như cứ bình phương lên và đặt điều kiện sẽ rất dễ bị nhầm lẫn. Ta sẽ áp dụng phương pháp đã nêu để giải quyết bài toán. Trước hết, ta phải giải PT:

$$\sqrt{5+4\sqrt{9-\sqrt{2x}}} = 2\sqrt{13}(13-x) \quad (*)$$

Điều kiện xác định của (*) là: $0 \leq x \leq \frac{81}{2}$.

Ta bình phương lên để khử bớt căn: $5+4\sqrt{9-\sqrt{2x}} = 52(13-x)^2$

Ta nhận được một nghiệm $x = \frac{25}{2}$ và với đặc trưng của bài, ta dùng phương pháp nhân lượng liên hợp, tiến hành trừ từng biểu thức cho một lượng thích hợp rồi biến đổi:

$$\left(5+4\sqrt{9-\sqrt{2x}}\right)-13=52(13-x)^2-13 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{5-\sqrt{2x}}{\sqrt{9-\sqrt{2x}}+2} = 13[4(13-x)^2-1]$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot \frac{25-2x}{(\sqrt{9+\sqrt{2x}}+2)(5+\sqrt{2x})} = 13(25-2x)(27-2x)$$

Sau khi bỏ đi nhân tử $25-2x$ đã dự đoán trước, ta cần chứng minh PT sau vô nghiệm:

$$\frac{4}{(\sqrt{9+\sqrt{2x}}+2)(5+\sqrt{2x})} = 13(27-2x). \text{ Do } (*) \text{ chỉ có các nghiệm thỏa mãn } 0 \leq x \leq 13 \text{ nên ta xét}$$

$$\text{giá trị } x \text{ trên } [0; 13], \text{ khi đó: } VT \leq \frac{4}{(\sqrt{9}+2) \cdot 5} = \frac{4}{25} < 13 = 13(27-26) \leq VP.$$

Do đó: PT (*) có đúng một nghiệm $x = \frac{25}{2}$.

Xét các dấu trên mỗi miền $\left[0; \frac{25}{2}\right], \left[\frac{25}{2}; \frac{81}{2}\right]$, suy ra: BPT đã cho có nghiệm là: $\left[\frac{25}{2}; \frac{81}{2}\right]$.

Qua những VD trên, ta thấy được rằng tuy phương pháp này không quá khó khăn trong lập luận nhưng lại giúp ta rất nhiều trong việc tính toán để thu gọn lời giải các BPT phức tạp.

Do đa số các hàm số của BPT cần xét luôn liên tục trên miền xác định nên phương pháp này luôn được áp dụng thành công.

4.2. Đặt ẩn phụ trong bài toán PT lượng giác

Phương pháp đặt ẩn phụ từ trước đến nay đã quá quen thuộc với mọi dạng PT, đặt ẩn phụ triệt để hoặc không triệt để đã giúp đơn giản hóa nhiều bài toán PT, HPT, BPT khó để đi đến lời giải nhanh hơn. Dưới đây xin nêu một cách đặt ẩn phụ trong PT lượng giác cũng rất hiệu quả để giải một lớp PT lượng giác. Ta xét các VD sau:

VD21: Giải PT: $\sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0$.

PT đã cho tương đương với:

$$2 \sin x \cdot \cos x + 2 \sin^2 x - 1 + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + \sin x(2 \sin x + 3) - \cos x - 2 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow 2t^2 + (2 \cos x + 3)t - \cos x - 2 = 0.$$

Đây là PT bậc hai theo t, ta có:

$$\Delta = (2 \cos x + 3)^2 + 8(\cos x + 2) = 4 \cos^2 x + 20 \cos x + 25 = (2 \cos x + 5)^2 > 0 \text{ nên PT đã cho có hai}$$

$$\text{nghiệm là: } t_{1,2} = \frac{-(2 \cos x + 3) \pm (2 \cos x + 5)}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = -(\cos x + 2).$$

$$- \text{ Với } t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{5\pi}{6} + k.2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$- \text{ Với } t = -\cos x - 2 \Rightarrow \sin x + \cos x = -2, \text{ PT này vô nghiệm.}$$

Vậy PT đã cho có nghiệm là $x = \frac{\pi}{6} + k.2\pi, k \in \mathbb{Z}$. (Đây chính là đề thi ĐH khối B năm 2010).

VD22: Giải PT lượng giác sau:

$$4 \sin^3 x + \sin x \cdot \cos x(7 \sin x + 3 \cos x) + (\sin 2x + \cos 2x) - 5(\sin x + \cos x) + 2 \cos^2 x = 0$$

Với bài này các phương pháp thử để phân tích thông thường dường như không thể áp dụng được nữa vì biểu thức quá phức tạp. Ta sẽ biến đổi nó thêm vài bước để đưa về việc đặt ẩn phụ $t = \sin x$ tương tự như bài trên:

$$4 \sin^3 x + 7 \cos x \cdot \sin^2 x + 3 \cos^2 x \cdot \sin x + 2 \sin x \cdot \cos x - 5 \sin x - 5 \cos x - \sin^2 x + 3 \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^3 x + (7 \cos x - 1) \sin^2 x + (3 \cos^2 x + 2 \cos x - 5) \cdot \sin x + 3 \cos^2 x - 5 \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4t^3 + (7 \cos x - 1)t^2 + (3 \cos^2 x + 2 \cos x - 5)t + 3 \cos^2 x - 5 \cos x = 0$$

Nhận xét: $(-4) + (7 \cos x - 1) - (3 \cos^2 x + 2 \cos x - 5) + (3 \cos^2 x - 5 \cos x) = 0$ nên PT bậc 3 ở trên có nghiệm $t = -1$. Phân tích đa thức trên thành nhân tử, ta có:

$$(t+1)[4t^2 + (7 \cos x - 5)t + 3 \cos^2 x - 5 \cos x] = 0$$

Biểu thức trong ngoặc được phân tích tương tự như VD ở trên; cuối cùng, ta được:

$$(t+1)(t+\cos x)(4t+3 \cos x-5)=0. \text{ Giải PT tích này với } t = \sin x, \text{ ta có nghiệm của bài toán.}$$

III) Một số vấn đề chọn lọc khác

1. Nét đẹp của những PT đa thức bậc cao

Như chúng ta đã biết, hai nhà toán học vĩ đại Abel và Galois đã chứng minh được rằng các PT đa thức bậc cao hơn 4 không thể giải được bằng căn thức và nêu lên một số điều kiện để các PT đặc biệt loại này có thể giải được. Quá trình nghiên cứu giải các PT bậc cao đã đem lại nhiều kết quả cao cấp lẫn sơ cấp thật lạ mắt. Dưới những biểu thức đơn giản là những kết cấu hết sức phức tạp và tinh vi của các biến và sự lồi cuốn của PT bậc cao đã được tạo ra bởi chính điều đó. Chúng ta hãy cùng quan sát và thử giải các bài bên dưới. Cảm nhận vẻ đẹp của các PT này sẽ càng giúp ta có hứng thú hơn với những bài PT mà chúng ta sẽ gặp!

Bài toán 1: Chứng minh rằng phương trình bậc năm:

$$x^5 - 5x^4 + 30x^3 - 50x^2 + 55x - 21 = 0 \text{ có một nghiệm duy nhất là } x = 1 + \sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{8} - \sqrt[5]{16}.$$

Bài toán 2: Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm (thực hoặc phức) của phương trình

$$x^4 + 4x^3 + \frac{4}{5}x^2 - \frac{8}{5^3}x - \frac{1}{5^5} = 0. \text{ Chứng minh rằng: } y = \sqrt[5]{x_1} + \sqrt[5]{x_2} + \sqrt[5]{x_3} + \sqrt[5]{x_4} \text{ là nghiệm thực duy nhất của phương trình } y^5 - 5y + 12 = 0.$$

Bài toán 3: Chứng minh rằng phương trình $x^5 + 20x^3 + 20x^2 + 30x + 10 = 0$ có một nghiệm duy nhất là $x = \sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{2^2} + \sqrt[5]{2^3} - \sqrt[5]{2^4}$

Bài toán 4: Chứng minh rằng PT: $64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3 = 0$ có một nghiệm thực x_0 thỏa mãn: $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} < x_0 < \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}.$

Bài toán 5: Gọi a, b là hai trong bốn nghiệm (thực hoặc phức) của PT: $x^4 + x^3 = 1.$

Chứng minh rằng tích ab là nghiệm của PT: $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1 = 0.$

Bài toán 6: Chứng minh rằng 8 nghiệm phức của các PT sau có thể chia thành hai nhóm bốn số x_1, x_2, x_3, x_4 và x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 thỏa mãn tất cả các số :

$$\sum x_i, \sum x'_i, \sum x_i x_j, \sum x'_i x'_j, \sum x_i x_j x_k, \sum x'_i x'_j x'_k, \prod x_i, \prod x'_i \text{ đều là số thực:}$$

a. $x^8 + 14x^4 + 1 = 0$

b. $x^8 + 98x^4 + 1 = 0.$

2. Phân tích lời giải một vài bài toán chọn lọc

Bài 1: Giải HPT sau:
$$\begin{cases} x^4y - 6x^2y + 4x^3 - 4x + y = 0 \\ y^4z - 6y^2z + 4y^3 - 4y + z = 0 \\ z^4x - 6z^2x + 4z^3 - 4z + x = 0 \end{cases}$$

Đây là đề thi HSG ĐBSCL 2008, HPT này có hình thức tuy phức tạp nhưng qua một vài phép biến đổi, ta đã được về hệ lập ba biến với hàm số là:

$$f(t) = \frac{4t - 4t^3}{t^4 - 6t^2 + 1}, t \neq \pm\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}.$$

Theo cách giải thông thường, ta phải chứng minh hàm này đơn điệu, điều này cũng không có gì khó: $f'(t) = \frac{4(t^2 + 1)^3}{(t^4 - 6t^2 + 1)^2} > 0, t \neq \pm\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}.$

Đạo hàm quá đẹp và đến đây nếu ta chưa nhận ra vấn đề thì vẫn tiếp tục nhận xét $x = y = z$ để rồi kết luận HPT chỉ có 3 nghiệm là: $(x, y, z) = (0, 0, 0), (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}).$

Thực ra, nếu đi theo con đường này thì ta đã mắc một sai lầm hết sức “tinh vi” là hàm số $f(t)$ ở trên dù đồng biến nhưng là đồng biến trên từng khoảng xác định và chính điều này đã làm cho toàn bộ luận trên không còn giá trị nữa!

Nói chung, những hệ lập ba biến thường được giải theo cách xét hàm số rồi chứng minh hàm đơn điệu để có các biến bằng nhau; do đó, sự nhầm lẫn vừa nêu là không ít và nếu như không thể giải được bằng cách dùng hàm đơn điệu, cũng không thể dùng BĐT đánh giá các biến khi sắp thứ tự thì buộc hàm $f(t)$ phải có một sự đặc biệt nào đó. Đến đây, quan sát kĩ lại, ta nhận thấy rằng: $f(\tan x) = \tan 4x.$

Như thế thì bài toán trên phải giải lại như sau: Đặt $x = \tan \alpha, \alpha \in [0; \pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}.$

Từ HPT đã cho, ta thấy: $y = f(x) = \tan 4\alpha, z = f(y) = \tan 16\alpha, x = f(z) = \tan 64\alpha$, suy ra:

$$\tan \alpha = \tan 64\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{k\pi}{63}, k = 0, 1, 2, \dots, 62.$$

Vậy HPT đã cho có 63 nghiệm là: $(x, y, z) \in \left\{(\tan \alpha, \tan 2\alpha, \tan 4\alpha) \mid \alpha = \frac{k\pi}{63}, k = \overline{0, 62}\right\}$

Lời giải ban đầu đã làm thiếu mất 60 nghiệm của bài toán, dù sử dụng hàm số đơn điệu và dùng BĐT là hai phương pháp chủ yếu để giải dạng toán này nhưng với những bài xây dựng từ công thức lượng giác thì chúng không còn tác dụng nữa!

Bài 2: Giải HPT sau:
$$\begin{cases} x + \frac{x+2y}{x^2+y^2} = 2 \\ y + \frac{2x-y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

Đây là đề thi chọn đội tuyển HSG TP Hà Nội năm 2007, trước đó dạng này đã xuất hiện trong tạp chí Kvant của Nga và cũng là một bài trên tạp chí THPT gần đây. HPT không có gì nổi bật, không hề có căn thức, mẫu thức lại giống nhau ở cả hai PT. Tuy nhiên, việc giải HPT này quả thật không đơn giản. Cái khó nhất ở đây chính là thiếu tính đồng bậc, ta cần tìm nó để có một quan hệ tốt giữa x và y bởi các phương pháp đánh giá nghiệm không còn áp dụng được. Bài này được giải bằng một phương pháp rất ấn tượng như sau:

Xét hai số phức: $a = (x + y) + (x - y)i$, $b = (3x + y) + (3y - x)i$, trong đó x, y là các nghiệm của HPT đã cho. Rõ ràng $a, b \neq 0$ (do $x^2 + y^2 \neq 0$).

Cộng và trừ từng vế hai PT của hệ đã cho, ta có: $x + y + \frac{3x + y}{x^2 + y^2} = 2$, $x - y + \frac{3y - x}{x^2 + y^2} = 2$.

Nhân i vào PT thứ hai rồi cộng từng vế lại, ta được:

$$x + y + (x - y)i + \frac{3x + y + (3y - x)i}{x^2 + y^2} = 2 + 2i \Leftrightarrow a + \frac{b}{x^2 + y^2} = 2 + 2i \quad (*).$$

Hơn nữa: $ab = [(x + y) + (x - y)i][(3x + y) + (3y - x)i] = 4(x^2 + y^2) + 2(x^2 + y^2)i$.

Suy ra: $x^2 + y^2 = \frac{ab}{4 + 2i}$. Thay vào (*), ta có:

$$a + \frac{b(4 + 2i)}{ab} = 2 + 2i \Leftrightarrow a + \frac{4 + 2i}{a} = 2 + 2i \Leftrightarrow a^2 + 4 + 2i = (2 + 2i)a$$

$$\Leftrightarrow 4xy + 2(x^2 - y^2)i + 4 + 2i = 4y + 4xi$$

$$\Leftrightarrow [4xy + 4 - 4y] + [2(x^2 - y^2) + 2 - 4x]i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy + 1 - y = 0 \\ 2(x^2 - y^2) + 2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{1 - x} \\ x^2 - \frac{1}{(1 - x)^2} + 1 - 2x = 0 \end{cases} \quad (**)$$

Ta có:

$$(**) \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{(1 - x)^2} + 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 2)(x^2 - 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

Tương ứng với hai giá trị x này, có $y = 1 \vee y = -1$. Thử hai giá trị này đều thấy thỏa.

Vậy HPT đã cho có hai nghiệm là: $(x, y) = (0, 1), (2, -1)$.

3. Sự sáng tạo trong các bài PT, HPT của đề thi VMO

Kì thi VMO đã tổ chức hơn 40 năm qua, trong đó các bài toán PT, HPT càng ngày càng phong phú hơn và mức độ sáng tạo, mới lạ càng được thể hiện rõ hơn. Nhiều bài tuy xuất phát từ những ý tưởng quen thuộc nhưng lại nằm trong một hình thức bất đối xứng, tuy quen mà lạ làm cho mức độ khó tăng lên. Ta có thể thấy điều đó qua đề VMO 2005, VMO 2010 với câu HPT:

$$(VMO\ 2010) \quad \begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y) \end{cases} \quad \text{và} \quad (VMO\ 2005) \quad \begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$$

Chỉ từ những hằng đẳng thức khai triển bậc 3 và 4 và vài bước biến đổi đã làm cho chúng trở thành những bài toán thật khó. Việc làm mất đi tính đối xứng hay tính đồng bậc cũng được gặp trong HPT trong đề VMO các năm 1996, 2004, 2005 với các bài:

$$\begin{cases} \sqrt{3x} \left(1 + \frac{1}{x+y} \right) = 2 \\ \sqrt{7y} \left(1 - \frac{1}{x+y} \right) = 4\sqrt{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5 \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^3 + x(y-z)^2 = 2 \\ y^3 + y(z-x)^2 = 16 \\ z^3 + z(x-y)^2 = 30 \end{cases}$$

(VMO 1996)

(VMO 2004)

(VMO 2005)

Trên thực tế, chúng vẫn có ẩn chứa trong đó những biểu thức đối xứng, đồng bậc nhưng việc đi tìm chúng phải thông qua những phép biến đổi hơi thiếu tự nhiên; chính nhờ việc các hệ số trong đó đều cần được khai thác triệt để và bài toán chỉ giải được theo một con đường nào đó đã làm cho chúng càng thú vị hơn. Cũng có nhiều bài đặc biệt sáng tạo bởi vì chúng ta khó có thể tìm được một đề thứ hai tương tự như vậy:

VMO 2003: Cho hai đa thức: $P(x) = 4x^3 - 2x^2 - 15x + 9$, $Q(x) = 12x^3 + 6x^2 - 7x + 1$.

1. Chứng minh rằng mỗi đa thức trên đều có 3 nghiệm phân biệt.
2. Gọi α, β lần lượt là hai nghiệm lớn nhất của mỗi đa thức. Chứng minh rằng: $\alpha^2 + 3\beta^2 = 4$.

VMO 1979: Chứng minh rằng với mỗi số thực x lớn hơn 1, tồn tại tam giác có ba cạnh có số đo là: $P_1(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, $P_2(x) = 2x^2 + x^2 + 2x + 1$, $P_3(x) = x^4 - 1$.

Chứng minh rằng góc lớn nhất trong mỗi tam giác đó không đổi.

Càng tìm hiểu nhiều về các PT, HPT xuất hiện trong các kì thi này, ta lại càng thấy được những đặc trưng riêng biệt của chúng và hiểu rằng, muốn giải tốt các bài toán thật thú vị đó, chúng ta cần phải có một kĩ năng biến đổi thật tốt cùng kinh nghiệm vững vàng!

4. Các bài toán PT, HPT, BPT, hệ BPT trong đề thi IMO

Bài 1. (Problem 2 IMO 1959)

Với các giá trị nào của x thì các biểu thức sau được thỏa mãn?

a. $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$

b. $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = 1$

c. $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = 2$

Bài 2. (Problem 3 IMO 1959)

Cho x là một góc và $a, b, c, \cos x$ là các số thỏa mãn: $a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$.

Hãy lập một phương trình bậc hai tương tự với a, b, c và $\cos 2x$.

So sánh kết quả nhận được với kết quả khi thay các số a, b, c đã cho bởi các giá trị cụ thể là $a = 4, b = 2, c = -1$.

Bài 3. (Problem 2 IMO 1960)

Với giá trị thực nào của x thì bất phương trình sau đây được thỏa mãn?

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$$

Bài 4. (Problem 1 IMO 1961)

Giải hệ phương trình sau (trong đó a, b là các số thực cho trước)

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b \\ xy=z^2 \end{cases}$$

Tìm điều kiện của a và b sao cho hệ phương trình có nghiệm là các số dương phân biệt.

Bài 5. (Problem 3 IMO 1961)

Giải phương trình sau:

$$\cos^n x - \sin^n x = 1 \text{ với } n \text{ là số nguyên dương cho trước.}$$

Bài 6. (Problem 2 IMO 1962)

Tìm tất cả các số thực x thỏa mãn:

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

Bài 7. (Problem 4 IMO 1962)

Giải phương trình sau:

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$$

Bài 8. (Problem 1 IMO 1963)

Xác định tất cả các nghiệm thực của phương trình:

$$\sqrt{x^2-p} + 2\sqrt{x^2-1} = x \text{ với } p \text{ là số thực cho trước.}$$

Bài 9. (Problem 1 IMO 1964)

Tìm tất cả các số thực x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_5 + x_2 = yx_1 \\ x_1 + x_3 = yx_2 \\ x_2 + x_4 = yx_3 \\ x_3 + x_5 = yx_4 \\ x_4 + x_1 = yx_5 \end{cases}$$

trong đó y là tham số thực.

Bài 10. (Problem 2 IMO 1964)

Chứng minh rằng:

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Bài 11. (Problem 1 IMO 1965)

Tìm tất cả các số thực $x \in [0; 2\pi]$ thỏa mãn:

$$2 \cos x \leq \left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right| \leq \sqrt{2}$$

Bài 12. (Problem 2 IMO 1965)

Cho hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

trong đó các hệ số thỏa mãn:

- (a) Các hệ số a_{11}, a_{22}, a_{33} là các số thực dương.
- (b) Tất cả các hệ số còn lại đều là các số thực âm.
- (c) Ở mỗi phương trình, tổng các hệ số là dương.

Chứng minh rằng hệ phương trình này chỉ có nghiệm $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Bài 13. (Problem 4 IMO 1966)

Giải phương trình sau:

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot^{2^n} x$$

trong đó n là số tự nhiên và x không có dạng $\frac{m\pi}{2^k}$ với $m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$.

Bài 14. (Problem 5 IMO 1966)

Giải hệ phương trình sau với a_1, a_2, a_3, a_4 đôi một khác nhau.

$$\begin{cases} |a_1 - a_2| x_2 + |a_1 - a_3| x_3 + |a_1 - a_4| x_4 = 1 \\ |a_2 - a_1| x_1 + |a_2 - a_3| x_3 + |a_2 - a_4| x_4 = 1 \\ |a_3 - a_1| x_1 + |a_3 - a_2| x_2 + |a_3 - a_4| x_4 = 1 \\ |a_4 - a_1| x_1 + |a_4 - a_2| x_2 + |a_4 - a_3| x_3 = 1 \end{cases}$$

Bài 15. (Problem 3 IMO 1968)

Cho a, b, c là các số thực. Chứng minh rằng hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = x_3 \\ \dots \\ ax_n^2 + bx_n + c = x_1 \end{cases}$$

- (a) Không có nghiệm thực nếu $(b-1)^2 - 4ac < 0$.
 (b) Có đúng một nghiệm thực nếu $(b-1)^2 - 4ac = 0$.
 (c) Có nhiều hơn một nghiệm thực nếu $(b-1)^2 - 4ac > 0$.

Bài 16. (Problem 4 IMO 1972)

Tìm tất cả các nghiệm dương $x_i, i = \overline{1, 5}$ của hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} (x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \leq 0 \\ (x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \leq 0 \\ (x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \leq 0 \\ (x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \leq 0 \\ (x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \leq 0 \end{cases}$$

Bài 17. (Problem 3 IMO 1973)

Xác định giá trị nhỏ nhất của $a^2 + b^2$ với a, b là các số thực thỏa mãn: phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực.

Bài 18. (Problem 5 IMO 1976)

Cho hệ q phương trình sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1q}x_q = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2q}x_q = 0 \\ \dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pq}x_q = 0 \end{cases}$$

với các hệ số a_{ij} nhận các giá trị là $-1; 0; 1$ với mọi $i = \overline{1, p}; j = \overline{1, q}$.

Chứng minh rằng nếu $q = 2p$, tồn tại q nghiệm nguyên $x_1, x_2, \dots, x_q$ không đồng thời bằng 0 thỏa mãn $|x_j| \leq q, j = \overline{1, q}$.

*** Tài liệu tham khảo:**

- (1) Diễn đàn <http://mathscope.org>.
- (2) Diễn đàn <http://mathlinks.ro>.
- (3) Trang http://en.wikipedia.org/wiki/Quintic_equation.
- (4) Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.
- (5) “Các bài toán thi Olympic Toán THPT Việt Nam”, NXB Giáo dục.
- (6) “Sáng kiến kinh nghiệm” của thầy Nguyễn Văn Quý, trường THPT Chuyên Bến Tre.