

ĐỀ HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 NGHỆ AN 2023-2024

Thời gian làm bài : 150 phút

Câu 1 (3,5 điểm).

- a) Cho m, n là các số nguyên. Chứng minh rằng $mn(m^2 - n^2)$ chia hết cho 6
b) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $p^2 + 14q^2 + 2r^2 = 6pqr$

Câu 2 (6,5 điểm).

- a) Giải phương trình $(13x + 1)\sqrt{2x - 1} = (7x - 1)\sqrt{8x + 1} - 4$
b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 7x + 9 \\ x(y - x + 1) = 3 \end{cases}$$

Câu 3 (1,5 điểm). Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 - y^2 + z^2 = xy + 3yz + zx$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{(2y + z)^2} - \frac{1}{xy(y + 2z)}$

Câu 4 (7,0 điểm). Cho nửa đường tròn (O), đường kính $BC = 2R$ và một điểm A thay đổi trên nửa đường tròn đó (A không trùng với B và C). Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AHB và AHC. Đường thẳng IJ cắt AB, AC theo thứ tự tại M và N.

a) Chứng minh tam giác AMN vuông cân.

b) Gọi P là giao điểm của BI và CJ. Chứng minh $\frac{PA^2}{CA \cdot AB} + \frac{PB^2}{AB \cdot BC} + \frac{PC^2}{BC \cdot CA} = 1$

c) Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác HIJ theo R.

Câu 5 (1,5 điểm). Trên một khu đất hình chữ nhật kích thước $100 \text{ m} \times 120 \text{ m}$.

Người ta muốn xây một sân bóng nhân tạo có nền đất là hình chữ nhật kích thước $25 \text{ m} \times 35 \text{ m}$ và 9 bồn hoa hình tròn đường kính 5 m. Chứng minh rằng dù xây trước 9 bồn hoa ở các vị trí như thế nào thì trên phần đất còn lại luôn tìm được một nền đất kích thước $25 \text{ m} \times 35 \text{ m}$ để xây sân bóng.

ĐÁP ÁN

Câu 1 (3,5 điểm).

a) Cho m, n là các số nguyên. Chứng minh rằng $mn(m^2 - n^2)$ chia hết cho 6

Nếu m, n cùng tính chẵn lẻ: $\Rightarrow m^2 - n^2 : 2 \Rightarrow mn(m^2 - n^2) : 2$

Nếu m, n khác tính chẵn lẻ: $\Rightarrow mn : 2 \Rightarrow mn(m^2 - n^2) : 2$

Suy ra $mn(m^2 - n^2) : 2 \forall m, n \in \mathbb{Z}$

Nếu m, n có ít nhất 1 số chia hết cho 3 $\Rightarrow mn : 3 \Rightarrow mn(m^2 - n^2) : 3$

Nếu m, n đều không chia hết cho 3 $\Rightarrow m^2 \equiv 1 \pmod{3}, n^2 \equiv 1 \pmod{3}$
 $\Rightarrow m^2 - n^2 : 3 \Rightarrow mn(m^2 - n^2) : 3$

Suy ra $mn(m^2 - n^2) : 3 \forall m, n \in \mathbb{Z}$

Mà $(2, 3) = 1 \Rightarrow mn(m^2 - n^2) : 6 \forall m, n \in \mathbb{Z}$ (đpcm)

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $p^2 + 14q^2 + 2r^2 = 6pqr$

Ta có: $6pqr : 2 \Rightarrow p^2 + 14q^2 + 2r^2 : 2 \Rightarrow p : 2 \Rightarrow p = 2$ (do p nguyên tố).

Thay vào (*) ta có: $14q^2 + 2r^2 + 4 = 12qr \Leftrightarrow 7q^2 + r^2 + 2 = 6qr$ (**)

• Nếu r không chia hết cho 3 $\Rightarrow r^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow r^2 + 2 : 3$

Lại có: $6qr : 3 \Rightarrow 7q^2 : 3 \Rightarrow q^2 : 3$ (do $(3, 7) = 1$) $\Rightarrow q : 3 \Rightarrow q = 3$ (do q nguyên tố).

Thay $q = 3$ vào (**) ta có: $r^2 + 65 = 18r \Leftrightarrow \begin{cases} r = 5 \\ r = 13 \end{cases}$ (thỏa mãn)

• Nếu r chia hết cho 3 $\Rightarrow r = 3$,

thay vào (*) ta có: $7q^2 + 11 = 18q \Leftrightarrow \begin{cases} q = 1 \\ q = \frac{11}{7} \end{cases}$ (không thỏa mãn do q nguyên tố)

Vậy $(p; q; r) \in \{(2; 3; 5); (2; 3; 13)\}$

Câu 2 (6,5 điểm).

a) Giải phương trình $(13x + 1)\sqrt{2x - 1} = (7x - 1)\sqrt{8x + 1} - 4$

$$\text{ĐKXD: } x \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{2x-1} = a; \sqrt{8x+1} = b (a, b \geq 0)$$

$$\text{Ta có: } 13x+1 = \frac{a^2+3b^2}{2}; 7x-1 = \frac{3a^2+b^2}{2}$$

$$\text{Thay vào PT, ta được: } (a^2+3b^2)a = (3a^2+b^2)b - 8 \\ \Leftrightarrow (a-b)^3 = -8 \Leftrightarrow a-b = -2$$

$$\text{Hay } \sqrt{8x+1} - \sqrt{2x-1} = 2$$

$$\Leftrightarrow 8x+1 = 2x-1+4+4\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow 3x-1 = 2\sqrt{2x-1} \text{ (do } x \geq \frac{1}{2} \text{ nên } 3x-1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 4(2x-1) \Leftrightarrow 9x^2 - 14x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{5}{9} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện } x \geq \frac{1}{2})$$

$$\text{Vậy phương trình có tập nghiệm: } S = \left\{ 1; \frac{5}{9} \right\}$$

$$\text{b) Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 7x + 9 \\ x(y-x+1) = 3 \end{cases}$$

Xét $x=0$ thì phương trình (2) trở thành $0.(y+1)=3$ (không thỏa mãn).

Xét $x \neq 0$:

$$\text{Phương trình (2) trở thành: } y-x+1 = \frac{3}{x} \Leftrightarrow y = \frac{x^2-x+3}{x}$$

Thế vào phương trình (1) ta có:

$$x^4 + 2x^3 \left(\frac{x^2-x+3}{x} \right) + x^2 \left(\frac{x^2-x+3}{x} \right) = 7x+9$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2(x^2-x+3) + (x^2-x+3)^2 = 7x+9$$

$$\Rightarrow x^4 + 2x^4 - 2x^3 + 6x^2 + x^4 + x^2 + 9 - 2x^3 + 6x^2 - 6x = 7x+9$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 13x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^3(x-1) + 13x(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(4x^2+13) = 0$$

TH1: $x = 0$ (loại).

TH2: $x=1$ (thỏa mãn) $\Rightarrow y=3$.

TH3: $4x^2 + 13 = 0$ (loại vì $4x^2 + 13 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$).

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;3)$.

Câu 3 (1,5 điểm). Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + 3yz + zx$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{(2y+z)^2} + \frac{1}{xy(y+2z)}$

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 = xy + 3yz + zx$

$$\Leftrightarrow (x+z)^2 = (x+y)(y+3z)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$(x+z)^2 = (x+y)(y+3z) \leq \left(\frac{x+y+y+3z}{2} \right)^2 = \frac{(x+2y+3z)^2}{4}$$

$$\Rightarrow x+2y+3z \geq 2(x+z) \Rightarrow 2y+z \geq x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(2y+z)^2} \leq \frac{1}{2y+z}$$

$$xy(y+2z) = \frac{1}{3}x(3y)(y+2z) \leq \frac{1}{3}x \left(\frac{3y+y+2z}{2} \right)^2 = \frac{1}{3}x(2y+z)^2 \leq \frac{1}{3}(2y+z)^3$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{1}{2y+z} + \frac{3}{(2y+z)^3}$$

Đặt $2y + z = t (t > 0) \Rightarrow P \leq \frac{1}{t} - \frac{3}{t^3}$

Ta có : $\frac{2}{9} - \frac{1}{t} + \frac{3}{t^3} = \frac{2t^3 - 9t^2 + 27}{9t^3} = \frac{2t - 9 + \frac{27}{t^2}}{9t}$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$2t + \frac{27}{t^2} = t + t + \frac{27}{t^2} \geq 3\sqrt[3]{t \cdot t \cdot \frac{27}{t^2}} = 9 \Rightarrow \frac{1}{t} - \frac{3}{t^3} \leq \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{1}{t} + \frac{3}{t^3} \leq \frac{2}{9}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow (x; y; z) = (3; 1; 1)$

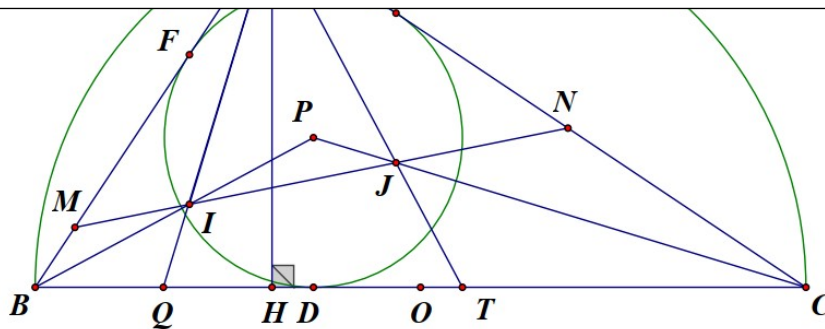
Vậy $P_{\max} = \frac{2}{9}$

Câu 4 (7,0 điểm). Cho nửa đường tròn (O), đường kính BC = 2R và một điểm A thay đổi trên nửa đường tròn đó (A không trùng với B và C). Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AHB và AHC. Đường thẳng IJ cắt AB, AC theo thứ tự tại M và N.

a) Chứng minh tam giác AMN vuông cân.

b) Gọi P là giao điểm của BI và CJ. Chứng minh $\frac{PA^2}{CA \cdot AB} + \frac{PB^2}{AB \cdot BC} + \frac{PC^2}{BC \cdot CA} = 1$

c) Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác HIJ theo R.



a) Gọi Q,T lần lượt là giao điểm của AI, AJ với BC.BI cắt CJ tại P. Ta có P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

$$\text{Ta có: } \angle AQC = \angle ABC + \angle BAQ = \angle HAQ + \angle HAC = \angle QAC$$

→ Tam giác ACQ cân tại C .Mà CP là phân giác $\angle ACQ \Rightarrow CP \perp AQ$
Hay $JP \perp AI$

Tương tự ta có $IP \perp AJ \rightarrow$ Trục tâm tam giác AIJ là $AP \perp IJ$ Hay $AP \perp MN$.
Xét tam giác AMN có AP vừa là tia phân giác vừa là đường cao

$\Rightarrow \triangle AMN$ cân tại A. Mà $\angle MAN = 90^\circ$ nên tam giác AMN vuông cân.

b) Gọi S,p lần lượt là diện tích và nửa chu vi tam giác ABC D,E,F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh BC,AC, AB, r là bán kính đường tròn đó. Ta có:

$$\begin{aligned} 2AE &= AE + AF = AC - CE + AB - BF = AB + AC - (CE + BF) = AB + AC - (BD + CD) \\ &= AB + AC - BC = 2p - BC \end{aligned}$$

$$\text{Hay } AE = p - BC \quad (1)$$

$$S_{ABC} = S_{APB} + S_{APC} + S_{BPC} = r \cdot \frac{AB}{2} + r \cdot \frac{AC}{2} + r \cdot \frac{CB}{2} = pr \quad (2)$$

Theo công thức Hê-rông ta có $S_{ABC} = \sqrt{p(p-BC)(p-AC)(p-AB)}$ (3)

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác APE vuông tại E và (1),(2),(3) ta có:

$$\begin{aligned} AP^2 &= r^2 + AE^2 = \left(\frac{S}{p} \right)^2 + (p-BC)^2 \\ &= \frac{(p-BC)(p-AC)(p-AB)}{p} + (p-BC)^2 \\ &= \frac{(p-BC)[p(p-BC) + (p-AC)(p-AB)]}{p} \\ &= \frac{(p-BC)AB \cdot AC}{p} \\ \Rightarrow \frac{PA^2}{CA \cdot AB} &= \frac{p-BC}{p} \end{aligned}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{PA^2}{CA \cdot AB} + \frac{PB^2}{AB \cdot BC} + \frac{PC^2}{BC \cdot CA} = \frac{p-BC}{p} + \frac{p-AC}{p} + \frac{p-BA}{p} = \frac{3p - (AB + BC + CA)}{p} = 1$$

c) Ta có $\triangle AIH = \triangle AIM$

$\Rightarrow$ Tam giác MHI cân tại I $\Rightarrow IM = IH$.

Tương tự ta có $JH = JN$

$$P_{HIJ} = IH + HJ + IJ = MI + IJ + JN = MN = \sqrt{2}AM$$

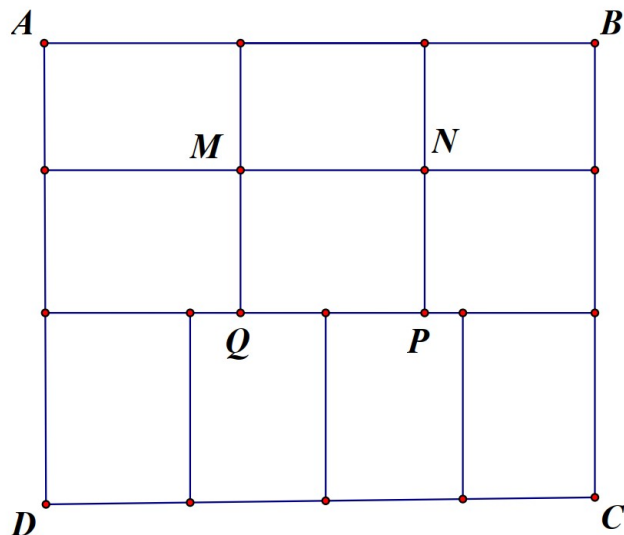
Lại có: $\triangle AIH = \triangle AIM \Rightarrow AM = AH \leq R$

$$\text{Do đó: } P_{HIJ} = \sqrt{2}AM \leq \sqrt{2}R$$

Dấu bằng xảy ra khi $AH = R$

Hay A là điểm chính giữa cung BC.

Câu 5 (1,5 điểm). Trên một khu đất hình chữ nhật kích thước $100 \text{ m} \times 120 \text{ m}$. Người ta muốn xây một sân bóng nhân tạo có nền đất là hình chữ nhật kích thước $25 \text{ m} \times 35 \text{ m}$ và 9 bồn hoa hình tròn đường kính 5 m . Chứng minh rằng dù xây trước 9 bồn hoa ở các vị trí như thế nào thì trên phần đất còn lại luôn tìm được một nền đất kích thước $25 \text{ m} \times 35 \text{ m}$ để xây sân bóng.



Xét sân bóng là hình chữ nhật ABCD có $AB = CD = 120 \text{ m}$ và

$AD = BC = 100 \text{ m}$. Chia hình chữ nhật này thành 10 hình chữ nhật con có kích thước $30 \text{ m} \times 40 \text{ m}$ như hình vẽ.

Xét 9 điểm là tâm của 9 bồn hoa. Theo định lý Dirichlet, tồn tại ít nhất một trong 10 hình không chứa điểm nào trong 9 điểm đó. Giả sử đó là hình chữ nhật MNPQ với $MN = PQ = 40 \text{ m}$ và $MQ = NP = 30 \text{ m}$. Xét hình chữ nhật $MN'P'Q'$ cùng tâm với MNPQ và có các cạnh nhỏ hơn MNPQ $2,5 \text{ m}$ thì ta dễ

thấy hình chữ nhật $MN'P'Q'$ không chạm hay chứa bất kì bồn hoa nào. Ta suy ra điều phải chứng minh.