

Câu 1.(7 điểm)

a. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + 5, \forall x \in \mathbb{R}$. Đạt cực trị tại x_1, x_2 .

Tìm giá trị của biểu thức: $P = \frac{x_1^5 - 4x_1^3 - 3x_1 + 9}{x_2^4 + 3x_2^2 + 11} + \frac{x_2^5 - 4x_2^3 - 3x_2 + 9}{x_1^4 + 3x_1^2 + 11}$

b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + 5y^2 - 2x + 10y = 0 \end{cases}$$

Câu 2. (4 điểm)

a. Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25m$, chiều rộng $AD = 20m$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Người ta cần xây dựng làm một con mương thoát nước đi từ A đến C qua vạch chắn MN , để tránh lũ. Biết khi làm mương trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được $15m$ và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được $30m$. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con mương đi từ A đến C .

b. Cho tập $X = \{1; 2; \dots; 8\}$. Gọi A là tập các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau được lập từ X . Lấy ngẫu nhiên một số từ tập A . Tính xác suất để số được lấy chia hết cho 2222.

Câu 3.(3 điểm) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có khối $A'.ABC$ là hình chóp tam giác đều, $AB = a, 0 < a < 2$. Gọi φ là góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng $(C'B'BC)$. Tính a biết thể tích khối chóp $(A'.BCC'B')$ bằng $\frac{2}{3}$ và $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 4.(1,5 điểm) Cho x, y, z là ba số thực thuộc khoảng $(1; +\infty)$ Thỏa mãn: $x + y + z = xyz$.

Tìm giá trị lớn nhất biểu thức: $P = \frac{2}{1+x} + \frac{2}{1+y} + \frac{2}{1+z}$

Câu 5. (4,5 điểm) Cho tứ diện $OMNP$ trong đó OM, ON, OP vuông góc với nhau từng đôi một. A là một điểm thay đổi trên OM và $OA = a > 0$. B là một điểm thay đổi trên ON và $OB = b > 0$. C là một điểm thay đổi trên OP và $OC = c > 0$. H là hình chiếu vuông góc của O lên mp (ABC) và $OH = h$. Gọi S là diện tích tam giác ABC , S_1 là diện tích tam giác OAB , S_2 là diện tích tam giác OBC , S_3 là diện tích tam giác OAC . Chứng minh rằng:

a. $\frac{h}{a} + \frac{h}{b} + \frac{h}{c} \leq \sqrt{3}$

b. $\frac{S_1^2}{S^2 + S_1^2} + \frac{S_2^2}{S^2 + S_2^2} + \frac{S_3^2}{S^2 + S_3^2} \leq \frac{3}{4}$

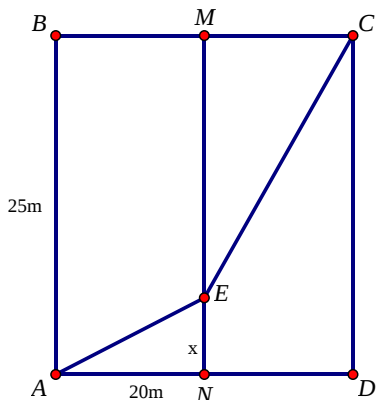
----- **Hết** -----

Ghi chú:

- Học sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu	ý	Nội dung	Điểm
1 7đ	a 3,5đ	1a. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + 5, \forall x \in \mathbb{R}$. Đạt cực trị tại x_1, x_2 . Tìm giá trị của biểu thức: $P = \frac{x_1^5 - 4x_1^3 - 3x_1 + 9}{x_2^4 + 3x_2^2 + 11} + \frac{x_2^5 - 4x_2^3 - 3x_2 + 9}{x_1^4 + 3x_1^2 + 11}$	
		Ta có: $f'(x) = x^2 - 3x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ Do hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 nên $\begin{cases} x_1^2 - 3x_1 + 1 = 0 \\ x_2^2 - 3x_2 + 1 = 0 \end{cases}$	0,5
		$P = \frac{x_1^5 - 4x_1^3 - 3x_1 + 9}{x_2^4 + 3x_2^2 + 11} + \frac{x_2^5 - 4x_2^3 - 3x_2 + 9}{x_1^4 + 3x_1^2 + 11}$ $= \frac{(x_1^3 + 3x_1^2 + 4x_1 + 9)(x_1^2 - 3x_1 + 1) + 20x_1}{(x_2^2 + 3x_2 + 11)(x_2^2 - 3x_2 + 1) + 30x_2} + \frac{(x_2^3 + 3x_2^2 + 4x_2 + 9)(x_2^2 - 3x_2 + 1) + 20x_2}{(x_1^2 + 3x_1 + 11)(x_1^2 - 3x_1 + 1) + 30x_1}$	1,5
		$P = \frac{2x_1}{3x_2} + \frac{2x_2}{3x_1} = \frac{2(x_1^2 + x_2^2)}{3x_1x_2} = \frac{2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}{3x_1x_2}$	1
		$P = \frac{14}{3}$	0,5
	b 3,5đ	1b. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + 5y^2 - 2x + 10y = 0 \end{cases}$	
		Ta có: $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + 5y^2 - 2x + 10y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^3 - 12(x-1) = (y+1)^3 - 12(y+1) \\ (x-1)^2 + 5(y+1)^2 = 6 \end{cases}$	0,5
		Đặt $a = x - 1$; $b = y + 1$ ta có hệ phương trình mới: $\begin{cases} a^3 - 12a = b^3 - 12b \\ a^2 + 5b^2 = 6 \end{cases}$	0,5
		. Ta có: $a^3 - b^3 - 12(a - b) = 0 \Rightarrow a^3 - b^3 - 2(a^2 + 5b^2)(a - b) = 0$	1
		Phương trình trở thành: $a^3 - 2a^2b + 10ab^2 - 9b^3 = 0$ Xét $b = 0$ thì $a = 0$ không thỏa mãn Đặt $t = a/b$ ta có PT: $t^3 - 2t^2 + 10t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow a = b$	1
		Giải ra ta được: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$	0,5
2 4 đ	a 2đ	2a. Một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 25m$, chiều rộng $AD = 20m$ được chia thành hai phần bằng nhau bởi vạch chắn MN (M, N lần lượt là trung điểm BC và AD). Người ta cần xây dựng làm một con mương thoát nước đi từ A đến C qua vạch chắn MN , để tránh lũ. Biết khi làm mương trên miền $ABMN$ mỗi giờ làm được	

	15m và khi làm trong miền $CDNM$ mỗi giờ làm được 30m. Tính thời gian ngắn nhất mà đội xây dựng làm được con mương đi từ A đến C .	
	Giả sử con mương đi từ A đến C gặp vạch chắn MN tại E. đặt $NE = x(m)(x \in [0; 25]) \Rightarrow AE = \sqrt{x^2 + 10^2}$; $CE = \sqrt{(25-x)^2 + 10^2}$. Thời gian làm mương đi từ A đến C là: $t(x) = \frac{AE}{15} + \frac{CE}{30} = \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{15} + \frac{\sqrt{(25-x)^2 + 100}}{30} (h)$. 	0,5
	$t'(x) = \frac{x}{15\sqrt{x^2 + 100}} - \frac{(25-x)}{30\sqrt{(25-x)^2 + 100}};$ $t'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\sqrt{(25-x)^2 + 100} = (25-x)\sqrt{x^2 + 100}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x(25-x) \geq 0 \\ 4x^2[(25-x)^2 + 100] = (25-x)^2(x^2 + 100) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 25 \\ 4(25-x)^2(x^2 - 5^2) + x^2[20^2 - (25-x)^2] = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 25 \\ 4(25-x)^2(x-5)(x+5) + x^2(20-25+x)(20+25-x) = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 25 \\ 4(25-x)^2(x-5)(x+5) - x^2(x-5)(45-x) = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 25 \\ (x-5)[4(25-x)^2(x+5) + x^2(45-x)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5;$	1
	$t(0) = \frac{20 + \sqrt{725}}{30}, t(25) = \frac{10 + 2\sqrt{725}}{30}, t(5) = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$ $\Rightarrow$ Thời gian ngắn nhất làm con đường từ A đến C là $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (giờ).	0,5
b 2đ	2b. Cho tập $X = \{1; 2; \dots; 8\}$. Gọi A là tập các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau được lập từ X . Lấy ngẫu nhiên một số từ tập A . Tính xác suất để số được lấy chia hết cho 2222.	
	Ta có $n(\Omega) = 8!$. Gọi số được lấy từ A có dạng $a = \overline{a_1 a_2 \dots a_8}$.	0,5
	Vì $2222 = 2.1111$, hơn nữa 2 và 1111 là 2 số nguyên tố cùng nhau nên $a : 2222 \Leftrightarrow \begin{cases} a : 2 \\ a : 1111 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_8 : 2 \\ a : 1111 \end{cases}$.	0,5

		Từ $a_1 + a_2 + \dots + a_8 = 1 + 2 + \dots + 8 = 36 : 9$ nên $a : 9999$. Lại có $a = \overline{a_1 a_2 \dots a_8} = 10000.\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8} = 9999.\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + (\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8})$ suy ra $(\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8}) : 9999$.	
		Nhưng vì $2000 < \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8} < 18000$ nên $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8} = 9999$ hay $a_1 + a_5 = a_2 + a_6 = a_3 + a_7 = a_4 + a_8 = 9$.	0,5
		Để thấy mỗi số tự nhiên a thỏa mãn điều kiện trên và a_8 là số chẵn đều chia hết cho 2222. Chia 8 số từ X thành bốn bộ có tổng bằng 9 là $(1;8), (2;7), (3;6), (4;5)$. a_8 có 4 cách chọn. Mỗi cách chọn a_8 ta có duy nhất một cách chọn a_4. Ba bộ còn lại $(a_1; a_5), (a_2; a_6), (a_3; a_7)$ có thể hoán vị cho nhau, đồng thời hai phần tử trong mỗi bộ có cũng có thể hoán vị cho nhau nên có tất cả $3!. (2!)^3$ cách chọn. Ta có $n(A) = 4.3!. (2!)^3 = 192$. Vậy $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{192}{8!}$.	0,5
	3 3đ	3. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có khối $A'.ABC$ là hình chóp tam giác đều, $AB = a, 0 < a < 2$. Gọi φ là góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng $(C'B'BC)$. Tính a biết thể tích khối chóp $(A'.BCC'B')$ bằng $\frac{2}{3}$ và $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.	
		Gọi x là độ dài cạnh bên của lăng trụ: O là tâm của tam giác ABC; I, M lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Khi đó : $\begin{cases} \varphi = \angle A'IM \\ \varphi = 180^\circ - \angle A'IM \end{cases}$	0,5
		* Trường hợp 1: $\varphi = \angle A'IM$ Áp dụng định lý côsin cho $\triangle A'IM$ ta thấy $x = a$ $V_{A'.BCC'B'} = 2V_{A'.ABC} = \frac{2}{3} A'O.S_{ABC} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \sqrt{2}$	1
		* Trường hợp 2: $\varphi = 180^\circ - \angle A'IM$ Áp dụng định lý côsin cho $\triangle A'IM$ ta thấy $x = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ $V_{A'.BCC'B'} = 2V_{A'.ABC} = \frac{2}{3} A'O.S_{ABC} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{24} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 2\sqrt[6]{2} > 2(L)$	1
		Vậy $a = \sqrt{2}$	0,5
4 1,5đ		4. Cho x, y, z là ba số thực thuộc khoảng $(1; +\infty)$ Thỏa mãn: $x + y + z = xyz$, Tìm giá trị lớn nhất biểu thức: $P = \frac{2}{1+x} + \frac{2}{1+y} + \frac{2}{1+z}$	
		Do $x + y + z = xyz$ nên đặt $x = \tan A; y = \tan B; z = \tan C$.	

		Vì x, y, z là ba số thực thuộc khoảng $(1; +\infty)$ nên tam giác ABC là tam giác nhọn có các góc lớn hơn 45°. Khi đó: $P = \frac{2}{1+\tan A} + \frac{2}{1+\tan B} + \frac{2}{1+\tan C}$	0,5
		Xét hàm $f(t) = \frac{2}{1+\tan t}$ trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ Chúng minh được $f(t) = \frac{2}{1+\tan t} \leq (-8+4\sqrt{3})\left(t - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} - 1$	0,5
		Xét số đo các góc của tam giác theo đơn vị đo radian ta có: $P = f(A) + f(B) + f(C) \leq 3(\sqrt{3} - 1)$ Vậy GTLN của P là $3(\sqrt{3} - 1)$ khi $x = y = z = \sqrt{3}$	0,5
5 4,5đ		Cho tứ diện OMNP trong đó OM, ON, OP vuông góc với nhau từng đôi một. A là một điểm thay đổi trên OM và $OA = a > 0$. B là một điểm thay đổi trên ON và $OB = b > 0$. C là một điểm thay đổi trên OP và $OC = c > 0$. H là hình chiếu vuông góc của O lên mp (ABC) và $OH = h$. Gọi S là diện tích tam giác ABC, S_1 là diện tích tam giác OAB, S_2 là diện tích tam giác OBC, S_3 là diện tích tam giác OAC. Chúng minh rằng: a. $\frac{h}{a} + \frac{h}{b} + \frac{h}{c} \leq \sqrt{3}$ b. $\frac{S_1^2}{S^2 + S_1^2} + \frac{S_2^2}{S^2 + S_2^2} + \frac{S_3^2}{S^2 + S_3^2} \leq \frac{3}{4}$	
	5a 2,5	Chúng minh được: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Leftrightarrow \frac{h^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1$	1
		Áp dụng BĐT Bunyakovsky ta có: $\left(\frac{h}{a} + \frac{h}{b} + \frac{h}{c}\right)^2 \leq 3\left(\frac{h^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2}\right) = 3$	1
		Nên $\frac{h}{a} + \frac{h}{b} + \frac{h}{c} \leq \sqrt{3}$ (đpcm)	0,5
	5b 2,0	Gọi V là thể tích của khối chóp OABC. ta có: $3V = h.S = c.S_1 = a.S_2 = b.S_3$	1

		Khi đó: $\begin{cases} h = \frac{3V}{S} \\ a = \frac{3V}{S_2} \\ b = \frac{3V}{S_3} \\ c = \frac{3V}{S_1} \end{cases}$ Thay vào $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ ta được $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$	
		Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương ta có : $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x + y + z) \geq 9 \quad (1) \text{ (với } x, y, z \text{ dương)}$ Áp dụng(1) ta có: $\left[(S^2 + S_1^2) + (S^2 + S_2^2) + (S^2 + S_3^2)\right] \cdot \left[\frac{1}{S^2 + S_1^2} + \frac{1}{S^2 + S_2^2} + \frac{1}{S^2 + S_3^2}\right] \geq 9$ $\Rightarrow 4S^2 \sum_{i=1}^3 \frac{1}{S^2 + S_i^2} \geq 9$ $\text{suy ra } \sum_{i=1}^3 \frac{1}{S^2 + S_i^2} \geq \frac{9}{4S^2} \Rightarrow \sum_{i=1}^3 \frac{S_i^2}{S^2 + S_i^2} \geq \frac{9}{4}$ $\text{mà } \frac{S_i^2}{S^2 + S_i^2} = 1 - \frac{S^2}{S^2 + S_i^2}$ $\text{suy ra } \sum_{i=1}^3 \left(1 - \frac{S^2}{S^2 + S_i^2}\right) \geq \frac{9}{4} \Rightarrow \sum_{i=1}^3 \frac{S_i^2}{S^2 + S_i^2} \leq \frac{3}{4}$ Dấu “=” xảy ra cho (*) $\Leftrightarrow S^2 + S_1^2 = S^2 + S_2^2 = S^2 + S_3^2 \Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow OA = OB = OC \Leftrightarrow OABC \text{ là tứ diện vuông cân ở } O$	1