

Bài 1 (4,0 điểm).

a) Cho biểu thức $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$. Rút gọn $B = -\sqrt{2A - 4\sqrt{x} + 1}$ với $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$.

b) Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x - 2y + z = 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{z}} = \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{z}}$$

Bài 2 (6,0 điểm). a) Giải phương trình $3x^2 + 6 = 9x - 2x\sqrt{x-2}$.

b) Giải phương trình $(x-2)\sqrt{x-1} + (x+3)\sqrt{x+4} = x^2 + x$.

c) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2 + 7y^2 = 61 + 4x$.

d) Cho hai số nguyên dương a, b thỏa mãn $a > b$ và $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b)$. Chứng minh a, b là hai số chính phương liên tiếp.

Bài 3 (2,0 điểm). a) Cho $a, b \geq 0, ab = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2(a^2 + 1)} + \sqrt{2(b^2 + 1)} \leq 2(a + b)$$

b) Cho ba số không âm a, b, c . Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc + \frac{9}{4} |(a-b)(b-c)(c-a)|$$

Bài 4 (7,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC đường cao AH . Gọi E, F là các điểm lần lượt thuộc các tia HC, HB sao cho $\angle EAB = \angle FAC = 90^\circ$.

a) Chứng minh $\frac{HB}{HC} = \frac{HF}{HE} = \frac{FB}{CE}$.

b) Gọi P thuộc đoạn thẳng AH ($P \neq A; P \neq H$). Trên tia đối của tia PE lấy điểm M sao cho $BM = BA$. Trên tia đối của tia PF lấy N sao cho $CN = CA$. Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với PF cắt đường thẳng AH tại K . Chứng minh $BP \perp KE$.

c) Các đường thẳng BM, CN cắt nhau tại S . Chứng minh $SM = SN$.

Bài 5 (1,0 điểm). Cho năm số nguyên dương đôi một phân biệt sao cho mỗi số trong chúng không có ước nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong năm số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương.

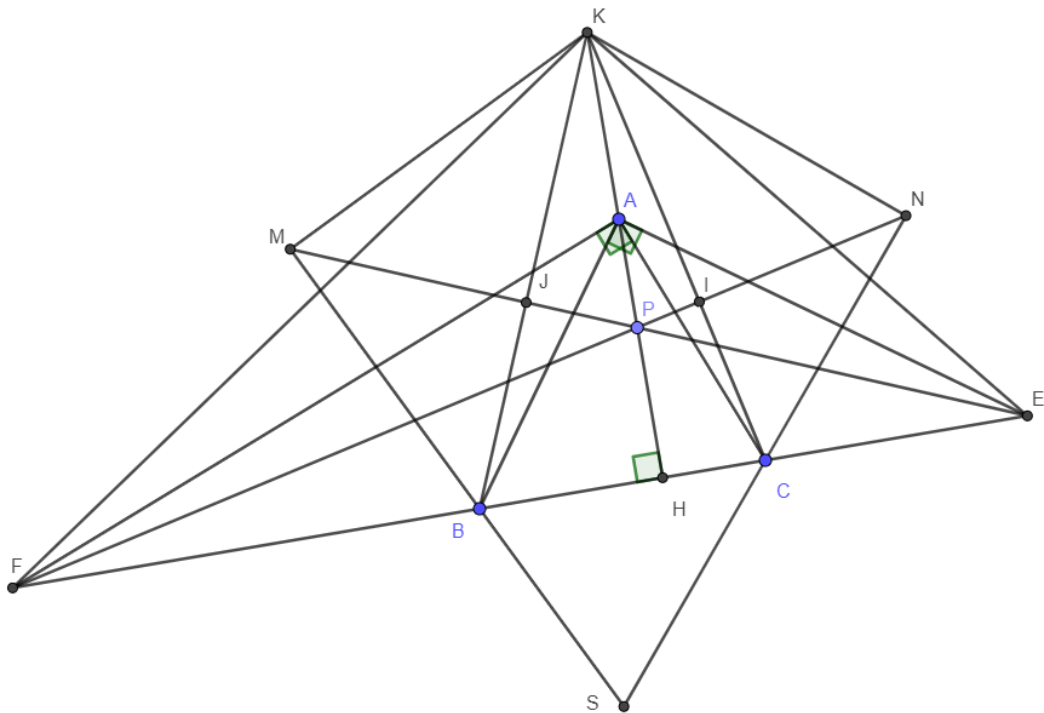
Hết

ĐÁP ÁN

Bà i	Câu	Đáp án	Điểm
1	a	Rút gọn $A=2x$	1
		Thay vào	0,5
		$B = 1 - \sqrt{4x - 4\sqrt{x} + 1}$ $= 1 - 2\sqrt{x} - 1 $ $= 1 - (1 - 2\sqrt{x})$ $= 2\sqrt{x}$	0,5
	b)	Ta có $2y = x + z$	0,5
		$\Leftrightarrow (x + z) + 2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}) = 2y + 2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx})$	0,5
		$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{z} + 2\sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{z}) = 2(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{y} + \sqrt{z})$	0,5
		$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + \sqrt{z} + 2\sqrt{y}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{y} + \sqrt{z})} = \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{z}}$	0,5
2	a	ĐKXD: $x \geq 2$.	0,25
		Phương trình đã cho tương đương với	0,5
		$4x^2 - 8x + 4 = x^2 - 2x\sqrt{x-2} + x - 2$ $\Leftrightarrow (2x - 2)^2 = (x - \sqrt{x-2})^2$	
		$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = x - \sqrt{x-2} \\ 2x - 2 = \sqrt{x-2} - x \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -\sqrt{x-2} \quad (1) \\ 3x - 2 = \sqrt{x-2} \quad (2) \end{cases}$	0,25
		Với $x \geq 2, VT(1) \geq 0 \geq VP(1)$	0,5

	Đề (1) xảy ra thì $x=2$. Phương trình (2) tương đương với $3(x-2)-\sqrt{x-2}+4=0 \Leftrightarrow 3(\sqrt{x-2}-1)^2+5\sqrt{x-2}+1=0$ (vô nghiệm vì vế trái dương với mọi $x \geq 2$).	0,5
	Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\{2\}$.	
b	Điều kiện $x \geq 1$.	0,25
	(1) $\Leftrightarrow (x-2)(\sqrt{x-1}-2)+(x+3)(\sqrt{x+4}-3)=x^2-4x-5$ $\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-5)}{\sqrt{x-1}+2} + \frac{(x-5)(x+3)}{\sqrt{x+4}+3} = (x-5)(x+1)$ $\Leftrightarrow (x-5) \left(\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+2} + \frac{x+3}{\sqrt{x+4}+3} - x-1 \right) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+2} + \frac{x+3}{\sqrt{x+4}+3} = x+1 \end{cases} \quad (2)$	0,5
	Ta có $\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+2} < \frac{x-1}{\sqrt{x-1}+2} \leq \frac{x-1}{2}$; $\frac{x+3}{\sqrt{x+4}+3} \leq \frac{x+3}{3}$. $VT(2) < \frac{x-1}{2} + \frac{x+3}{3} = \frac{5x+3}{6} < \frac{6x+6}{6} = x+1 = VP(2)$ Suy ra Do đó (2) vô nghiệm. Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\{5\}$.	0,25
c	$2x^2+7y^2=61+4x$ $\Leftrightarrow 2(x-1)^2+7y^2=63$ $\Rightarrow 7y^2 \leq 63 \Rightarrow y^2 \leq 9$ $\Rightarrow y^2 \in \{0;1;4;9\}$	0,5
	Mà 65 lẻ, $2(x-1)^2$ chẵn nên $\Rightarrow y^2 \in \{1;9\}$.	0,25
	TH1: $y^2=1 \Rightarrow (x-1)^2=28$ (loại).	0,25
	TH2: $y^2=9 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow y=\pm 3; x=1$	0,25
	Vậy $(x;y) \in \{(1;3);(1;-3)\}$	0,25
d	$a^2+b^2+1=2(ab+a+b) \Leftrightarrow (a-b-1)^2=4a \Leftrightarrow a=\left(\frac{a-b-1}{2}\right)^2$ $a^2+b^2+1=2(ab+a+b) \Leftrightarrow b=\left(\frac{a-b+1}{2}\right)^2$	0,5

		$\frac{a-b+1}{2} - \frac{a-b-1}{2} = 1$ Suy ra a, b đều chính phương. Lại có nên a, b là hai số chính phương liên tiếp.	0,5
3	a	Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có: $\sqrt{2(a^2+1)} = \sqrt{2(a^2+ab)} = \sqrt{2(a+b)a} = \sqrt{2a(a+b)} \leq \frac{2a+a+b}{2} = \frac{3a}{2} + \frac{b}{2}.$ Tương tự, ta có $\sqrt{2(b^2+1)} \leq \frac{a}{2} + \frac{3b}{2}.$ Do đó $\sqrt{2(a^2+1)} + \sqrt{2(b^2+1)} \leq 2a+2b = 2(a+b).$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1.$	0,5 0,25 0,25
	b	Ta có $a-b \leq a + b = a+b.$ Tương tự $b-c \leq b + c = b+c; c-a \leq c + a = c+a.$ Suy ra $2(a+b+c) \geq a-b + b-c + c-a \geq 3\sqrt{ (a-b)(b-c)(c-a) }$ (theo BĐT Cô si cho ba số không âm $a-b , b-c , c-a$). (1) Lại có $2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ $\geq 3\sqrt{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$ (theo BĐT Cô si cho ba số không âm $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$). (2) Nhân theo vế (1) và (2) suy ra $4(a^3+b^3+c^3-3abc) \geq 9 (a-b)(b-c)(c-a) \Rightarrow a^3+b^3+c^3 \geq 3abc + \frac{9}{4} (a-b)(b-c)(c-a) $ Dấu bằng xảy ra khi a=b=c	0,25 0,25 0,25

4		
a	a) Xét tam giác ABE vuông tại A, đường cao AH: $HB.HE = AH^2$ Xét tam giác ACF vuông tại A, đường cao AH: $HC.HF = AH^2$	0,5 0,5
	Từ đây ta suy ra $HB.HE = HC.HF$ $\Rightarrow \frac{HB}{HC} = \frac{HF}{HE} = \frac{HF \cdot HB}{HE \cdot HC} = \frac{FB}{CE}$	1 1
	b) Gọi J là giao điểm của KB và EM; I là giao điểm của KC và FN. Xét tam giác KFC: KH, FI là các đường cao nên P là trực tâm. $\Delta HPF \sim \Delta HCK (g.g) \Rightarrow HP.HK = HF.HC$ Khi đó	0,5
	Lại có $HF.HC = HE.HB \Rightarrow HP.HK = HE.HB \Rightarrow \Delta HBK \sim \Delta HPE (c.g.c)$ $\Rightarrow \angle KBH = \angle HPE \Rightarrow \angle JKP + \angle KPJ = \angle JKP + \angle KBH = 90^\circ \Rightarrow EJ \perp BK$ Suy ra P cũng là trực tâm tam giác KBE.	0,5 0,5
	Do đó $BP \perp KE$	0,5
c	Ta có $BM = BA \Rightarrow BM^2 = BA^2 = BH.BC = BJ.BK \Rightarrow BM \perp MK$	1,0
	$\Rightarrow KM^2 = KJ.KB = KI.KC = KN^2$	0,5
	$\Rightarrow KS^2 - KM^2 = KS^2 - KN^2 \Rightarrow MS = NS$	0,5

5	Bài 5- Theo nguyên lý Đi rích lê, $5=2.2+1$ nên trong năm số có ba số có lũy thừa của 3 cùng tính chẵn lẻ. Vì $3=2.1+1$ nên trong ba số này lại có hai số mà lũy thừa của 2 cùng tính chẵn lẻ. Khi đó hai số này có tổng lũy thừa của 2 hay 3 đều chẵn nên tích là số chính phương. Từ đó ta có điều phải chứng minh.	0,5 0,5
---	--	-----------------------