

Thời gian làm bài 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Cho hàm số $y = x^2 - mx + \sqrt{x - m + 2}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên tập xác định.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{y} + 2 \\ y(\sqrt{x^2 + 1} - 1) = \sqrt{3x^2 + 3} \end{cases}$$

Câu 2. (5,0 điểm)

a) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 4)^{2022} \left(\sin^2 x - \sin x + \frac{1}{3} \right) (x^2 - 2x)$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x^2 - 6x + m)$ có đúng 3 điểm cực trị sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 29$, trong đó x_1, x_2, x_3 là hoành độ của ba cực trị đó.

b) Một hội nghị gồm 6 đại biểu nước A, 7 đại biểu nước B và 7 đại biểu nước C trong mỗi nước có hai đại biểu là nữ. Chọn ngẫu nhiên ra 4 đại biểu. Tính xác suất để chọn được 4 đại biểu mà mỗi nước có ít nhất một đại biểu và có cả đại biểu nam và đại biểu nữ.

Câu 3. (2,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{16\sqrt{xy} + 2\sqrt{10yz} + 2\sqrt{10xz}} - \frac{10}{45 + x + y + z}$$

Câu 4. (6,0 điểm) Khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều với $AB = \sqrt{6}$, $AA' = \frac{8}{\sqrt{3}}$. Gọi $D; E; M$ lần lượt là trung điểm của $A'C'; CC'$ và BC .

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và AM .

b) Mặt phẳng (DEM) chia khối lăng trụ thành 2 khối đa diện. Tính thể tích khối đa diện không chứa A .

Câu 5. (2,0 điểm) Trên các cạnh AB, BC, CD, DA, AC và BD của tứ diện $ABCD$ lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q, S và R . Gọi V_1, V_2, V_3, V_4 và V lần lượt là thể tích của các khối tứ diện $AMSQ, BMNR, CNPS, DPQR$ và $ABCD$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V^4}{V_1 V_2 V_3 V_4}$.

.....Hết.....

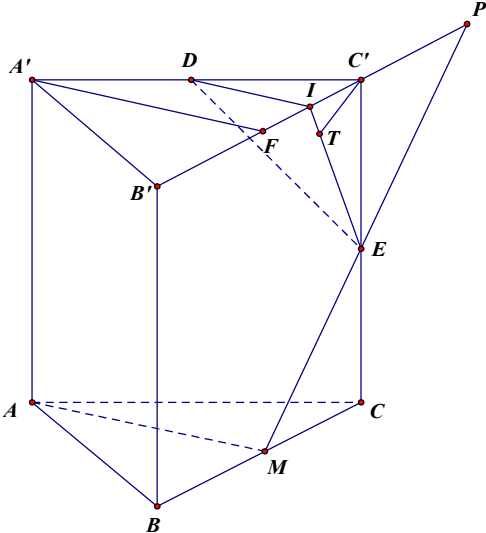
Họ tên thí sinh:SBD:

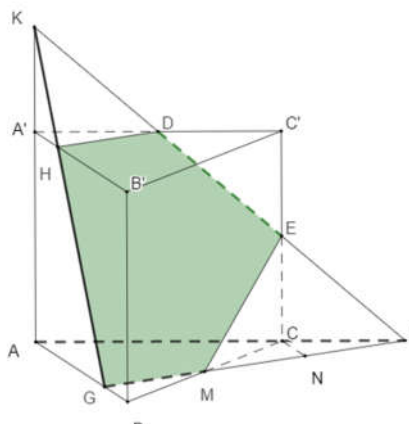
ĐÁP ÁN ĐỀ HSG LẦN 1

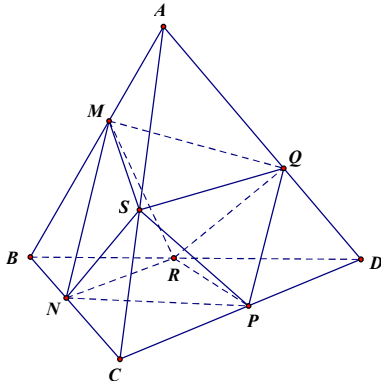
Câu	Nội dung	Điểm
1	a) Cho hàm số $y = x^2 - mx + \sqrt{x - m + 2}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên tập xác định.	2,0
	Tập xác định của hàm số $x - m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq m - 2$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 2x - m + \frac{1}{2\sqrt{x - m + 2}} \geq 0, \forall x > m - 2 \Leftrightarrow \min_{(m-2; +\infty)} y' \geq 0$ (*).	0,5
	Ta có $y' = 2(x - m + 2) + \frac{1}{2\sqrt{x - m + 2}} + m - 4$ $= \left[2(x - m + 2) + \frac{1}{4\sqrt{x - m + 2}} + \frac{1}{4\sqrt{x - m + 2}} \right] + m - 4$	0,75
	$\geq 3\sqrt[3]{2(x - m + 2) \cdot \frac{1}{4\sqrt{x - m + 2}} \cdot \frac{1}{4\sqrt{x - m + 2}}} + m - 4 = m - \frac{5}{2}$ (BĐT Côsi). Khi đó (*) $\Leftrightarrow m - \frac{5}{2} \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{5}{2}$.	0,75
1	b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{y} + 2 & (1) \\ y(\sqrt{x^2 + 1} - 1) = \sqrt{3x^2 + 3} & (2) \end{cases}$	3,0
	ĐKXĐ: $x > 0; y \neq 0$ Pt (1): $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{y} + 2 \Leftrightarrow y\sqrt{x} + y^2 = 2x\sqrt{x} + 2xy \Leftrightarrow y^2 + y(\sqrt{x} - 2x) - 2x\sqrt{x} = 0$ Xem đây là phương trình bậc hai ẩn y , ta có: $\Delta = (\sqrt{x} - 2x)^2 + 8x\sqrt{x} = x + 4x\sqrt{x} + 4x^2 = (\sqrt{x} + 2x)^2 > 0$	0,5
	Do đó phương trình có hai nghiệm: $y = -\sqrt{x}$ và $y = 2x$. Với $y = -\sqrt{x}$, thay vào phương trình (2) ta được: $-\sqrt{x}(\sqrt{x^2 + 1} - 1) = \sqrt{3x^2 + 3}$ Dễ thấy $-\sqrt{x}(\sqrt{x^2 + 1} - 1) < 0 < \sqrt{3x^2 + 3}$ nên phương trình vô nghiệm.	0,75
	Với $y = 2x$, thay vào phương trình (2) ta được: $2x(\sqrt{x^2 + 1} - 1) - \sqrt{3x^2 + 3} = 0$ Xét hàm số $f(x) = 2x(\sqrt{x^2 + 1} - 1) - \sqrt{3x^2 + 3}$ với $x > 0$	0,5
	Ta có: $f'(x) = 2(\sqrt{x^2 + 1} - 1) + \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 3}} = 2(\sqrt{x^2 + 1} - 1) + \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ $= \frac{2(x^2 + 1) - 2\sqrt{x^2 + 1} + 2x^2 - \sqrt{3}x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)^2 + 3x^2 - \sqrt{3}x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$	0,75

	Nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Mặt khác $f(\sqrt{3})=0$ nên $x=\sqrt{3}$ là nghiệm duy nhất của phương trình. Với $x=\sqrt{3}$ có $y=2\sqrt{3}$. Vậy hệ có một nghiệm $(x;y)=(\sqrt{3};2\sqrt{3})$.	0,5														
2	a) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-4)^{2022}\left(\sin^2 x-\sin x+\frac{1}{3}\right)(x^2-2x)$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x^2-6x+m)$ có đúng 3 điểm cực trị sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2=29$, trong đó x_1, x_2, x_3 là hoành độ của ba cực trị đó.	3,0														
	Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=0. \text{ Trong đó, } x=4 \text{ là nghiệm bội chẵn.} \\ x=2 \end{cases}$	0,25														
	Xét hàm $g(x)=f(x^2-6x+m)$ có $g'(x)=(2x-6)f'(x^2-6x+m)$ $g'(x)=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ f'(x^2-6x+m)=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x^2-6x+m=4(\text{bội chẵn}) \\ x^2-6x+m=0 \\ x^2-6x+m=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x^2-6x=-m+4(\text{bội chẵn}) \\ x^2-6x=-m \quad (1) \\ x^2-6x=-m+2 \quad (2) \end{cases}$	1,0														
	Ta xét hàm $h(x)=x^2-6x$. Hàm số này có bảng biến thiên như sau <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$h'(x)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$h(x)$</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>-9</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	3	$+\infty$	$h'(x)$		-	0	+	$h(x)$	$+\infty$		-9	$+\infty$	0,5
x	$-\infty$	3	$+\infty$													
$h'(x)$		-	0	+												
$h(x)$	$+\infty$		-9	$+\infty$												
	Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép bằng 3 và phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 3 $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} -m\leq -9<-m+2 \\ -9\neq -m+2 \end{cases} \Leftrightarrow 9\leq m<11$.	0,5														
	Khi đó, giả sử $x_3=3$ thì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-6x=-m+2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2=20\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=20$. Kết hợp với định lý Vi-et ta có $36-2(m-2)=20\Leftrightarrow m=10$ (thỏa điều kiện $9\leq m<11$). Vậy $m=10$ là giá trị cần tìm.	0,75														
2	b) Một hội nghị gồm 6 đại biểu nước A, 7 đại biểu nước B và 7 đại biểu nước C trong mỗi nước có hai đại biểu là nữ. Chọn ngẫu nhiên ra 4 đại biểu. Tính xác suất	2,0														

	để chọn được 4 đại biểu mà mỗi nước có ít nhất một đại biểu và có cả đại biểu nam và đại biểu nữ.													
	Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{20}^4 = 4845$. Gọi X là biến cố: “Chọn ra 4 đại biểu sao cho mỗi nước đều có ít nhất một đại biểu”. Gọi A là biến cố: “Chọn ra 4 đại biểu sao cho mỗi nước đều có ít nhất một đại biểu và có cả đại biểu nam và đại biểu nữ”. Gọi B là biến cố: “Chọn ra 4 đại biểu sao cho mỗi nước đều có ít nhất một đại biểu và cả 4 đại biểu hoặc toàn nam hoặc toàn nữ”. Ta có: $n(X) = C_6^2 C_7^1 C_7^1 + C_6^1 C_7^2 C_7^1 + C_6^1 C_7^1 C_7^2 = 2499.$	1,0												
	$n(B) = (C_4^2 C_5^1 C_5^1 + C_4^1 C_5^2 C_5^1 + C_4^1 C_5^1 C_5^2) + (C_2^2 C_2^1 C_2^1 + C_2^1 C_2^2 C_2^1 + C_2^1 C_2^1 C_2^2) = 562.$ $n(X) = n(A) + n(B) \Rightarrow n(A) = n(X) - n(B) = 2499 - 562 = 1937.$ Vậy $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1937}{4845}.$	1,0												
3	Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{16\sqrt{xy} + 2\sqrt{10yz} + 2\sqrt{10xz}} - \frac{10}{45 + x + y + z}$	2,0												
	Ta có $16\sqrt{xy} + 2\sqrt{10yz} + 2\sqrt{10xz} = 16\sqrt{xy} + 2\sqrt{(2y)(5z)} + 2\sqrt{(2x)(5z)}$ $\leq 8x + 8y + 2y + 5z + 2x + 5z = 10(x + y + z).$ Vậy ta có $P \geq \frac{1}{10(x + y + z)} - \frac{10}{45 + x + y + z} = \frac{1}{10t} - \frac{10}{t + 45} = f(t),$ với $t = x + y + z > 0.$	0,5												
	Xét $f(t) = \frac{1}{10t} - \frac{10}{t + 45}$ với $t > 0.$ Ta có $f'(t) = -\frac{1}{10t^2} + \frac{10}{(45 + t)^2};$ $f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t + 45)^2 = 100t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = \frac{-45}{11} \xrightarrow{t > 0} t = 5. \end{cases}$	0,5												
	Ta có bảng biến thiên <table><tr><td>t</td><td>0</td><td>5</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(t)$</td><td></td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(t)$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\frac{9}{50}$</td><td>0</td></tr></table>	t	0	5	$+\infty$	$f'(t)$		0	+	$f(t)$	$+\infty$	$-\frac{9}{50}$	0	0,5
t	0	5	$+\infty$											
$f'(t)$		0	+											
$f(t)$	$+\infty$	$-\frac{9}{50}$	0											
	Suy ra $P \geq f(t) \geq -\frac{9}{50} \quad \forall t > 0.$	0,5												

	Do đó giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{-9}{50}$ đạt được khi $\begin{cases} x = y = \frac{5}{2}z \\ x + y + z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{25}{12} \\ z = \frac{5}{6} \end{cases}$	
4	Khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều với $AB = \sqrt{6}$, $AA' = \frac{8}{\sqrt{3}}$. Gọi $D; E; M$ lần lượt là trung điểm của $A'C'; CC'$ và BC.	6,0
	a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và AM	2,0
	 Gọi F, I lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và FC'. Ta có $AM \parallel A'N \parallel DI \Rightarrow AM \parallel (DEI)$ $d(AM, DE) = d(AM, (DEI)) = d(M, (DEI))$	0,5
	Gọi P là giao điểm của ME với $B'C'$ thì $d(M, (DEI)) = \frac{ME}{PE} \cdot d(P, (DEI)) = \frac{EC}{E'C'} \cdot d(P, (DEI)) = d(P, (DEI))$ $PI = PC' + C'I = 2C'I + C'I = 3C'I \Rightarrow d(P, (DEI)) = 3d(C', (DEI))$	0,5
	Lại có $A'F \perp B'C', A'F \perp BB' \Rightarrow A'F \perp (BB'C'C) \Rightarrow DI \perp (BB'C'C) \Rightarrow (DEI) \perp (BB'C'C)$ Kẻ $C'T \perp IE \Rightarrow C'T \perp (DEI)$	0,5
	$\Rightarrow d(C', (DEI)) = C'T = \frac{C'I \cdot C'E}{\sqrt{C'I^2 + C'E^2}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{3}{8} + \frac{16}{3}}} = \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{137}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{137}}$	0,5
	b) Mặt phẳng (DEM) chia khối lăng trụ thành 2 khối đa diện. Tính thể tích khối đa diện không chứa A .	4,0

		
	♦ Trong mặt phẳng $(ACC'A')$ kéo dài DE cắt AC và AA' tại L và K. Trong mặt phẳng (ABC), kéo dài LM cắt AB tại G. Nối G với K cắt $A'B'$ tại H. Khi đó (DEM) chia lăng trụ thành 2 phần. ♦ Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của khối đa diện chứa đỉnh A, khối đa diện chứa đỉnh B (không chứa đỉnh A) như hình vẽ. ♦ Ta có $KA' = C'E$ vì E là trung điểm $CC' \Rightarrow KA' = \frac{1}{2}CC' = \frac{1}{2}AA' \Rightarrow AA' = 2KA'$. Khi đó $KA = KA' + A'A = 3KA' \Rightarrow \frac{KA'}{KA} = \frac{1}{3}$. Vì $A'D // AL \Rightarrow \frac{KA'}{KA} = \frac{KD}{KL} = \frac{1}{3}$. ♦ Vì $KA = \frac{3}{2}KA' \Rightarrow \frac{V_{K.AGL}}{V_{A'.AGL}} = \frac{3}{2} \Rightarrow V_{K.AGL} = \frac{3}{2}V_{A'.AGL}$.	1,0
	♦ Từ C kẻ $CN // AB \Rightarrow \triangle GBM = \triangle NCM (g.c.g) \Rightarrow CN = BG \Rightarrow \frac{BG}{AG} = \frac{CN}{AG}$. ♦ Vì $CN // AG$, $CE // AK \Rightarrow \frac{CN}{AG} = \frac{LC}{LA} = \frac{LE}{LK} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BG}{AG} = \frac{1}{3} \Rightarrow AG = 3BG \Rightarrow AG = \frac{3}{4}AB$.	1,0
	♦ Ta có $\frac{S_{\triangle AGL}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{GA}{BA} \cdot \frac{AL}{AC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$ $\Rightarrow \frac{V_{K.AGL}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{3}KA \cdot S_{\triangle AGL}}{AA' \cdot S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{KA}{AA'} \cdot \frac{S_{\triangle AGL}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{16}$ với $V_{ABC.A'B'C'} = 12$ ♦ Từ đó ta có: $\frac{V_{K.A'HD}}{V_{K.AGL}} = \frac{KA'}{KA} \cdot \frac{KH}{KG} \cdot \frac{KD}{KL} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow V_{A'HD.AGL} = \frac{26}{27}V_{K.AGL}$	1,0
	♦ Và $\frac{V_{L.ECM}}{V_{L.KAG}} = \frac{LE}{LK} \cdot \frac{LM}{LG} \cdot \frac{LC}{LA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27} \Rightarrow V_{L.ECM} = \frac{2}{27}V_{K.AGL}$ ♦ Vậy Thể tích phần không chứa đỉnh A $= \frac{26}{27}V_{K.AGL} - \frac{2}{27}V_{K.AGL} = \frac{24}{27}V_{K.AGL} = \frac{24}{27} \cdot \frac{9}{16} \cdot 12 = 6$	1,0
5	Trên các cạnh AB, BC, CD, DA, AC và BD của tứ diện $ABCD$ lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q, S và R. Gọi V_1, V_2, V_3, V_4 và V lần lượt là thể tích của các khối tứ	

	diện $AMSQ, BMNR, CNPS, DPQR$ và $ABCD$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V^4}{V_1 V_2 V_3 V_4}$	
		
	Ta có: $\frac{V_1}{V} = \frac{V_{AMSQ}}{V_{ABCD}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AS}{AC} \cdot \frac{AQ}{AD}$; $\frac{V_2}{V} = \frac{BM \cdot BN \cdot BR}{BA \cdot BC \cdot BD}$; $\frac{V_3}{V} = \frac{CN \cdot CP \cdot CS}{CB \cdot CD \cdot CA}; \frac{V_4}{V} = \frac{DQ \cdot DR \cdot DP}{DA \cdot DB \cdot DC}$ Suy ra: $\frac{V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdot V_4}{V^4} = \frac{AM \cdot BM}{AB^2} \cdot \frac{BN \cdot CN}{BC^2} \cdot \frac{CP \cdot DP}{CD^2} \cdot \frac{DA \cdot AQ}{DA^2} \cdot \frac{AS \cdot CS}{AC^2} \cdot \frac{BR \cdot DR}{BD^2}$ Vậy: $\frac{V^4}{V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdot V_4} = \frac{AB^2}{AM \cdot BM} \cdot \frac{BC^2}{BN \cdot CN} \cdot \frac{CD^2}{CP \cdot DP} \cdot \frac{DA^2}{DA \cdot AQ} \cdot \frac{AC^2}{AS \cdot CS} \cdot \frac{BD^2}{BR \cdot DR} \quad (1)$	1,0
	Ta có: $AM \cdot BM \leq \left(\frac{AM + BM}{2} \right)^2 = \frac{AB^2}{4} \Rightarrow \frac{AB^2}{AM \cdot BM} \geq \frac{AB^2}{\frac{AB^2}{4}} = 4 \quad (2)$ Tương tự ta có: $\frac{BC^2}{BN \cdot CN} \geq 4; \frac{CD^2}{CP \cdot DP} \geq 4; \frac{DA^2}{DQ \cdot AQ} \geq 4; \frac{AC^2}{AS \cdot CS} \geq 4; \frac{BD^2}{BR \cdot DR} \geq 4 \quad (3)$ Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{V^4}{V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdot V_4} \geq 4^6$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA, BD, AC. Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{V^4}{V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdot V_4}$ là 4^6.	1,0