|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC**  **ĐỀ THI CHÍNH THỨC** | **KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2023-2024**  **ĐỀ THI MÔN: TOÁN**  Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề) |

**Câu 1.** Cho biểu thức 

a. Rút gọn biểu thức .

b. Tìm số nguyên  thỏa .

**Câu 2.** Trong mặt phẳng tọa độ , cho ba đường thẳng  và  Biết  cắt  và  lần lượt tại  và . Tìm  để .

**Câu 3.** Cho đa thức  Biết  chia hết cho  và  chia cho  thì dư là . Tính .

**Câu 4.** Giải phương trình .

**Câu 5.** Giải hệ phương trình 

**Câu 6.** Cho tam giác  vuông tại , có đường cao . Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạnh . Tính chu vi tam giác  biết .

**Câu 7.** Cho tam giác  có hai đường trung tuyến  cắt nhau tại điểm . Gọi  là một điểm trên cạnh , đường thẳng  đi qua  và song song với  cắt  tại , đường thẳng  đi qua  và song song với  và cắt  tại . Gọi  là giao điểm của hai đường thẳng  và . Chứng minh rằng  là trung điểm của đoạn thẳng .

**Câu 8.** Cho hình thang  có đáy nhỏ là  và . Gọi  là trung điểm của đoạn thẳng . Đường thẳng  đi qua điểm  cắt các đường thẳng  lần lượt tại  sao cho  nằm giữa  và . Chứng minh rằng .

**Câu 9.** Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả mỗi ngày. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả bưởi là 30000 đồng.

**Câu 10.** Cho ba số thực dương  thỏa mãn . Chứng minh .

----------------**Hết**----------------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Đáp án và thang điểm:

|  |  |
| --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung trình bày** |
| **1** | **Cho biểu thức**  **a. Rút gọn biểu thức .** |
| ĐK: |
|  |
|  |
|  |
|  |
| **b. Tìm số nguyên  thỏa .** |
|  |
|  |
| Vì  nên  là ước của 1  hoặc |
| Vậy  hoặc |
| **2** | **Trong mặt phẳng tọa độ , cho ba đường thẳng  và  Biết  cắt  và  lần lượt tại  và . Tìm  để .** |
| Ta có  cắt  tại điểm . |
| cắt  tại điểm . |
| Ta có |
| Vậy . |
| **3** | **Cho đa thức  Biết  chia hết cho  và  chia cho  thì dư là . Tính .** |
| Vì  chia hết cho  nên |
| Do  chia cho  thì dư là  nên  chia hết cho , suy ra |
| Thay  ta có hệ . |
| Vậy . |
| **4** | **Giải phương trình** . |
| Điều kiện |
| Áp dụng Bunnhiacopski, ta có: |
|  |
| Phương trình có nghiệm  ⇔ Dấu “=” ở (1) và (2) đồng thời xảy ra  .  Vậy phương trình có nghiệm . |
| **5** | **Giải hệ phương trình** |
| Thay (2) vào (1) ta được |
|  |
| Với  thay vào (2) ta được  Với  thay vào (2) ta được |
| Với  thay vào (2) ta được .  Vậy hệ phương trình có nghiệm |
| **6** | **Cho tam giác  vuông tại , có đường cao . Gọi  lần lượt là trung điểm của các cạnh . Tính chu vi tam giác  biết .** |
| Ta có : |
| Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông , ta có: |
| Tam giác  vuông tai  có đường trung tuyến  Tam giác  vuông tai  có đường trung tuyến |
| Tam giác  có đường trung bình  Vậy chu vi tam giác  bằng |
| **7** | **Cho tam giác  có hai đường trung tuyến  cắt nhau tại điểm . Gọi  là một điểm trên cạnh , đường thẳng  đi qua  và song song với  cắt  tại , đường thẳng  đi qua  và song song với  và cắt  tại . Gọi  là giao điểm của hai đường thẳng  và . Chứng minh rằng  là trung điểm của đoạn thẳng .** |
|  |
| Gọi  cắt  tại ,  cắt  tại và  cắt  tại .  Tứ giác  có:  Tứ giác  là hình bình hành.  ⇒  là trung điểm . |
| có  ................................ |
| Cmtt ta có:  có  có  Từ (3) và (4) |
| Từ (\*) và (\*\*) có .  Lại có  là trung điểm  là trung điểm . |
| **8** | **Cho hình thang  có đáy nhỏ là  và . Gọi  là trung điểm của đoạn thẳng . Đường thẳng  đi qua điểm  cắt các đường thẳng  lần lượt tại  sao cho  nằm giữa  và . Chứng minh rằng .** |
|  |
| Gọi là giao điểm của  và  là giao của  và  là giao của  và .  Xét tam giác  có  Xét tam giác  có |
| Xét tam giác  có  Xét tam giác  có |
| Từ (1) và (2) suy ra  Từ (3) và (4) suy ra |
| Từ (5) và (6) suy ra .  Vì  nên tam giác  cân tại , suy ra .  Suy ra . |
| **9** | **Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả mỗi ngày. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả bưởi là 30000 đồng.** |
| .............................  Tương ứng với giá bán là  thì số quả bán được trong 1 ngày là:  . |
| Gọi  là hàm lợi nhuận thu được (: đồng), ta có: |
| Ta có: |
| Vậy với giá bán 42000 đồng mỗi quả bưởi thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất. |
| **10** | **Cho ba số thực dương  thỏa mãn . Chứng minh .** |
| Chứng minh bổ đề: .  Thật vậy:  (luôn đúng). Dấu “=” xảy ra khi . |
| Áp dụng bổ đề ta có:  ... |
| Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: |
| Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số  ta có |
| Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  (không xảy ra).  Vậy  (ĐPCM). |