PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN THANH OAI

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 150 phút

Đề gồm 01 trang

Bài 1: (6,0 điểm)

Cho P = $\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1-\sqrt{xy}}+\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}}\right):\left(1+\dfrac{x+y+2xy}{1-xy}\right)$

a, Rút gọn P   b, Tính giá trị của P với x= $\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$ c, Tìm giá trị lớn nhất của P

Bài 2: (4,0 điểm)

a) Gi¶i ph¬ng tr×nh $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{(3+x)(6-x)}=3$

b)Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + y^2 = xy + x + y$.

Bài 3: (4,0 điểm)

a) Cho $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ và $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$.

Chứng minh rằng : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

b) Cho a,b,c lµ 3 c¹nh cña mét tam gi¸c .

Chứng minh rằng: P= $\dfrac{1}{a^2+bc}+\dfrac{1}{b^2+ac}+\dfrac{1}{c^2+ab}$ ¿ $\dfrac{a+b+c}{2abc}$

Bài 4: (5,0 điểm)

Cho đường tròn tâm (O) đường kính CD = 2R . Điểm M di động trên đoạn OC . Vẽ đường tròn tâm (O') đường kính MD . Gọi I là trung điểm của đoạn MC , đường thẳng qua I vuông góc với CD cắt (O) tại E và F . Đường thẳng ED cắt (O') tại P .

1. Chứng minh 3 điểm P, M , F thẳng hàng.
2. Chứng minh IP là tiếp tuyến của đường tròn (O').
3. Tìm vị trí của M trên OC để diện tích tam giác IPO' lớn nhất.

Bài 5: (1,0 điểm)

Tìm các số nguyên x, y ,z thỏa mãn :

$$6\left(x-\frac{1}{y}\right)=3\left(y-\frac{1}{z}\right)=2\left(z-\frac{1}{x}\right)=xyz-\frac{1}{xyz}.$$

ĐÁP ÁN BIỂU ĐIỂM ĐỀ THI HSG TOÁN 9

<u>Câu 1</u>: (6 điểm)

Cho P= $\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1-\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}}\right):\left(1+\frac{x+y+2xy}{1-xy}\right)$

a, Rút gọn P (*2 điểm*)

Điều kiện để P có nghĩa là : x ≥ 0 ; y ≥ 0; xy $\neq 1$ (0,5 đ)

Ta có :

P= $\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{1-\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+\sqrt{xy}}\right):\left(1+\frac{x+y+2xy}{1-xy}\right)$

= $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(1+\sqrt{xy})+(\sqrt{x}-\sqrt{y})(1-\sqrt{xy})}{(1-\sqrt{xy})(1+\sqrt{xy})}:\frac{1-xy+x+y+2xy}{1-xy}$ (0,5đ)

= $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+x\sqrt{y}+y\sqrt{x}+\sqrt{x}-\sqrt{y}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{1-xy}:\frac{x+y+xy+1}{1-xy}$

= $\frac{2\sqrt{x}+2y\sqrt{x}}{1-xy}\cdot\frac{1-xy}{(1+x)(y+1)}$ (0,5đ)

= $\frac{2\sqrt{x}(1+y)}{(1+x)(1+y)}=\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ (0,5đ)

b, Tính giá trị của P với x= $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$ (*1,5điểm*)

Ta thấy x= $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$ thoả mãn điều kiện x ≥ 0 (0.25đ)

Ta có : x= $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$ = $\frac{2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$ =4-2$\sqrt{3}$ =($\sqrt{3}$ -1)^2 (0,5đ)

Thay x vào P = $\frac{2\sqrt{x}}{x+1}$, ta có:

P= $\frac{2\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{4-2\sqrt{3}+1}=\frac{2\left|\sqrt{3}-1\right|}{5-2\sqrt{3}}$ = $\frac{2(\sqrt{3}-1)(5+2\sqrt{3})}{(5-2\sqrt{3})(5+2\sqrt{3})}$ (0,5đ)

= $\frac{2(5\sqrt{3}+6-5-2\sqrt{3})}{5^2-(2\sqrt{3})^2}$ = $\frac{2(3\sqrt{3}+1)}{25-12}$ = $\frac{2(3\sqrt{3}+1)}{13}$ (0,25đ)

c, Tìm giá trị lớn nhất của P (*2 điểm*)

Với mọi x ≥ 0, ta có:

$(\sqrt{x}-1)^2\geq 0$ (0,25đ)

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x}^2-2\sqrt{x}+1\geq 0$

$\Leftrightarrow \quad x+1\geq 2\sqrt{x}$ (0,5đ)

$\Leftrightarrow \quad 1 \geq \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ (vì x+1>0) 0.25đ)

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x} \leq 1$ (0,25đ)

$\Leftrightarrow \quad P \leq 1$

Vậy giá trị lớn nhất của P =1 $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 = 0$ 0.25đ

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = 1$

$\Leftrightarrow \quad$ x=1 (0,5đ)

***C©u 2*: (4 điểm)**

a)(2 điểm)

ĐK : -3¿ x¿ 6 (0,25đ)

Đặt $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x}$ =t >0 (0,25đ)

Suy ra $t^2=3+x+6-x+2\sqrt{(3+x)(6-x)} \Leftrightarrow \sqrt{(3+x)(6-x)} = \dfrac{t^2-9}{2}$ (0,25đ)

Ta có pt: $t - \dfrac{t^2-9}{2} = 3 \Leftrightarrow t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow$ t=-1 (loại) hoặc t=3 (0,25đ)

t=3 suy ra $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = 3 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$ x=-3 hoặc x=6 (0,5đ)

b) (2đ)

$x^2 + y^2 = xy + x + y \Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2.$ 0,5đ

Vì x, y∈ Z nên : 0,25đ

x+y	0	0	0	0	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
x-1	1	-1	1	-1	0	0	1	-1	0	0	1	-1
y-1	1	1	-1	-1	1	-1	0	0	1	-1	0	0
(x;y)	(2;2)			(0;0)		(1;0)	(2;1)		(1;2)			(0;1)

0,25đ
0,25đ
0,25đ
0, 5đ

Câu 3:(4đ)

a) (2đ)

Từ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}+\dfrac{2xy}{ab}+\dfrac{2xz}{ac}+\dfrac{2yz}{bc}=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}+\dfrac{2cxy}{abc}+\dfrac{2bxz}{abc}+\dfrac{2ayz}{abc}=1$ (1) (1đ)

Từ $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0 \Leftrightarrow \dfrac{ayz}{xyz}+\dfrac{bxz}{xyz}+\dfrac{cxy}{xyz}=0 \Leftrightarrow ayz+bxz+cxy=0$ (2) (0,5đ)

Từ(1) và (2) $\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (0,5đ)

b)(2đ)

Do a,b,c lµ 3 c¹nh cña mét tam gi¸c nªn a,b,c>0 (0,25đ)

Theo bÊt ®¼ng thøc COSI: a^2+bc ¿ $2a\sqrt{bc} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a^2+bc}$ ¿ $\dfrac{1}{2a\sqrt{bc}}$ (0,5đ)

T¬ng tù: $\frac{1}{b^2+ac}$ ¿ $\frac{1}{2b\sqrt{ac}}$; $\frac{1}{c^2+ab}$ ¿ $\frac{1}{2c\sqrt{ab}}$ (0,5đ)

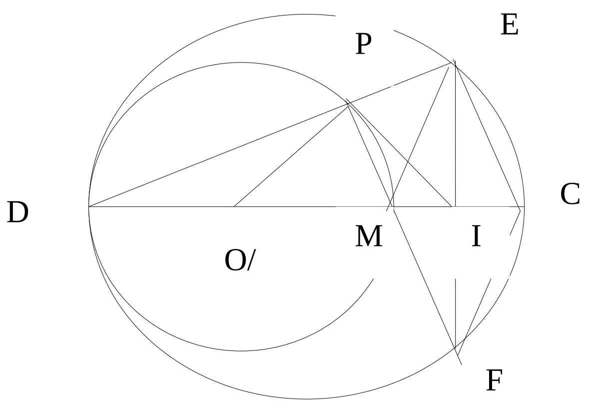
Suy ra $\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{c^2+ab}$ ¿ $\frac{1}{2a\sqrt{bc}}+\frac{1}{2b\sqrt{ac}}+\frac{1}{2c\sqrt{ab}}$ (0,25đ)

$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{c^2+ab}$ ¿ $\frac{\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}}{2abc}$ ¿ $\frac{b+c+a+c+a+b}{2.2abc}=\frac{a+b+c}{2abc}$

(0,5đ)

C©u 4: (5đ)

a) Vẽ hình và chứng minh câu a 2đ



a) Do P thuộc (O') mà MD là đường kính suy ra góc MPD vuông hay MP vuông góc với ED. Tương tự CE vuông góc với ED. Từ đó PM//EC. (1)

Vì EF là dây cung, CD là đường kính mà CD $\perp$ E F nên I là trung điểm của E F. Lại có I là trung điểm của CM nên tứ giác CE M F là hình bình hành. Vậy FM//CE.(2). Từ (1) và (2) suy ra P, M , F thẳng hàng. **(2đ)**

1. Ta có $\angle$ EDC = $\angle$ EFP (góc có cạnh tương ứng vuông góc). Do tam giác PO'D cân tại O' nên $\angle$ EDC = $\angle$ O'PD. Lại có $\angle$ EFP = $\angle$ IPF (do tam giácIPF cân) vậy

$\angle$ I PF= $\angle$ O'PD mà $\angle$ FPD =1v, suy ra $\angle$ IPO' =90^0 nên IP $\perp$ O'P. Hay IP là tiếp tuyến của (O'). **(2đ)**

2. Vì O'M =1/2 MD và IM =1/2MC nên IO' =1/2 CD vậyIO' =R. áp dụng định lý Pytago có PI^2 + PO'^2 = IO'^2 =R^2 (không đổi) . Mặt khác $4S^2$ =$PI^2.PO'^2$ (S là diện tích của tam giác IO'P) . Vậy $4S^2$ Max hay S Max khi PI = PO' =R$\sqrt{\frac{1}{2}}$ mà DM =2 PO' do đó

DM = $\sqrt{2}$ R , Vậy M cách D một khoảng bằng $\sqrt{2}$ R. **(1đ)**

<u>Câu 5</u> :(1điểm)

$$6(x-\frac{1}{y})=3(y-\frac{1}{z})=2(z-\frac{1}{x})=xyz-\frac{1}{xyz}=k\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{1}{y}=\frac{k}{6}\\ y-\frac{1}{z}=\frac{k}{3}\\ z-\frac{1}{x}=\frac{k}{2}\end{cases}$$

_ Đặt 0.25đ

Xét tích :

$$(x-\frac{1}{y})(y-\frac{1}{z})(z-\frac{1}{x})=\frac{k^3}{36}\Leftrightarrow\frac{k^3}{36}=xyz-\frac{1}{xyz}-(y-\frac{1}{z})-(x-\frac{1}{y})-(z-\frac{1}{x})$$

$$\Leftrightarrow\frac{k^3}{36}=k-\frac{k}{3}-\frac{k}{2}-\frac{k}{6}\Leftrightarrow\frac{k^3}{36}=0\Leftrightarrow k=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(xyz)^2=1\\ xy=yz=zx=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xyz=\pm 1\\ xy=yz=zx=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=z=1\\ x=y=z=-1\end{cases}$$

0,5đ

0,5đ

Vậy (x, y , z) = (1,1,1) =(-1,-1,-1) là cần tìm. 0,25đ

Học sinh làm theo cách khác mà vẫn đúng thì cho điểm tối đa.