1. Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn . Tính các góc của tam giác đó khi biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất .

**Hướng dẫn giải**

Ta có .

 (3).

( Do  và ).

Dấu bằng trong (3) xảy ra khi  hoặc .

Từ đó 

.

 (4).

Dấu bằng trong (4) xảy ra khi .

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất khi .

1. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn .Tìm giá trị nhỏ nhất của biếu thức:

.

**Hướng dẫn giải**

=

Đặt , khi đó.

Ta có đẳng thức sau:

 (\*)



Không mất tính tổng quát ta giả sử: . Ta có:



Áp dụng bất đẳng thức Trêbưsep cho 2 dãy đơn điệu cùng chiều và đẳng thức (\*) ta có .

Kết Luận : Min  khi .

1. Chứng minh rằng với bất kỳ số các số thực dương  ta có

.

**Hướng dẫn giải**

Đặt .Ta phải chứng minh tất cả các giá trị của  đều không âm.

Nếu  hiển nhiên.

Ta có thể giả sử rằng  và đặt . Khi đó:



Ta phải chứng minh:, điều này chính là



Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng, vì biệt thức



1. Cho  các số thực dương thay đổi thỏa mãn , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  **.**
2. Cho  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện . Chứng minh rằng :

.

1. Cho đa thức  với ∈, , biết  , ∀ x ∈. Chứng minh rằng | a1 + 2a2 +…+ nan | ≤ n.

**Hướng dẫn giải**

+) ,  (1)

+) Do  .

Vì  =||≤≤, .

+) Từ  được điều phải chứng minh.

1. Cho  là các số nguyên thỏa mãn bội số chung nhỏ nhất của hai số bất kì trong chúng đều lớn hơn . Chứng minh rằng  . ( là kí hiệu phần nguyên của số thực ).

**Hướng dẫn giải**

Cho  là các số nguyên thỏa mãn bội số chung nhỏ nhất của hai số bất kì trong chúng đều lớn hơn . Chứng minh rằng  .

( là kí hiệu phần nguyên của số thực  ).

Rõ ràng, trong các số trên không tồn tại cặp số nào mà số này chia hết cho số kia (vì nếu trái lại thì bội chung nhỏ nhất của chúng nhỏ hơn hoặc bằng ). Ta viết  với  là số lẻ. Ta thấy các giá trị  là phân biệt. Thật vậy, nếu tồn tại  thì  hoặc  mâu thuẫn với giả thiết.

Mặt khác từ 1 đến  ta có  số lẻ phân biệt. Do đó các giá trị  là các số lẻ từ 1 đến  theo một thứ tự nào đó.

Xét .

Nếu  thì . Do đó  là một số lẻ nhỏ hơn , tức là  nào đó.

Như vậy  . Khi đó  mâu thuẫn với giả thiết hoặc , mâu thuẫn với điều giả sử.

Vậy điều giả sử là sai, tức là ta có .

1. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



1. Chứng minh rằng:   thì: 
2. Cho  . Chứng minh rằng: 
3. Cho  và . Chứng minh rằng: .
4. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức:  trong đó a là tham số thực và 
5. Cho  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:



1. Cho  là ba số dương và thoả mãn . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:



1. Cho  là ba số dương. Chứng minh rằng:



1. Cho các số thực dương thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: P = .

**Hướng dẫn giải**

Đặt .

Giả thiết  ⇔

≥  ⇒ ⇒ 

Có ≤ += .

Xét hàm số  với, ta có  = và

=< 0 , ∀ ⇒  đồng biến trên  .

Ta có. Lập bảng biến thiên suy ra GTLN của .

1. Chứng minh rằng:với mọi .
2. Cho 3 số dương  thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

.

1. Cho  và . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

.

1. Cho  và không có hai số nào đồng thời bằng. Tìm giá trị nhỏ nhất của

.

**Hướng dẫn giải**

Ta có 

Xét hàm , dễ thấy đồng biến trên .

Do  và dễ có được .

Suy ra 

Vậy  , 

Đặt , ta được .

Xét hàm , ta có 

Với  thì dễ thấy ngay , suy ra hàm g(t) đồng biến trên 

Suy ra .

Đẳng thức xảy ra khi . Vậy .

1. Cho  là các số dương thỏa mãn . Chứng minh rằng



**Hướng dẫn giải**

Ta có 

Tương tự 



Cộng  theo vế ta có



Ta cần chứng minh 

Trước hết ta chứng minh hai bất đẳng thức sau:

+ Mọi số dương: 

Thật vậy bất đẳng thức trên tương đương với

 (Đúng)

+ Mọi số dương thỏa mãn điều kiện trên ta luôn có:  .

Từ giả thiết: 

Và từ bất đẳng thức quen thuộc



Ta có 

Dấu đẳng thức xảy ra khi.

1. Cho các số thực dương  thỏa mãn  và  Tìm giá trị nhỏ nhất có thể được của biểu thức 
2. Cho các số thực dương  thỏa mãn  và  Tìm giá trị nhỏ nhất có thể được của biểu thức 

**Hướng dẫn giải**

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

 dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi , (1)

 dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi , (2)

 dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  , (3)

 dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi , (4)

 hay 

Mặt khác, từ giả thiết suy ra  và . Do đó



Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức D bằng  đạt được khi 

1. Cho x,y,z là các số thực dương thoả mãn:. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

.

1. Cho ba số thực dương  thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

.

**Hướng dẫn giải**

1. Chứng minh bất đẳng thức sau:.

**Hướng dẫn giải**

1. Chứng minh:  .

**Hướng dẫn giải**

1. Cho a,b,c là ba số dương và. Chứng minh rằng:.

**Hướng dẫn giải**

 .

Tương tự rồi cộng vế theo vế ta được điều cần chứng minh.

1. Cho  là các số dương thỏa mãn . Chứng minh rằng .