

SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 2001-2002.

ĐỀ CHÍNH THỨC
SBD:

Môn: TOÁN (VÒNG 1).
(180 phút, không kể thời gian giao đề)

Bài 1: a/ Tìm giá trị của m để cho hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y^2 = m \end{cases}$ có nghiệm.

b/ Chứng minh rằng: $\ln\left(\frac{x+y}{x}\right) > \frac{2y}{2x+y}$ với $x > 0$ và $y > 0$.

Bài 2: Giải phương trình: $\cos^3 x + 4\sin^3 x - 3\sin x = 0$.

Bài 3: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.

Gọi E, G, K lần lượt là trung điểm của các cạnh A'D', B'C' và AA'. H là tâm của hình vuông DCDC'. M, N là hai điểm lần lượt ở trên hai đường thẳng AD và EG sao cho MN vuông góc với KH và cắt KH.

Tính độ dài đoạn MN theo a.

SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 2001-2002.

**HƯỚNG DẪN CHẤM BIỂU VÀ BIỂU ĐIỂM ĐỀ THI MÔN TOÁN
LỚP 12 - VÒNG 1.**

Bài 1:

Câu a:

- $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y^2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x - m \\ x^2 - x - (m + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ y = \pm \sqrt{x - m} \\ x^2 - x - (m + 4) = 0 \end{cases}$$
- Do đó hệ có nghiệm khi chỉ khi phương trình: $f(x) = x^2 + x - (m + 4) = 0$ có nghiệm trong $[m; +\infty)$ (*)
- $f(x) = 0$ có $\Delta = 4m + 17$ nên $f(x) = 0$ có nghiệm $x = \frac{-1 \pm \sqrt{4m + 17}}{2}$ khi $m \geq \frac{-17}{4}$.
- Do đó: (*) $\Leftrightarrow m \leq \frac{-1 + \sqrt{4m + 17}}{2} \Leftrightarrow 2m + 1 \leq \sqrt{4m + 17}$
- $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 \leq 0 \\ 4m + 17 \geq (2m + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{17}{4} \leq m \leq -\frac{1}{2}$ hay $\begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ -2 \leq m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{17}{4} \leq m \leq 2$

Một số cách giải khác:

- Cách 2:** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x - y^2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x - m \\ x^2 - x - (m + 4) = 0 \end{cases}$ (I)

Hệ (I) có nghiệm $\Leftrightarrow x^2 + x - (m + 4) = 0$ có nghiệm trên $[-2; 2]$.

Dựa vào đồ thị parabol (P) $y = x^2 + x - 4$ trên $[-2; 2]$, và đường thẳng $y = m$ suy ra kết quả.

- Cách 3:** Giải theo tam thức bậc hai....

Câu b: Chứng minh rằng: $\ln\left(\frac{x+y}{x}\right) > \frac{2y}{2x+y}$ với $x > 0$ và $y > 0$.

- Đặt $t = \frac{x+y}{x} > 1$
- Vì $x > 0$ và $y > 0$ nên: $t = \frac{x+y}{x} \Leftrightarrow tx = x + y \Leftrightarrow y = x(t-1)$
- Do đó: $\frac{2y}{2x+y} = \frac{2x(t-1)}{2x+x(t-1)} = 2\frac{t-1}{t+1}$.
- Bài toán trở thành chứng minh: $\ln t > 2\frac{t-1}{t+1}$ với mọi $t > 1$.
- Xét hàm số $y = f(t) = \ln t - 2\frac{t-1}{t+1}$ với mọi $t > 1$.
- $y' = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} \geq 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- Do đó: $t > 1 \Rightarrow f(t) > f(1) = 0 \Rightarrow \ln t - 2\frac{t-1}{t+1} > 0$.
- Cách giải khác: Đặt $t = \frac{y}{x}$ và đưa đến chứng minh: $\ln t > 2\frac{t-1}{t+1}$. Giải tương tự.

(3) Bổ đề: dãy $(\cos n\alpha)$ hội tụ $\Leftrightarrow \alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chứng minh bổ đề: Nếu $\alpha \neq k\pi \Leftrightarrow \sin \alpha \neq 0$. Giả sử $(\cos n\alpha)$ hội tụ về h , khi đó:

- $\sin n\alpha = \frac{\cos n\alpha \cdot \cos \alpha - \cos(n+1)\alpha}{\sin \alpha} \rightarrow \frac{h(\cos \alpha - 1)}{\sin \alpha}$
 - Mà $\cos n\alpha = \frac{\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} \rightarrow \frac{\frac{h(\cos \alpha - 1)}{\sin \alpha} - \frac{h(\cos \alpha - 1)}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha}$
 - Vậy $\cos n\alpha \rightarrow h \cdot \frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha} \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = -h \left(\frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha} \right)^2$
 - Do tính duy nhất của giới hạn ta có: $h = -h \left(\frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha} \right)^2 \Rightarrow h = 0$.
 - Suy ra: $\begin{cases} \sin n\alpha \rightarrow 0 \\ \cos n\alpha \rightarrow 0 \end{cases}$ mâu thuẫn với: $1 = \sin^2 n\alpha + \cos^2 n\alpha \rightarrow 0$.
 - Do đó: $(\cos n\alpha)$ hội tụ $\Leftrightarrow \alpha = k\pi$.
 - + Trường hợp k chẵn: $\cos n\alpha = 1 \Rightarrow (\cos n\alpha)$ hội tụ.
 - + Trường hợp k lẻ: xét hai dãy con $\cos 2n\alpha \rightarrow 1, \cos(2n+1)\alpha \rightarrow -1$. Vậy $(\cos n\alpha)$ không hội tụ.
 - Do đó $(\cos n\alpha)$ hội tụ $\Rightarrow \alpha = 2m\pi$. Đảo lại là hiển nhiên.
 - Trở lại bài toán đã cho: Với $u_n = \cos^a n\alpha$
 - Trường hợp k lẻ: (u_n) hội tụ $\Leftrightarrow (\cos n\alpha)$ hội tụ $\Leftrightarrow \alpha = 2k\pi$.
 Vậy khi a lẻ: $\lim u_n = \begin{cases} 1 & \text{với } \alpha = 2k\pi \\ \text{không tồn tại} & \text{với } \alpha \neq 2k\pi \end{cases}$
 - Trường hợp k chẵn: (u_n) hội tụ $\Leftrightarrow |\cos n\alpha|$ hội tụ $\Leftrightarrow \cos^2 n\alpha$ hội tụ $\Leftrightarrow \cos 2n\alpha$ hội tụ $\Leftrightarrow \alpha = 2k\pi$.
 Vậy khi a chẵn: $\lim u_n = \begin{cases} 1 & \text{với } \alpha = k\pi \\ \text{không tồn tại} & \text{với } \alpha \neq k\pi \end{cases}$
-

**SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ**

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 2001-2002.**

ĐỀ CHÍNH THỨC
SBD:

MÔN: TOÁN (VÒNG 2).
(180 phút, không kể thời gian giao đề)

Bài 1: a/ Giải phương trình: $3(x^2 + 2x + 2) = 10\sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$
b/ Chứng minh: $\log_8 9 + \log_8 10 + \log_8 11 < 2\log_2 3$.

Bài 2: a/ Với A, B, C là ba góc của một tam giác, chứng minh rằng phương trình:

$$3^{|x^2 - 2x|} = \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}$$

có 4 nghiệm phân biệt.

b/ Giải phương trình: $x \cdot 3^{x^2 - 1} + (x^2 - 1) \cdot 3^x + 1 - x - x^2 = 0$

Bài 3: Trong mặt phẳng, cho tứ giác (lồi) có : tổng khoảng cách từ mỗi đỉnh đến các cạnh là một số không đổi đối với tất cả các đỉnh. Chứng minh rằng tứ giác đó là hình bình hành.

Bài 4: Cho tập hợp $E = \{ x \in \mathbb{N} / 1 \leq x \leq 2001 \}$, k, r là hai số cho trước:

$$2 \leq k \leq 2001, r \in \mathbb{N}^*.$$

Hỏi có bao nhiêu bộ $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- (i) $a_i \in E, i = \overline{1, k}$.
 - (ii) $a_1 < a_2 < \dots < a_k$.
 - (iii) $\text{Min}\{a_{i+1} - a_i / i = \overline{1, k-1}\} = r$
-

**SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 2001-2002.**

**HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM ĐỀ THI MÔN TOÁN
LỚP 12 - VÒNG 2.**

Bài 1:

Câu a: Giải phương trình: $3(x^2 + 2x + 2) = 10\sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$ (1).

- $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x^2 + x + 1)$ nên điều kiện là: $x \geq -1$.
- $x^2 + 2x + 2 = (x+1) + (x^2 + x + 1)$, đặt $a = \sqrt{x+1}$, $b = \sqrt{x^2 + x + 1}$
- Với điều kiện $x \geq -1$: (1) trở thành:
 $3(a^2 + b^2) = 10ab \Leftrightarrow 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - 3b)(3a - b) = 0 \Leftrightarrow a = 3b$ hay $a = b/3$.
- $a = 3b \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 3\sqrt{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow x+1 = 9(x^2 + x + 1) \Leftrightarrow 9x^2 + 8x + 8 = 0$ (vô nghiệm)
- $a = b/3 \Leftrightarrow 3a = b \Leftrightarrow 3\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow 9(x+1) = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm 2\sqrt{6}$
- Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = 4 \pm 2\sqrt{6}$.

Cách khác: Bình phương và phân tích thành tích.....

Câu b: Chứng minh: $\log_8 9 + \log_8 10 + \log_8 11 < 2\log_2 3$.

- Trước hết chứng minh: $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$, $\forall n > 1$ (1).
- Vì: $\frac{\log_{n+1}(n+2)}{\log_n(n+1)} = \log_{n+1}(n+2) \cdot \log_{n+1} n$, áp dụng bất đẳng thức Cói cho hai số dương ta có:
- $\log_{n+1}(n+2) + \log_{n+1} n \geq 2\sqrt{\log_{n+1}(n+2) \cdot \log_{n+1} n} \Rightarrow \log_{n+1} n(n+2) \geq 2\sqrt{\log_{n+1}(n+2) \cdot \log_{n+1} n}$
- $\Rightarrow 2 = \log_{n+1}(n+1)^2 \cdot \log_{n+1} n \geq 2\sqrt{\log_{n+1}(n+2) \cdot \log_{n+1} n}$
- $\Rightarrow \log_{n+1}(n+2) + \log_{n+1} n < 1 \Rightarrow \frac{\log_{n+1}(n+2)}{\log_n(n+1)} < 1$ suy ra (1) thỏa.
- Từ công thức (1) ta có: $\log_8 9 + \log_8 10 + \log_8 11 < 3\log_8 9 = 2\log_2 3$.
- **Cách khác:** Có thể giải (1) bằng cách xét hàm $y = \log_x(x+1) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$ với $x > 1$ và suy ra $y' > 0$...

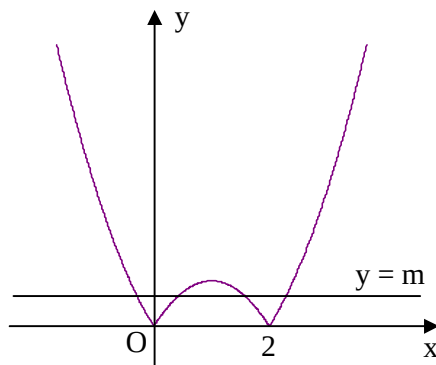
Bài 2:

Câu a:

- Vì $A, B, C \in (0; \pi)$ nên: $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} > 0$. Do đó:

$$(1) \Leftrightarrow |x^2 - 2x| = \log_3 \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) = m \quad (2)$$

- Nên số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của hai đường: $y = f(x) = |x^2 - 2x|$ (C) và (d): $y = m$.
- Khảo sát và vẽ đồ thị (C)



- Dựa vào đồ thị ta được: (2) có 4 nghiệm khi chỉ khi $0 < m < 1$
- $\Leftrightarrow \log_3 \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) < 1 \Leftrightarrow 1 < \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} < 3$ (3)
- Chứng minh (3): $A, B, C \in (0; \pi)$ nên: $\sin \frac{A}{2}; \sin \frac{B}{2}; \sin \frac{C}{2} \in (0; 1) \Rightarrow \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} < 3$ (4).

$$A, B \in (0; \pi) \text{ nên: } \sin \frac{A}{2} > 0; \sin \frac{B}{2} > 0; \cos \frac{A}{2} < 1; \cos \frac{B}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} > \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} \quad (5)$$

$$\text{Từ (5): } \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} > \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \geq \cos^2 \frac{C}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 \quad (6)$$

Từ (4) và (6) suy ra: (3) đúng. Vậy phương trình (1) có đúng 4 nghiệm.

Chú ý thêm: $1 < \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$

Câu b:

- Phương trình đã cho tương đương với: $(x^2 - 1) \cdot (3^x - 1) + x \cdot (3^{x^2-1} - 1) = 0$
- Xét $x = 0; x = \pm 1$: Thay vào (1) ta thấy đều thỏa nên phương trình có các nghiệm: $x = 0; x = \pm 1$.
- Xét $x \neq 0; x \neq \pm 1$: Khi đó (1) $\Leftrightarrow \frac{3^x - 1}{x} + \frac{3^{x^2-1} - 1}{x^2 - 1} = 0$ (2)

Với $t \neq 0$, xét hàm số: $f(t) = \frac{3^t - 1}{t}$.

* Với $t > 0$ thì $3^t - 1 > 0 \Rightarrow f(t) > 0$ và với $t < 0$ thì $3^t - 1 < 0 \Rightarrow f(t) > 0$, do đó:

Vì (2) $\Leftrightarrow f(x) + f(x^2 - 1) = 0$ nên (2) vô nghiệm.

- Vậy phương trình đã cho có tất cả là 3 nghiệm: $x = 0; x = \pm 1$.

Bài 3:

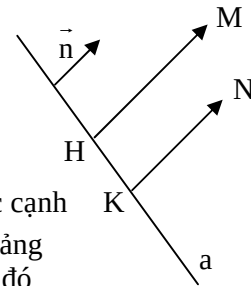
- Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến đơn vị của đường thẳng a , $\vec{n}$ có gốc trên a . M và N là hai điểm ở về một nửa mặt phẳng có bờ a chứa vectơ $\vec{n}$.

Khi đó ta có:

$$\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} = t_M \cdot \vec{n}^2 \quad (1) \quad \overrightarrow{KN} \cdot \vec{n} = t_N \cdot \vec{n}^2 \quad (2)$$

Từ giả thiết ta được: $t_M = d(M, a)$ và $t_N = d(N, a)$ và từ (1) và (2)

$$\text{suy ra: } \overrightarrow{MN} \cdot \vec{n} = d(N, a) - d(M, a) \quad (3).$$



- Gọi $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3, \vec{n}_4$ là các vectơ pháp tuyến đơn vị có gốc trên các cạnh AB, BC, CD, DA và ở miền trong tứ giác $ABCD$. Gọi k là tổng khoảng cách từ một đỉnh đến các đường thẳng chứa cạnh của tứ giác. Khi đó ta có:

$$\overrightarrow{AB} (\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4) = [d(B, AB) - d(A, AB)] + [d(B, BC) - d(A, BC)] + [d(B, CD) - d(A, CD)] + [d(B, DA) - d(A, DA)]$$
Do đó: $\overrightarrow{AB} (\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4) = k - k = 0$ (4). Tương tự ta có: $\overrightarrow{BC} (\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4) = 0$ (5).
- Vì A, B, C không thẳng hàng nên từ (4) và (5) ta suy ra: $\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4 = \vec{0}$ (6).
- Từ (6) suy ra: $\vec{n}_1^2 + \vec{n}_2^2 + 2\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \vec{n}_3^2 + \vec{n}_4^2 + 2\vec{n}_3 \cdot \vec{n}_4$ nên: $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = (\vec{n}_3, \vec{n}_4)$ (7).
- Từ (6) suy ra: $\vec{n}_2^2 + \vec{n}_3^2 + 2\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = \vec{n}_1^2 + \vec{n}_4^2 + 2\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_4$ nên: $(\vec{n}_2, \vec{n}_3) = (\vec{n}_1, \vec{n}_4)$ (8).
- Do: $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) + (\vec{n}_2, \vec{n}_3) + (\vec{n}_3, \vec{n}_4) + (\vec{n}_4, \vec{n}_1) = 360^\circ$ nên:
 $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) + (\vec{n}_2, \vec{n}_3) = (\vec{n}_3, \vec{n}_4) + (\vec{n}_4, \vec{n}_1) = 180^\circ$, suy ra: $(\vec{n}_1, \vec{n}_3) = 180^\circ$, tương tự: $(\vec{n}_2, \vec{n}_4) = 180^\circ$. (9)

- Từ (9) suy ra các cạnh đối của tứ giác song song nhau: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Vậy ABCD là hình bình hành.

Cách khác: Sau khi chứng minh được (6). Gọi O là một điểm tùy ý.

Đặt: $\overrightarrow{ON_1} = \overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{ON_2} = \overrightarrow{n_2}$, $\overrightarrow{ON_3} = \overrightarrow{n_3}$, $\overrightarrow{ON_4} = \overrightarrow{n_4}$ suy ra N_i thuộc đường tròn tâm O, bán kính 1.

Do (6) suy ra O là trọng tâm của tứ giác $N_1N_2N_3N_4$ suy ra O là trung điểm của đoạn nối hai trung điểm của hai cạnh N_1N_2 , N_3N_4 và từ đó suy ra: $N_1N_2 \parallel N_3N_4$, suy ra $N_1N_2N_3N_4$ là hình chữ nhật, suy ra:

$\overrightarrow{n_2} = -\overrightarrow{n_4}$, $\overrightarrow{n_1} = -\overrightarrow{n_3}$ nên $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Vậy ABCD là hình bình hành.

Bài 4:

- Đặt $n = 2001$.

$(a_1, a_2, \dots, a_k)$ thỏa (i) (ii) tương ứng một tập con k phần tử của E.

Kí hiệu: **A** là tập các tập con của E với: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ $a_1 < a_2 < \dots < a_k$;

$\min\{a_{i+1} - a_i \mid i = 1, k-1\} \geq r$; $u_r(k)$ là số phần tử của **A**.

- Trường hợp 1:** $u_r(k) = 0$ nếu $k > n - (k-1)(r-1)$.

Thật vậy: $k > n - (k-1)(r-1) \Leftrightarrow (k-1)r > n-1$ (*).

Ta có: $a_{i+1} - a_i \geq r \quad i = 1, k-1 \Rightarrow a_k - a_1 \geq (k-1)r$ mà $a_k - a_1 \leq n-1 \Rightarrow (k-1)r \leq n-1$ mâu thuẫn với (*), do đó không tồn tại A, suy ra **A** = $\emptyset \Rightarrow u_r(k) = 0$.

- Trường hợp 2:** $u_r(k) = C_{n-(k-1)(r-1)}^k$ nếu $k \leq n - (k-1)(r-1)$.

Thật vậy: Xét $M = \{1, 2, \dots, n - (k-1)(r-1)\}$ và **B** là các tập con k phần tử của M.

Xét ánh xạ: **A** $\xrightarrow{f}$ **B**: $f(A) = B$ xác định như sau: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \in \mathbf{A}$ thì:

$B = \{a_1, a_2 - (r-1), \dots, a_i - (i-1)(r-1), \dots, a_k - (k-1)(r-1)\}$; $b_i = a_i - (i-1)(r-1)$;

$b_{i+1} - b_i = a_{i+1} - a_i - (r-1) \geq 1$; $b_k = a_k - (k-1)(r-1) \leq n - (k-1)(r-1)$.

Suy ra: $b_i \in M$ suy ra: $B \in \mathbf{B}$.

Chứng tỏ f song ánh: ta được $A \neq A' \Rightarrow f(A) \neq f(A')$ và $\forall B \in \mathbf{B}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ $b_1 < b_2 < \dots < b_k$

Lấy tạo ảnh: $a_i = b_i + (i-1)(r-1)$, $i \in \overline{1, k}$ kiểm chứng được $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ và $a_{i+1} - a_i \geq 1 \quad i \in \overline{1, k-1}$

Suy ra: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \in \mathbf{A}$ và $f(A) = B$. Vậy f song ánh. Do đó: $u_r(k) = C_{n-(k-1)(r-1)}^k$.

- Từ hai trường hợp (1) và (2) trên ta có: $u_r(k) = C_{n-(k-1)(r-1)}^k$ với quy ước $C_m^k = 0$ khi $m < k$. Do đó: số bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ thỏa đề bài là: $u_r(k) - u_{r+1}(k)$.

**SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ**

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 2002-2003.**

**ĐỀ CHÍNH THỨC
SBD:**

Môn: TOÁN (VÒNG 1).
(150 phút, không kể thời gian giao đề)

Bài 1: (3.5 đ) Giải hệ:
$$\begin{cases} |4 \cos x \cdot \cos y| = 1 \\ \cos 2x + \cos 2y + 1 \leq 0 \end{cases}.$$

Bài 2: (3.5 đ) Cho hai nửa đường thẳng Ax, By chéo nhau. Hai điểm C, D thay đổi lần lượt ở trên

Ax và By sao cho: $\frac{1}{AC} + \frac{2}{BD} = \frac{3}{AB}.$

a/ Chứng minh rằng: mặt phẳng (P) chứa CD và song song với AB luôn luôn đi qua một điểm cố định I trong mặt phẳng (Q) chứa Ax và (Q) song song By.

b/ Tìm vị trí của C và D sao cho thể tích tứ diện ABCD là nhỏ nhất.

Bài 3: (3.0 đ)

a/ Trong mặt phẳng Oxy, cho một đường tròn (C) cắt parabol (P): $y = x^2$ tại bốn điểm, một điểm có tọa độ là (1;1) và ba điểm còn lại là ba đỉnh của một tam giác đều. Tính bán kính của đường tròn (C).

b/ Tìm tập hợp các tâm của những tam giác đều có ba đỉnh thuộc parabol (P): $y = x^2.$

SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 2002-2003.

HƯỚNG DẪN CHẤM BIỂU VÀ BIỂU ĐIỂM ĐỀ THI MÔN TOÁN
LỚP 12 - VÒNG 1.

Bài 1: (3.5 đ) Giải hệ: $\begin{cases} |4\cos x \cdot \cos y| = 1 \\ \cos 2x + \cos 2y + 1 \leq 0 \end{cases} \cdot (I)$

▪ (0.5 điểm) $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos x \cdot \cos y = 1 & (1) \\ \cos 2x + \cos 2y + 1 \leq 0 & (2) \end{cases} \quad (III) \text{ hay } \begin{cases} -4\cos x \cdot \cos y = 1 \\ \cos 2x + \cos 2y + 1 \leq 0 \end{cases} \quad (III)$

▪ (1.5 điểm) Giải hệ (II):

• (II) $\begin{cases} \cos(x+y) + \cos(x-y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x+y) \cdot \cos(x-y) + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = \frac{1}{2} - \cos(x+y) & (3) \\ \cos(x+y) \cdot [1 - 2\cos(x+y)] + 1 \leq 0 & (4) \end{cases}$

• (4) $\Leftrightarrow -2\cos^2(x+y) + \cos(x-y) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow -[\cos(x+y) - 1] \cdot [2\cos(x+y) + 1] \leq 0$
 $\Leftrightarrow \cos(x+y) \leq -\frac{1}{2} \text{ hay } \cos(x+y) \geq 1.$

• Do đó: (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = \frac{1}{2} - \cos(x+y) \\ \cos(x+y) \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (IV) \text{ hay } \begin{cases} \cos(x-y) = \frac{1}{2} - \cos(x+y) \\ \cos(x+y) \geq 1 \end{cases} \quad (V)$

• Giải (IV): $\begin{cases} \cos(x-y) = \frac{1}{2} - \cos(x+y) \\ \cos(x+y) \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = 1 \\ \cos(x+y) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = k2\pi \\ x+y = \pm \frac{2\pi}{3} + h2\pi \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + (k+h)\pi \\ y = \mp \frac{\pi}{3} + (h-k)\pi \end{cases}$

• Giải (V): $\begin{cases} \cos(x-y) = \frac{1}{2} - \cos(x+y) \\ \cos(x+y) \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = 1 \\ \cos(x+y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2n\pi \\ x+y = 2m\pi \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + (m+n)\pi \\ y = \mp \frac{\pi}{3} + (m-n)\pi \end{cases}$

▪ (1.5 điểm) Giải hệ (III):

• Đặt $t = x + \pi$ thế vào (III) ta được: $\begin{cases} 4\cos t \cdot \cos y = 1 \\ \cos 2t + \cos 2y + 1 \leq 0 \end{cases} \cdot$

- Theo (II) ta được: $\begin{cases} t = \pm \frac{\pi}{3} + (k+h)\pi \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + (k-h)\pi \end{cases}$ hay $\begin{cases} t = \pm \frac{\pi}{3} + (m+n)\pi \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + (m-n)\pi \end{cases}$
- Do đó: (III) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} - \pi + (k+h)\pi \\ y = \pm \frac{\pi}{3} - \pi + (k-h)\pi \end{cases}$ hay $\begin{cases} t = \pm \frac{\pi}{3} - \pi + (m+n)\pi \\ y = \mp \frac{\pi}{3} - \pi + (m-n)\pi \end{cases}$.
- Vậy hệ có các họ nghiệm: $\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + (k+h)\pi \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + (h-k)\pi \end{cases}; \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + (m+n)\pi \\ y = \mp \frac{\pi}{3} + (m-n)\pi \end{cases}$
 $\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} - \pi + (k+h)\pi \\ y = \pm \frac{\pi}{3} - \pi + (k-h)\pi \end{cases}; \begin{cases} t = \pm \frac{\pi}{3} - \pi + (m+n)\pi \\ y = \mp \frac{\pi}{3} - \pi + (m-n)\pi \end{cases}$

Bài 2: (3.5 điểm)

a/ (2 điểm)

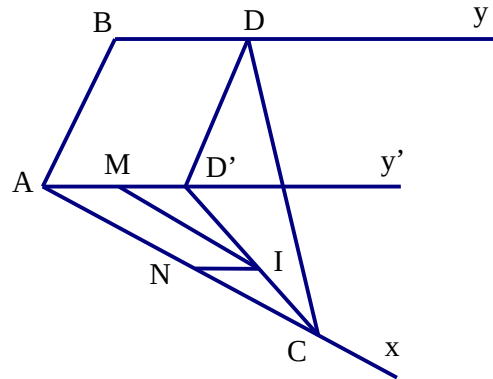
- Hình vẽ: Dựng $Ay' \parallel By$. D' trên Ay' sao cho:
 $AD' = BD$.

(P) là mp(DCD'), (Q) là mp(Ax, Ay').

- Nhận xét: Với I tùy ý trên $D'C$. Gọi M, N là các điểm trên Ay', Ax sao cho: $MI \parallel Ax$, $NI \parallel Ay'$.

Ta có: $\frac{AM}{AD'} + \frac{AN}{AC} = \frac{CI}{CD'} + \frac{D'I}{D'C} = \frac{CI + D'I}{CD'} = 1$ (1)

$\frac{1}{AC} + \frac{2}{BD} = \frac{3}{AB} \Leftrightarrow \frac{AB:3}{AC} + \frac{2AB:3}{AD'} = 1$ (2).



- Với C,D là hai điểm tùy ý thỏa giả thiết. Trên CD' tồn tại điểm I sao cho: $\frac{D'I}{D'C} = \frac{AB:3}{AC}$.

Ta được: $\frac{AN}{AC} = \frac{D'I}{D'C} = \frac{AB:3}{AC} \Rightarrow AN = \frac{AB}{3}$ (3)

và: $\frac{AM}{AD'} = \frac{CI}{CD'} = 1 - \frac{D'I}{D'C} = 1 - \frac{AB:3}{AC} = \frac{2AB:3}{AD'} \Rightarrow AM = \frac{2AB}{3}$ (4)

- Từ (3) và (4) suy ra M, N cố định nên I cố định. Do đó (P) luôn đi qua điểm cố định I trong mặt phẳng (Q).

b/ (1.5 điểm)

- Do $\triangle ABD = \triangle AD'D$ nên thể tích V của tứ diện ABCD bằng thể tích tứ diện DACD'.
- Do D ở trên $By \parallel (Q)$ nên khoảng cách từ D đến (ACD') không đổi, nên thể tích V nhỏ nhất khi và chỉ khi diện tích S của tam giác $AD'C$ nhỏ nhất.

- $S = \frac{1}{2} AC \cdot AD' \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin A$ nên: S nhỏ nhất $\Leftrightarrow AC \cdot BD$ nhỏ nhất.

- Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương: $\frac{1}{AC}, \frac{1}{BD}$ ta có:

$$\frac{3}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{2}{BD} \geq 2\sqrt{\frac{1}{AC} \cdot \frac{2}{BD}} \Rightarrow AC \cdot BD \geq \frac{8}{9} AB^2$$

Dấu bằng xảy ra khi: $\frac{1}{AC} = \frac{2}{BD} = \frac{3}{2AB} \Leftrightarrow AC = \frac{2AB}{3}$ và $BD = \frac{4AB}{3}$.

- Vậy: V nhỏ nhất khi: $BD = \frac{4AB}{3}$, $AC = \frac{2AB}{3}$.

Bài 3: (3 điểm)

a/ (1.5 đ) (C): $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. (C) qua điểm (1;1) nên: $R^2 = (1 - a)^2 + (1 - b)^2$.

- Hoành độ x_1, x_2, x_3 của ba đỉnh tam giác đều và $x = 1$ là nghiệm của phương trình:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (1 - a)^2 + (1 - b)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^3 + x^2 + (2 - 2b)x + 2 - 2a - 2b = 0 \end{cases}$$

- Do đó: $x^3 + x^2 + (2 - 2b)x + 2 - 2a - 2b \equiv (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ nên:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2 - 2b \end{cases}$$

- Từ giả thiết tam giác đều nên:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3a \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3a \\ (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 3b \end{cases}$$

- Do đó: $a = -\frac{1}{3}$, $b = 3$ và bán kính đường tròn (C) là: $R = \frac{2\sqrt{13}}{3}$.

b/ (1.5 đ)

Thuận:

- Giả sử $I(a; b)$ là tâm của tam giác đều ABC có đỉnh trên (P). Đường tròn (ABC) cắt (P) thêm điểm $M(x_0; y_0)$ (có thể trùng A, B, C).

x_A, x_B, x_C và x_0 là nghiệm của: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ x^3 + x_0x^2 + (x_0^2 + 1 - 2b)x + x_0^3 + x_0 - 2a - 2bx_0 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

- Suy ra: $\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3a \\ x_A^2 + x_B^2 + x_C^2 = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3a \\ (x_A + x_B + x_C)^2 - 2(x_Ax_B + x_Bx_C + x_Cx_A) = (-x_0)^2 - 2(x_0^2 + 1 - 2b) \end{cases}$

- Hay: $\begin{cases} a = -\frac{x_0}{3} \\ b = x_0^2 + 2 \end{cases}$, vì vậy: $b = 9a^2 + 2$. Nên tâm I ở trên đồ thị (G): $y = 9x^2 + 2$.

Đảo: Xét $I(a; 9a^2 + 2)$ tùy ý trên (G): $y = 9x^2 + 2$. Ta phải chứng minh đường tròn (C) tâm I bán kính IM với $M(-3a; 9a^2)$ cắt (P) thêm 3 điểm là 3 đỉnh của một tam giác đều.

- Xét phương trình: $(x - a)^2 + (x^2 - 9a^2 - 2)^2 = (-3a - a)^2 + (9a^2 - 9a^2 - b)^2 \quad (2)$.

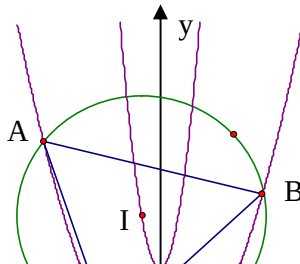
- $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3a \\ f(x) = 0 \end{cases}$ với $f(x) = x^3 - 3a^2x^2 - (9a^2 + 3)x + 27a^3 + 7a$ ($f(x) = 0$ chính là phương trình (1) với $x_0 = -3a$).

- Nếu $a = 0$: $f(x) = x^3 - 3x = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

- Nếu $a \neq 0$: Do $f(x)$ liên tục, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ và $\begin{cases} f(-3a) = 16a > 0; f(3a) = -2a < 0 & \text{khi } a > 0 \\ f(3a) = -2a > 0; f(-3a) = 16a < 0 & \text{khi } a < 0 \end{cases}$

nên $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ luôn có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 với mọi a .



• Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3a \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -(9a^2 + 3) \end{cases}$. Do đó: $\begin{cases} \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = a \\ \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3} = 9a^2 + 3 \end{cases} \quad (3)$

Do x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm phân biệt của (2) nên: (C) cắt (P) tại 3 đỉnh $A(x_1; x_1^2)$, $B(x_2; x_2^2)$, $C(x_3; x_3^2)$ của tam giác ABC. Và do (3): tam giác ABC có trọng tâm trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp I, nên ABC là tam giác đều.

- ❖ Kết luận: Tập hợp các tâm của những tam giác đều có 3 đỉnh thuộc (P): $y = x^2$ là parabol:
(G): $y = 9x^2 + 2$.



SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 2002-2003.

ĐỀ CHÍNH THỨC
SBD:

Môn: TOÁN (VÒNG 2).
(1 50 phút, không kể thời gian giao đề)

Bài 1: (3.5 đ) Giải phương trình:

$$\log_{2+\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 11) = \log_{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 12)$$

Bài 2: (3.5 đ) Trong mặt phẳng Oxy, cho đường cong (H): $y = \frac{2x-1}{2x-2}$ với $x > 1$.

a/ M là điểm tùy ý trên (H), tiếp tuyến của (H) tại M cắt hai đường tiệm cận của (H) tại hai điểm A và B. Xác định điểm M để diện tích tam giác OAB nhỏ nhất.

b/ Với I(1;1) và K là hình chiếu vuông góc của M xuống đường thẳng $y = x$. Tìm điểm cố định C sao cho : $\sqrt{2} IK - CM$ luôn là số dương không đổi khi M thay đổi trên (H).

Bài 3: (3.0 đ) Cho $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$) và hàm số $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ sao cho:

$$f(x^n + y) = x^{n-1}f(x) + f(f(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

($\mathbb{Q}$ là tập hợp các số hữu tỉ).

a/ Giả sử rằng $f(2002) \neq 0$. Tính $f(2002)$.

b/ Tìm hàm số f .

**SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 2002-2003.**

**HƯỚNG DẪN CHẤM BIỂU VÀ BIỂU ĐIỂM ĐỀ THI MÔN TOÁN
LỚP 12 - VÒNG 2.**

Bài 1: (3.5 đ) Giải phương trình: $\log_{2+\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 11) = \log_{2\sqrt{2+\sqrt{5}}}(x^2 - 2x - 12)$ (1)

- Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 2x - 12 > 0 \\ x^2 - 2x - 11 > 0 \end{cases}$ (*)
- $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ và $(2\sqrt{2 + \sqrt{5}})^2 = 8 + 4\sqrt{5}$ do đó $2 + \sqrt{5} = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ và $2\sqrt{2 + \sqrt{5}} = \sqrt{8 + 4\sqrt{5}}$.
- (1) $\Leftrightarrow \log_{\sqrt{9+4\sqrt{5}}}(x^2 - 2x - 11) = \log_{\sqrt{8+4\sqrt{5}}}(x^2 - 2x - 12)$
 $\Leftrightarrow \log_{9+4\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 11) = \log_{8+4\sqrt{5}}(x^2 - 2x - 12)$
- Đặt: $a = 8 + 4\sqrt{5} > 1$, $t = x^2 - 2x - 12$. Điều kiện: $t > 0$.
- Do đó: (1) $\Leftrightarrow \ln_{a+1}(t+1) = \ln_a t$

Cách 1: (1) $\Leftrightarrow \ln_{a+1}(t+1) = \ln_a t \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^y \\ t+1 = (a+1)^y \end{cases}$ (I).

- Từ (I) ta được: $\left(\frac{a}{a+1}\right)^y + \left(\frac{1}{a+1}\right)^y = 1$ (2).
- $y = 1$: là nghiệm của (2).
- $y < 1$: $\left(\frac{a}{a+1}\right)^y + \left(\frac{1}{a+1}\right)^y > \frac{a}{a+1} + \frac{1}{a+1} = 1$, $y > 1$: $\left(\frac{a}{a+1}\right)^y + \left(\frac{1}{a+1}\right)^y < \frac{a}{a+1} + \frac{1}{a+1} = 1$.
- Nên (2) có nghiệm duy nhất: $y = 1$. Do đó: (1) $t = a \Leftrightarrow x^2 - 2x - 12 = 8 + 4\sqrt{5}$ (thỏa *)
 $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 20 - 4\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x = 2 + 2\sqrt{5}$ hoặc $x = -2\sqrt{5}$.
- Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 2 + 2\sqrt{5}$ hoặc $x = -2\sqrt{5}$.

Cách 2: Xét hàm số $y = f(t) = \ln_{a+1}(t+1) - \ln_a t$ ($a > 1$)

- Ta được: $y' = \frac{1}{(t+1)\ln(a+1)} - \frac{1}{t\ln a} < 0$ vì $a > 1$, nên hàm số giảm trên $(0; +\infty)$ và ta có $f(t) = 0$ có nghiệm $t = a$ nên $f(t)$ có nghiệm duy nhất $t = a$.
- Vậy: (1) (1) $\Leftrightarrow \ln_{a+1}(t+1) = \ln_a t \Leftrightarrow t = a \Leftrightarrow x^2 - 2x - 12 = 8 + 4\sqrt{5}$ (thỏa *)
 $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 20 - 4\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x = 2 + 2\sqrt{5}$ hoặc $x = -2\sqrt{5}$.
- Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 2 + 2\sqrt{5}$ hoặc $x = -2\sqrt{5}$.

Bài 2: (3.5 đ)

a/ (2 điểm)

- $M(x_0; y_0) \in (H)$, tiếp tuyến tại M của (H) có phương trình: (d): $y - \frac{2x_0 - 1}{2x_0 - 2} = \frac{-2}{(2x_0 - 2)^2}(x - x_0)$.
- d cắt hai đường tiệm cận đứng $x = 1$ và ngang $y = 1$ tại các điểm $A(1; \frac{x_0}{x_0 - 1})$, $B(2x_0 - 1; 1)$.
- Vì $x_0 > 1$ nên $y_A = \frac{x_0}{x_0 - 1} > 1$, $x_B = 2x_0 - 1 > 1$. Do đó I ở miền trong tam giác OAB nên:

$$S_{OAB} = S_{OIB} + S_{OIA} + S_{IAB} = \frac{1}{2} IA + \frac{1}{2} IB + \frac{1}{2} IA \cdot IB = \frac{1}{2} 2(x_0 - 1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x_0 - 1} + \frac{1}{2} \cdot 2(x_0 - 1) \cdot \frac{1}{x_0 - 1}$$

- Do đó áp dụng bất đẳng thức Cosi cho ta hai số dương $x_0 - 1$, $\frac{1}{2(x_0 - 1)}$ ta có:

$$S_{OAB} = x_0 - 1 + \frac{1}{2(x_0 - 1)} + 1 \geq 1 + 2\sqrt{\frac{1}{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi:

$$x_0 - 1 = \frac{1}{2(x_0 - 1)} \Leftrightarrow x_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

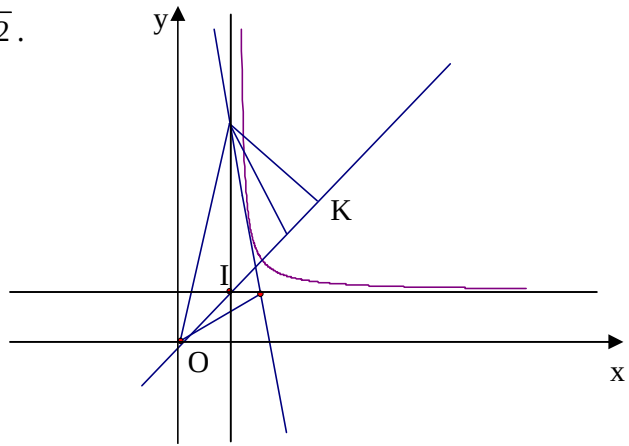
- Vậy S_{OAB} nhỏ nhất khi $M(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Cách khác: Tính diện tích ΔOAB theo cách sau:

$$1/ \overrightarrow{OA} = \left(1; \frac{-1}{x_0 - 1}\right); \overrightarrow{OB} = (2x_0 - 1; 1).$$

$$\text{Tính: } S_{OAB} = \frac{1}{2} \sqrt{OA^2 \cdot OB^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2}.$$

$$2/ \text{Tính } S_{OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot h \text{ với } h = d(O; AB).$$



b/ (1.5 điểm)

- Do phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách, nên để đơn giản phép tính ta dời hệ trục Oxy sang hệ trục IXY bằng phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{OI}$.

$$\text{Công thức dời trục: } \begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 1 \end{cases}, (H) \text{ trở thành: } Y = \frac{1}{2X} \text{ với } X > 0.$$

$$\bullet \text{ Do đó: } \forall M(X; \frac{1}{2X}) \Rightarrow \frac{1}{2}(X + \frac{1}{X}) = \frac{2X^2 + 1}{2X} \Rightarrow K\left(\frac{2X^2 + 1}{4X}; \frac{2X^2 + 1}{4X}\right).$$

- Đặt $C(a; b)$ và hằng số muốn tìm là c . 0, khi đó: $IK = \frac{2X^2 + 1}{2X} \sqrt{2}$; $\overrightarrow{MC} = (a - X; b - \frac{1}{2X})$ và:

$$\sqrt{2}IK - CM = c \Leftrightarrow CM = \sqrt{2}IK - c \Leftrightarrow \sqrt{(a - x)^2 + (b - \frac{1}{2X})^2} = \frac{2X^2 + 1}{2X} - c = \frac{2X^2 - 2cX + 1}{2X} > 0 (*)$$

$$\bullet \sqrt{(a - x)^2 + (b - \frac{1}{2X})^2} = \frac{2X^2 - 2cX + 1}{2X} \Leftrightarrow 4X^2(a - X)^2 + (2bX - 1)^2 = (2X^2 - 2cX + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow (8c - 8a)X^3 + (4a^2 + 4b^2 - 4c^2 - 4)X^2 + (4c - 4b)X = 0 \quad (2)$$

- Do (2) đúng với mọi $X > 0$ nên: $\begin{cases} 8c - 8a = 0 \\ 4a^2 + 4b^2 - 4c^2 - 4 = 0 \\ 4c - 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$

$$c = 1 \text{ thỏa } \frac{2X^2 - 2cX + 1}{2X} > 0 \text{ vì } X > 0 \text{ và } 2X^2 - 2X + 1 > 0.$$

- Vậy điểm C có tọa độ (1;1) trong hệ trục IY, hay C(2;2) trong hệ trục Oxy và với mọi điểm M trên (H) ta có: $\sqrt{2}IK - CM = 1$.

Bài 3: (3.0 đ) $f(x^n + y) = x^{n-1}f(x) + f(f(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{Q} (*)$.

Câu a: (1.5 điểm)

- Từ (*) ta được: với $x = 0$; $f(y) = f(f(y))$, $\forall y \in \mathbb{Q}$.

$$\text{với } x = 1; y = 0: f(f(0)) = 0 \Rightarrow f(0) = 0.$$

$$\text{với } x = 1; y \in \mathbb{Q}: f(1+y) = f(1) + f(y). \quad (1).$$

$$\text{Do đó: chứng minh bằng quy nạp ta được: } f(n) = n \cdot f(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

- Từ (1) ta có: $f(0) = f(1) + f(-1) \Rightarrow f(-1) = f(0) - f(1) = -f(1)$; $f(x-1) = f(x) - f(1)$
Do đó, chứng minh bằng quy nạp ta được: $f(-n) = -n.f(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. (3)
- Từ (2) và (3) ta được: $f(n) = n.f(1) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ (4)
- Đặt: $f(1) = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$ và ta được: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và n chia hết p nên $n.f(1) \in \mathbb{Z}$. Do đó ta được:
 $f(f(n)) = f(n) \Leftrightarrow n.[f(1)]^2 = n.f(1) \Leftrightarrow [f(1)]^2 = f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$ hay $f(1) = 1$.
- Do đó, từ (4) ta được: $f(2002) = 1$ hay $f(2002) = 0$ (loại). Vậy $f(2002) = 2002$.

Câu b (1.5 điểm)

- Từ (*) ta được: $y = 0$: $f(x^n) = x^{n-1}f(x)$, $\forall x \in \mathbb{Q}$. (1)
 - n chẵn: $\forall x \neq 0$: $f(x) = \frac{f(x^n)}{x^{n-1}}$, $f(-x) = \frac{f(x^n)}{-x^{n-1}} = -f(x)$.
 - n lẻ: từ (*) và (1) ta được: $f(x^n + y) = f(x^n) + f(y)$ (2)
suy ra: $f(-x^n) + f(x^n) = 0 \Rightarrow f(-x) = \frac{f((-x)^n)}{(-x)^{n-1}} = \frac{-f(x^n)}{x^{n-1}} = -f(x)$.
 - Do đó: $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.
 - Từ (2), chứng minh bằng quy nạp ta được: $f(px^n) = p.f(x^n)$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.
 - $\forall p \in \mathbb{N}^*$: $f(-px^n) = -f(p.x^n) = -p.f(x^n)$.
Vậy: $f(px^n) = p.f(x^n)$, $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{Q}$. (3)
 - Từ (3) ta có: $\forall \frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$ ($u \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{N}^*$) ta được: $f(\frac{u}{v}) = f(\frac{u.v^{n-1}}{v^n}) = u.v^{n-1}.f(\frac{1}{v^n})$.
 - Mà: $f(1) = f(\frac{u^n}{v^n}) = v^n.f(\frac{1}{v^n}) \Rightarrow f(\frac{1}{v^n}) = \frac{f(1)}{v^n}$. Vậy: $f(\frac{u}{v}) = u.v^{n-1}.\frac{f(1)}{v^n} = \frac{u}{v}.f(1)$ (4).
 - Ta có: $f(1) = 0$ hay $f(1) = 1$ từ (4) suy ra: $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{Q}$ hay $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.
 - Thử lại: thỏa mãn (*). Vậy $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.
-

**SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ**

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 2003-2004.**

ĐỀ CHÍNH THỨC
SBD:

Môn: TOÁN (VÒNG 1).
(150 phút, không kể thời gian giao đề)

Bài 1: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2(1 - \cos \frac{1}{x}) & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

a/ Tìm đạo hàm của hàm số và chứng minh hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

b/ Tìm số a nhỏ nhất để cho: $x^2(1 - \cos \frac{1}{x}) < a, \forall x \neq 0$.

Bài 2: Giải hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x^{4008} + x^{2004} > 2004^{2x} + 2004^x \\ x^{4006} + x^{2003} < 2003^{2x} + 2003^x \end{cases} \quad (x > 3).$$

Bài 3: Tìm hai điểm A, B lần lượt ở trên elip (E) và đường tròn (C):

$$(E): \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{18} = 1, \quad (C): (x - 11)^2 + (y - 13)^2 = 34.$$

sao cho độ dài AB là nhỏ nhất.

Bài 4: Tìm số các dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} u_{n+1} + 4u_n^2 - 4u_n = 0, \forall n \geq 1 \\ u_{2004} = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 2003-2004.

HƯỚNG DẪN CHẤM BIỂU VÀ BIỂU ĐIỂM ĐỀ THI MÔN TOÁN
LỚP 12 - VÒNG 1.

Bài 1: (2 đ)

Câu a: (2 điểm)

- (1.5 đ) **Tính đạo hàm của hàm số:** $x \neq 0$ ta có: $f'(x) = 2x - 2x \cdot \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}$.

- Tại $x = 0$: Vì $f(x) = 2x^2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2x}$ với $x \neq 0$ và $0 \leq \sin^2 \frac{1}{x} \leq 1$ nên:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \cdot \sin^2 \frac{1}{2x} \right) = 0.$$

- (0.5 đ) $f(x) = 2x^2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2x}$ với $x \neq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 = f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, do đó $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Câu b: (3 điểm)

- (0.5 đ) $x^2(1 - \cos \frac{1}{x}) = 2x^2 \sin^2 \frac{1}{2x} = 2 \left(x \cdot \sin \frac{1}{2x} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}} \right)^2$.

- (1.0 đ) **Chứng minh:** $-1 < \frac{\sin x}{x} < 1, \forall x \neq 0$. (1)

Xét $y = g(x) = \left| \frac{\sin x}{x} \right|$, $\forall x \neq 0$. Biết rằng $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x < x$ và với: $x \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x \leq 1 < x$.

Do đó: $g(x) = \left| \frac{\sin x}{x} \right| < 1, > 0$. Mà $g(x)$ là hàm số chẵn trên $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên $g(x) = \left| \frac{\sin x}{x} \right| < 1$, $\forall x \in D$. Vậy (1) là đúng.

- (1.0 đ) Tìm a nhỏ nhất: Từ (1) được: $\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 < 1, \forall x \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{\sin \frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}} \right)^2 < 1, \forall x \neq 0$

$$\Rightarrow h(x) = x^2(1 - \cos \frac{1}{x}) < \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0 \quad (2) \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

- (0.5 đ) $h(x) < a, \forall x \neq 0$ (gt) mà $\frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) \leq a \Rightarrow a \geq \frac{1}{2}$ (3).

Dấu đẳng thức xảy ra tại (3) khi: $a = \frac{1}{2}$ là đúng theo (2). Vậy $a = \frac{1}{2}$.

Bài 2: (5 điểm)

$$\begin{cases} x^{4008} + x^{2004} > 2004^{2x} + 2004^x & (1) \\ x^{4006} + x^{2003} < 2003^{2x} + 2003^x & (2) \end{cases} \quad (x > 3).$$

- (2 đ) Đặt $y = 2004$. Do $x > 0, y > 0$ nên ta được:

$$(1) \Leftrightarrow x^{2y} + x^y > y^{2x} + y^x \Leftrightarrow x^{2y} - y^{2x} + x^y - y^x > 0 \Leftrightarrow (x^y - y^x)(x^y + y^x + 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow x^y - y^x > 0 \Leftrightarrow x^y > y^x \quad (\text{do } x^y + y^x + 1 > 0).$$

- (1.5 đ) $x^y > y^x \Leftrightarrow \ln(x^y) > \ln(y^x) \Leftrightarrow y \ln x > x \ln y \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} > \frac{\ln y}{y}$. Vậy: $\frac{\ln x}{x} > \frac{\ln 2004}{2004}$ (3).

Biến đổi tương tự, bất phương trình (2) trở thành: $\frac{\ln 2003}{2003} > \frac{\ln x}{x}$ (4).

Từ (3) và (4), hệ đã cho trở thành: $\frac{\ln 2004}{2004} < \frac{\ln x}{x} < \frac{\ln 2003}{2003}$ (5).

- (1.5 đ) Xét hàm số: $y = f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0, \forall x > 3$.

Nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$, do đó: $\frac{\ln 2004}{2004} < \frac{\ln x}{x} < \frac{\ln 2003}{2003}$ tương đương với $2003 < x < 2004$.

Bài 3: (6 điểm)

- (0.5 đ) (C) là đường tròn tâm I(11;13) bán kính $R = \sqrt{34}$.

Nhận xét rằng $A \in (E)$, $B \in (C)$ nên đoạn AB ngắn nhất thì ba điểm I, A, B thẳng hàng.

- (1.5 đ) $A(x_0; y_0) \in (E): \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{18} = 1$ nên $\begin{cases} x_0 = 5\sqrt{2}\cos t \\ y_0 = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$

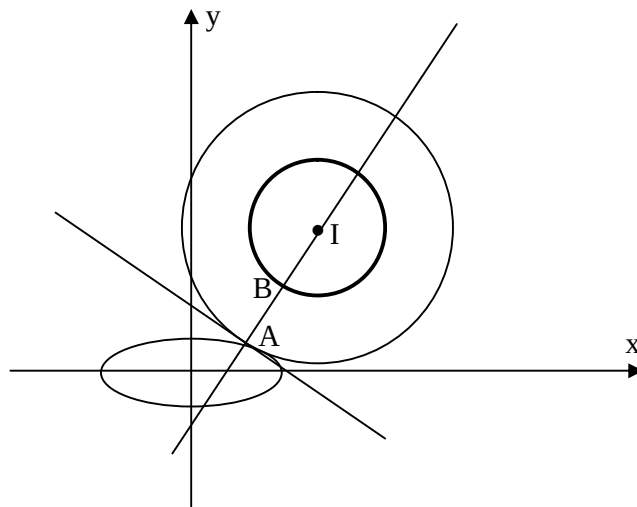
$$IA^2 = (x_0 - 11)^2 + (y_0 - 13)^2 = (5\sqrt{2}\cos t - 11)^2 + (3\sqrt{2}\sin t - 13)^2.$$

$$IA^2 = 290 + 50\cos^2 t + 18\sin^2 t - 110\sqrt{2}\cos t - 78\sqrt{2}\sin t.$$

- (3 đ) $IA^2 = 136 + 110\left(\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 78\left(\sin t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \geq 136$.

Dấu bằng xảy ra khi chỉ khi: $t = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow A(5;3)$.

- (1.0 đ) Vậy độ dài AB nhỏ nhất là: $d = 2\sqrt{34} - \sqrt{34} = \sqrt{34}$ khi $A(5;3)$ và từ đó suy ra được $B(8;8)$.



Bài 4: (4 điểm)

- (1.5 đ) Viết lại $u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n) = f(u_n)$ với $f(x) = 4x(1 - x)$

Nhận xét: $f(x) \in (0;1) \Rightarrow x \in (0;1)$.

Vì vậy: $u_{2004} = \frac{1}{2} \in (0;1) \Rightarrow u_{2003} \in (0;1) \Rightarrow u_{2002} \in (0;1) \Rightarrow \dots u_1 \in (0;1)$.

- (1 đ) Với $0 < u_1 < 1$ tồn tại duy nhất $\alpha: 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $u_1 = \sin^2 \alpha$.

Lúc đó: $u_2 = 4\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) = \sin^2 2\alpha$; $u_3 = 4\sin^2 2\alpha (1 - \sin^2 2\alpha) = \sin^2 4\alpha$.

Quy nạp ta được: $u_n = \sin^2(2^{n-1}\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2^n\alpha)$.

■ (1.5 đ) $u_{2004} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2^{2004}\alpha) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos(2^{2004}\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2^{2004}\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2^{2005}}(2k+1), k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } 0 < \frac{\pi}{2^{2005}}(2k+1) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 2^{2003} - \frac{1}{2}$$

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên: $k = 0; 1; 2; \dots; 2^{2003} - 1$.

Từ đó có tất cả 2^{2003} giá trị u_1 thỏa bài toán: $u_1 = \sin^2\left[\frac{\pi}{2^{2005}}(2k+1)\right], k \in \{0; 1; \dots; 2^{2003} - 1\}$.

Do đó có tất cả 2^{2003} dãy số (u_n) thỏa điều kiện đã cho.

**SỞ GIÁO DỤC - ĐÀO TẠO
THỪA THIÊN HUẾ**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI BẬC PTTH
NĂM HỌC 2003-2004.**

**HƯỚNG DẪN CHẤM BIỂU VÀ BIỂU ĐIỂM ĐỀ THI MÔN TOÁN
LỚP 12 - VÒNG 2.**

Bài 1: (5 đ) $(2x)^{\cos 4x+3} + (1-x^2)^{\cos 4x+3} \geq (1+x^2)^{\cos 4x+3}$, $0 < x < 1$ (1).

- (1đ) Biến đổi về dạng: $a^y + b^y \geq 1$: Chia hai vế của (1) cho $(1+x^2)^{\cos 4x+3} > 0$ ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^{\cos 4x+3} + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^{\cos 4x+3} \geq 1 \quad (2).$$

- (4 đ) Tìm ra nghiệm của (1):

- Vì $0 < x < 1$ nên: $0 < \frac{2x}{1+x^2} < 1$, $0 < \frac{1-x^2}{1+x^2} < 1$ và $\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 = 1$
- Và $\cos 4x + 3 \geq 2$ nên: $\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^{\cos 4x+3} + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^{\cos 4x+3} \leq \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2 = 1$.
- Dấu bằng xảy ra khi chỉ khi: $\cos 4x + 3 = 2 \Leftrightarrow \cos 4x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ (vì $0 < x < 1$).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $x = \frac{\pi}{4}$.

Cách khác: Đặt $x = \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 < t < \frac{\pi}{4}$.

$$(2) \Leftrightarrow (\sin 2t)^{\cos 4x+3} + (\cos 2t)^{\cos 4x+3} \geq 1.$$

Bài 2: (5 đ)

- (1 đ) Giải (1): $4p(p-a) \leq bc$.

$$4p(p-a) \leq bc \Leftrightarrow (a+b+c)(b+c-a) \leq bc \Leftrightarrow (b+c)^2 - a^2 \leq bc \Leftrightarrow (b+c)^2 - (b^2 + c^2 - 2bc \cos A) \leq bc \\ \Leftrightarrow 2bc(1 + \cos A) \leq bc \Leftrightarrow \cos A \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} \leq A < \pi \quad (3) \quad (\text{vì } 0 < A < \pi).$$

- (1.5 đ) Giải (2): $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \frac{2\sqrt{3}-3}{8}$

$$\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \frac{2\sqrt{3}-3}{8} \Leftrightarrow 8 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} - 2\sqrt{3} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4 \sin \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B+C}{2} - \cos \frac{B-C}{2} \right) - 2\sqrt{3} + 3 = 0 \Leftrightarrow -4 \sin \frac{A}{2} \left(\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{B-C}{2} \right) - 2\sqrt{3} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^2 \frac{A}{2} - 4 \cos \frac{B-C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} + 2\sqrt{3} - 3 = 0 \quad (4).$$

- (2.5 đ) Tính A, B, C:

$$\diamond (4) \Leftrightarrow X = \left(2 \sin \frac{A}{2} - \cos \frac{B-C}{2} \right)^2 + 2\sqrt{3} - 3 - \cos^2 \frac{B-C}{2} = 0$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{3} \leq \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \sin \frac{A}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \geq \sqrt{3} \text{ mà } \cos \frac{B-C}{2} \leq 1 \text{ nên:}$$

$$X \geq \left(\sqrt{3} - \cos \frac{B-C}{2} \right)^2 + 2\sqrt{3} - 3 - \cos^2 \frac{B-C}{2} = 2\sqrt{3} \left(1 - \cos \frac{B-C}{2} \right) \geq 0$$

$$SH^2 = 1 - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}} = 1 - \frac{1}{4} \left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4} \left(3 - \cot^2 \frac{\pi}{4} \right), \quad SH = \frac{1}{2} \sqrt{3 - \cot^2 \frac{\pi}{4}} \quad n = 3; 4; 5.$$

$$n = 3: SH = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad n = 4: SH = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad n = 5: SH = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}}.$$

- Do đó giá trị lớn nhất của SH là $\sqrt{\frac{2}{3}}$, giá trị nhỏ nhất của SH là $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}}$.

Bài 4: (4 điểm)

- (0.5 đ) Chứng minh f song ánh: Cho $x = 0$ được: $f[f(y)] = y + [f(0)]^n, \forall y \in Q$. (1)

Từ (1) suy ra: $\forall y_1, y_2 \in Q, f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$.

$$\forall t \in Q, t = y + [f(0)]^n \Rightarrow \exists y \in Q: f[f(y)] = t.$$

- (1 đ) Chứng minh $f(0) = 0$: Tồn tại $x_0 \in Q: f(x_0) = 0$.

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow f[x_0^n + f(0)] = 0 \Rightarrow x_0^n + f(0) = x_0 \quad (1) \quad \begin{cases} x = x_0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow f(0) = x_0 + [f(0)]^n \quad (2)$$

$$(1) \text{ và } (2) \Rightarrow [f(0)]^n + x_0^n = 0 \quad (3).$$

từ (3) ta có: n chẵn thì $x_0 = 0; f(0) = 0$.

n lẻ thì $x_0 = -f(x_0)$ và từ (2) ta được: $[f(0)]^n = 2f(0)$; do $f(0) \in Q$ suy ra $f(0) = 0$.

- (1 đ) Từ $f(0) = 0$ suy ra: $\begin{cases} f[f(y)] = y, \forall y \in Q \\ f(x^n) = [f(x)]^n, \forall x \in Q \end{cases}$ do đó:

$$f(x^n + y) = f[x^n + f(f(y))] = f(y) + f(x^n) \quad \forall x, y \in Q \quad (4)$$

$$\text{cho } y = -x^n: f(x^n) + f(-x^n) = 0 \Rightarrow f(-x^n) = -f(x^n), \forall x \in Q \quad (5).$$

- (1 đ) **Chứng minh:** $f(x) = x.f(1), \forall x \in Q$.

Từ (4) quy nạp suy ra: $f(k.x^n) = kf(x^n), \forall k \in N, \forall x \in Q$.

$k < 0: k = -k' \quad (k' \in N^*)$

- n lẻ: $f(k.x^n) = f(k'.(-x)^n) = k'.f(-x^n) = k.f(x^n)$ (do (5)).

- n chẵn: $f(x^n) = f[(-x)^n] \Rightarrow f[(x)^n] = f[(-x)^n] \Rightarrow f(x) = f(-x)$ (*) hoặc $-f(x) = f(-x)$ (**).

Với $x \neq 0$, từ (*) suy ra $x = -x \Rightarrow x = 0$ mâu thuẫn, vậy $x \neq 0$ thì $f(-x) = f(x)$.

Do $f(0) = 0 \Rightarrow \forall x \in Q: -f(x) = f(-x)$. Nên: $f(k.x^n) = f(-k'.x^n) = -f(k'.x^n) = -k'.f(x^n) = k.f(x^n)$.

Tóm lại: $\forall k \in N, \forall x \in Q: f(k.x^n) = kf(x^n)$.

$$f(1) = f\left(\frac{q^n}{p^n}\right) = q^n.f\left(\frac{1}{q^n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{q^n}\right) = \frac{f(1)}{q^n}, \forall q \in N^*$$

$$\text{nên: } f\left(\frac{q}{p}\right) = f\left(\frac{p.q^{n-1}}{p^n}\right) = p.q^{n-1}.f\left(\frac{1}{q^n}\right) = \frac{f(1)}{q^n}.p.q^{n-1} = \frac{p}{q}.f(1), \forall p \in Z, \forall q \in N^*.$$

Vậy $f(x) = x.f(1), \forall x \in Q$.

- (0.5 đ) Xác định các hàm số f : vì $f(x) = x.f(1), \forall x \in Q, f(1) = [f(1)]^n$ và $f(1) \neq 0$ nên

- n lẻ: $f(1) = \pm 1$ suy ra $f(x) = x$ hoặc $f(x) = -x, \forall x \in Q$.

- n chẵn: $f(1) = 1$ suy ra $f(x) = x$

Thế lại đều thỏa mãn phương trình hàm đã cho.

Vậy: n lẻ: $f(x) = x$ hoặc $f(x) = -x$.

n chẵn: $f(x) = x$