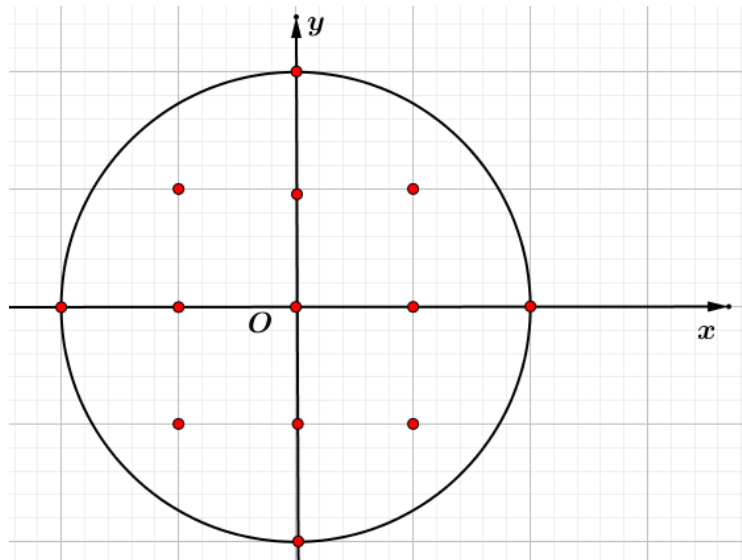


HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ 07

Câu 1: Có bao nhiêu số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{Z}$) thỏa mãn $z \cdot \bar{z} \leq 4$.
A. Vô số. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D



Ta có $z \cdot \bar{z} \leq 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$
 Ta có
 Mà $x, y \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow (x, y) \in \{(0; 0), (1; 0), (2; 0), (-1; 0), (-2; 0), (0; 1), (0; 2), (0; -1), (0; -2), (1; 1), (-1; 1), (-1; -1), (-1; -1)\}$
 Vậy có 13 số phức thỏa mãn bài toán.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) \cdot e^{2x}$ là
A. $xe^x + x + C$ **B.** $(x+1)e^x + C$ **C.** $xe^{-x} + x + C$ **D.** $(x-1)e^x + C$

Lời giải

$$f(x) + f'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = e^{-x} \cdot e^x \Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1 \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^x = x + C$$

$$\text{Với } x=0 \Rightarrow f(0)e^0 = 0 + C \Leftrightarrow 2 \cdot 1 = C \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x)e^x = x + 2$$

$$\Rightarrow f(x)e^{2x} = (x+2)e^x$$

$$\Rightarrow \int f(x)e^{2x} dx = \int (x+2)e^x dx = (x+2)e^x - \int e^x dx = (x+2)e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C$$

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 1, AC = 2, AD = 3$ và $\angle BAC = \angle AD = \angle DAB = 60^\circ$. Tính thể tích V của khối tứ diện V .

A. $V = \frac{\sqrt{2}}{6}$

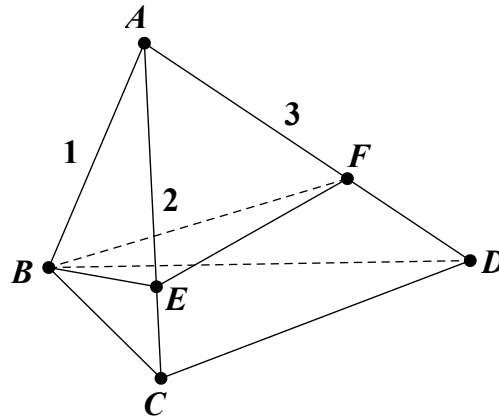
B. $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$

C. $V = \frac{\sqrt{3}}{4}$

D. $V = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Chọn D



Gọi E, F lần lượt là các điểm trên đoạn AC và AD sao cho $AE = AF = 1$.

Ta có $AB = AE = AF = 1$ và $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAB = 60^\circ$ nên tứ diện $ABEF$ là tứ diện đều cạnh

bằng 1 suy ra $V_{ABEF} = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

Lại có $\frac{V_{ABEF}}{V_{ABCD}} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AE}{AD} \cdot \frac{AF}{AD} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{ABCD} = 6V_{ABEF} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 1; -3)$, $B(0; -2; 3)$ và mặt cầu $(S): (x+1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 1$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S) , giá trị lớn nhất của $MA^2 + 2MB^2$ bằng

A. 84.

B. 52.

C. 102.

D. 78.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 0; 3)$ và bán kính $R = 1$.

Gọi $J(a; b; c)$ là điểm thỏa mãn: $\vec{JA} + 2\vec{JB} = \vec{0}$.

Ta có: $\vec{JA} = (3-a; 1-b; -3-c)$; $\vec{JB} = (-a; -2-b; 3-c)$

$$\vec{JA} + 2\vec{JB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-a+2(-a)=0 \\ 1-b+2(-2-b)=0 \\ -3-c+2(3-c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow J(1; -1; 1)$$

$$P = MA^2 + 2MB^2 = (\vec{MJ} + \vec{JA})^2 + 2(\vec{MJ} + \vec{JB})^2 = 3MJ^2 + JA^2 + 2JB^2 + 2\vec{MJ} \cdot (\vec{JA} + 2\vec{JB})$$

Ta có:

$$= 3MJ^2 + \underbrace{JA^2}_{\text{const}} + 2\underbrace{JB^2}_{\text{const}}$$

Để P đạt giá trị lớn nhất thì $MJ_{\max}$. Ta có :

$$\begin{aligned}IJ &= (2; -1; -2) \Rightarrow IJ = 3 > R \text{ nên } J \text{ nằm ngoài mặt cầu } (S) \text{ và } MJ_{\max} = IJ + R = 3 + 1 = 4 \\JA &= (2; 2; -4) \Rightarrow JA = \sqrt{24} \\JB &= (-1; -1; 2) \Rightarrow JB = \sqrt{6} \\ \text{Vậy } P_{\max} &= 3 \cdot 4^2 + 24 + 2 \cdot 6 = 84.\end{aligned}$$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng d' đối xứng với d qua mặt phẳng (Oyz) có phương trình là

A. $\frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$ **B.** $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$ **C.** $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$ **D.** $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$, mặt phẳng (Oyz) có phương trình là: $x = 0$

Gọi $M = d \cap (Oyz) \Rightarrow t = 0$. Vậy $M(0; -1; 2)$

Lấy điểm $N(1; 1; 1) \in d, N \notin (Oyz)$.

Gọi H là hình chiếu của N xuống $(Oyz) \Rightarrow H(0; 1; 1)$

Gọi N' là điểm đối xứng của N qua (Oyz) . Khi đó H là trung điểm của $NN' \Rightarrow N'(-1; 1; 1)$

Đường thẳng d' đối xứng với d qua mặt phẳng (Oyz) là đường thẳng đi qua M, N'

Ta có: $\overrightarrow{MN'} = (-1; 2; -1)$

Phương trình đường thẳng $d': \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

Câu 7: Tính tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2(x^2 + 3) - \log_2 x + x^2 - 4x + 1 \leq 0$.

A. 4 **B.** 6 **C.** 5 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

ĐKXD: $x > 0$

Ta có $BPT \Leftrightarrow \log_2(x^2 + 3) + (x^2 + 3) < \log_2(4x) + 4x$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_2 t$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Ta thấy hàm số $y = f(t)$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$

Do đó BPT: $f(x^2 + 3) \leq f(4x) \Leftrightarrow x^2 + 3 \leq 4x \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$

KHDK: $x > 0$ suy ra tập nghiệm nguyên của bpt là $S = \{1; 2; 3\}$.

Câu 8: Cho hình nón có đường cao $h = 5a$ và bán kính đáy $r = 12a$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt đường tròn đáy theo dây cung có độ dài $10a$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình nón đã cho.

A. $69a^2$.

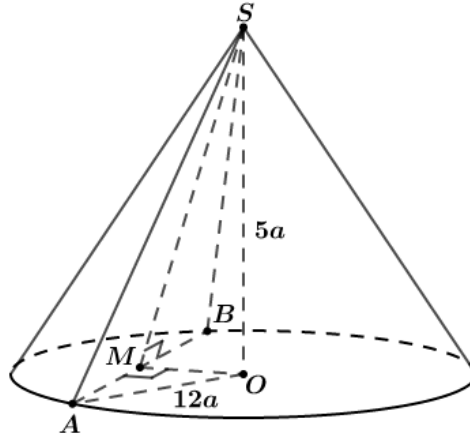
B. $120a^2$.

C. $60a^2$.

D. $\frac{119a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi S là đỉnh của hình nón và O là tâm của đường tròn đáy.

Giả sử mặt phẳng (α) cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác SAB cân tại S .

Theo giả thiết ta có: $SO = 5a$, $OA = OB = 12a$ và $AB = 10a$.

Gọi M là trung điểm của AB suy ra $MA = MB = \frac{AB}{2} = 5a$ và $OM \perp AB$.

Xét tam giác OMA vuông tại M có: $OM^2 = OA^2 - MA^2 = 144a^2 - 25a^2 = 119a^2$.

Xét tam giác SOM vuông tại O có: $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{25a^2 + 119a^2} = 12a$.

Tam giác SAB cân tại S , có SM là đường trung tuyến nên đồng thời là đường cao.

Vậy diện tích của thiết diện: $S_{SAB} = \frac{1}{2} SM \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 12a \cdot 10a = 60a^2$.

Câu 9: Gọi M là điểm biểu diễn số phức $z_1 = x + (x^2 - 2x + 2)i$ (với $x \in \mathbb{R}$) và N là điểm biểu diễn số phức z_2 biết $|z_2 - 2 - i| = |\bar{z}_2 - 6 - i|$. Tìm khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm M, N .

A. $2\sqrt{5}$.

B. 5.

C. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Số phức $z_1 = x + (x^2 - 2x + 2)i$ có điểm biểu diễn $M(x; x^2 - 2x + 2)$.

Giả sử điểm $N(a; b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ là điểm biểu diễn số phức z_2 .

$\Rightarrow z_2 = a + bi, \bar{z}_2 = a - bi$.

$$|z_2 - 2 - i| = |\overline{z_2} - 6 - i| \Leftrightarrow |a + bi - 2 - i| = |a - bi - 6 - i| \Rightarrow |a - 2 + (b - 1)i| = |a - 6 + (-b - 1)i|$$

$$\Leftrightarrow 2a - b - 8 = 0.$$

Vậy tập hợp các điểm N biểu diễn số phức z_2 là đường thẳng $\Delta: 2a - b - 8 = 0$.

Ta có:

$$MN \geq d(M, \Delta) = \frac{|2x - (x^2 - 2x + 2) - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|x^2 - 4x + 10|}{\sqrt{5}} = \frac{|(x - 2)^2 + 6|}{\sqrt{5}} \geq \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2$.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(m \cdot x^2 + 4x + m)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. 1

B. 2

C. 0

D. Vô số

Lời giải

Chọn A

ĐKXĐ: $m \cdot x^2 + 4x + m > 0$

Ta biến đổi BPT $\log_5(5x^2 + 5) \geq \log_5(m \cdot x^2 + 4x + m)$

BPT nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi hệ BPT sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 5x^2 + 5 \geq m \cdot x^2 + 4x + m \\ m \cdot x^2 + 4x + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5 - m) \cdot x^2 - 4x + 5 - m \geq 0 & (1) \\ m \cdot x^2 + 4x + m > 0 & (2) \end{cases} (*)$$

Xét $m = 0$: hệ (*) không nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

Xét $m = 5$: hệ (*) không nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

Xét $m \neq 0; m \neq 5$

$$\begin{cases} 5 - m > 0 \\ \Delta'_{(1)} \leq 0 \\ m > 0 \\ \Delta'_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ 4 - (5 - m)^2 \leq 0 \\ m > 0 \\ 4 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m \geq 7 \\ m \leq 3 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 3$$

$$\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$$

Hệ (*) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

Có 1 giá trị nguyên của m là 3.

Câu 11: Gọi S là số giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-20; 20)$ để đồ thị hàm số $y = |f(x)| = |2x^4 - 4(m + 4)x^3 + 3m^2x^2 + 48|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. S chia hết cho 4.

B. S chia cho 4 dư 1.

S chia cho 4 dư 2.

D. S chia cho 4 dư 3.

C.

Lời giải

Chọn A

Vì $f(0)=48>0$ nên hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0;2)$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 12(m+4)x^2 + 6m^2x \geq 0, \forall x \in (0;2)$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 4x^2 - 6(m+4)x + 3m^2 \geq 0, \forall x \in (0;2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ \Delta' > 0 \\ g(0) \geq 0 \\ g(2) \geq 0 \\ \frac{S}{2} \geq 2 \\ \frac{S}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3(-48 - 24m + m^2) \leq 0 \\ -3(-48 - 24m + m^2) > 0 \\ m^2 \geq 0 \\ 3m^2 - 12m - 32 \geq 0 \\ \frac{3m+4}{4} \geq 2 \\ \frac{3m+4}{4} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 12 - 8\sqrt{3} \\ m \geq 12 + 8\sqrt{3} \\ 12 - 8\sqrt{3} < m < 12 + 8\sqrt{3} \\ m \geq \frac{6+2\sqrt{33}}{3} \\ m \leq \frac{6-2\sqrt{33}}{3} \\ m \geq \frac{4}{3} \\ m \leq -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{6+2\sqrt{33}}{3} \\ m \leq \frac{6-2\sqrt{33}}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \in [-19; -18; \dots; -2] \cup \{6; 7; 8; \dots; 19\}$$

Suy ra $S=32$. Vậy S chia hết cho 4.