

Câu 1. (1,5 điểm) Cho Parabol $(P): y = -\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $D: y = \frac{1}{2}x - 1$

- Vẽ P và D trên cùng mặt phẳng tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm của P và D bằng phép toán.

Câu 2. (1,0 điểm) Cho phương trình $4x^2 + 3x - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 .

Không giải phương trình, tính giá trị biểu thức $A = -2x_1 - 2x_2 - 2$

Câu 3. (0,75 điểm) Theo âm lịch thì do một chu kỳ quay của Mặt Trăng quanh Trái Đất là khoảng 29,53 ngày nên một năm âm lịch chỉ có khoảng 354 ngày (làm tròn). Do vậy, cứ sau một vài năm âm lịch thì người ta phải bổ sung một tháng (tháng nhuận) để đảm bảo năm âm lịch tương đối phù hợp với chu kỳ của thời tiết, là yếu tố phụ thuộc vào chu kỳ quay của Trái Đất xung quanh Mặt Trời.

Cách tính năm nhuận âm lịch như sau: lấy số năm chia cho 19. Nếu số dư là một trong các số: 0; 3; 6; 9; 11; 14; 17 thì năm âm lịch đó có tháng nhuận.

Ví dụ: Năm 2017 là năm nhuận âm lịch vì 2017 chia cho 19 dư 3.

Năm 2015 không phải năm nhuận âm lịch vì 2015 chia cho 19 dư 1.

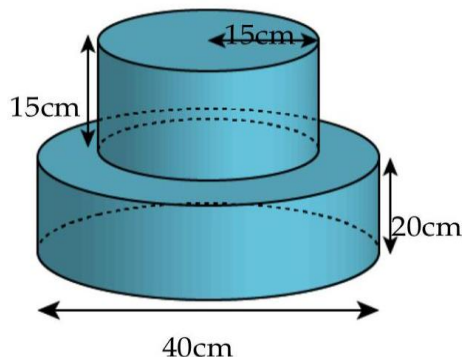
- Em hãy sử dụng quy tắc trên để xác định năm 2023 và 2100 có phải năm nhuận âm lịch hay không?
- Năm nhuận dương lịch là năm chia hết cho 4. Ngoài ra, những năm chia hết cho 100 chỉ được coi là năm nhuận dương lịch nếu chúng cũng chia hết cho 400 (ví dụ 1600 là năm nhuận dương lịch nhưng 1700 không phải năm nhuận dương lịch). Trong các năm từ năm 1895 đến năm 1930, năm nào vừa là năm nhuận âm lịch vừa là năm nhuận dương lịch?

Câu 4. (0,75 điểm) Rừng ngập mặn Cần Giờ (còn gọi là Rừng Sát) là "Lá phổi xanh" của thành phố Hồ Chí Minh, được UNESCO công nhận là khu dự trữ sinh quyển của Thế giới tại Việt Nam. Diện tích rừng phủ xanh S (nghìn hecta) được xác định bởi $S = 3,14 + 0,05t$, với t là số năm kể từ năm 2000.

- Hãy tính diện tích Rừng Sát được phủ xanh vào năm 2023?
- Đến năm nào thì Rừng Sát sẽ đạt diện tích 4640 hecta rừng được phủ xanh?

Câu 5. (0,75 điểm) Hai lớp 9A và 9B có tổng cộng 92 học sinh. Trong đợt thu nhặt giấy báo cũ thực hiện kế hoạch nhỏ. Lớp 9A có 5 học sinh mỗi bạn góp 7kg, các bạn còn lại trong lớp mỗi bạn góp được 5kg. Lớp 9B có 17 học sinh mỗi bạn góp 6kg, các bạn còn lại trong lớp mỗi bạn góp được 8kg. Tính số học sinh của mỗi lớp, biết cả hai lớp góp được 457kg giấy báo cũ.

Câu 6. (1,0 điểm) Để tổ chức sinh nhật cho con gái, chị Linh đã đặt thợ làm bánh tại cửa hàng bánh ngọt với yêu cầu bánh được làm hai tầng, tầng phía trên cao 15cm, bán kính tầng trên là 15cm, tầng phía dưới cao 20cm đường kính tầng dưới là 40cm. Hỏi với kích thước yêu cầu của chị Linh, khi chiếc bánh được hoàn thành thì người thợ có tất cả bao nhiêu diện tích bề mặt để trang trí bánh? (mặt đáy của bánh sinh nhật không trang trí).



Câu 7. (1,0 điểm) Một cửa hàng bán lại bánh A như sau: nếu mua không quá 3 hộp thì giá 35 nghìn đồng mỗi hộp, nếu mua nhiều hơn 3 hộp thì bắt đầu từ hộp thứ tư trở đi giá mỗi hộp sẽ giảm đi 20% giá ban đầu.

- Bạn Bảo đến cửa hàng mua hết 10 hộp thì phải trả bao nhiêu tiền?
- Lan và Hồng đều mua loại bánh A với số hộp mỗi bạn nhiều hơn 3. Hỏi mỗi bạn mua bao nhiêu hộp biết rằng số hộp bánh Lan mua gấp đôi số hộp Hồng mua, đồng thời số tiền mua bánh của Lan nhiều hơn Hồng 140 nghìn đồng?

Câu 8. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O và $AB < AC$. Vẽ đường kính AD của đường tròn O . Kẻ BE và CF vuông góc với AD (E, F thuộc AD).

Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC)

- Chứng minh bốn điểm A, B, H, E cùng nằm trên một đường tròn và tam giác ABH đồng dạng với tam giác ADC .
- Chứng minh HE song song với CD .
- Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh $ME = MF$.

----HẾT---

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (1,5 điểm) Cho Parabol $(P): y = -\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $D: y = \frac{1}{2}x - 1$

- Vẽ P và D trên cùng mặt phẳng tọa độ.
- Tìm tọa độ giao điểm của P và D bằng phép toán.

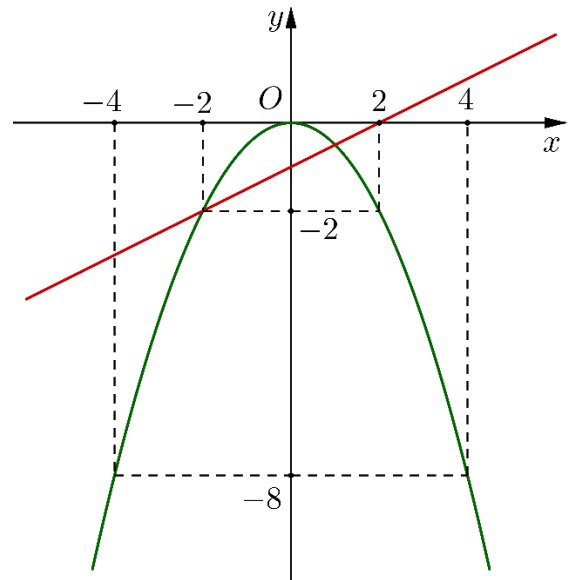
Lời giải

- Vẽ đồ thị P và D trên cùng hệ trục tọa độ.

BGT:

x	-4	-2	0	2	-4
$y = -x^2$	-8	-2	0	-2	-8

x	-2	2
$y = \frac{1}{2}x - 1$	-2	-2



- Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình:

$$-\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x - 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Với $x = 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$ ta có giao điểm $A\left(2; -\frac{1}{2}\right)$

Với $x = -2 \Rightarrow y = -2$ ta có giao điểm $B(-2; -2)$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $A\left(2; -\frac{1}{2}\right)$ và $B(-2; -2)$

Câu 2. (1,0 điểm) Cho phương trình $4x^2 + 3x - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 .

Không giải phương trình, tính giá trị biểu thức $A = -2x_1 - 2x_2 - 2$

Lời giải

Ta có x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $4x^2 + 3x - 1 = 0$.

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{3}{4} \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 A &= -2x_1 - 2x_2 - 2 = -2x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 \\
 &= -2\left[x_1x_2 - 2x_1 + x_2 + 4\right] = -2\left[\frac{-1}{4} - 2\frac{-3}{4} + 4\right] = \frac{-21}{2}.
 \end{aligned}$$

Câu 3. (0,75 điểm) Theo âm lịch thì do một chu kỳ quay của Mặt Trăng quanh Trái Đất là khoảng 29,53 ngày nên một năm âm lịch chỉ có khoảng 354 ngày (làm tròn). Do vậy, cứ sau một vài năm âm lịch thì người ta phải bổ sung một tháng (tháng nhuận) để đảm bảo năm âm lịch tương đối phù hợp với chu kỳ của thời tiết, là yếu tố phụ thuộc vào chu kỳ quay của Trái Đất xung quanh Mặt Trời.

Cách tính năm nhuận âm lịch như sau: lấy số năm chia cho 19. Nếu số dư là một trong các số: 0; 3; 6; 9; 11; 14; 17 thì năm âm lịch đó có tháng nhuận.

Ví dụ: Năm 2017 là năm nhuận âm lịch vì 2017 chia cho 19 dư 3.

Năm 2015 không phải năm nhuận âm lịch vì 2015 chia cho 19 dư 1.

- Em hãy sử dụng quy tắc trên để xác định năm 2023 và 2100 có phải năm nhuận âm lịch hay không?
- Năm nhuận dương lịch là năm chia hết cho 4. Ngoài ra, những năm chia hết cho 100 chỉ được coi là năm nhuận dương lịch nếu chúng cũng chia hết cho 400 (ví dụ 1600 là năm nhuận dương lịch nhưng 1700 không phải năm nhuận dương lịch). Trong các năm từ năm 1895 đến năm 1930, năm nào vừa là năm nhuận âm lịch vừa là năm nhuận dương lịch?

Lời giải

- Vì $2023 = 19 \cdot 106 + 9$, tức 2023 chia 19 dư 9 nên năm 2023 là năm nhuận âm lịch.
Vì $2100 = 19 \cdot 110 + 10$, tức 2100 chia 19 dư 10 nên năm 2023 không là năm nhuận âm lịch.
- Trong các năm từ năm 1895 đến năm 1930 có các năm nhuận dương lịch là 1896, 1904, 1908, 1912, 1916, 1920, 1924 và 1928.

$$\begin{array}{lcl}
 & 1896 = 19 \cdot 99 + 15 & 1916 = 19 \cdot 100 + 16 \\
 \text{Ta có:} & 1904 = 19 \cdot 100 + 4 & 1920 = 19 \cdot 101 + 1 \\
 & 1908 = 19 \cdot 100 + 8 & \text{và } 1924 = 19 \cdot 101 + 5 \\
 & 1912 = 19 \cdot 100 + 12 & 1928 = 19 \cdot 101 + 9
 \end{array}$$

Các năm từ năm 1895 đến năm 1930, năm vừa là năm nhuận âm lịch vừa là năm nhuận dương lịch là năm 1928.

Câu 4. (0,75 điểm) Rừng ngập mặn Cần Giờ (còn gọi là Rừng Sát) là "Lá phổi xanh" của thành phố Hồ Chí Minh, được UNESCO công nhận là khu dự trữ sinh quyển của Thế giới tại Việt Nam. Diện tích **rừng** phủ xanh S (nghìn hecta) được xác định bởi $S = 3,14 + 0,05t$, với t là số năm kể từ năm 2000.

c) Hãy tính diện tích Rừng Sát được phủ xanh vào năm 2023?

d) Đến năm nào thì Rừng Sát sẽ đạt diện tích 4640 hecta rừng được phủ xanh?

Lời giải

a) Từ năm 2000 đến 2023 có 23 năm

Diện tích Rừng Sát được phủ xanh vào năm 2023 là: $S = 3,14 + 0,05.23 = 4,29$ (nghìn hecta).

b) Ta có: $3,14 + 0,05t = 4,640 \Leftrightarrow t = 30$.

Vậy đến năm 2030 thì Rừng Sát sẽ đạt diện tích 4640 hecta rừng được phủ xanh

Câu 5. (0,75 điểm) Hai lớp 9A và 9B có tổng cộng 92 học sinh. Trong đợt thu nhặt giấy báo cũ thực hiện kế hoạch nhỏ. Lớp 9A có 5 học sinh mỗi bạn góp 7kg, các bạn còn lại trong lớp mỗi bạn góp được 5kg. Lớp 9B có 17 học sinh mỗi bạn góp 6kg, các bạn còn lại trong lớp mỗi bạn góp được 8kg. Tính số học sinh của mỗi lớp, biết cả hai lớp góp được 457kg giấy báo cũ.

Lời giải

Gọi số học sinh của lớp 9A là x (học sinh)

số học sinh của lớp 9B là y (học sinh)

$ĐK : 5 < x < 92, 17 < y < 92; x, y \in \mathbb{N}$

Vì Hai lớp 9A và 9B có 92 học sinh nên ta có phương trình: $x + y = 92$ (1)

+ Tổng kg lớp 9A thu nhặt được là : $5.7 + 5(x - 5) = 5x + 10$ (kg)

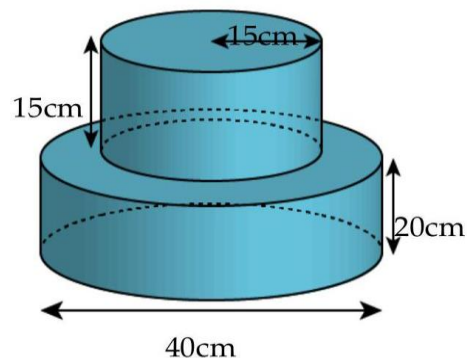
+ Tổng kg lớp 9B thu nhặt được là : $17.6 + 8(y - 17) = 8y - 34$ (kg)

Cả 2 hai lớp góp được : $(5x + 10) + (8y - 34) = 457 \Leftrightarrow 5x + 8y = 481$

Giải ra được $x = 85, y = 7$ (vô lý).

Câu 6. (1,0 điểm) Để tổ chức sinh nhật cho con gái, chị Linh

đã đặt thợ làm bánh tại cửa hàng bánh ngọt với yêu cầu bánh được làm hai tầng, tầng phía trên cao 15cm, bán kính tầng trên là 15cm, tầng phía dưới cao 20cm đường kính tầng dưới là 40cm. Hỏi với kích thước yêu cầu của chị Linh, khi chiếc bánh được hoàn thành thì người thợ có tất cả bao nhiêu diện tích bề mặt để trang trí bánh? (mặt đáy của bánh sinh nhật không trang trí).



Lời giải

Diện tích bề mặt để trang trí của bánh phía trên là: $15^2 \cdot \pi + 2 \cdot 15 \cdot \pi \cdot 15 = 675\pi (cm^2)$

Diện tích bề mặt để trang trí của bánh phía dưới là: $(20^2 - 15^2)\pi + 2 \cdot 20 \cdot \pi \cdot 20 = 975\pi (cm^2)$

Vậy tổng diện tích bề mặt mà người thợ có thể trang trí là: $675\pi + 975\pi = 1650\pi (cm^2)$

Câu 7. (1,0 điểm) Một cửa hàng bán lại bánh A như sau: nếu mua không quá 3 hộp thì giá 35 nghìn đồng mỗi hộp, nếu mua nhiều hơn 3 hộp thì bắt đầu từ hộp thứ tư trở đi giá mỗi hộp sẽ giảm đi 20% giá ban đầu.

e) Bạn Bảo đến cửa hàng mua hết 10 hộp thì phải trả bao nhiêu tiền?

f) Lan và Hồng đều mua loại bánh A với số hộp mỗi bạn nhiều hơn 3. Hỏi mỗi bạn mua bao nhiêu hộp biết rằng số hộp bánh Lan mua gấp đôi số hộp Hồng mua, đồng thời số tiền mua bánh của Lan nhiều hơn Hồng 140 nghìn đồng?

Lời giải

a) Giá tiền mua 10 hộp là: $3 \cdot 35000 + 7 \cdot 35000 \cdot 80\% = 378000$ (nghìn đồng)

b) Gọi $x, (x \in \mathbb{N}, x \geq 4)$ là số bánh Hồng mua, suy ra số bánh của Lan là $2x$

Số tiền mua bánh của Lan nhiều hơn của Hồng là 140 nghìn đồng nên:

$$(2x - x) \cdot 35000 \cdot 80\% = 140000 \text{ suy ra } x = \frac{140000}{35000 \cdot 80\%} = 5$$

Vậy Lan mua 10 hộp, Hồng mua 5 hộp.

Câu 9. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O và $AB < AC$.

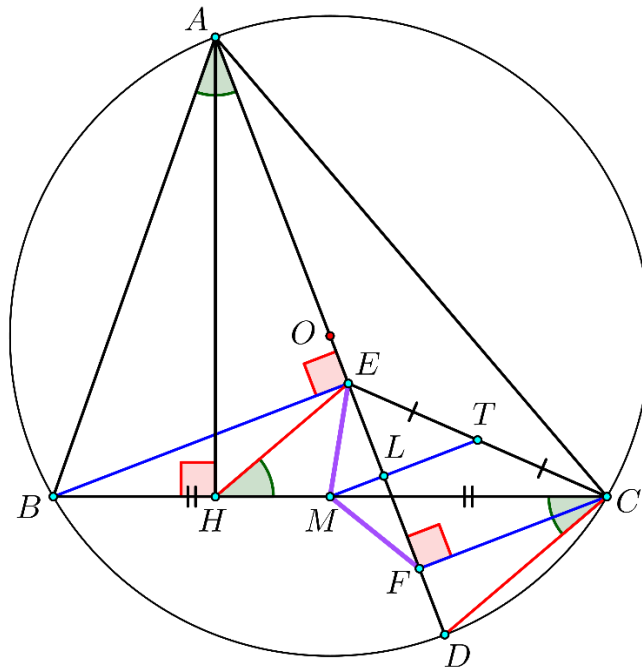
Vẽ đường kính AD của đường tròn O . Kẻ BE và CF vuông góc với AD (E, F thuộc AD). Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC)

a) Chứng minh bốn điểm A, B, H, E cùng nằm trên một đường tròn và tam giác ABH đồng dạng với tam giác ADC .

b) Chứng minh HE song song với CD .

c) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh $ME = MF$.

Lời giải



a) Xét tứ giác $ABHE$ có

$$\angle AHB = 90^\circ \text{ (} AH \text{ là đường cao của } \triangle ABC \text{)}$$

$$\angle AEB = 90^\circ \text{ (} BE \text{ là đường cao của } \triangle ABC \text{)}$$

$\Rightarrow A, B, H, E$ cùng thuộc đường tròn đường kính AH

Xét (O) có

AD là đường kính.

$$C \in (O)$$

Suy ra tam $\triangle ACD$ vuông tại C

Xét $\triangle ABH$ và $\triangle ADC$ có:

$$\angle AHB = \angle ACD = 90^\circ.$$

$$\angle ABC = \angle ADC \text{ (2 góc nội tiếp cùng chắn } AC \text{ trong } (O))$$

Suy ra $\triangle ABH$ đồng dạng $\triangle ADC$.

b) Chứng minh HE song song với CD .

Ta có: $ABHE$ nội tiếp vì A, B, H, E cùng thuộc đường tròn

Nên $BAE = EHC$ (góc ngoài bằng góc đối trong).

Mà $BAD = BCD$ (2 góc nội tiếp cùng chắn BD trong (O))

Suy ra $EH C = BCD$

Vậy HE song song với CD (2 góc so le trong bằng nhau)

c) Gọi T là trung điểm EC

L là giao điểm của EF với MT

Suy ra MT song song BE (MT là đường trung bình trong tam giác $\triangle BEC$)

Mà BE vuông với EF

Mên MT vuông với EF

Suy ra MT song song CF

Xét $\triangle EFC$ có:

T là trung điểm EC

LT song song CF ($L \in EF$)

Nên L là trung điểm EF

Xét $\triangle MEF$ có

ML vừa là trung tuyến vừa là đường cao

nên tam giác $\triangle MEF$ cân tại M .

----HẾT---