ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ – NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN
PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP

Toán 11

BẢN MẪU

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN - THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

HỘI ĐỒNG QUỐC GIA THẨM ĐỊNH SÁCH GIÁO KHOA
Môn: Toán – Lớp 11

(Kèm theo Quyết định số 2026/QĐ-BGDĐT ngày 21 tháng 7 năm 2022 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo)

Họ và tên	Chức vụ Hội đồng
Ông Lê Mậu Hải	Chủ tịch
Bà Cao Thị Hà	Phó Chủ tịch
Ông Phạm Đức Tài	Uỷ viên, Thư kí
Ông Phạm Khắc Ban	Uỷ viên
Ông Nguyễn Hắc Hải	Uỷ viên
Ông Nguyễn Doãn Phú	Uỷ viên
Ông Nguyễn Chiến Thắng	Uỷ viên
Bà Nguyễn Thị Vĩnh Thuyên	Uỷ viên
Ông Đinh Cao Thượng	Uỷ viên
Bà Vũ Thị Như Trang	Uỷ viên
Ông Phạm Đình Tùng	Uỷ viên

ĐỖ ĐỨC THÁI (Tổng Chủ biên kiêm Chủ biên)
PHẠM XUÂN CHUNG – NGUYỄN SƠN HÀ
NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LOAN – PHẠM SỸ NAM – PHẠM MINH PHƯƠNG

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP
Toán 11

BẢN MẪU

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ
XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

BIỂU TƯỢNG DÙNG TRONG SÁCH

CÂU HỎI KHỞI ĐỘNG
Gợi mở vấn đề, dẫn dắt học sinh vào bài học

HOẠT ĐỘNG
Giúp học sinh phân tích, kiến tạo kiến thức mới với sự hướng dẫn của giáo viên

KHÁM PHÁ KIẾN THỨC
Phát hiện kiến thức mới từ hoạt động

KIẾN THỨC TRỌNG TÂM
Nội dung kiến thức trọng tâm

LUYỆN TẬP – VẬN DỤNG
- Sử dụng những kiến thức vừa học để làm những bài tập cơ bản
- Vận dụng kiến thức đã biết để giải quyết vấn đề, đặc biệt những vấn đề thực tiễn

CÓ THỂ EM CHƯA BIẾT
Tìm hiểu thêm kiến thức toán học, lịch sử toán học và ứng dụng của toán học vào thực tiễn

Các em giữ gìn sách cẩn thận, không viết vào sách để sử dụng được lâu dài.

Các em học sinh lớp 11 thân mến!

Trong quá trình tìm hiểu môn Toán lớp 11, bên cạnh các nội dung cốt lõi mà các em được học, sách Chuyên đề học tập Toán 11 sẽ cung cấp thêm cho các em những hiểu biết toán học sâu sắc hơn, mở rộng hơn với nhiều ứng dụng của toán học trong thực tiễn. Chuyên đề học tập bao gồm các chuyên đề: phép biến hình phẳng; làm quen với một vài yếu tố của lí thuyết đồ thị; một số yếu tố vẽ kĩ thuật.

Toàn bộ những điều trên được thể hiện qua những tranh ảnh, hình vẽ, bài tập độc đáo và hấp dẫn; qua những tri thức gần gũi, lí thú về khoa học tự nhiên và tích hợp với những môn học khác. Từ đó, các em được tiến thêm một bước trên con đường khám phá thế giới bí ẩn và đẹp đẽ của toán học, đặc biệt là được "làm giàu" về vốn văn hoá chung và có cơ hội "Mang cuộc sống vào bài học – Đưa bài học vào cuộc sống".

Chịu khó suy nghĩ, trao đổi với thầy cô giáo và bạn bè, nhất định các em sẽ ngày càng tiến bộ và cảm thấy vui sướng khi nhận ra ý nghĩa: Học toán rất có ích cho cuộc sống hằng ngày.

Chúc các em học tập thật tốt, say mê học toán và có thêm nhiều niềm vui.

Các tác giả

MỤC LỤC

CHUYÊN ĐỀ I. PHÉP BIẾN HÌNH PHẲNG

§1. Phép dời hình	5
§2. Phép đồng dạng	26

CHUYÊN ĐỀ II. LÀM QUEN VỚI MỘT VÀI YẾU TỐ CỦA LÍ THUYẾT ĐỒ THỊ

§1. Một vài yếu tố của Lí thuyết đồ thị. Đường đi Euler và đường đi Hamilton	34
§2. Một vài ứng dụng của lí thuyết đồ thị	44

CHUYÊN ĐỀ III. MỘT SỐ YẾU TỐ VẼ KĨ THUẬT

§1. Một số nội dung cơ bản về vẽ kĩ thuật	50
§2. Đọc và vẽ bản vẽ kĩ thuật đơn giản	65
BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ	74
BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ	75

CHUYÊN ĐỀ I — PHÉP BIẾN HÌNH PHẲNG

Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: phép dời hình và phép đồng dạng trong hình học phẳng.

§1 PHÉP DỜI HÌNH

Thang băng chuyền tải khách (*Hình 1*) là loại thang máy không có bậc thang, tốc độ di chuyển vừa phải, thường được sử dụng ở những nơi công cộng như khu trung tâm thương mại, sân bay, siêu thị, ... nhằm mục đích hỗ trợ hành khách di chuyển từ địa điểm này đến địa điểm khác cùng với đồ đạc, hành lí, ...

Giả sử thang băng chuyền di chuyển một hành khách từ điểm đầu A đến điểm cuối B của thang băng chuyền đó.

(Nguồn: https://shutterstock.com)

Hình 1

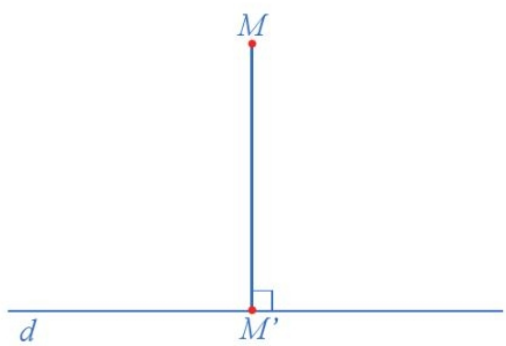
Trong toán học, phép di chuyển hành khách từ vị trí A đến vị trí B theo một hướng cố định được gọi là gì?

I. KHÁI NIỆM PHÉP BIẾN HÌNH

1 Trong mặt phẳng cho đường thẳng d và điểm M. Dựng hình chiếu vuông góc M' của điểm M lên đường thẳng d (*Hình 2*).

a) Có bao nhiêu hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng d?

b) Có điểm nào của mặt phẳng không có hình chiếu vuông góc trên đường thẳng d hay không?



Hình 2

Phép chiếu vuông góc lên đường thẳng d là một quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với một điểm M' duy nhất của mặt phẳng đó. Vì thế, phép chiếu vuông góc lên đường thẳng d là một phép biến hình.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với một điểm xác định duy nhất M' của mặt phẳng đó được gọi là *phép biến hình* trong mặt phẳng.

Chú ý

• Nếu phép biến hình F đặt tương ứng điểm M với điểm M' thì điểm M' gọi là *ảnh* của điểm M qua phép biến hình F hay ta còn nói F biến M thành M', kí hiệu $M' = F(M)$.

• Đối với phép biến hình F và hình $\mathcal{H}$ trong mặt phẳng, với mọi điểm M thuộc hình $\mathcal{H}$, các ảnh $M' = F(M)$ tạo thành hình $\mathcal{H}'$. Hình $\mathcal{H}'$ gọi là ảnh của hình $\mathcal{H}$ qua phép biến hình F hay ta còn nói F biến $\mathcal{H}$ thành $\mathcal{H}'$, kí hiệu $\mathcal{H}' = F(\mathcal{H})$.

• Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với chính nó là một phép biến hình, gọi là *phép đồng nhất*.

Ví dụ 1 Cho trước số a dương, với mỗi điểm M trong mặt phẳng, gọi M' là điểm sao cho $MM' = a$. Quy tắc đặt tương ứng điểm M với điểm M' như trên có phải là một phép biến hình không?

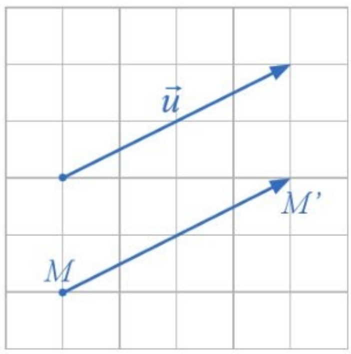
Giải

Với mỗi điểm M trong mặt phẳng, tập hợp các điểm M' sao cho $MM' = a$ là đường tròn tâm M, bán kính a. Suy ra quy tắc đó đã đặt tương ứng điểm M với vô số điểm M'. Vậy quy tắc đó không phải là một phép biến hình.

II. PHÉP TỊNH TIẾN

1. Khái niệm

2 Cho vectơ $\vec{u}$ và điểm M trong mặt phẳng. Hãy xác định điểm M' trong mặt phẳng sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ (*Hình 3*).



Hình 3

Ta nhận được phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Phép biến hình đó gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$.

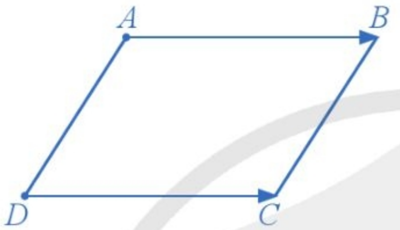
Ta có định nghĩa sau:

Cho vectơ $\vec{u}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ được gọi là *phép tịnh tiến theo vectơ* $\vec{u}$, kí hiệu $T_{\vec{u}}$.

Điểm M' được gọi là *ảnh* của điểm M, kí hiệu $M' = T_{\vec{u}}(M)$.

Ví dụ 2 Cho hình bình hành $ABCD$. Xác định ảnh của điểm D qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Giải. (*Hình 4*)



Hình 4

Ta có: $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Vậy ảnh của điểm D qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ là điểm C.

1 Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Xác định ảnh của các điểm N, P, C, A, M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OA}$.

2. Tính chất

3 Cho phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ và hai điểm M, N. Giả sử $M' = T_{\vec{u}}(M)$, $N' = T_{\vec{u}}(N)$.

a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{M'M}$ và $\overrightarrow{NN'}$ theo $\vec{u}$.

b) Tìm mối liên hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{M'N'}$ và $\overrightarrow{MN}$.

c) So sánh các đoạn thẳng $M'N'$ và MN.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

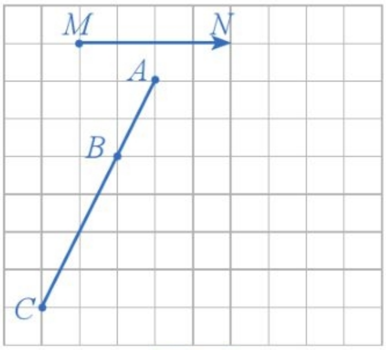
Nếu phép tịnh tiến biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ và $M'N' = MN$.

Phép tịnh tiến không làm thay đổi (bảo toàn) khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

4 Xét phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{MN}$ (*Hình 5*).

a) Xác định các điểm A', B', C' lần lượt là ảnh của các điểm thẳng hàng A, B, C qua phép tịnh tiến trên.

b) Nêu mối quan hệ giữa ba điểm A', B', C'.



Hình 5

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.

Từ hai định lí trên, ta có hệ quả sau:

Phép tịnh tiến:

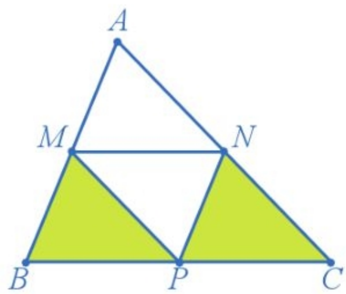
- Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó;
- Biến tia thành tia;
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;
- Biến tam giác thành tam giác bằng nó;
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính và có tâm là ảnh của tâm;
- Biến góc thành góc bằng nó.

Chú ý: Qua phép tịnh tiến, ảnh của một đường thẳng trùng với chính nó khi và chỉ khi đường thẳng song song hoặc trùng với giá của vectơ tịnh tiến.

Ví dụ 3 Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC. Xét phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$.

a) Xác định ảnh của các điểm M, B, P qua phép tịnh tiến trên.

b) Xác định ảnh của tam giác MBP qua phép tịnh tiến trên.



Hình 6

Giải. (*Hình 6*)

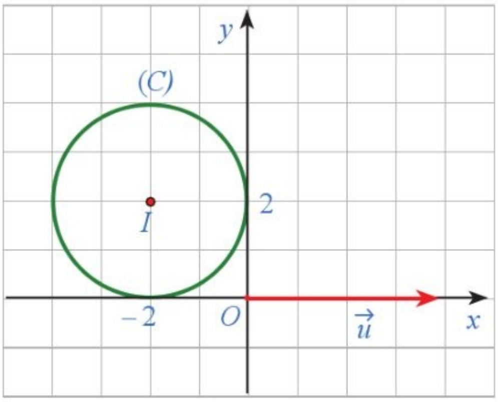
a) Theo tính chất đường trung bình ta có:

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{MN} = \vec{u}.$$

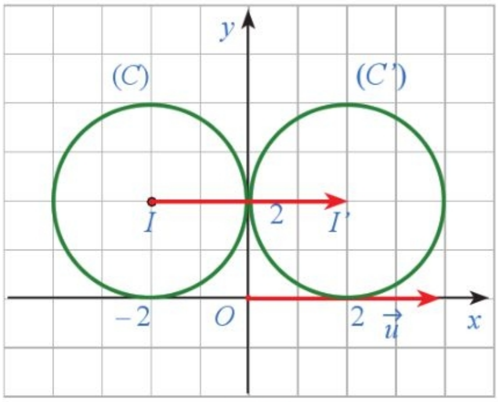
Do đó, ảnh của các điểm M, B, P qua $T_{\vec{u}}$ tương ứng là các điểm N, P, C.

b) Từ kết quả câu a), ảnh của tam giác MBP qua $T_{\vec{u}}$ là tam giác NPC.

Ví dụ 4 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) có tâm $I(-2 ; 2)$, bán kính $R = 2$ (*Hình 7*). Xác định ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (4 ; 0)$.



Hình 7



Hình 8

Giải. (*Hình 8*)

Ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ là một đường tròn bán kính bằng 2, gọi là (C').

Gọi I' là tâm của (C'). Ta có I' là ảnh của I qua phép tịnh tiến đã cho nên $\overrightarrow{II'} = \vec{u} = (4 ; 0)$. Suy ra $I'(2 ; 2)$. Vậy ảnh của (C) là đường tròn (C') có tâm $I'(2 ; 2)$, bán kính bằng 2.

2 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) có tâm $O(0 ; 0)$ và bán kính $R = 3$. Xác định ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (3 ; 4)$.

Chú ý: Ta thường sử dụng phép tịnh tiến trong tự nhiên, nghệ thuật, đồ hoạ, kiến trúc, xây dựng, ... Dưới đây là một số ví dụ minh hoạ:

(Nguồn: https://wikiart.org)

Tác phẩm Horseman, tranh của Maurits Cornelis Escher, gồm những hình bằng nhau mô tả các chiến binh trên lưng ngựa. Các hình này phủ kín mặt phẳng. Hai chiến binh và ngựa cùng màu tương ứng với nhau qua một phép tịnh tiến.

Ngăn kéo tủ, bàn ...
hoạt động theo nguyên tắc trượt (tịnh tiến) trên thanh ray.

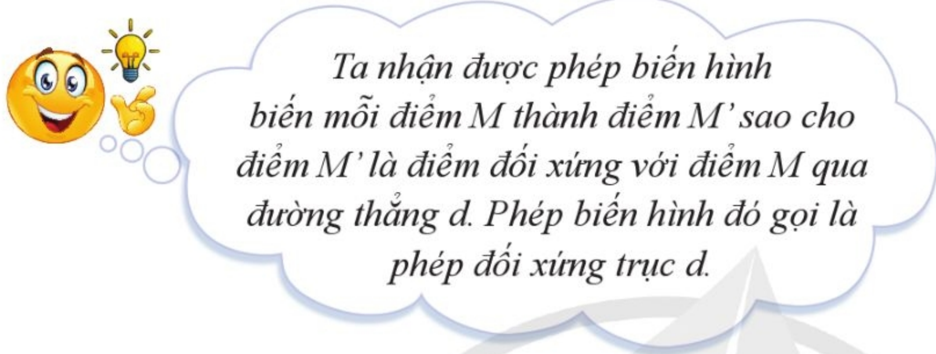
Thang máy hoạt động theo nguyên tắc tịnh tiến theo phương thẳng đứng.

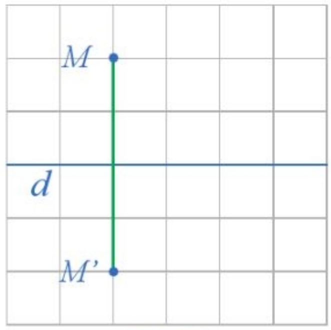
(Nguồn: https://shutterstock.com)

III. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

1. Khái niệm

5 Trong mặt phẳng cho đường thẳng d. Với mỗi điểm M trong mặt phẳng và $M \notin d$, hãy xác định điểm M' sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MM' (hay M' là điểm đối xứng với M qua đường thẳng d) (*Hình 9*).





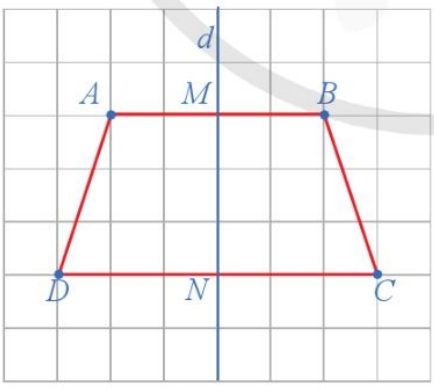
Hình 9

Ta có định nghĩa sau:

Cho đường thẳng d. Phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc d thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc d thành điểm M' sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MM' được gọi là *phép đối xứng trục d*, kí hiệu $Đ_d$.

Điểm M' được gọi là *ảnh* của điểm M, kí hiệu $M' = Đ_d(M)$.

Ví dụ 5 Cho hình thang cân $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh đáy AB và CD (*Hình 10*). Xác định ảnh của các đỉnh A, B, C, D qua phép đối xứng trục MN.



Hình 10

3 Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Xác định ảnh của các điểm M, N, P, Q qua phép đối xứng trục AC.

Giải

Vì MN đi qua trung điểm của AB và CD mà $ABCD$ là hình thang cân nên MN là đường trung trực của AB và CD. Suy ra ảnh của các đỉnh A, B, C, D qua phép đối xứng trục MN lần lượt là các điểm B, A, D, C.

2. Tính chất

6 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho phép đối xứng trục Ox và hai điểm $M(x_1 ; y_1)$, $N(x_2 ; y_2)$. Gọi M', N' lần lượt là ảnh của M và N.

a) Xác định toạ độ của hai điểm M' và N'.

b) Viết công thức tính độ dài hai đoạn thẳng MN và $M'N'$, từ đó so sánh hai đoạn thẳng MN và $M'N'$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

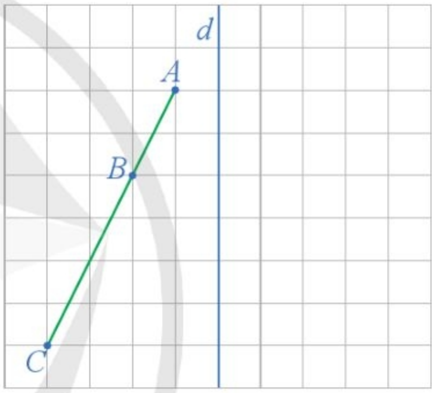
Nếu phép đối xứng trục lần lượt biến hai điểm M, N thành hai điểm M', N' thì $M'N' = MN$.

Phép đối xứng trục không làm thay đổi (bảo toàn) khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

7 Xét phép đối xứng trục d (*Hình 11*).

a) Xác định các điểm A', B', C' lần lượt là ảnh của các điểm thẳng hàng A, B, C qua phép đối xứng trục d.

b) Nêu mối liên hệ giữa ba điểm A', B', C'.



Hình 11

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

Phép đối xứng trục biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.

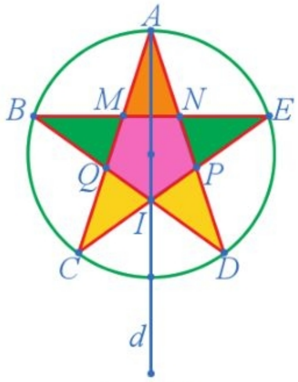
Từ hai định lí trên, ta có hệ quả sau:

Phép đối xứng trục:
- Biến đường thẳng thành đường thẳng;
- Biến tia thành tia;
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;
- Biến tam giác thành tam giác bằng nó;
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính và có tâm là ảnh của tâm;
- Biến góc thành góc bằng nó.

Ví dụ 6 *Hình 12* minh hoạ hình đèn ông sao, một món đồ chơi của trẻ em trong dịp tết Trung thu.

a) Xác định ảnh của các điểm A, B, C qua phép đối xứng trục d.

b) Xác định ảnh của cánh sao màu xanh có các đỉnh là B, M, Q qua phép đối xứng trục d.



Hình 12

4 Xác định ảnh của cánh sao màu vàng có các đỉnh D, I, P qua phép đối xứng trục d trong *Hình 12*.

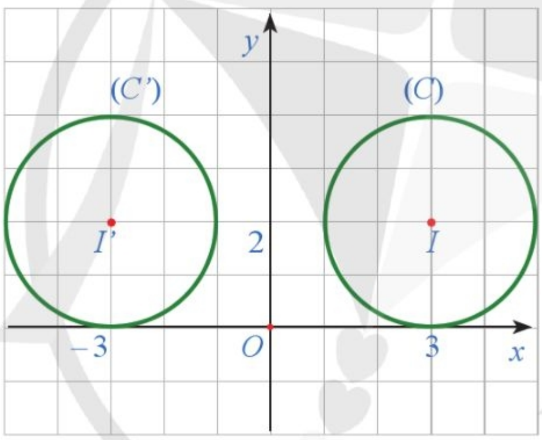
Giải

a) Ảnh của các điểm A, B, C qua phép đối xứng trục d lần lượt là các điểm A, E, D.

b) Ảnh của cánh sao màu xanh có các đỉnh B, M, Q là cánh sao màu xanh có các đỉnh là E, N, P.

Ví dụ 7 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) có tâm $I(3 ; 2)$ bán kính $R = 2$. Xác định ảnh của đường tròn (C) qua phép đối xứng trục Oy.

Giải. (*Hình 13*)



Hình 13

5 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) có tâm $I(3 ; 2)$ bán kính $R = 2$. Xác định ảnh của đường tròn (C) qua phép đối xứng trục Ox.

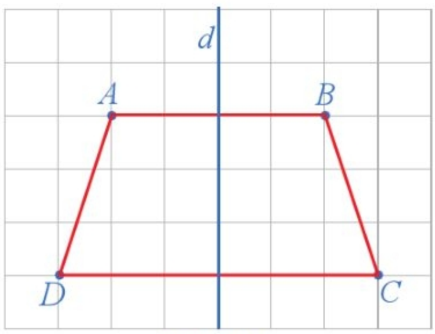
Ảnh của đường tròn (C) là một đường tròn có bán kính bằng 2, gọi là (C').

Gọi I' là tâm đường tròn (C'). Ta có I' là ảnh của I qua phép đối xứng trục Oy, suy ra $I'(-3 ; 2)$. Vậy ảnh của (C) là đường tròn (C') có tâm $I'(-3 ; 2)$ bán kính bằng 2.

3. Trục đối xứng của một hình

8 Trong mặt phẳng, cho hình thang cân $ABCD$, kí hiệu là $\mathcal{H}$. Gọi d là đường thẳng đi qua trung điểm của hai đáy của hình thang cân đó (*Hình 14*).

Tìm $\mathcal{H}' = Đ_d(\mathcal{H})$.



Hình 14

Nhận xét: Phép đối xứng trục d biến hình $\mathcal{H}$ thành chính nó. Đường thẳng d được gọi là *trục đối xứng* của hình $\mathcal{H}$.

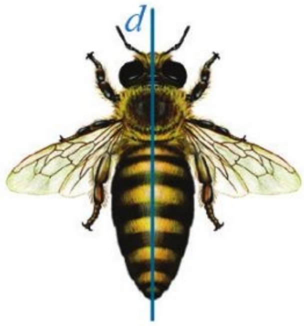
Ta có định nghĩa sau:

Đường thẳng d được gọi là *trục đối xứng* của hình $\mathcal{H}$ nếu phép đối xứng trục d biến hình $\mathcal{H}$ thành chính nó.

Ví dụ 8 *Hình 15* minh hoạ hình ảnh con ong. Xác định trục đối xứng của hình ảnh con ong đó.

Giải

Trục đối xứng của hình ảnh con ong là đường thẳng d.



(Nguồn: https://shutterstock.com)

Hình 15

Chú ý: Ta thường gặp các hình có trục đối xứng trong tự nhiên, nghệ thuật, đồ hoạ, kiến trúc, xây dựng, ... Dưới đây là một số ví dụ minh hoạ:

• Nhà thờ Đá (*Hình 16*) là một trong những công trình độc đáo nhất trong Quần thể Nhà thờ Phát Diệm, Ninh Bình. Công trình được khởi công xây dựng từ năm 1883 với chiều dài 15,3 m, chiều rộng 8,5 m và chiều cao 6 m. Tất cả mọi thứ ở đây từ nền nhà, tường, cột, kèo, chấn song cửa, bàn thờ, sập, ... đều được làm bằng đá. Phía trong có nhiều bức phù điêu được chạm bằng đá rất đẹp, đặc biệt là bức chạm tứ quý: tùng, mai, cúc, trúc, tượng trưng cho thời tiết và vẻ đẹp riêng của bốn mùa trong một năm. Ngoài ra còn có các bức khắc hoạ các con vật như phượng, sư tử, ... với đường nét sống động đến lạ thường.

(Nguồn: https://vi.wikipedia.org)

Hình 16

Hình ảnh Nhà thờ Đá gợi nên một hình có trục đối xứng.

• Ảnh chụp cầu Infinity (Vô cực) (*Hình 17a* và *Hình 17b*) thuộc thị trấn Stockton-on-Tees (Anh) phản chiếu dưới mặt nước trong xanh, gợi nên hình ảnh đối xứng trục.

a) *b)*

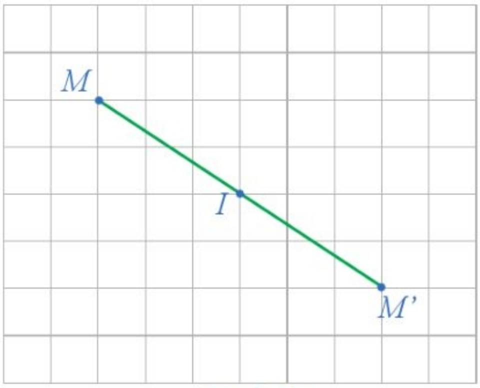
(Nguồn: https://shutterstock.com)

Hình 17

IV. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

1. Khái niệm

9 Trong mặt phẳng cho điểm I. Với mỗi điểm M trong mặt phẳng, hãy xác định điểm M' sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MM' (hay M' là điểm đối xứng với M qua điểm I) (*Hình 18*).



Hình 18

Ta nhận được phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho điểm M' là điểm đối xứng với điểm M qua điểm I. Phép biến hình đó gọi là phép đối xứng tâm I.

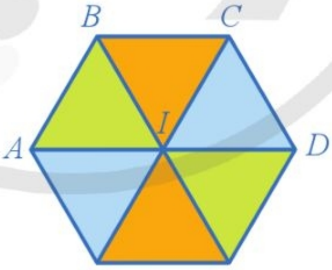
Ta có định nghĩa sau:

> Cho điểm I. Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác I thành điểm M' sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MM' được gọi là *phép đối xứng tâm I*, kí hiệu $Đ_I$.
>
> Điểm M' được gọi là *ảnh* của điểm M, kí hiệu $M' = Đ_I(M)$.

Ví dụ 9 *Hình 19* mô tả một viên gạch có dạng lục giác đều với tâm I. Xác định ảnh của các điểm A, B, C qua phép đối xứng tâm I.

Giải

Vì I là tâm lục giác đều $ABCDEF$ nên I là trung điểm của các đoạn thẳng AD, BE, CF. Suy ra ảnh của các điểm A, B, C qua phép đối xứng tâm I lần lượt là các điểm D, E, F.



Hình 19

6 Cho bát giác đều $ABCDEGHK$ với tâm I. Xác định ảnh của các điểm A, B, C, D qua phép đối xứng tâm I.

2. Tính chất

10 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho phép đối xứng tâm O và hai điểm $M(x_1 ; y_1)$, $N(x_2 ; y_2)$. Gọi M', N' lần lượt là ảnh của M và N qua phép đối xứng tâm O.

a) Xác định toạ độ của hai điểm M' và N'.

b) Viết công thức tính độ dài hai đoạn thẳng MN và $M'N'$, từ đó so sánh hai đoạn thẳng MN và $M'N'$.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

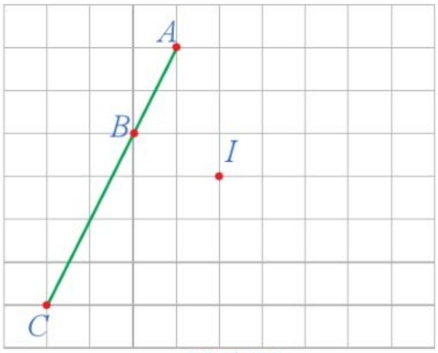
Nếu phép đối xứng tâm lần lượt biến hai điểm M, N thành hai điểm M', N' thì $M'N' = MN$.

Phép đối xứng tâm không làm thay đổi (bảo toàn) khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

11 Xét phép đối xứng tâm I (*Hình 20*).

a) Xác định các điểm A', B', C' là ảnh của ba điểm thẳng hàng A, B, C qua phép đối xứng tâm I.

b) Nêu mối quan hệ giữa ba điểm A', B', C'.



Hình 20

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

Phép đối xứng tâm biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.

Từ hai định lí trên, ta có hệ quả sau:

Phép đối xứng tâm:

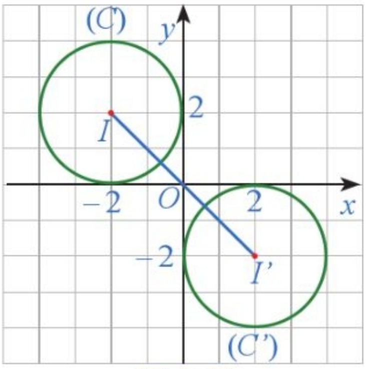
- Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó;
- Biến tia thành tia;
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;
- Biến tam giác thành tam giác bằng nó;
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính và có tâm là ảnh của tâm;
- Biến góc thành góc bằng nó.

Chú ý: Qua phép đối xứng tâm, ảnh của một đường thẳng trùng với chính nó khi và chỉ khi tâm đối xứng thuộc đường thẳng đó.

Ví dụ 10 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) tâm $I(-2 ; 2)$ bán kính $R = 2$. Xác định ảnh của đường tròn (C) qua phép đối xứng tâm O.

Giải. (*Hình 21*)

Ảnh của điểm $I(-2 ; 2)$ qua phép đối xứng tâm O là điểm $I'(2 ; -2)$. Vậy ảnh của đường tròn (C) qua phép đối xứng tâm O là đường tròn (C') có tâm $I'(2 ; -2)$, bán kính bằng 2.

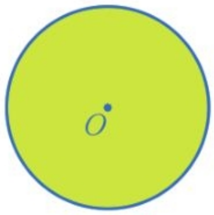


Hình 21

> **7** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) có tâm $I(2 ; 3)$ bán kính $R = 2$. Xác định ảnh của đường tròn (C) qua phép đối xứng qua tâm $S(2 ; 1)$.

3. Tâm đối xứng của một hình

12 Trong mặt phẳng, cho hình tròn tâm O, kí hiệu là $\mathcal{H}$. (*Hình 22*). Xét phép đối xứng tâm $Đ_O$. Tìm $\mathcal{H}' = Đ_O(\mathcal{H})$.



Hình 22

Nhận xét: Phép đối xứng tâm O biến hình $\mathcal{H}$ thành chính nó. Hình tròn tâm O gọi là hình có tâm đối xứng.

> Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình $\mathcal{H}$ nếu phép đối xứng tâm O biến hình $\mathcal{H}$ thành chính nó.

Ví dụ 11 Trong các *Hình 23a, 23b*, hình nào có tâm đối xứng? Nếu là hình có tâm đối xứng, hãy chỉ ra tâm đối xứng của hình đó.

Giải

Tâm đối xứng *Hình 23a* là điểm O.

Tâm đối xứng *Hình 23b* là điểm I.

a) b)

Hình 23

Chú ý: Ta thường gặp các hình có tâm đối xứng trong tự nhiên, nghệ thuật, đồ hoạ, kiến trúc, xây dựng, ... Dưới đây là một số ví dụ minh hoạ:

• Trống đồng Đông Sơn (*Hình 24*) là một loại trống đồng tiêu biểu cho Văn hoá Đông Sơn (thế kỉ VII – thế kỉ VI trước Công nguyên) của người Việt cổ. Những chiếc trống này với quy mô đồ sộ, hình dáng cân đối, hài hoà đã thể hiện một trình độ rất cao về nghệ thuật và kĩ thuật đúc, đặc biệt là những hoa văn phong phú được khắc hoạ, miêu tả chân thật đời sống sinh hoạt của con người thời kì


(Nguồn: https://shutterstock.com)
Hình 24

dựng nước. Ngôi sao nhiều cánh ở giữa mặt trống tượng trưng cho thần Mặt Trời. Bao quanh ngôi sao có hình người, vật, động vật và hoa văn hình học, các chữ của người Việt cổ, hình ảnh về con người như trai gái giã gạo, múa hát, các chiến binh trên thuyền và cả những hoạt động hằng ngày của nhân dân thời đó. Các chi tiết được khắc hoạ đối xứng nhau qua tâm của mặt trống đồng.

Nhìn chung chức năng chủ yếu của trống đồng vẫn là chức năng của một nhạc khí. Đánh vào vành 1 – 3 được nốt Si giáng; ở vành 4 – 5 được nốt Mi và Pha; ở vành 7 cũng được nốt Si giáng. Từ vành 9 trở ra lại trở lại nốt Mi (theo kết quả ghi âm của Cao Xuân Hạo).

(Nguồn: https://vi.wikipedia.org)

• Các cánh quạt điện cổ Marelli của Italia được bố trí đối xứng qua tâm là đầu trục quay (*Hình 25*).

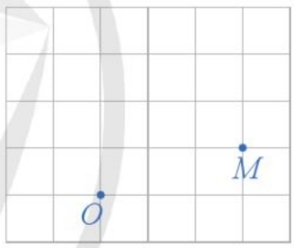
(Nguồn: https://shutterstock.com)

Hình 25

V. PHÉP QUAY

1. Khái niệm

13 Trong mặt phẳng, cho điểm O cố định. Với mỗi điểm M (M khác O) trong mặt phẳng, hãy xác định điểm M' sao cho $OM = OM'$ và góc lượng giác (OM, OM') bằng 90° (*Hình 26*).



Hình 26

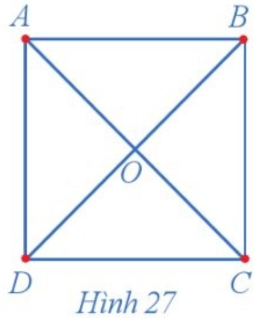
Ta nhận được phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM, OM') = 90^\circ$. Phép biến hình đó gọi là phép quay tâm O với góc quay 90°.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Cho điểm O cố định và góc lượng giác φ không đổi. Phép biến hình biến điểm O thành chính nó và biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và $(OM, OM') = \varphi$, gọi là *phép quay tâm O với góc quay φ*, kí hiệu $Q_{(O,\ \varphi)}$.

Điểm M' gọi là *ảnh* của điểm M, kí hiệu $M' = Q_{(O,\ \varphi)}(M)$.

Ví dụ 12 Cho hình vuông $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo (*Hình 27*). Xác định ảnh của các điểm A, B, C, D qua phép quay tâm O với góc quay 90°.



Hình 27

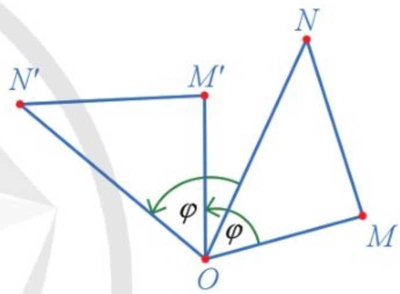
> **8** Cho tam giác đều ABC có tâm O. Xác định ảnh của các điểm A, B, C, qua phép quay tâm O với góc quay -120°.

Giải

Ta có: $\widehat{AOD} = \widehat{BOA} = \widehat{COB} = \widehat{DOC} = 90^{\circ}$ và $OA = OB = OC = OD$. Vì phép quay với góc quay 90° có chiều quay ngược chiều kim đồng hồ nên ảnh của các điểm A, B, C, D qua phép quay tâm O với góc quay 90° lần lượt là các điểm D, A, B, C.

2. Tính chất

14 Trong *Hình 28*, cho các điểm M', N' lần lượt là ảnh của các điểm M, N qua phép quay tâm O với góc quay φ.



Hình 28

a) Hai tam giác $OM'N'$ và OMN có bằng nhau hay không?

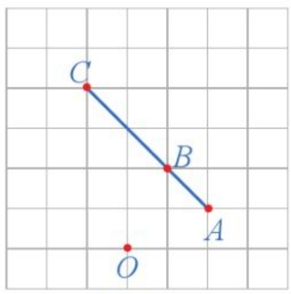
b) So sánh độ dài hai đoạn thẳng $M'N'$ và MN.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

> Nếu phép quay tâm O với góc quay φ lần lượt biến hai điểm M, N thành hai điểm M', N' thì $M'N' = MN$.

> Phép quay không làm thay đổi (bảo toàn) khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

15 Xét phép quay tâm O với góc quay 90° (*Hình 29*).



Hình 29

a) Xác định các điểm A', B', C' lần lượt là ảnh của các điểm thẳng hàng A, B, C qua phép quay trên.

b) Nêu mối quan hệ giữa ba điểm A', B', C'.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

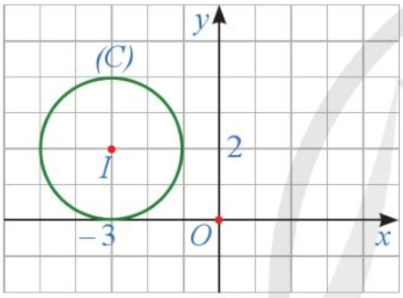
> Phép quay tâm O với góc quay φ biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.

Từ hai định lí trên, ta có hệ quả sau:

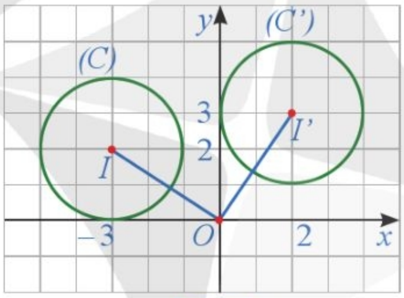
Phép quay tâm O với góc quay φ:

- Biến đường thẳng thành đường thẳng;
- Biến tia thành tia;
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;
- Biến tam giác thành tam giác bằng nó;
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính và có tâm là ảnh của tâm;
- Biến góc thành góc bằng nó.

Ví dụ 13 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) tâm $I(-3 ; 2)$, bán kính $R = 2$ (*Hình 30*). Xác định ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O với góc quay $\varphi = -90^\circ$.



Hình 30



Hình 31

9 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) có tâm $I(2 ; 3)$ bán kính $R = 2$. Xác định ảnh của (C) qua phép quay tâm $S(-1 ; 1)$ với góc quay $\varphi = 90^\circ$.

Giải

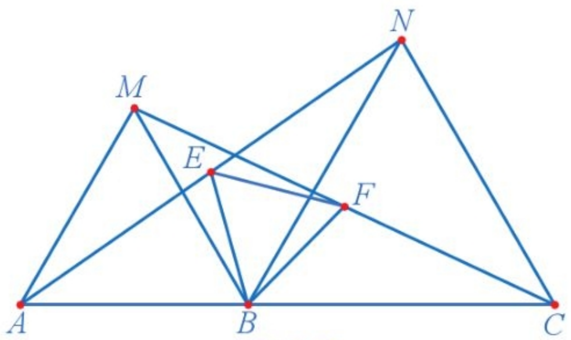
Ảnh của điểm $I(-3 ; 2)$ qua phép quay tâm O với góc quay $\varphi = -90^\circ$ là điểm $I'(2 ; 3)$. Vậy ảnh của đường tròn (C) qua phép quay trên là đường tròn (C') có tâm $I'(2 ; 3)$, bán kính bằng 2 (*Hình 31*).

Ví dụ 14 Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng, B nằm giữa A và C. Vẽ hai tam giác đều ABM và BCN ở cùng phía so với đường thẳng AC.

a) Xác định ảnh của các điểm M và C qua phép quay tâm B với góc quay $\varphi = 60^\circ$.

b) Chứng minh rằng $AN = CM$.

c) Gọi E, F là trung điểm của AN và CM. Chứng minh rằng tam giác BEF đều.



Hình 32

Giải. (*Hình 32*)

a) Ảnh của các điểm M và C qua phép quay tâm A với góc quay $\varphi = 60^\circ$ tương ứng là các điểm A và N.

b) Qua phép quay tâm B với góc quay $\varphi = 60^{\circ}$ tam giác BMC biến thành tam giác BAN. Suy ra, $\Delta BMC = \Delta BAN$. Do đó, $AN = MC$.

c) Qua phép quay tâm B với góc quay $\varphi = 60^{\circ}$ đoạn thẳng MC biến thành đoạn thẳng AN. Do đó, trung điểm F của MC biến thành trung điểm E của AN. Suy ra tam giác BEF là tam giác đều.

Ví dụ 15 Vòng quay Mặt Trời (Sun Wheel) (*Hình 33*) là một công trình vui chơi nằm bên bờ vịnh Hạ Long, ở độ cao 215 m so với mực nước biển và được đánh giá là một trong những vòng quay ngắm cảnh cao nhất thế giới. Bạn có thể chiêm ngưỡng toàn cảnh vịnh Hạ Long từ độ cao này để cảm nhận hết vẻ đẹp kì diệu của thiên nhiên.

Sun Wheel Hạ Long gồm 64 cabin với sức chứa 384 hành khách, công suất 1 200 khách/giờ. Mỗi cabin có sức chứa tối đa là 6 hành khách. Mỗi vòng quay kết thúc trong khoảng 15 phút.

(Nguồn: https//halotravel.vn)

(Nguồn: https://shutterstock.com)

Hình 33

Hãy xác định góc quay sau khi vòng quay chuyển động được 5 phút theo chiều kim đồng hồ.

Giải

Do một vòng quay kết thúc trong 15 phút nên khi vòng quay chuyển động được 5 phút theo chiều kim đồng hồ thì góc quay là: $\varphi = \frac{-360}{15}.\ 5 = -120$ (độ).

Chú ý: Chuyển động quay có thể thấy ở nhiều tình huống trong thực tế:

Cọn nước:
Đưa nước từ suối vào các cánh đồng qua các ống tre dẫn nước

(Nguồn: https://shutterstock.com)

Đu quay siêu tốc:
Cho phép bạn trở thành một phần của vòng quay

(Nguồn: https://shutterstock.com)

Chong chóng:
Một món đồ chơi của trẻ em, có thể quay khi có gió thổi

(Nguồn: https://shutterstock.com)

Tuabin gió:
Tuabin gió chuyển đổi năng lượng của gió thành cơ năng

(Nguồn: https://shutterstock.com)

VI. PHÉP DỜI HÌNH

1. Khái niệm

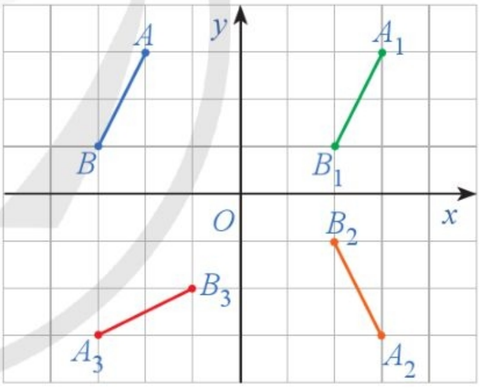
16 Trong *Hình 34*, cho đoạn thẳng AB. Nêu cách dựng:

a) Đoạn thẳng A_1B_1 là ảnh của đoạn thẳng AB qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (5 ; 0)$;

b) Đoạn thẳng A_2B_2 là ảnh của đoạn thẳng A_1B_1 qua phép đối xứng trục Ox;

c) Đoạn thẳng A_3B_3 là ảnh của đoạn thẳng A_2B_2 qua phép quay tâm O với góc quay $\varphi = -90^\circ$;

d) So sánh độ dài các đoạn thẳng AB, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3.



Hình 34

Nhận xét: Phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm và phép quay là những phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

> Trong mặt phẳng, phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì gọi là *phép dời hình*.

Chú ý

- Phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm và phép quay là các phép dời hình.
- Thực hiện liên tiếp hai phép dời hình ta được một phép dời hình.

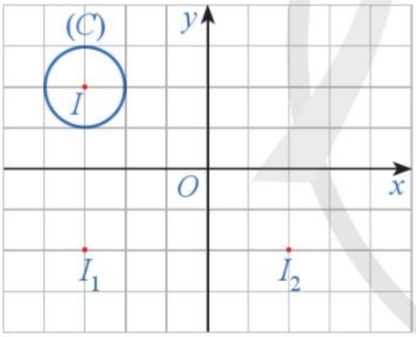
2. Tính chất

Cũng như các phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm và phép quay, do tính chất bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì nên phép dời hình có các tính chất sau:

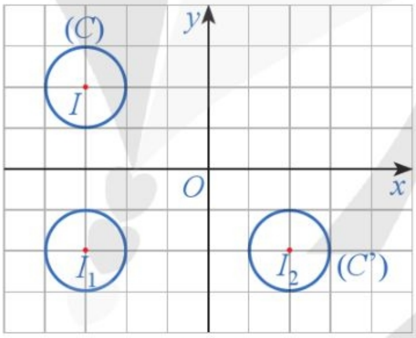
Phép dời hình:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự giữa các điểm đó;
- Biến đường thẳng thành đường thẳng;
- Biến tia thành tia;
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;
- Biến tam giác thành tam giác bằng nó;
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính và có tâm là ảnh của tâm;
- Biến góc thành góc bằng nó.

Ví dụ 16 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) có tâm $I(-3\,;2)$ bán kính $R = 1$ (*Hình 35*). Thực hiện phép dời hình f bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng trục Ox và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (5\,;0)$. Xác định ảnh của đường tròn (C) qua phép dời hình f nói trên.



Hình 35



Hình 36

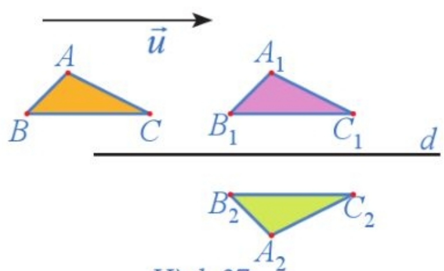
Giải. (*Hình 36*).

Qua phép đối xứng trục Ox, điểm $I(-3\,;2)$ biến thành điểm $I_1(-3\,;-2)$. Qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (5\,;0)$, điểm $I_1(-3\,;-2)$ biến thành điểm $I_2(2\,;-2)$. Vậy ảnh của đường tròn (C) qua phép dời hình f là đường tròn (C') có tâm $I_2(-2\,;2)$ và có bán kính $R' = R = 1$.

10 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) có tâm $I(-3\,;2)$ bán kính $R = 1$. Thực hiện phép dời hình f bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm O và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (-1\,;3)$. Xác định ảnh của đường tròn (C) qua phép dời hình nói trên.

3. Hai hình bằng nhau

17 Quan sát *Hình 37*.



Hình 37

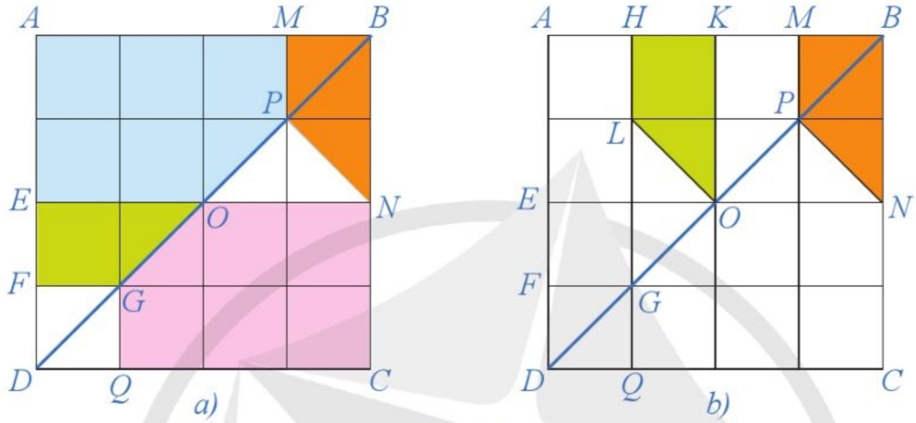
a) Chỉ ra các phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác $A_1B_1C_1$ và biến tam giác $A_1B_1C_1$ thành tam giác $A_2B_2C_2$.

b) Có nhận xét gì về hai tam giác ABC và $A_2B_2C_2$?

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Hai hình $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}'$ được gọi là *bằng nhau* nếu có phép dời hình biến hình $\mathcal{H}$ thành hình $\mathcal{H}'$.

Ví dụ 17 Quan sát *Hình 38a* và chứng minh rằng hai hình $EFGO$ và $BMPN$ bằng nhau.



Hình 38

Giải

Thực hiện phép quay tâm O với góc quay $\varphi = -90^\circ$ thì tứ giác $EFGO$ biến thành tứ giác $KHLO$ (*Hình 38b*). Thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{ON}$ thì tứ giác $KHLO$ biến thành tứ giác $BMPN$. Suy ra có phép dời hình biến tứ giác $EFGO$ thành tứ giác $BMPN$. Vậy hai hình $EFGO$ và $BMPN$ bằng nhau.

11 Quan sát *Hình 38a* và chứng minh hai hình $AMPOE$ và $CQGON$ bằng nhau.

BÀI TẬP

1. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Xác định phép tịnh tiến biến tam giác AMO thành tam giác ONC.

2. Phép đối xứng tâm có là phép quay hay không? Vì sao?

3. Cho hai đường thẳng d và d' song song với nhau.

a) Chỉ ra một phép tịnh tiến biến d thành d'.

b) Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến d thành d'?

4. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo. Xét phép đối xứng tâm O, xác định ảnh của:

a) Trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA;

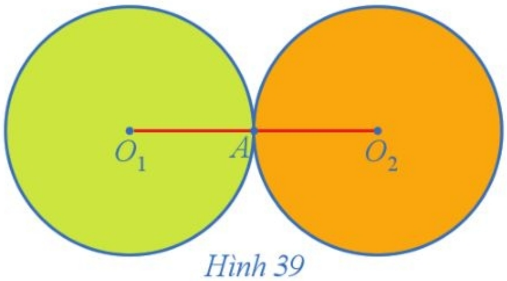
b) Các đường thẳng AB, AC.

5. Cho hai đường tròn $(O_1; R)$ và $(O_2; R)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại A (*Hình 39*).

a) Tìm phép tịnh tiến biến đường tròn (O_1) thành đường tròn (O_2).

b) Tìm phép đối xứng tâm biến đường tròn (O_1) thành đường tròn (O_2).

c) Tìm phép đối xứng trục biến đường tròn (O_1) thành đường tròn (O_2).



Hình 39

6. Trong *Hình 40*, hình màu xanh là ảnh của hình màu cam qua một phép quay. Xác định tâm và góc quay của phép quay đó.


Hình 40

7. *Hình 41* là hình viên gạch men.

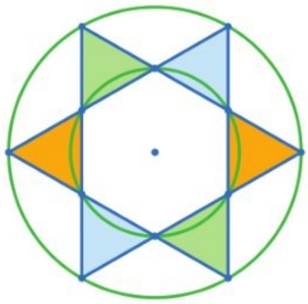
a) Xác định tâm đối xứng của viên gạch.

b) Xác định các trục đối xứng của viên gạch.

c) Xác định ảnh của viên gạch qua phép quay tâm O (tâm đối xứng của viên gạch) với góc quay $\varphi = 90^\circ$.


Hình 41

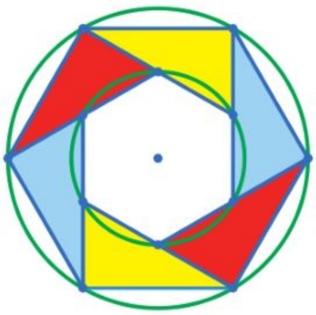
8. Quan sát *Hình 42* và chỉ ra hai phép dời hình (phân biệt) biến mỗi tam giác được tô màu thành tam giác cùng màu với nó.


Hình 42

9. Quan sát *Hình 43* và chỉ ra:

a) Một phép dời hình biến mỗi tam giác được tô màu thành tam giác cùng màu với nó.

b) Một phép dời hình biến mỗi tam giác được tô màu xanh thành tam giác được tô màu vàng.


Hình 43

10. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Xác định một phép dời hình biến:

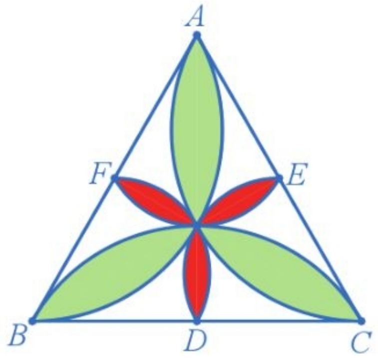
a) Tam giác AMQ thành tam giác CPN;

b) Tam giác AMO thành tam giác PCN.

11. *Hình 44* mô tả một viên gạch trang trí hình tam giác đều. Xác định phép quay biến:

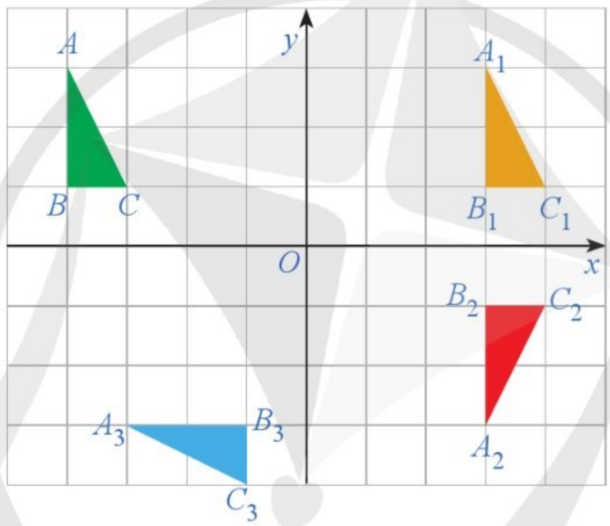
a) Cánh hoa màu xanh đỉnh A thành cánh hoa màu xanh đỉnh B.

b) Cánh hoa màu đỏ đỉnh E thành cánh hoa màu đỏ đỉnh D.



Hình 44

12. Quan sát *Hình 45*. Xác định các phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác $A_1B_1C_1$, tam giác $A_1B_1C_1$ thành tam giác $A_2B_2C_2$, tam giác $A_2B_2C_2$ thành tam giác $A_3B_3C_3$.



Hình 45

13. Cho tam giác nhọn ABC. Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD, ACE.

a) Xác định ảnh của các điểm D và C qua phép quay tâm A với góc quay $\varphi = 60^\circ$.

b) Chứng minh rằng $DC = BE$.

c) Chứng minh rằng số đo góc giữa hai đường thẳng DC và BE bằng 60°.

14. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $A(0 ; 6)$, $B(6 ; 3)$ và điểm M thuộc trục hoành.

a) Xác định điểm C đối xứng với B qua trục hoành.

b) Chứng minh rằng $MB = MC$.

c) Xác định điểm M sao cho tổng $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

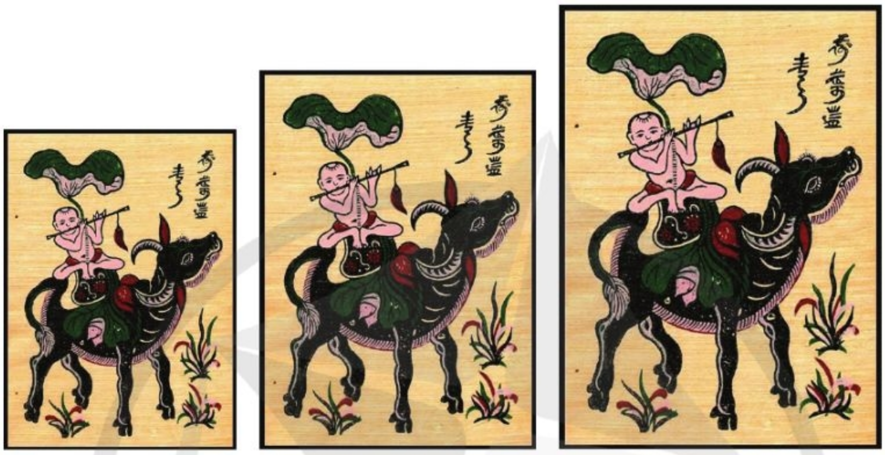
15. Chứng minh rằng nếu phép dời hình F biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ thì F lần lượt biến trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thành trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$.

§2 PHÉP ĐỒNG DẠNG

Tranh Đông Hồ là một dòng tranh dân gian Việt Nam, xuất xứ từ làng Đông Hồ (xã Song Hồ, huyện Thuận Thành, tỉnh Bắc Ninh). Tranh được in trên giấy điệp, màu sắc được sử dụng là màu tự nhiên: màu đen từ than lá tre, màu xanh từ lá chàm, màu đỏ từ sỏi son, ...

Nghề làm tranh dân gian Đông Hồ là di sản văn hoá phi vật thể cấp Quốc gia.

(Nguồn: https://vi.wikipedia.org/wiki)



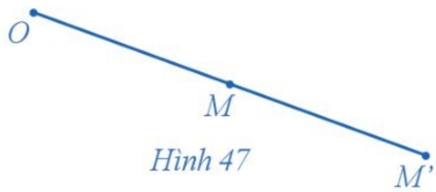
Tranh "Mục đồng thổi sáo"
(Nguồn: https://commons.wikimedia.org)
Hình 46

Ba bức tranh trong Hình 46 có hình dạng giống hệt nhau nhưng có kích thước to nhỏ khác nhau gợi nên những hình có mối liên hệ gì?

I. PHÉP ĐỒNG DẠNG PHỐI CẢNH (PHÉP VỊ TỰ)

1. Khái niệm

1 Trong mặt phẳng cho điểm O. Với mỗi điểm M trong mặt phẳng, hãy xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}$ (*Hình 47*).



Hình 47

Ta nhận được phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}$. Phép biến hình đó gọi là phép vị tự tâm O tỉ số 2.

Ta có định nghĩa sau:

Cho điểm O cố định và số thực k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ gọi là *phép vị tự tâm O tỉ số k*, kí hiệu $V_{(O,k)}$.
Điểm M' được gọi là *ảnh* của điểm M, kí hiệu $M' = V_{(O,k)}(M)$.

Ví dụ 1 Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Xác định ảnh của các điểm A, B, C qua phép vị tự:

a) Tâm G tỉ số $\frac{1}{2}$; b) Tâm G tỉ số $-\frac{1}{2}$.

Giải

a) Gọi A', B', C' lần lượt là ảnh của A, B, C qua phép vị tự tâm G tỉ số $\frac{1}{2}$. Ta có: $\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$.

Do đó các điểm A', B', C' lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng GA, GB, GC (*Hình 48*).

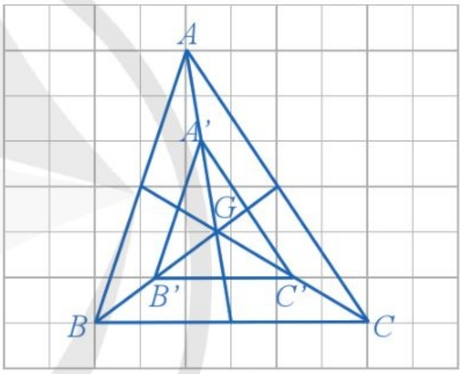
Vậy ảnh của các điểm A, B, C trong phép vị tự tâm G tỉ số $\frac{1}{2}$ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng GA, GB, GC.

b) Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB (*Hình 49*). Theo tính chất trọng tâm ta có:

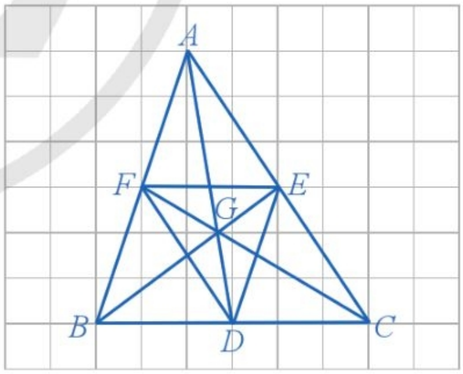
$\overrightarrow{GD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$.

Vậy ảnh của các điểm A, B, C qua phép vị tự tâm G tỉ số $-\frac{1}{2}$ lần lượt là các điểm D, E, F.

1 Cho tam giác ABC có O là trung điểm của cạnh BC. Xác định ảnh của tam giác ABC trong phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{1}{2}$.



Hình 48



Hình 49

2. Tính chất

2 Cho phép vị tự tâm O tỉ số k và hai điểm A, B. Giả sử $A' = V_{(O,k)}(A)$, $B' = V_{(O,k)}(B)$.

a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}$ lần lượt theo các vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.

b) Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{A'B'}$ theo $\overrightarrow{AB}$. Từ đó, tìm mối liên hệ độ dài giữa hai đoạn thẳng $A'B'$ và AB.

Ta có định lí sau:

Nếu phép vị tự tâm O tỉ số k ($k \neq 0$) lần lượt biến hai điểm A, B thành hai điểm A', B' thì $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ và $A'B' = |k| AB$.

3 Cho phép vị tự tâm O tỉ số k và ba điểm A, B, C sao cho B nằm giữa A và C. Giả sử $A' = V_{(O,k)}(A)$, $B' = V_{(O,k)}(B)$, $C' = V_{(O,k)}(C)$.

a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{B'A'}$, $\overrightarrow{B'C'}$ lần lượt theo các vectơ $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$.

b) Hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ có ngược hướng không?

c) Hai vectơ $\overrightarrow{B'A'}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ có ngược hướng không? Từ đó, nêu mối quan hệ giữa ba điểm A', B', C'.

Ta có định lí sau:

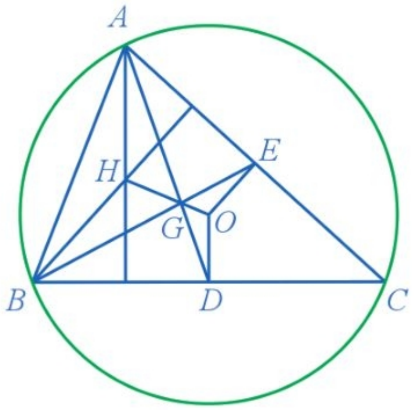
Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.

Từ hai định lí trên, ta có hệ quả sau:

Phép vị tự tỉ số k ($k \neq 0$):

- Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó;
- Biến tia thành tia;
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$;
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$;
- Biến góc thành góc bằng nó;
- Biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $R' = |k| R$ và có tâm là ảnh của tâm.

Chú ý: Qua phép vị tự tâm O tỉ số k, ảnh của một đường thẳng trùng với chính nó khi và chỉ khi $k = 1$ hoặc O thuộc đường thẳng.



Hình 50

Ví dụ 2 Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Gọi G, H lần lượt là trọng tâm, trực tâm của tam giác ABC. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA (*Hình 50*). Chứng minh rằng:

a) Phép vị tự tâm G tỉ số $-\dfrac{1}{2}$ biến đường thẳng AH thành đường thẳng OD;

b) Phép vị tự tâm G tỉ số $-\dfrac{1}{2}$ biến điểm H thành điểm O;

c) Các điểm H, O, G thẳng hàng và $HG = 2GO$.

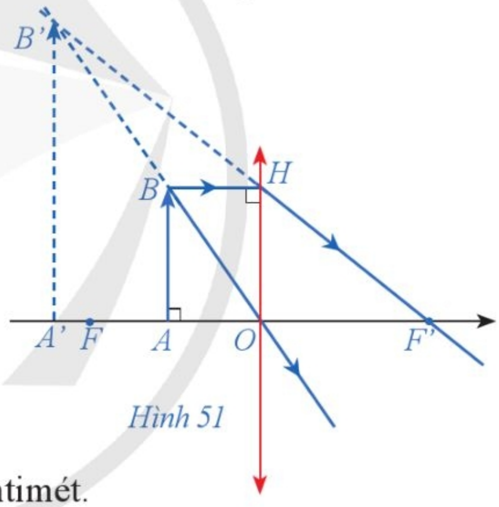
Giải

a) Theo tính chất trọng tâm ta có: $\overrightarrow{GD} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}$. Do đó, phép vị tự tâm G tỉ số $-\dfrac{1}{2}$ biến điểm A thành điểm D. Suy ra, ảnh của đường thẳng AH qua phép vị tự trên là một đường thẳng đi qua D và song song với AH. Mặt khác, ta có AH và OD vuông góc với BC nên AH song song với OD. Vậy phép vị tự tâm G tỉ số $-\dfrac{1}{2}$ biến đường thẳng AH thành đường thẳng OD.

b) Chứng minh tương tự câu a) ta có phép vị tự tâm G tỉ số $-\dfrac{1}{2}$ biến đường thẳng BH thành đường thẳng OE. Do đó, phép vị tự tâm G tỉ số $-\dfrac{1}{2}$ biến giao điểm H của AH và BH thành một điểm thuộc cả OD và OE là điểm O.

c) Vì phép vị tự tâm G tỉ số $-\dfrac{1}{2}$ biến điểm H thành điểm O nên $\overrightarrow{GO} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GH}$. Suy ra các điểm H, G, O thẳng hàng và $HG = 2GO$.

Ví dụ 3 Một thấu kính hội tụ có tiêu cự $OF' = OF = 5$ cm (kính lúp). Vật sáng $AB = 4$ cm được đặt vuông góc với trục chính của thấu kính, cách thấu kính một đoạn $OA = 3$ cm, qua thấu kính cho ảnh ảo $A'B'$ (*Hình 51*). Ảnh $A'B'$ là ảnh của AB qua phép vị tự tâm O tỉ số k.



Hình 51

a) Tính khoảng cách AA' từ vật đến ảnh theo đơn vị centimét.

b) Tính tỉ số k và độ cao của ảnh theo đơn vị centimét. Nhận xét kích thước của ảnh qua thấu kính hội tụ trên.

Giải

a) Áp dụng định lí Thalès, ta có: $\dfrac{A'A}{A'O} = \dfrac{B'B}{B'O} = \dfrac{BH}{OF'} = \dfrac{OA}{OF} = \dfrac{3}{5}$. Mà $A'O - A'A = OA = 3$ (cm).

Suy ra $\dfrac{5}{3}A'A - A'A = 3$ hay $A'A = 4{,}5$ (cm). Vậy khoảng cách từ vật đến ảnh là 4,5 (cm).

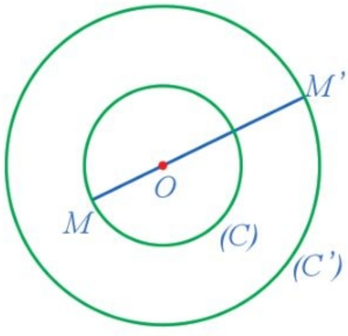
b) Vì $A'B'$ là ảnh của AB qua phép vị tự $V_{(O,k)}$ nên $k = \dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OA + AA'}{OA} = \dfrac{3 + 4{,}5}{3} = 2{,}5$.

Do đó, $A'B' = |k|AB = 2{,}5 \,.\, 4 = 10$ (cm). Ta thấy $10 > 4$ nên ảnh có độ cao lớn hơn vật.

Ví dụ 4 Cho đường tròn (C) có tâm O bán kính R. Xác định ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$.

Giải. (*Hình 52*)

Qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$ thì điểm O biến thành chính nó. Do đó, ảnh của đường tròn (C) là đường tròn (C') có tâm O bán kính $R' = |-2|R = 2R$.



Hình 52

2 Cho đường tròn (C) có tâm O bán kính R. Xác định ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -\frac{1}{2}$.

II. PHÉP ĐỒNG DẠNG

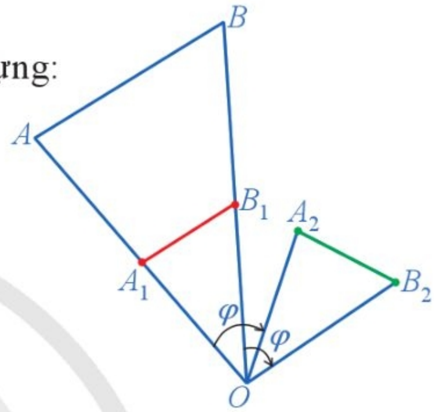
1. Khái niệm

4 Trong *Hình 53*, cho đoạn thẳng AB. Nêu cách dựng:

a) Đoạn thẳng A_1B_1 là ảnh của đoạn thẳng AB qua phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{1}{2}$;

b) Đoạn thẳng A_2B_2 là ảnh của đoạn thẳng A_1B_1 qua phép quay tâm O với góc quay $\varphi = -60^\circ$.

c) Nhận xét về mối liên hệ giữa độ dài các đoạn thẳng AB, A_2B_2.



Hình 53

Nhận xét: Thực hiện liên tiếp hai phép biến hình: phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{1}{2}$ và phép quay tâm O với góc quay $\varphi = -60^\circ$, ta được một phép biến hình biến hai điểm A, B bất kì thành hai điểm A_2, B_2 sao cho: $A_2B_2 = \frac{1}{2}AB$. Phép biến hình đó gọi là *phép đồng dạng*. Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Phép biến hình F biến hai điểm M, N bất kì thành hai điểm M', N' sao cho $M'N' = kMN$ với k là số thực dương cho trước, gọi là *phép đồng dạng tỉ số k*.

Ví dụ 5 Các phép biến hình sau có phải là phép đồng dạng không?

a) Phép dời hình;

b) Phép vị tự tâm O tỉ số k.

Giải

a) Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số $k = 1$.

b) Phép vị tự tâm O tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.

Nhận xét

• Thực hiện liên tiếp phép dời hình và phép vị tự tâm O tỉ số k ta được một phép đồng dạng tỉ số $|k|$. Điều ngược lại cũng đúng.

• Thực hiện liên tiếp phép đồng dạng tỉ số k và phép đồng dạng tỉ số p ta được một phép đồng dạng tỉ số pk.

Ví dụ 6 Trên bản đồ Việt Nam với tỉ lệ xích 1 : 1 000 000, ta đo được khoảng cách từ Hà Nội tới Huế là 53 cm. Khoảng cách thực tế (tính theo đường chim bay) giữa Hà Nội và Huế là bao nhiêu kilômét?

Giải

Khoảng cách thực tế (tính theo đường chim bay) giữa Hà Nội và Huế là:

$d = 53 \,.\, 1\,000\,000 = 53\,000\,000$ (cm) $= 530$ (km).

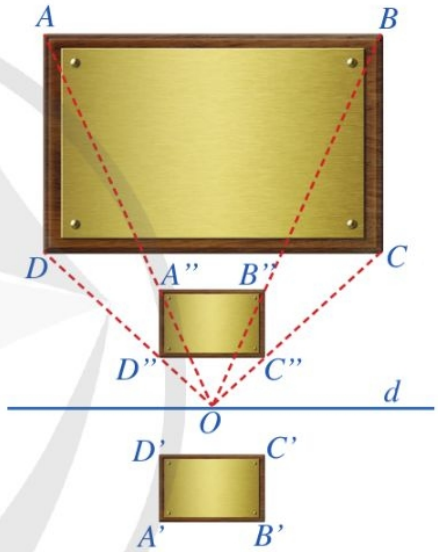
3 Người ta dùng một kính hiển vi có khả năng phóng to vật lên gấp 100 000 lần để quan sát một virus và đo được kích thước của virus là 2 mm. Hỏi kích thước thật của virus là bao nhiêu micromét? Biết 1 mm = 1 000 μm.

2. Hai hình đồng dạng

5 Quan sát *Hình 54* và cho biết:

a) Hình chữ nhật *A"B"C"D"* nhận được từ hình chữ nhật *ABCD* bằng cách nào.

b) Phép đồng dạng nào biến hình chữ nhật *ABCD* thành hình chữ nhật *A"B"C"D"*.



(Ảnh: Andrey-Kuzmin)

Hình 54

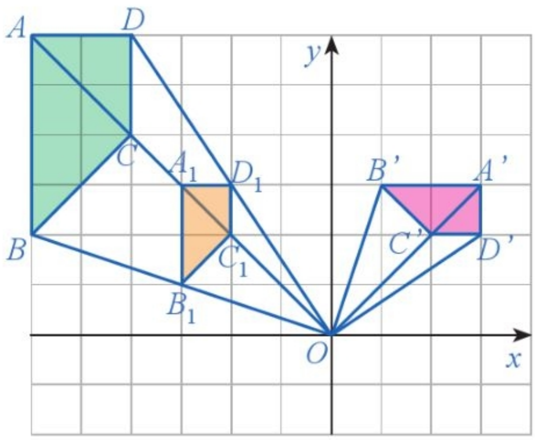
Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau:

> Hai hình $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}'$ gọi là *đồng dạng* với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình $\mathcal{H}$ thành hình $\mathcal{H}'$.

Ví dụ 7 Quan sát *Hình 55* và chứng minh rằng hai hình *ABCD* và *A'B'C'D'* đồng dạng với nhau.

Giải

Thực hiện phép vị tự tâm *O* tỉ số $\frac{1}{2}$ thì tứ giác *ABCD* biến thành tứ giác $A_1B_1C_1D_1$. Thực hiện phép quay tâm *O* với góc quay $\varphi = -90^\circ$ thì tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ biến thành tứ giác *A'B'C'D'*. Suy ra có phép đồng dạng biến tứ giác *ABCD* thành tứ giác *A'B'C'D'*. Vậy hai hình *ABCD* và *A'B'C'D'* đồng dạng với nhau.

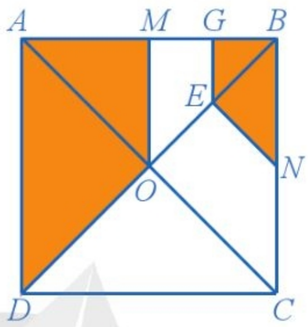


Hình 55

Ví dụ 8 Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi M, N, G, E lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BC, MB, BO (*Hình 56*). Chứng minh rằng hai hình $BGEN$ và $AMOD$ đồng dạng với nhau.

Giải

Thực hiện phép vị tự tâm B tỉ số 2 thì tứ giác $BGEN$ biến thành tứ giác $BMOC$. Tiếp tục thực hiện phép đối xứng trục OM thì tứ giác $BMOC$ biến thành tứ giác $AMOD$. Suy ra có phép đồng dạng tỉ số 2 biến tứ giác $BGEN$ thành tứ giác $AMOD$. Do đó, hai hình $BGEN$ và $AMOD$ đồng dạng với nhau.



Hình 56

4 Trong *Ví dụ 8*, chứng minh rằng hai hình $OMGE$ và $COEN$ đồng dạng với nhau.

BÀI TẬP

1. Phép biến hình nào trong các phép biến hình dưới đây là phép vị tự?

a) Phép tịnh tiến theo vectơ khác $\vec{0}$;

b) Phép đối xứng tâm;

c) Phép đối xứng trục;

d) Phép quay.

2. Phép biến hình nào trong các phép biến hình dưới đây **không** là phép đồng dạng?

a) Phép đối xứng trục;

b) Phép đồng nhất;

c) Phép vị tự tỉ số $k = 1$;

d) Phép biến hình biến mỗi điểm trong mặt phẳng thành điểm A cho trước.

3. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

a) Hai tam giác luôn đồng dạng với nhau;

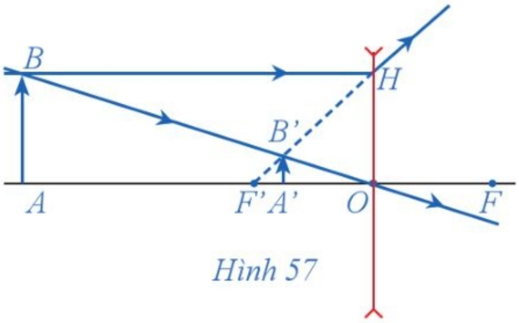
b) Hai hình chữ nhật luôn đồng dạng với nhau;

c) Hai hình thoi luôn đồng dạng với nhau;

d) Hai hình vuông luôn đồng dạng với nhau.

4. Trên bản đồ bay với tỉ lệ xích 1 : 10 000 000, khoảng cách giữa Hà Nội và Tokyo đo được là 37,34 cm. Khoảng cách thực tế (tính theo đường chim bay) giữa Hà Nội và Tokyo là bao nhiêu kilômet?

5. Một thấu kính phân kì có tiêu cự $OF = OF' = 20$ cm (kính cận). Vật sáng AB được đặt vuông góc với trục chính của thấu kính, cách thấu kính một đoạn $OA = 60$ cm, qua thấu kính cho ảnh ảo $A'B'$ (*Hình 57*). Ảnh $A'B'$ là ảnh của AB qua một phép vị tự tâm O tỉ số k.



Hình 57

Tính khoảng cách $A'O$ từ ảnh đến thấu kính và so sánh khoảng cách đó với khoảng cách AO từ vật đến thấu kính.

6. Chứng minh rằng qua phép vị tự tâm O tỉ số k ($k \neq 0$), ảnh của mọi đường thẳng đi qua tâm O là chính nó.

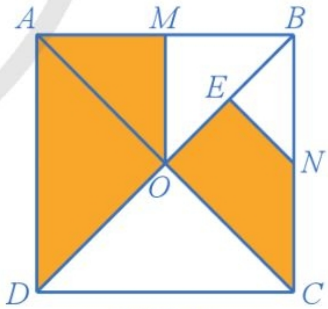
7. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H. Xác định ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự tâm H tỉ số $k = \dfrac{1}{2}$.

8. Cho hai đường tròn $(O_1 ; R)$ và $(O_2 ; 2R)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm A. Tìm phép vị tự biến đường tròn $(O_1 ; R)$ thành đường tròn $(O_2 ; 2R)$.

9. Chứng minh rằng nếu phép đồng dạng F biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ thì F biến trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thành trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$.

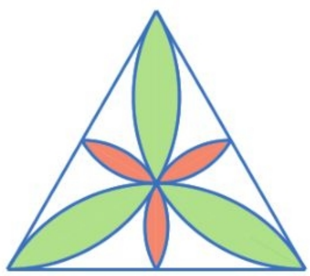
10. Chứng minh rằng các đa giác đều có cùng số cạnh thì đồng dạng với nhau.

11. Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của AB, BC, BO (*Hình 58*). Chứng minh rằng hai hình $AMOD$ và $OENC$ đồng dạng với nhau.



Hình 58

12. *Hình 59* mô tả một viên gạch trang trí hình tam giác đều. Chứng minh rằng hình hoa ba cánh màu xanh và hình hoa ba cánh màu đỏ đồng dạng với nhau.


Hình 59

CHUYÊN ĐỀ II

LÀM QUEN VỚI MỘT VÀI YẾU TỐ CỦA LÍ THUYẾT ĐỒ THỊ

Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ tìm hiểu những nội dung sau: một vài yếu tố của lí thuyết đồ thị; đường đi Euler và đường đi Hamilton; một vài ứng dụng của lí thuyết đồ thị.

§1 MỘT VÀI YẾU TỐ CỦA LÍ THUYẾT ĐỒ THỊ. ĐƯỜNG ĐI EULER VÀ ĐƯỜNG ĐI HAMILTON

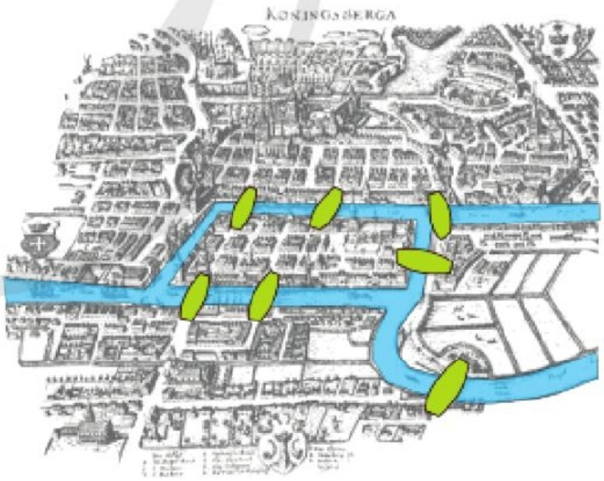
I. BÀI TOÁN BẢY CÂY CẦU CỦA EULER

Ngay từ thời kì Trung Cổ, con người đã phải giải quyết nhiều vấn đề liên quan đến đường đi (đường nối giữa các địa điểm) hoặc phải xử lí những vấn đề nảy sinh trong quá trình xây dựng và vận hành mạng lưới giao thông. Những vấn đề như thế dần được khái quát hoá, mô phỏng thành những mô hình toán học, dẫn tới sự ra đời của Lí thuyết đồ thị.

Trong những bài toán thực tiễn dẫn tới Lí thuyết đồ thị, ta sẽ làm quen với Bài toán Bảy cây cầu của Euler.

Bài toán Bảy cây cầu của Euler, còn gọi là Bảy cây cầu ở Königsberg, là bài toán nảy sinh từ thành phố Königsberg. Thành phố Königsberg được thành lập năm 1255 và là một thành phố thuộc Vương quốc Phổ. Sau năm 1945, thành phố thuộc Liên Xô (cũ) và được đổi tên là Kaliningrad từ năm 1946. Ngày nay, thành phố Kaliningrad thuộc nước Nga.

Thành phố Königsberg nằm trên sông Pregel, bao gồm hai hòn đảo lớn nối với nhau và nối với đất liền bởi bảy cây cầu (*Hình 1*).



Bản đồ Königsberg thời Euler, mô tả vị trí thực của bảy cây cầu và sông Pregel

(Nguồn: https://vi.wikipedia.org/)

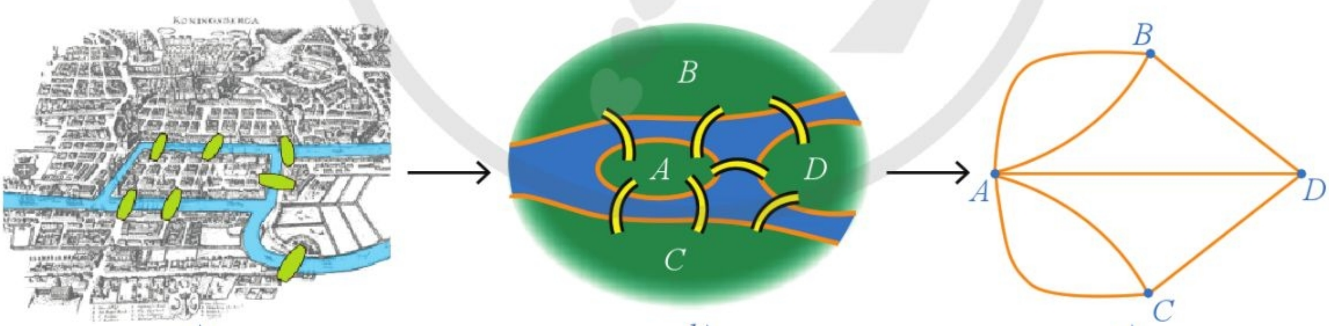
Hình 1

Theo kể lại, người dân thường dành ngày Chủ nhật dạo quanh thành phố xinh đẹp này. Lúc này, họ nảy ra một ý tưởng, một trò chơi để tìm ra câu trả lời cho câu hỏi: "Có đường đi nào cho phép một người đi qua cả bảy cây cầu, mà mỗi cây cầu chỉ đi qua một lần?"

Câu đố đó đã thu hút nhiều người thử sức, thậm chí có nhiều người đến tận Königsberg đi dạo để tìm cảm hứng cho việc tìm ra lời giải. Thế nhưng không ai trong số họ có thể làm được điều này cũng như có thể chứng minh được rằng điều đó là không khả thi.

May mắn cho họ, Königsberg không quá xa St. Petersburg, nơi làm việc của nhà toán học vĩ đại Euler (Leonhard Euler, 1707 – 1783, người Thuỵ Sĩ). Tại sao Euler lại quan tâm đến một vấn đề không liên quan đến lĩnh vực toán học? Tại sao một nhà toán học vĩ đại như vậy lại dành nhiều thời gian cho một bài toán tầm thường như Bài toán Bảy cây cầu ở Königsberg? Không có gì ngạc nhiên khi Euler cảm thấy vấn đề này là tầm thường, ông nói trong một bức thư năm 1736 gửi Ngài Carl Leonhard Gottlieb Ehler, thị trưởng thành phố Danzig, người đã yêu cầu ông đưa ra giải pháp cho vấn đề trên: “Ngài thấy đấy, lời giải này chẳng liên quan gì đến toán học và tôi cũng tự hỏi không hiểu tại sao Ngài lại mong đợi một nhà toán học giải quyết nó, khi mà lời giải chỉ dựa vào lí luận, không phụ thuộc vào bất kì nguyên tắc toán học nào”. Mặc dù vậy, Euler vẫn cảm thấy hứng thú với bài toán này. Trong một bức thư được viết cùng năm cho Marinoni (Giovanni Jacopo de Marinoni, 1676 – 1755, nhà toán học và kĩ sư người Ý), Euler nói: “Câu hỏi này thật tầm thường, nhưng đối với tôi dường như đáng chú ý ở chỗ cả hình học, đại số, thậm chí cả nghệ thuật đếm cũng không đủ để giải nó”. Cuối cùng, vào năm 1741, Euler đã trình bày lời giải cho Bài toán Bảy cây cầu ở Königsberg và đưa ra lời giải tổng quát cho dạng bài toán này, bất kể số lượng vùng đất cũng như số lượng cây cầu.

Bằng cách loại bỏ tất cả các chi tiết ngoại trừ các vùng đất và các cây cầu, sau đó thay thế mỗi vùng đất bằng một điểm và thay mỗi cây cầu nối hai vùng đất bằng một đoạn nối hai điểm, Euler đã nhận được mô hình sau đây:



a) b) c)

Hình 2

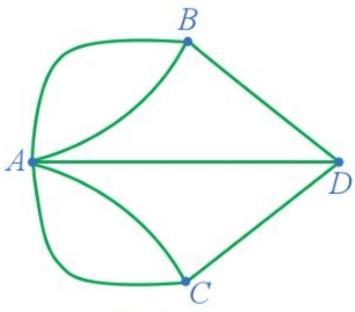
Cấu trúc toán học thu được ở *Hình 2c* ngày nay được gọi là một *đồ thị*, mỗi điểm gọi là một *đỉnh* của đồ thị, mỗi đoạn nối được gọi là một *cạnh* của đồ thị. Bài toán Bảy cây cầu ở Königsberg có thể phát biểu lại như sau: Có hay không một hành trình đi qua cả bảy cạnh của đồ thị ở *Hình 2c* mà mỗi cạnh chỉ đi qua đúng một lần? Những bài toán kiểu như vậy được gọi là bài toán về *đường đi Euler trên đồ thị*, chúng đóng vai trò quan trọng trong Lí thuyết đồ thị hiện nay.

Trong lịch sử toán học, lời giải của Euler cho Bài toán Bảy cây cầu ở Königsberg được coi là định lí đầu tiên của Lí thuyết đồ thị. Ngoài ra, nhận xét của Euler rằng thông tin quan trọng là số cây cầu và danh sách các vùng đất ở đầu cầu (chứ không phải vị trí chính xác của chúng) đã đánh dấu cho sự ra đời và phát triển của ngành tôpô học, một trong những ngành quan trọng nhất của toán học ngày nay.

II. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1. Khái niệm đồ thị

1 Quan sát đồ thị ở *Hình 3* và thực hiện các hoạt động sau:



Hình 3

a) Đọc tên các đỉnh, các cạnh của đồ thị đó;

b) Cho biết có hay không một đỉnh được nối với chính nó bởi một cạnh của đồ thị;

c) Với mỗi cặp đỉnh của đồ thị, cho biết có nhiều nhất là bao nhiêu cạnh nối chúng.

Nhận xét: Đồ thị trong *Hình 3* có các đặc điểm sau:

- Mỗi cặp đỉnh của đồ thị chỉ có không quá một cạnh nối.
- Không có đỉnh nào được nối với chính nó bởi một cạnh của đồ thị.

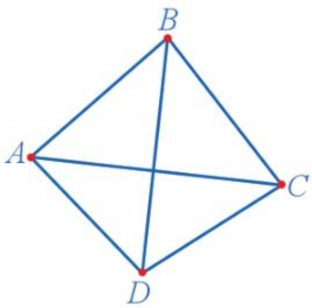
Trong trường hợp tổng quát, ta có khái niệm sau:

> Đồ thị G là hình bao gồm:
>
> - Tập hợp hữu hạn các điểm, mỗi điểm gọi là một *đỉnh* của đồ thị;
> - Tập hợp các đoạn (cong hoặc thẳng), mỗi đoạn nối hai đỉnh nào đó của đồ thị, được gọi là *cạnh* của đồ thị.
>
> Đồ thị G được gọi là *đồ thị đơn* nếu mỗi cặp đỉnh của đồ thị chỉ có không quá một cạnh nối chúng và không có đỉnh nào được nối với chính nó bởi một cạnh của đồ thị.

Ví dụ 1 Có bốn thành phố A, B, C, D sao cho hai thành phố bất kì trong chúng đều có đường nối với nhau. Sử dụng đồ thị để mô tả tình huống đó.

Giải

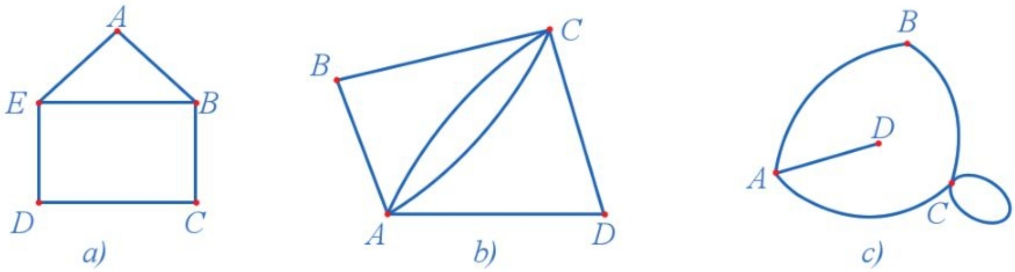
Sử dụng điểm để biểu diễn vị trí thành phố, đoạn thẳng biểu diễn đường đi giữa hai thành phố, ta có mô hình ở *Hình 4*.



Hình 4

1 Có năm thành phố A, B, C, D, E sao cho hai thành phố bất kì trong chúng đều có đường nối với nhau. Sử dụng đồ thị để mô tả tình huống đó.

Ví dụ 2 Trong các đồ thị ở *Hình 5*, đồ thị nào là đồ thị đơn?



Hình 5

Giải

Đồ thị ở *Hình 5a* là đồ thị đơn.

Đồ thị ở *Hình 5b* không phải là đồ thị đơn vì có hai cạnh của đồ thị đó nối cặp đỉnh A, C.

Đồ thị ở *Hình 5c* không phải là đồ thị đơn vì có đỉnh C được nối với chính nó bởi một cạnh của đồ thị.

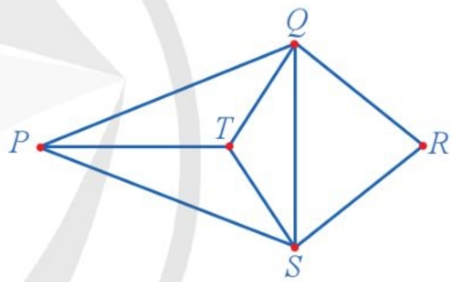
> **2** Cho ví dụ về đồ thị đơn và đồ thị không đơn.

Quy ước: Nếu không nói gì thêm, từ nay về sau các đồ thị đều được giả thiết là đồ thị đơn.

2. Bậc của đỉnh

2 Quan sát đồ thị ở *Hình 6* và đếm số cạnh của đồ thị nhận đỉnh P làm đầu mút.

Nhận xét: Có 3 cạnh của đồ thị nhận đỉnh P làm đầu mút. Ta nói bậc của đỉnh P bằng 3, kí hiệu là $d(P) = 3$.



Hình 6

Trong trường hợp tổng quát, ta có khái niệm sau:

> Bậc của một đỉnh A trong đồ thị G là số cạnh của đồ thị nhận đỉnh A làm đầu mút, kí hiệu là $d(A)$.

Nhận xét: Một đỉnh của đồ thị có bậc n nếu đỉnh đó là đầu mút của n cạnh.

Ví dụ 3 Trong đồ thị ở *Hình 6*, hãy tìm những đỉnh có:

a) Bậc lẻ; b) Bậc chẵn.

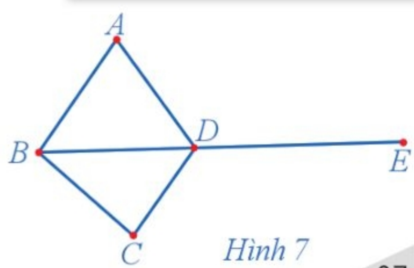
Giải

Do $d(P) = 3$, $d(Q) = 4$, $d(R) = 2$, $d(S) = 4$, $d(T) = 3$ nên P, T là các đỉnh bậc lẻ; Q, R, S là các đỉnh bậc chẵn.

> **3** Có bao nhiêu đỉnh bậc lẻ trong đồ thị ở *Hình 5a*?

3 Quan sát đồ thị ở *Hình 7* và cho biết:

a) Tổng các bậc của năm đỉnh trong đồ thị đó;



Hình 7

b) Số cạnh của đồ thị đó;

c) Tổng các bậc của năm đỉnh trong đồ thị gấp bao nhiêu lần số cạnh của đồ thị đó.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí sau:

Trong một đồ thị, tổng tất cả các bậc của các đỉnh bằng hai lần số cạnh của đồ thị đó.

Ví dụ 4 Chứng minh rằng trong một đồ thị, số đỉnh có bậc lẻ là một số chẵn.

Giải

Theo định lí trên, tổng tất cả các bậc của các đỉnh bằng hai lần số cạnh của đồ thị đó, suy ra tổng tất cả các bậc của các đỉnh là số chẵn. Vậy số đỉnh bậc lẻ là số chẵn.

4 Cho ví dụ về một đồ thị có số lẻ đỉnh bậc chẵn.

3. Đường đi trên đồ thị

4 Quan sát đồ thị ở *Hình 7* và cho biết:

a) Hai đỉnh A, B có được nối với nhau bằng một cạnh hay không;

b) Dãy các cạnh kế tiếp nhau AB, BC, CD, DE có đặc điểm gì.

Nhận xét

• Hai đỉnh A, B được nối với nhau bằng một cạnh của đồ thị. Ta nói hai đỉnh A, B là *kề nhau* hay là *láng giềng* của nhau.

• Dãy các cạnh kế tiếp nhau AB, BC, CD, DE có những tính chất sau: không có cạnh nào xuất hiện hai lần, đỉnh cuối của cạnh bất kì là đỉnh đầu của cạnh tiếp theo và không có đỉnh nào được đi qua hai lần. Dãy các cạnh kế tiếp nhau AB, BC, CD, DE được gọi là một *đường đi từ đỉnh A đến đỉnh E*.

Trong trường hợp tổng quát, ta có khái niệm sau:

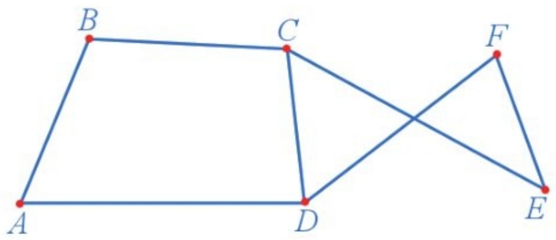
Trong một đồ thị, dãy các cạnh kế tiếp nhau AB, BC, ..., MN, NP được gọi là một *đường đi từ đỉnh A đến đỉnh P*, kí hiệu $ABC...MNP$, nếu dãy các cạnh kế tiếp nhau đó có những tính chất sau: không có cạnh nào xuất hiện hai lần, đỉnh cuối của cạnh bất kì là đỉnh đầu của cạnh tiếp theo và không có đỉnh nào được đi qua hai lần.

Một đường đi khép kín (đỉnh ban đầu của đường đi trùng với đỉnh cuối của đường đi đó) được gọi là một *chu trình*.

Ví dụ 5 Trong đồ thị ở *Hình 8*, hãy tìm:

a) Một đường đi từ đỉnh A đến đỉnh E.

b) Một chu trình có đỉnh đầu và đỉnh cuối là A.



Hình 8

5 Trong đồ thị ở *Hình 8*, hãy tìm:

a) Một đường đi từ đỉnh A đến đỉnh F.

b) Một chu trình có đỉnh E là đỉnh đầu và đỉnh cuối.

Giải

a) Một đường đi từ đỉnh A đến đỉnh E là: $ABCE$.

b) Một chu trình với đỉnh đầu A và đỉnh cuối A là: $ABCDA$.

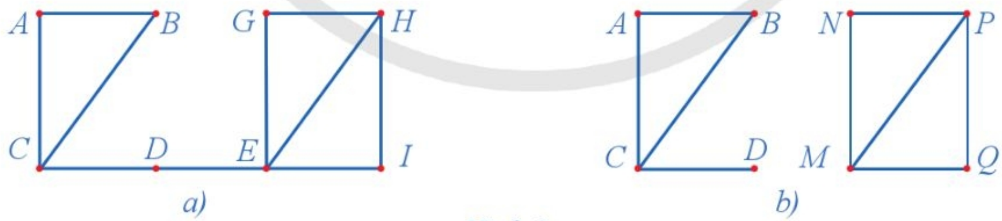
5 Quan sát đồ thị ở *Hình 8* và cho biết hai đỉnh bất kì của đồ thị có được nối với nhau bằng một đường đi hay không?

Nhận xét: Hai đỉnh bất kì của đồ thị đều được nối với nhau bằng một đường đi. Ta nói đồ thị đó là *đồ thị liên thông*.

Trong trường hợp tổng quát, ta có khái niệm sau:

Một đồ thị được gọi là *liên thông* nếu hai đỉnh bất kì của đồ thị đều được nối với nhau bằng một đường đi.

Ví dụ 6 Trong những đồ thị ở *Hình 9*, đồ thị nào là liên thông?



Hình 9

Giải

• Trong đồ thị ở *Hình 9a*, hai đỉnh bất kì của đồ thị đều được nối với nhau bằng một đường đi. Vậy đồ thị đó là đồ thị liên thông.

• Trong đồ thị ở *Hình 9b*, mỗi đỉnh thuộc khối đỉnh bên trái đều không thể nối được với mỗi đỉnh thuộc khối đỉnh bên phải bằng một đường đi. Vậy đồ thị đó là đồ thị không liên thông.

6 Cho ví dụ về một đồ thị liên thông và một đồ thị không liên thông.

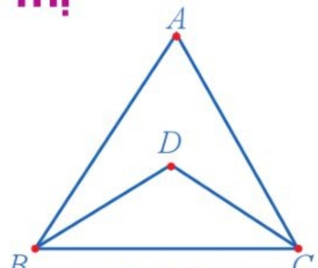
III. ĐƯỜNG ĐI EULER. ĐƯỜNG ĐI HAMILTON TRÊN ĐỒ THỊ

1. Đường đi Euler trên đồ thị

6 Quan sát đồ thị ở *Hình 10* và đường đi *CABDCB*, cho biết:

a) Đường đi trên có đi qua tất cả các cạnh của đồ thị hay không.

b) Đường đi trên đi qua mỗi cạnh bao nhiêu lần.



Hình 10

Nhận xét: Trong đồ thị ở *Hình 10*, đường đi *CABDCB* đi qua tất cả các cạnh của đồ thị và mỗi cạnh đúng một lần. Ta nói đường đi *CABDCB* là *đường đi Euler*.

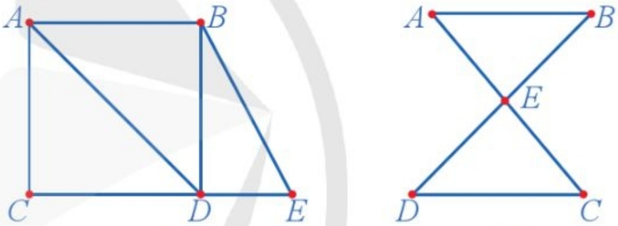
Trong trường hợp tổng quát, ta có khái niệm sau:

> Trong đồ thị, một đường đi được gọi là *đường đi Euler* nếu đường đi đó đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, mỗi cạnh đúng một lần.
>
> Nếu chu trình là đường đi Euler thì chu trình đó được gọi là *chu trình Euler*.

Ví dụ 7 Cho các đồ thị ở *Hình 11*. Hãy chỉ ra:

a) Đồ thị ở *Hình 11a* có đường đi Euler;

b) Đồ thị ở *Hình 11b* có chu trình Euler.



a) b)

Hình 11

Giải

a) Đồ thị ở *Hình 11a* có đường đi Euler *ACDEBDAB*.

b) Đồ thị ở *Hình 11b* có chu trình Euler *AECDEBA*.

Trong trường hợp tổng quát, ta có định lí Euler chỉ ra điều kiện cần và đủ để một đồ thị liên thông có chu trình Euler; có đường đi Euler.

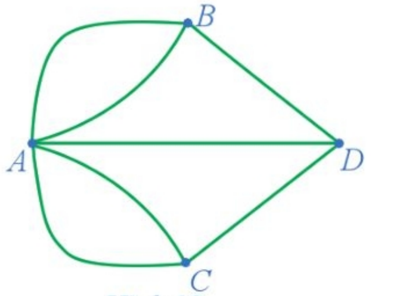
> **7** Hãy chỉ ra hai đường đi Euler trong đồ thị ở *Hình 11a*.

> • Một đồ thị G có chu trình Euler khi và chỉ khi G liên thông và không có đỉnh bậc lẻ.
>
> • Một đồ thị G có đường đi Euler không khép kín khi và chỉ khi G liên thông và có đúng hai đỉnh bậc lẻ.

Ví dụ 8 Sử dụng định lí Euler, giải bài toán Bảy cây cầu ở Königsberg.

Giải

Ta thấy: Bài toán Bảy cây cầu ở Königsberg chính là bài toán chỉ ra một đường đi Euler không khép kín trong đồ thị G ở *Hình 12*. Đồ thị G có bốn đỉnh bậc lẻ là *A*, *B*, *C*, *D*. Vì thế, theo định lí Euler, không có đường đi Euler không khép kín trong đồ thị G ở *Hình 12*.



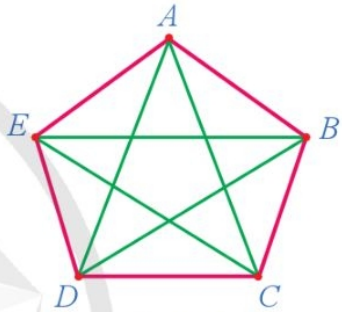
Hình 12

8 Chứng minh rằng đồ thị ở *Hình 11a* không có chu trình Euler.

Chú ý: Mặc dù định lí Euler đã giải quyết trọn vẹn vấn đề về sự tồn tại của chu trình Euler (hay đường đi Euler) trên đồ thị nhưng việc chỉ ra cụ thể cách xây dựng chu trình (hay đường đi) như thế là không đơn giản. Cho đến nay, người ta cũng đã biết một số thuật toán như vậy, chẳng hạn thuật toán của nhà toán học M. Fleury.

2. Đường đi Hamilton trên đồ thị

7 Quan sát đường đi màu đỏ trên đồ thị ở *Hình 13* và cho biết đường đi đó có đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị hay không và mỗi đỉnh đi qua bao nhiêu lần.



Hình 13

Nhận xét: Đường đi màu đỏ trên đồ thị ở *Hình 13* đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị và mỗi đỉnh đi qua đúng một lần. Ta gọi đường đi như vậy là *đường đi Hamilton*.

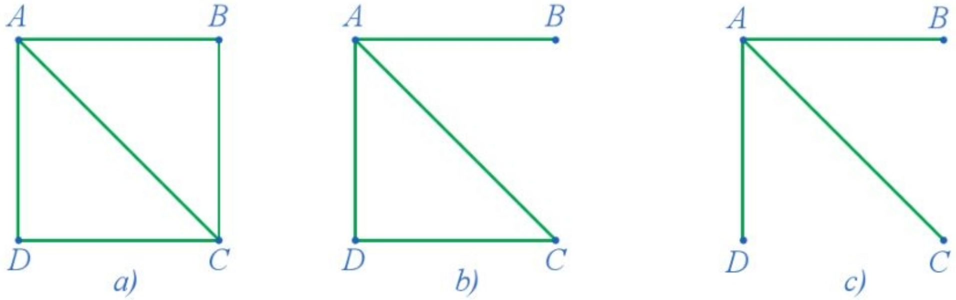
Trong trường hợp tổng quát, ta có khái niệm sau:

Trong đồ thị, một đường đi được gọi là *đường đi Hamilton* nếu đường đi đó đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần.

Nếu chu trình là đường đi Hamilton thì chu trình đó được gọi là *chu trình Hamilton*.

Chú ý: Trong đồ thị, đường đi Hamilton hoặc chu trình Hamilton không nhất thiết phải đi qua mỗi cạnh của đồ thị đó. Chẳng hạn, đường đi màu đỏ trên đồ thị ở *Hình 13* là một chu trình Hamilton không đi qua mỗi cạnh của đồ thị đó.

Ví dụ 9 Cho các đồ thị ở *Hình 14*. Hãy chỉ ra:



Hình 14

a) Đồ thị ở *Hình 14a* có chu trình Hamilton.

b) Đồ thị ở *Hình 14b* có đường đi Hamilton.

c) Đồ thị ở *Hình 14c* không có đường đi Hamilton.

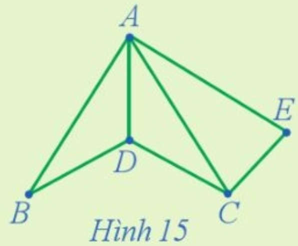
Giải

a) Đồ thị ở *Hình 14a* có chu trình Hamilton *ABCDA*.

b) Đồ thị ở *Hình 14b* có đường đi Hamilton *BACD*.

c) Đồ thị ở *Hình 14c* không thể có đường đi Hamilton vì mọi đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị thì phải đi qua một đỉnh nào đó ít nhất hai lần.

9 Tìm hai đường đi Hamilton bắt đầu từ đỉnh E của đồ thị trong *Hình 15*.



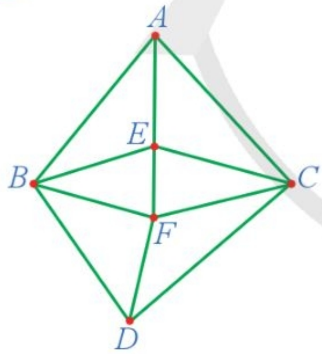
Hình 15

Khác với vấn đề về sự tồn tại của đường đi Euler (chu trình Euler) trên đồ thị đã được giải quyết triệt để bằng định lí của Euler, vấn đề về sự tồn tại của đường đi Hamilton (chu trình Hamilton) trên đồ thị trong trường hợp tổng quát là rất khó và chưa giải quyết được. Dưới đây ta sẽ giới thiệu hai định lí nổi tiếng, đó là định lí Dirac và tổng quát của nó là định lí Ore.

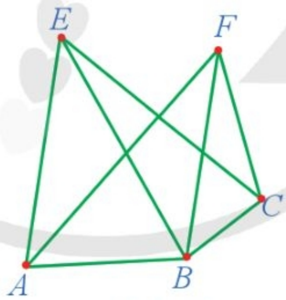
Định lí Dirac

Cho đồ thị G gồm n đỉnh. Nếu bậc của mỗi đỉnh của G không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$ thì G có một chu trình Hamilton.

Ví dụ 10 Chứng minh rằng đồ thị G ở *Hình 16* có ít nhất một chu trình Hamilton.



Hình 16



Hình 17

10 Chứng minh rằng đồ thị G ở *Hình 17* có ít nhất một chu trình Hamilton.

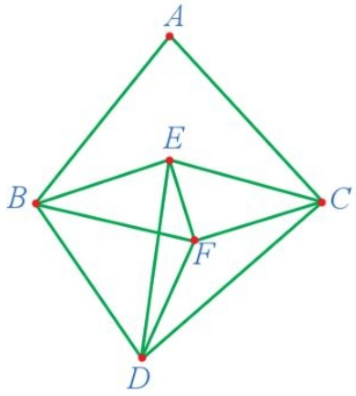
Giải

Ta thấy: Đồ thị G gồm 6 đỉnh, mỗi đỉnh của đồ thị G đều có bậc lớn hơn hoặc bằng 3. Do đó, theo định lí Dirac, đồ thị G có ít nhất một chu trình Hamilton.

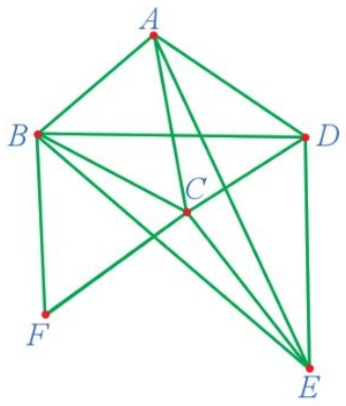
Định lí Ore

Cho đồ thị G gồm n đỉnh. Nếu tổng bậc của hai đỉnh không kề nhau bất kì P và Q của G thoả mãn bất đẳng thức: $d(P) + d(Q) \geq n$ thì G có một chu trình Hamilton.

Ví dụ 11 Chứng minh rằng đồ thị G ở *Hình 18* có ít nhất một chu trình Hamilton.



Hình 18



Hình 19

> **11** Chứng minh rằng đồ thị G ở *Hình 19* có ít nhất một chu trình Hamilton.

Giải

Đồ thị G gồm 6 đỉnh, trong đó đỉnh A có bậc 2, các đỉnh còn lại đều có bậc 4 nên tổng bậc của hai đỉnh không kề nhau bất kì đều không nhỏ hơn 6. Do đó, theo định lí Ore, đồ thị G có ít nhất một chu trình Hamilton.

Chú ý: Đồ thị G ở *Hình 18* thoả mãn điều kiện của định lí Ore nhưng không thoả mãn điều kiện của định lí Dirac.

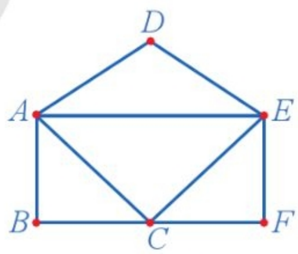
BÀI TẬP

1. Có sáu thành phố A, B, C, D, E, G sao cho hai thành phố bất kì trong chúng đều có đường nối với nhau. Sử dụng đồ thị để mô tả tình huống đó.

2. Hãy vẽ một đồ thị có bốn đỉnh sao cho chỉ có đúng:

a) Hai đỉnh cùng có bậc là 1;

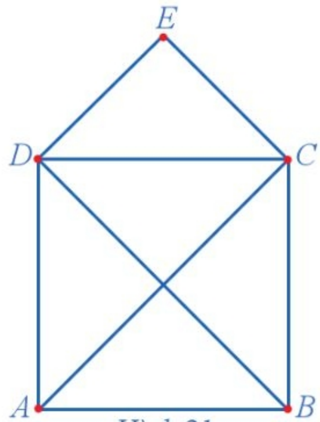
b) Hai đỉnh cùng có bậc là 2.



Hình 20

3. Tìm bậc của mỗi đỉnh và chỉ ra một chu trình Euler (nếu có) của đồ thị ở *Hình 20*.

4. Tìm bậc của mỗi đỉnh và chỉ ra một chu trình Hamilton (nếu có) của đồ thị ở *Hình 21*.

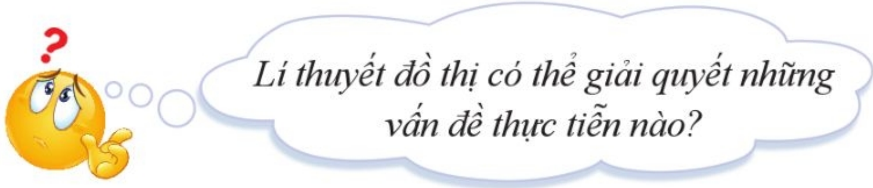


Hình 21

5. Một cuộc họp có 6 người tham dự. Hai người bất kì trong họ hoặc quen nhau hoặc không quen nhau. Chứng minh rằng có 3 người trong 6 người đó đôi một quen nhau hoặc đôi một không quen nhau.

§2 MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA LÍ THUYẾT ĐỒ THỊ

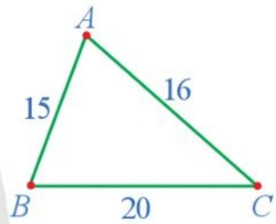
Như chúng ta đã biết, Lí thuyết đồ thị ra đời trong quá trình khái quát, mô phỏng những vấn đề của khoa học và thực tiễn thành những mô hình toán học. Vì thế, các kết quả của Lí thuyết đồ thị có nhiều ứng dụng trong khoa học và thực tiễn.



I. VẬN DỤNG ĐỒ THỊ ĐỂ GIẢI QUYẾT NHỮNG VẤN ĐỀ VỀ TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT TRONG NHỮNG TRƯỜNG HỢP ĐƠN GIẢN

1. Đồ thị có trọng số

1 Giả sử ba địa điểm A, B, C được nối với nhau theo những con đường AB, BC, CA với độ dài lần lượt là 15 km, 20 km, 16 km. Sử dụng đồ thị để mô tả tình huống đó.



Hình 22

Trong trường hợp tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Nếu mỗi cạnh của đồ thị G được gắn với một con số thực (có thể là độ dài của đường đi trên mỗi cạnh, hay chi phí vận chuyển trên mỗi cạnh đó, …) thì đồ thị G được gọi là *đồ thị có trọng số*.

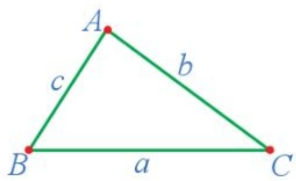
Chẳng hạn, đồ thị có trọng số ở *Hình 22* mô tả tình huống trong Hoạt động 1.

Ví dụ 1 Có ba kho hàng ở ba địa điểm A, B, C được nối với nhau theo những con đường AB, BC, CA với chi phí vận chuyển hàng hoá trên mỗi con đường đó lần lượt là a đồng, b đồng, c đồng. Sử dụng đồ thị có trọng số để mô tả tình huống đó.

Giải

Đồ thị có trọng số để mô tả tình huống đó được cho ở *Hình 23*.

1 Hãy cho ví dụ về đồ thị có trọng số.

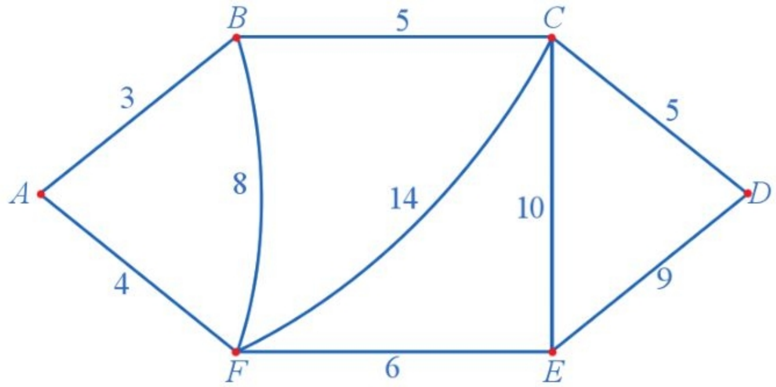


Hình 23

2. Thuật toán tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị có trọng số

2 Giả sử có sáu địa điểm A, B, C, D, E, F được nối với nhau theo những con đường với độ dài (đơn vị: kilômét) được mô tả trong *Hình 24*.

Một người giao hàng cần đi giao hàng tại sáu địa điểm trên. Người giao hàng xuất phát từ một địa điểm nào đó, đi qua các địa điểm còn lại để giao hàng và trở về địa điểm ban đầu. Hãy tìm một đường đi thoả mãn điều kiện trên cho người giao hàng sao cho quãng đường mà người giao hàng phải di chuyển là ngắn nhất.



Hình 24

Nhận xét: Bài toán tìm đường đi ngắn nhất cho người giao hàng có thể phát biểu như sau:

Trên đồ thị có trọng số ở *Hình 24*, hãy tìm một chu trình xuất phát từ một đỉnh nào đó, đi qua các đỉnh khác và trở về đỉnh ban đầu sao cho tổng độ dài các cạnh của chu trình đó là ngắn nhất.

Ở dạng tổng quát, bài toán tìm đường đi ngắn nhất cho người giao hàng có thể phát biểu như sau:

Có n địa điểm cần giao hàng, một số cặp địa điểm có đường nối với nhau và biết độ dài của mỗi đường nối đó. Ngoài ra, ta có thể đi từ một địa điểm này đến một địa điểm khác theo các con đường đã có. Một người giao hàng cần đi giao hàng tại n địa điểm trên. Người giao hàng xuất phát từ một địa điểm nào đó, đi qua các địa điểm khác để giao hàng và trở về địa điểm ban đầu. Hãy tìm một đường đi thoả mãn điều kiện trên cho người giao hàng sao cho độ dài quãng đường mà người giao hàng phải di chuyển là ngắn nhất.

Bài toán kiểu như vậy được gọi là bài toán về *tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị có trọng số*, đóng vai trò quan trọng trong Lí thuyết đồ thị hiện nay, nhất là những vấn đề liên quan đến tối ưu. Khác với bài toán tìm đường đi Euler trên đồ thị, bài toán tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị có trọng số rất khó giải trong trường hợp tổng quát, mặc dù các nhà toán học đã tìm ra nhiều phương pháp, thuật toán giải cho những trường hợp cụ thể.

Cho đến nay, người ta cũng đã biết một số thuật toán để giải trong một số trường hợp riêng, chẳng hạn thuật toán *láng giềng gần nhất* và thuật toán của các nhà toán học Dijkstra (năm 1959), Whiting và Hillier (năm 1960).

Đối với đồ thị có trọng số, thuật toán láng giềng gần nhất để tìm các chu trình xuất phát từ một đỉnh cho trước, đi qua các đỉnh khác và trở về đỉnh ban đầu sao cho tổng độ dài các cạnh của chu trình đó là ngắn nhất, được xây dựng như sau:

Trước hết, ta chứng minh đồ thị có chu trình Hamilton. Sau đó, ta tiếp tục thực hiện các bước sau:

Bước 1. Chọn một đỉnh bắt đầu, ta gọi là đỉnh V.

Bước 2. Xuất phát từ đỉnh hiện hành, chọn cạnh có độ dài nhỏ nhất nối đến một trong các đỉnh chưa đến. Đánh dấu đỉnh cuối của cạnh vừa chọn.

Bước 3. Xuất phát từ đỉnh vừa đánh dấu, nếu còn đỉnh chưa đến thì quay lại *Bước 2*.

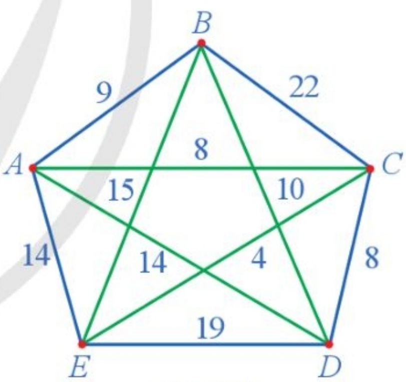
Bước 4. Quay lại đỉnh V.

Chú ý: Để tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị có trọng số, ta áp dụng thuật toán láng giềng gần nhất để tìm tất cả các chu trình xuất phát từ một đỉnh ban đầu, đi qua các đỉnh khác và trở về đỉnh ban đầu sao cho tổng độ dài các cạnh của chu trình đó là ngắn nhất. Sau đó, ta so sánh độ dài của tất cả các chu trình "tốt nhất" vừa tìm được để tìm ra chu trình có tổng độ dài các cạnh là ngắn nhất.

Ví dụ 2 Có năm địa điểm với độ dài quãng đường giữa các địa điểm (đơn vị: kilômét) mô tả ở *Hình 25*.

a) Sử dụng thuật toán láng giềng gần nhất, tìm các chu trình xuất phát từ một địa điểm, đi qua tất cả các địa điểm khác và trở về địa điểm ban đầu sao cho tổng độ dài các cạnh của chu trình là ngắn nhất.

b) Từ đó hãy tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị có trọng số ở *Hình 25*, tức là tìm một chu trình đi qua tất cả các đỉnh sao cho tổng độ dài các cạnh của chu trình đó là ngắn nhất.



Hình 25

2 Sử dụng thuật toán láng giềng gần nhất để giải bài toán trong Hoạt động 2.

Giải

a) Từ A, đỉnh gần nhất là C, $AC = 8$ km;

Từ C, đỉnh chưa đến gần nhất là E, $CE = 4$ km;

Từ E, đỉnh chưa đến gần nhất là B, $EB = 15$ km;

Từ B, đỉnh chưa đến gần nhất là D, $BD = 10$ km;

Đến đây không còn đỉnh chưa đến, vì vậy quay về A, $DA = 14$ km.

Tổng quãng đường theo chu trình $ACEBDA$ là: $8 + 4 + 15 + 10 + 14 = 51$ (km).

Tương tự bắt đầu với những đỉnh khác, ta có bảng sau:

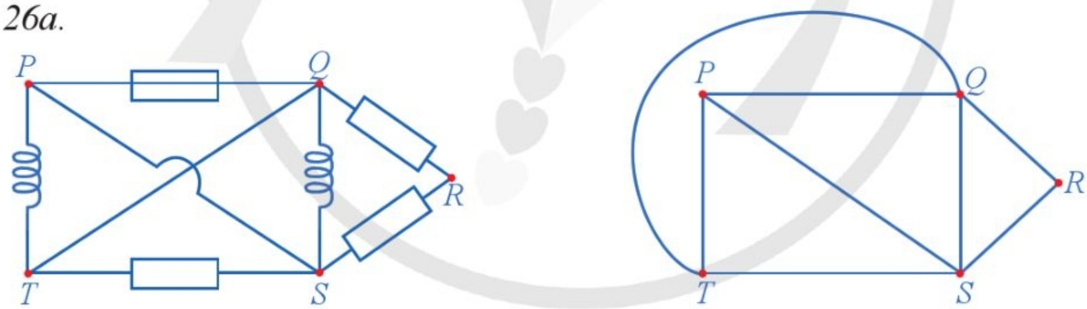
Đỉnh bắt đầu	Chu trình	Tổng chiều dài (km)
A	*ACEBDA*	51
B	*BACEDB*	50
C	*CEABDC*	45
D	*DCEABD*	45
E	*ECABDE*	50
E	*ECDBAE*	45

b) Ba đường đi ngắn nhất có cùng chiều dài 45 km, đó là các chu trình: *CEABDC*, *DCEABD*, *ECDBAE*.

II. VẬN DỤNG ĐỒ THỊ ĐỂ GIẢI QUYẾT NHỮNG VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ

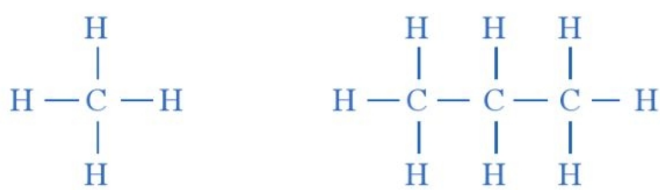
1. Liên hệ với khoa học tự nhiên

Có nhiều vấn đề trong khoa học tự nhiên (Vật lí, Hoá học, Sinh học) được giải quyết bằng cách vận dụng đồ thị. Chẳng hạn, đồ thị ở *Hình 26b* minh hoạ một phần của hệ thống điện ở *Hình 26a*.



a) *Hình 26* b)

Ví dụ 3 *Hình 27a, 27b* biểu diễn cấu trúc hoá học của các phân tử methane (CH_4) và propane (C_3H_8). Vẽ các đồ thị minh hoạ biểu diễn cấu trúc hoá học của các phân tử methane (CH_4) và propane (C_3H_8) ở *Hình 27a, 27b*.



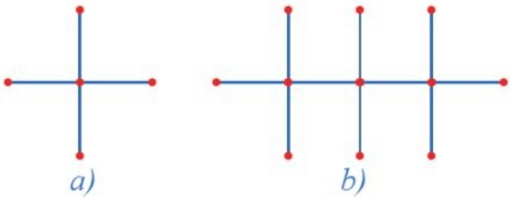
Methane *Propane*

a) *Hình 27* b)

3 Hexane C_6H_{14} có năm đồng phân. Vẽ đồ thị tương ứng với năm đồng phân đó.

Giải

Hai đồ thị ở *Hình 28a, 28b*, lần lượt minh hoạ biểu diễn cấu trúc hoá học của các phân tử methane (CH_4) và propane (C_3H_8) ở *Hình 27a, 27b*. Trong đó các nguyên tử C và H tạo nên các đỉnh của đồ thị, còn các liên kết C – H hoặc C – C tạo nên các cạnh của đồ thị.



Hình 28

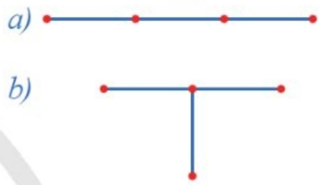
Ví dụ 4 Butane C_4H_{10} có hai đồng phân. Vẽ đồ thị tương ứng với hai đồng phân đó.

Giải

Hai đồng phân butane C_4H_{10} là: $CH_3 - CH_2 - CH_2 - CH$

$CH_3 - CH - CH_3$
|
CH_3

Hai đồ thị ở *Hình 29a, 29b* minh hoạ biểu diễn hai đồng phân của butane C_4H_{10}. Trong đó các nguyên tử CH, CH_2, CH_3 tạo nên các đỉnh của đồ thị, còn các liên kết $CH_3 - CH_2$, $CH_2 - CH_2$, $CH_2 - CH_3$, $CH_3 - CH$, $CH - CH_3$ tạo nên các cạnh của đồ thị.



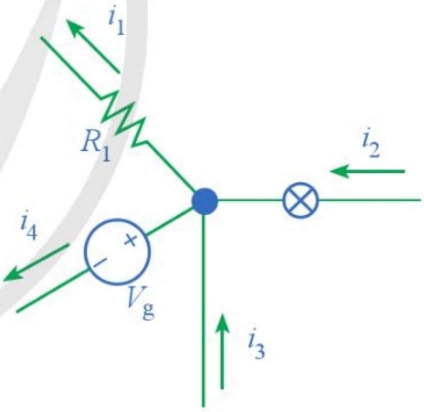
Hình 29

Ví dụ 5 Sử dụng đồ thị để minh hoạ định luật bảo toàn điện tích tại một nút (còn được gọi là định luật Kirchhoff) trong trường hợp có hai cường độ dòng điện hướng vào nút và hai cường độ dòng điện rời khỏi nút.

Giải

Đồ thị ở *Hình 30* mô tả một nút trong một mạch điện, ở đó i_2, i_3 là cường độ dòng điện hướng vào nút và i_1, i_4 là cường độ dòng điện rời khỏi nút.

Định luật bảo toàn điện tích tại một nút khẳng định rằng: Tại bất kì nút nào trong một mạch điện, tổng cường độ dòng điện hướng vào nút phải bằng tổng cường độ dòng điện rời khỏi nút.



Hình 30

Nếu ta quy ước dòng điện rời khỏi nút có giá trị âm và dòng điện hướng vào nút có giá trị dương (hay ngược lại) thì định luật trên có thể phát biểu như sau: Tổng giá trị đại số của dòng điện tại một nút trong một mạch điện là bằng không.

2. Liên hệ với công nghệ

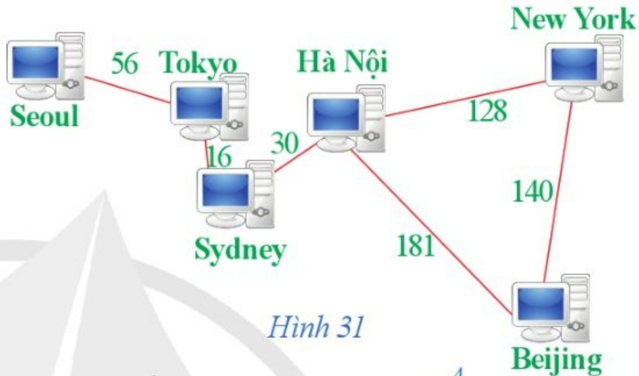
Có nhiều vấn đề trong công nghệ, đặc biệt là công nghệ thông tin, được giải quyết bằng cách vận dụng đồ thị.

Trong phần trước, chúng ta đã làm quen với thuật toán tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị có trọng số. Chúng ta nêu thêm bài toán tìm đường đi cho robot tự hành.

Giả sử một robot tự hành tự do di chuyển trên mặt đất trong môi trường với nhiều vật cản, làm thế nào để tìm ra đường dẫn tốt nhất với một vài tiêu chuẩn tối ưu nào đó như ngắn nhất về mặt khoảng cách, ngắn nhất về mặt thời gian, tiêu tốn năng lượng ít nhất để robot có thể di chuyển dọc theo đường này từ điểm bắt đầu đến điểm kết thúc mà không va vào các vật cản trên đường đi. Đây là vấn đề gặp phải khá thường xuyên trong xây dựng robot tự hành và mục đích của bài toán tìm đường là giải quyết các vấn đề tương tự như thế. Ngày nay, người ta cũng đã tìm ra một số thuật toán để giải vấn đề đó.

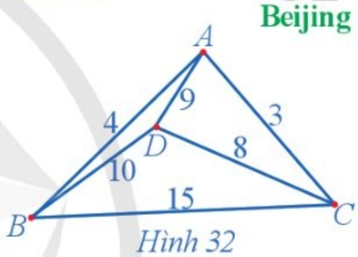
BÀI TẬP

1. *Hình 31* biểu diễn mạng lưới máy chủ và tốc độ truyền dữ liệu (đơn vị: Megabit/giây, kí hiệu là Mbps) giữa một số thành phố. Vẽ một đồ thị sử dụng điểm, đường để biểu diễn mạng lưới đó.



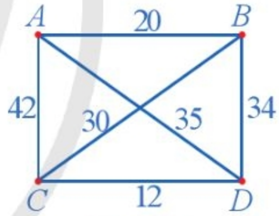
Hình 31

2. Có bốn địa điểm với độ dài quãng đường giữa các địa điểm (đơn vị: kilômét) mô tả trong *Hình 32*. Sử dụng thuật toán láng giềng gần nhất, tìm các chu trình xuất phát từ một đỉnh đi qua tất cả các địa điểm, mỗi địa điểm đúng một lần sao cho tổng độ dài các cạnh của chu trình là nhỏ nhất.



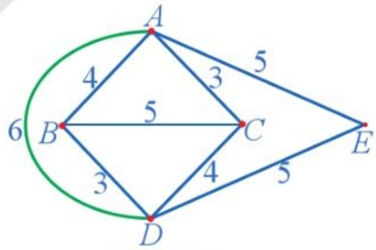
Hình 32

3. Giả sử chi phí di chuyển giữa các địa điểm được mô tả ở *Hình 33*. Ta nên chọn theo chu trình nào đi qua tất cả các địa điểm để tổng chi phí di chuyển là thấp nhất? Chi phí thấp nhất đó bằng bao nhiêu?



Hình 33

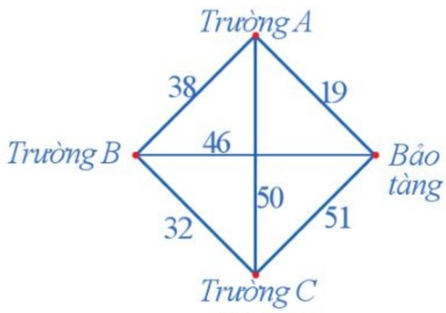
4. Sử dụng thuật toán láng giềng gần nhất, hãy giải bài toán người giao hàng đối với đồ thị ở *Hình 34*, số ghi trên mỗi cạnh của đồ thị mô tả độ dài quãng đường giữa các địa điểm (đơn vị: kilômét).



Hình 34

5. Một nhân viên của bảo tàng nghệ thuật đang có kế hoạch giới thiệu nội dung cuộc triển lãm của bảo tàng đến ba trường học trong khu vực. Người đó muốn đến từng trường và quay trở lại bảo tàng sau khi thăm cả ba trường. Thời gian di chuyển (đơn vị: phút) giữa các trường học và giữa bảo tàng với mỗi trường học được mô tả trong *Hình 35*.

Tìm chu trình xuất phát từ viện bảo tàng sao cho thời gian đi là ít nhất.



Hình 35

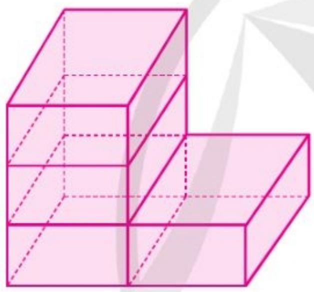
CHUYÊN ĐỀ III

MỘT SỐ YẾU TỐ VẼ KĨ THUẬT

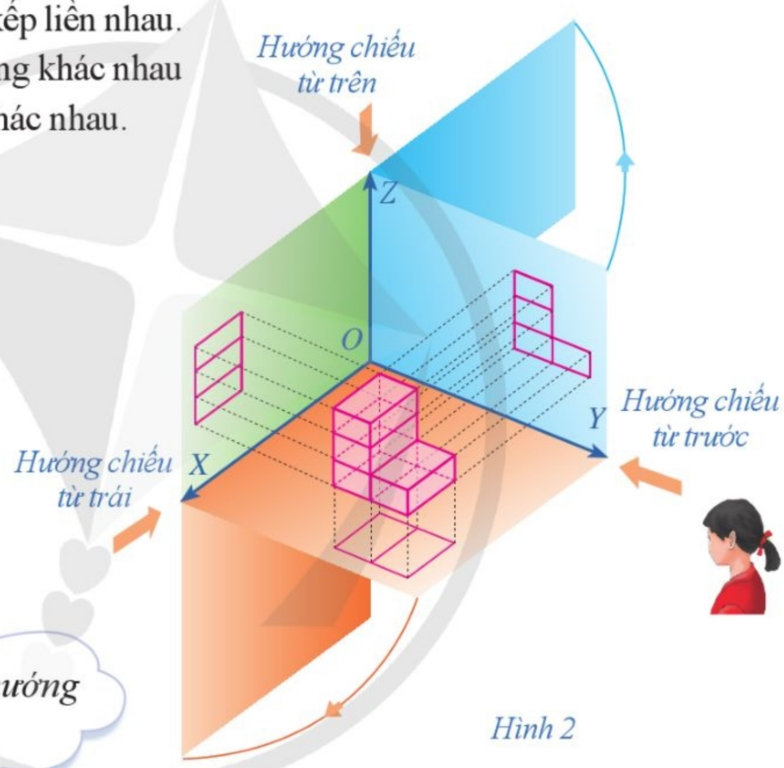
Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ tìm hiểu về một số nội dung cơ bản về vẽ kĩ thuật; đọc và vẽ bản vẽ kĩ thuật đơn giản.

§1 MỘT SỐ NỘI DUNG CƠ BẢN VỀ VẼ KĨ THUẬT

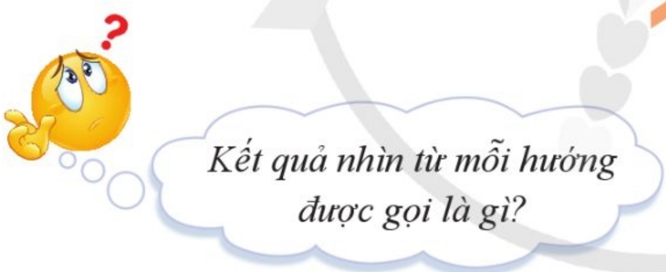
Hình khối ở *Hình 1* gồm 4 viên gạch xếp liền nhau. Khi nhìn hình khối đó theo nhiều hướng khác nhau như ở *Hình 2* ta được nhiều kết quả khác nhau.



Hình 1



Hình 2



I. PHƯƠNG PHÁP GÓC CHIẾU THỨ NHẤT. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH, KHỐI

1. Phương pháp góc chiếu thứ nhất

1 Cho mặt phẳng (P), điểm M, đoạn thẳng AB và đường thẳng a. Xác định hình chiếu vuông góc trên mặt phẳng (P) của:

a) Điểm M; b) Đoạn thẳng AB; c) Đường thẳng a.

Bằng cách sử dụng phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng, ta có thể xác định được hình biểu diễn của một vật thể trong không gian, từ đó giúp ta hình dung được những đặc điểm cơ bản của vật thể đó.

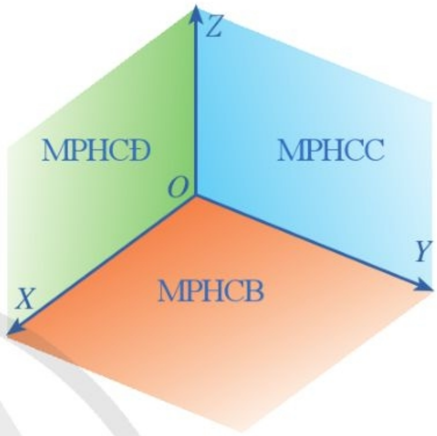
Áp dụng ý tưởng đó, trên bản vẽ kĩ thuật thường dùng các hình chiếu vuông góc để biểu diễn hình dạng của vật thể, chúng được vẽ theo *phương pháp góc chiếu thứ nhất* (hay còn gọi là *phương pháp châu Âu*). Nội dung của phương pháp đó như sau:

– Trong không gian ta xét ba tia OX, OY, OZ đôi một vuông góc với nhau như ở *Hình 3*.

– Phần mặt phẳng xác định bởi hai tia OX và OY được gọi là *mặt phẳng hình chiếu bằng*, viết tắt là MPHCB.

Phần mặt phẳng xác định bởi hai tia OY và OZ được gọi là *mặt phẳng hình chiếu cạnh*, viết tắt là MPHCC.

Phần mặt phẳng xác định bởi hai tia OZ và OX được gọi là *mặt phẳng hình chiếu đứng*, viết tắt là MPHCĐ.

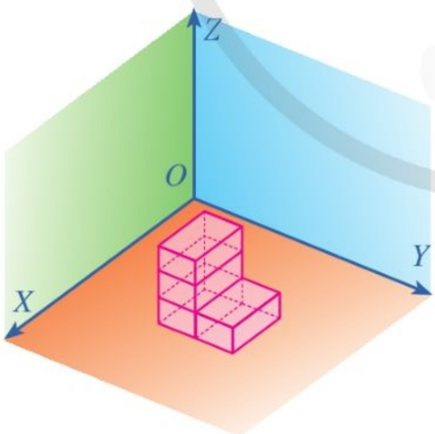


Hình 3

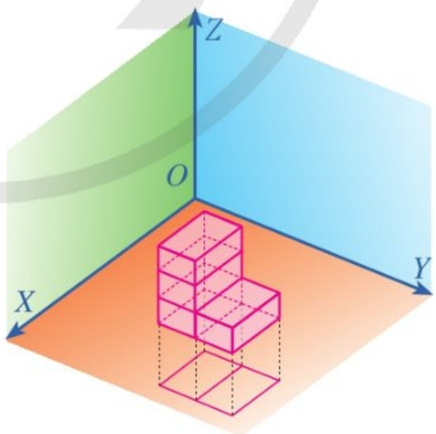
– Đặt vật thể cần biểu diễn vào trong "góc tam diện" tạo bởi các mặt phẳng hình chiếu bằng, mặt phẳng hình chiếu cạnh và mặt phẳng hình chiếu đứng (*Hình 4*).

– Vật thể được đặt giữa người quan sát và mặt phẳng chiếu.

– Xác định hình chiếu vuông góc của vật thể trên mặt phẳng hình chiếu bằng, ta nhận được *hình chiếu bằng* (*Hình 5*).



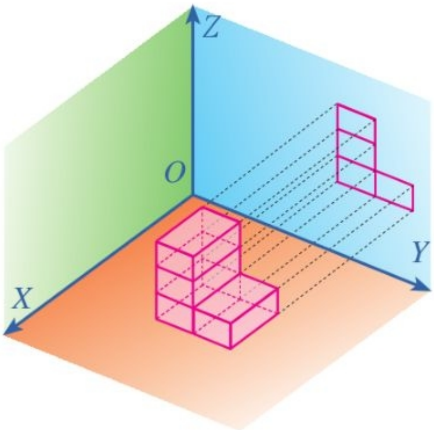
Hình 4



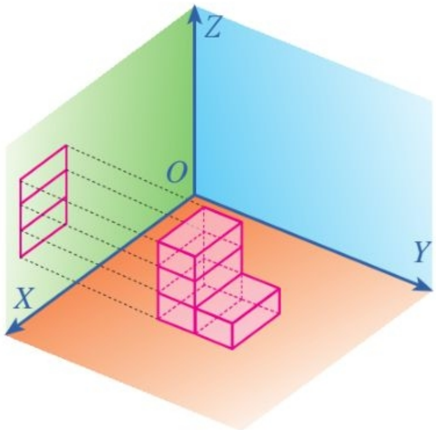
Hình 5

– Xác định hình chiếu vuông góc của vật thể trên mặt phẳng hình chiếu cạnh, ta nhận được *hình chiếu cạnh* (*Hình 6*).

– Xác định hình chiếu vuông góc của vật thể trên mặt phẳng hình chiếu đứng, ta nhận được *hình chiếu đứng* (*Hình 7*).



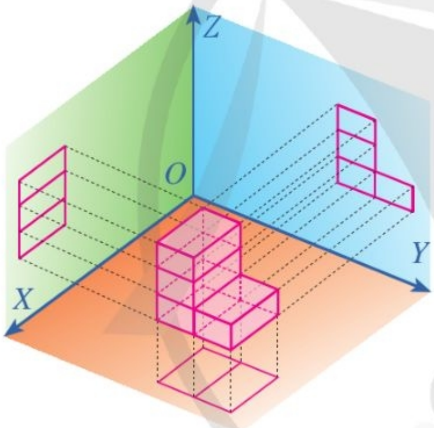
Hình 6



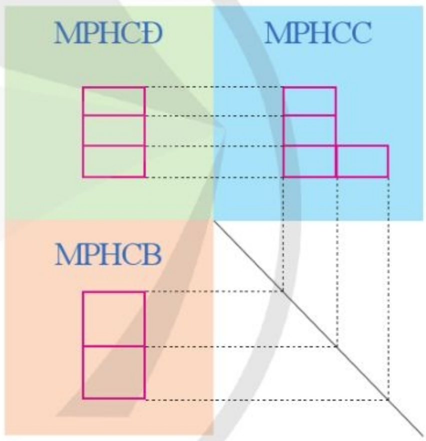
Hình 7

– Tổng hợp các hình chiếu theo phương pháp góc chiếu thứ nhất được mô tả trong *Hình 8*.

– Đặt các hình chiếu cùng nằm trên một mặt phẳng (mặt phẳng bản vẽ) như trong *Hình 9*.



Hình 8

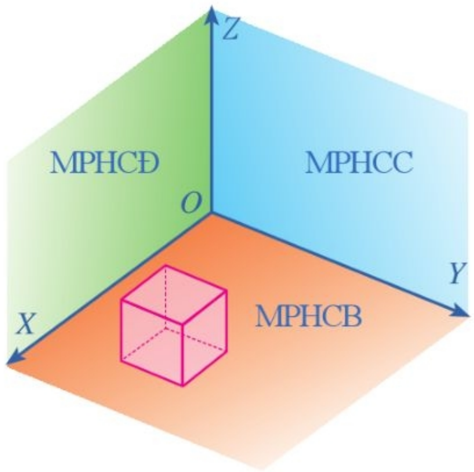


Hình 9

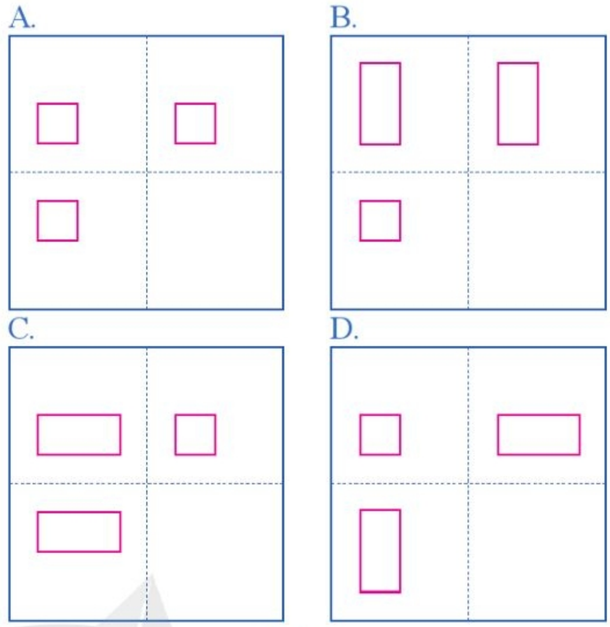
Phương pháp góc chiếu thứ nhất là phương pháp biểu diễn các hình chiếu bằng, hình chiếu cạnh, hình chiếu đứng của vật thể trên cùng một mặt phẳng (bản vẽ) theo thứ tự như trong *Hình 9*.

Ví dụ 1 Khối lập phương ở *Hình 10* có các cạnh song song hoặc vuông góc với các tia OX, OY, OZ. Theo phương pháp góc chiếu thứ nhất, bản vẽ nào ở *Hình 11* biểu diễn cho khối lập phương đó?

Đoàn văn Doanh – THPT Nam Trực – Nam Định



Hình 10

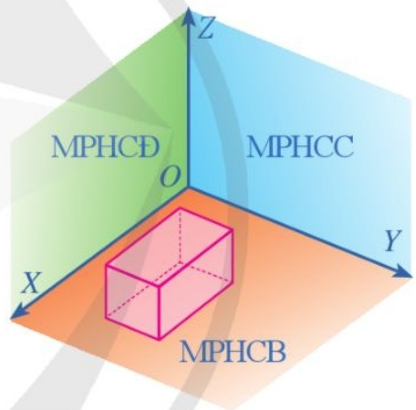


Hình 11

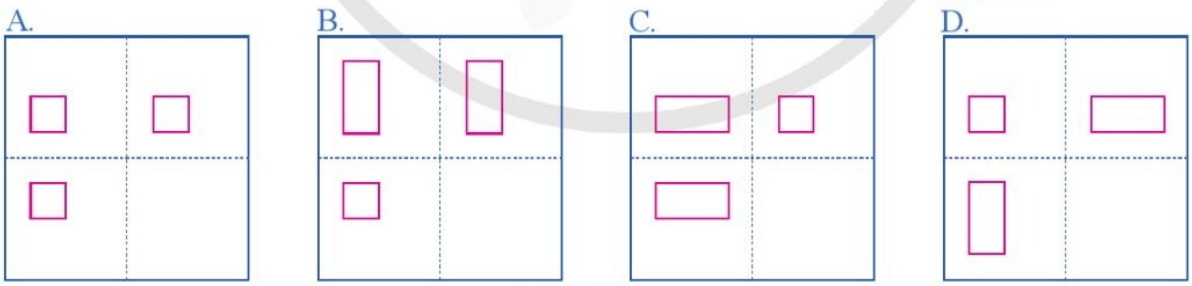
Giải

Theo phương pháp chiếu góc thứ nhất, bản vẽ A ở *Hình 11* biểu diễn cho khối lập phương đó.

Ví dụ 2 Khối hộp chữ nhật ở *Hình 12* có các cạnh song song hoặc vuông góc với các tia *OX*, *OY*, *OZ*. Theo phương pháp góc chiếu thứ nhất, bản vẽ nào ở *Hình 13* biểu diễn cho khối hộp chữ nhật đó?



Hình 12

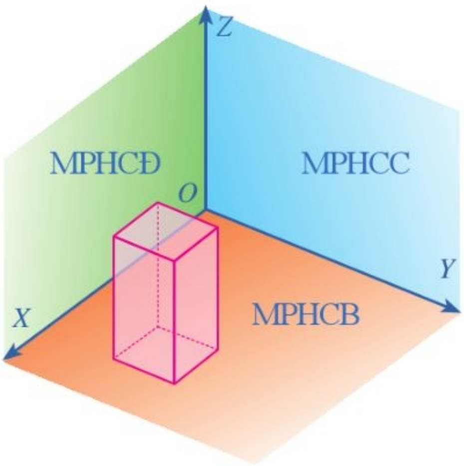


Hình 13

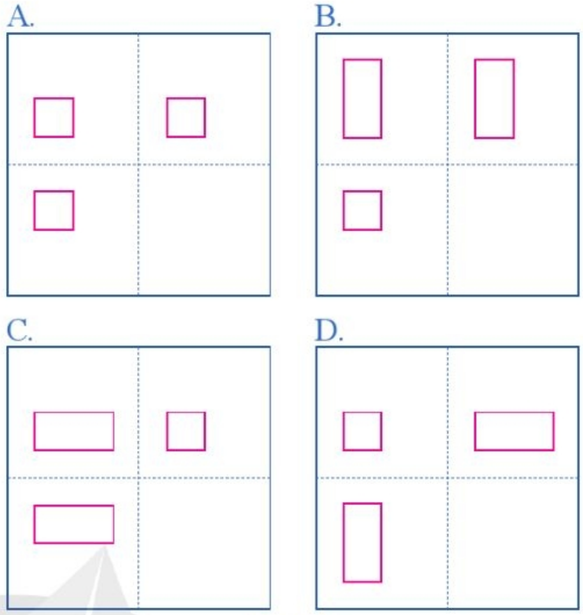
Giải

Theo phương pháp chiếu góc thứ nhất, bản vẽ C ở *Hình 13* biểu diễn cho khối hộp chữ nhật đó.

Ví dụ 3 Khối hộp chữ nhật ở *Hình 14* có các cạnh song song hoặc vuông góc với các tia *OX*, *OY*, *OZ*. Theo phương pháp góc chiếu thứ nhất, bản vẽ nào ở *Hình 15* biểu diễn cho khối hộp chữ nhật đó?



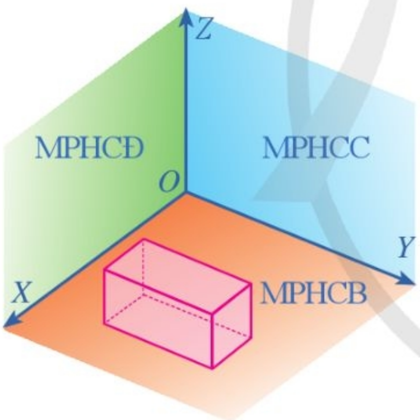
Hình 14



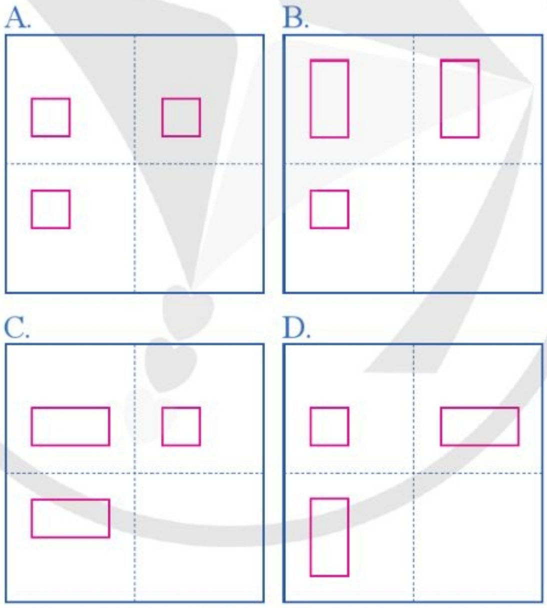
Hình 15

Giải

Theo phương pháp chiếu góc thứ nhất, bản vẽ B ở *Hình 15* biểu diễn cho khối hộp chữ nhật đó.



Hình 16



Hình 17

1 Khối hộp chữ nhật ở *Hình 16* có các cạnh song song hoặc vuông góc với các tia OX, OY, OZ. Theo phương pháp góc chiếu thứ nhất, bản vẽ nào ở *Hình 17* biểu diễn cho khối hộp chữ nhật đó?

2. Hình biểu diễn của một hình khối theo phương pháp góc chiếu thứ nhất

2 Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng ℓ cắt mặt phẳng (P). Cho điểm M, đoạn thẳng AB và đường thẳng a. Xác định hình chiếu song song trên mặt phẳng (P) theo phương ℓ của:

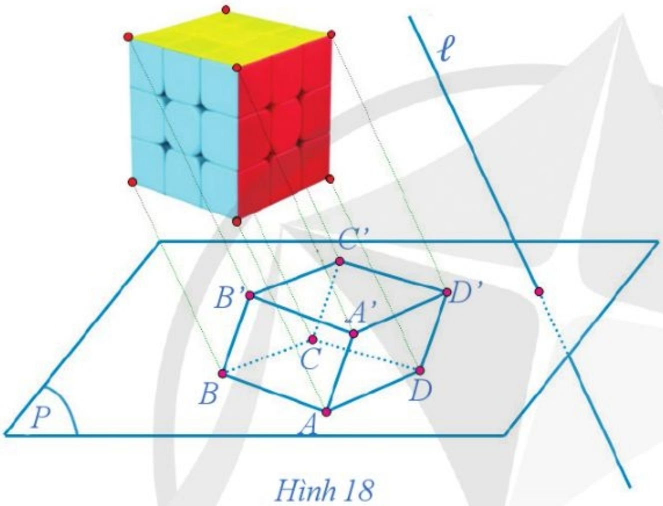
a) Điểm M; b) Đoạn thẳng AB; c) Đường thẳng a.

Hình biểu diễn của một hình $\mathcal{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của hình $\mathcal{H}$ trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

Chú ý: Muốn vẽ đúng hình biểu diễn của một hình không gian ta phải áp dụng các tính chất của phép chiếu song song.

Ví dụ 4 Cho khối rubik không có điểm chung với mặt phẳng (P) và đường thẳng ℓ cắt mặt phẳng (P). Hãy xác định hình biểu diễn của khối rubik qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương ℓ.

Giải



Hình 18

Hình biểu diễn của khối rubik qua phép chiếu song song trên mặt phẳng (P) theo phương ℓ được cho trong *Hình 18*.

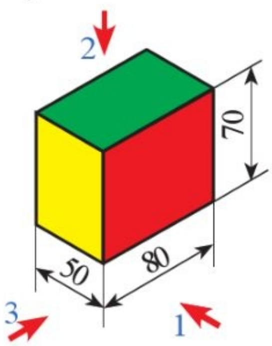
2 Cho hình trụ có đáy trên là đường tròn (C), đường thẳng ℓ song song với đường sinh của hình trụ, mặt phẳng (P) không song song với mặt đáy của hình trụ. Hãy xác định hình chiếu song song của đường tròn (C) trên mặt phẳng (P) theo phương ℓ.

Ta nêu lại các hình chiếu vuông góc của một số khối hình học cơ bản.

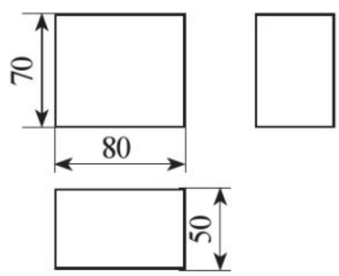
Trong các hình dưới đây, ta quy ước: Các hướng chiếu 1, 2, 3 tương ứng với các hướng chiếu từ trước, từ trên và từ trái.

a) Các hình chiếu vuông góc của hình hộp chữ nhật

Hình 19b trình bày các hình chiếu vuông góc của hình hộp chữ nhật được mô tả ở *Hình 19a*.



a) Hình hộp chữ nhật và các hướng chiếu

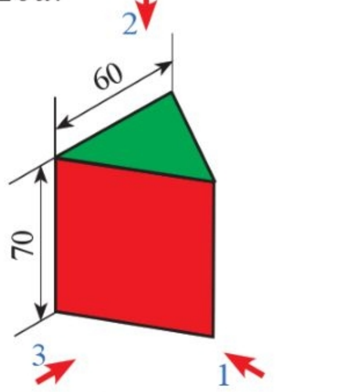


b) Các hình chiếu vuông góc của hình hộp chữ nhật

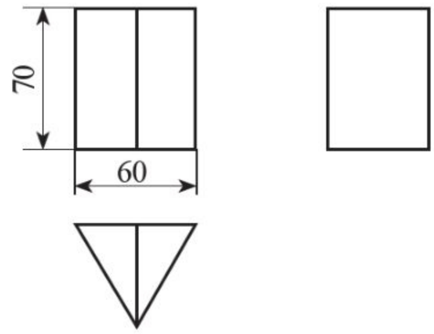
Hình 19

b) Các hình chiếu vuông góc của hình lăng trụ tam giác đều

Hình 20b trình bày các hình chiếu vuông góc của hình lăng trụ tam giác đều được mô tả ở *Hình 20a*.



a) Hình lăng trụ tam giác đều và các hướng chiếu

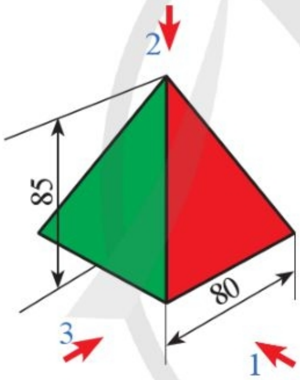


b) Các hình chiếu vuông góc của hình lăng trụ tam giác đều

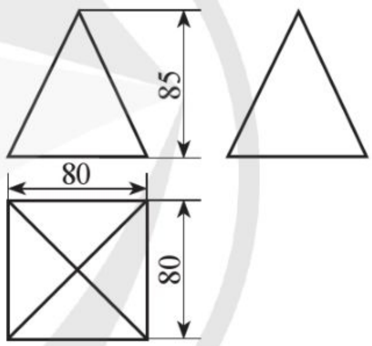
Hình 20

c) Các hình chiếu vuông góc của hình chóp tứ giác đều

Hình 21b trình bày các hình chiếu vuông góc của hình chóp tứ giác đều được mô tả ở *Hình 21a*.



a) Hình chóp tứ giác đều và các hướng chiếu

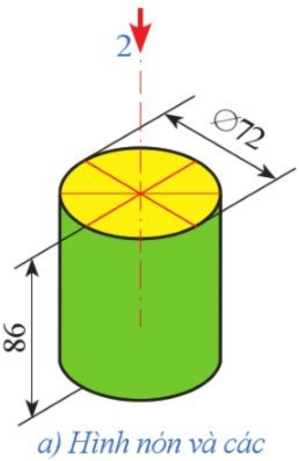


b) Các hình chiếu vuông góc của hình chóp tứ giác đều

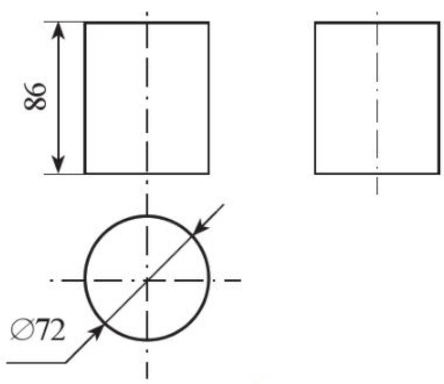
Hình 21

d) Các hình chiếu vuông góc của hình trụ

Hình 22b trình bày các hình chiếu vuông góc của hình trụ được mô tả ở *Hình 22a*.



a) Hình nón và các hướng chiếu

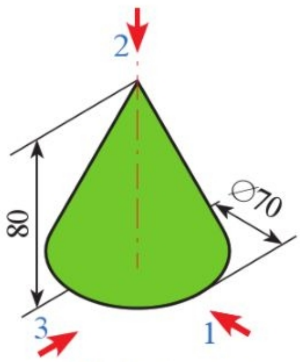


b) Các hình chiếu vuông góc của hình nón

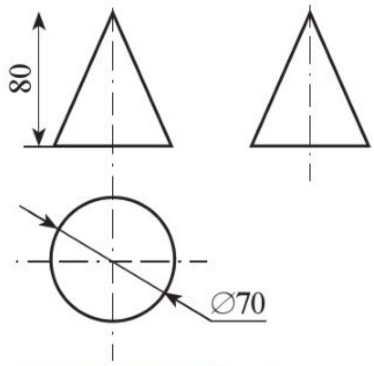
Hình 22

e) Các hình chiếu vuông góc của hình nón

Hình 23b trình bày các hình chiếu vuông góc của hình nón được mô tả ở *Hình 23a*.



a) Hình nón và các hướng chiếu

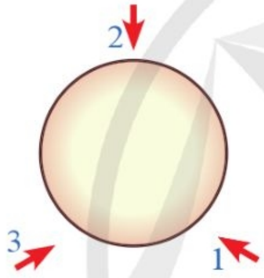


b) Các hình chiếu vuông góc của hình nón

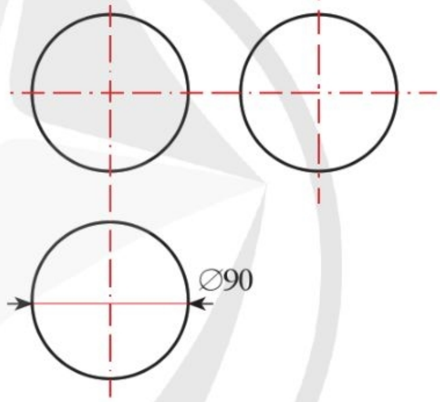
Hình 23

g) Các hình chiếu vuông góc của hình cầu

Hình 24b trình bày các hình chiếu vuông góc của hình cầu được mô tả ở *Hình 24a*.



a) Hình cầu và các hướng chiếu



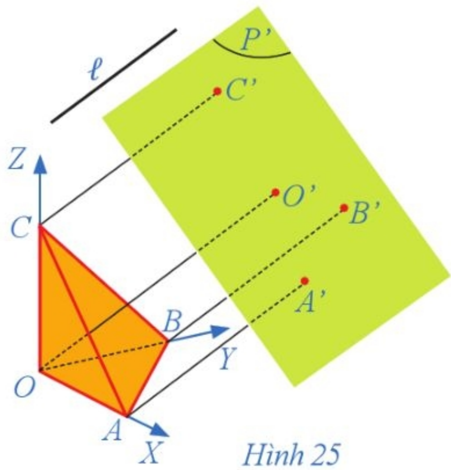
b) Các hình chiếu vuông góc của hình cầu

Hình 24

II. HÌNH CHIẾU TRỤC ĐO

3 Cho hình chóp tam giác đều $O.ABC$ có các góc AOB, BOC, COA đều là góc vuông. Xét hệ trục toạ độ vuông góc $OXYZ$ sao cho A, B, C lần lượt nằm trên các trục OX, OY, OZ. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C và (P') là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P).

Giả sử ℓ là đường thẳng không song song với (P') và không song song với các trục toạ độ, các điểm O', A', B', C' lần lượt là hình chiếu song song theo phương ℓ của các điểm O, A, B, C trên mặt phẳng (P') (*Hình 25*).

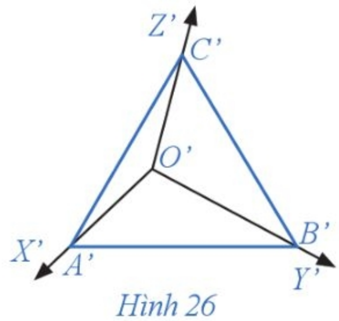


Hình 25

Hãy xác định:

a) Hình chiếu song song $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ trên mặt phẳng (P') của lần lượt các trục toạ độ OX, OY, OZ theo phương ℓ;

b) Hình chiếu song song theo phương ℓ của hình chóp tam giác đều $O.ABC$ trên mặt phẳng (P').



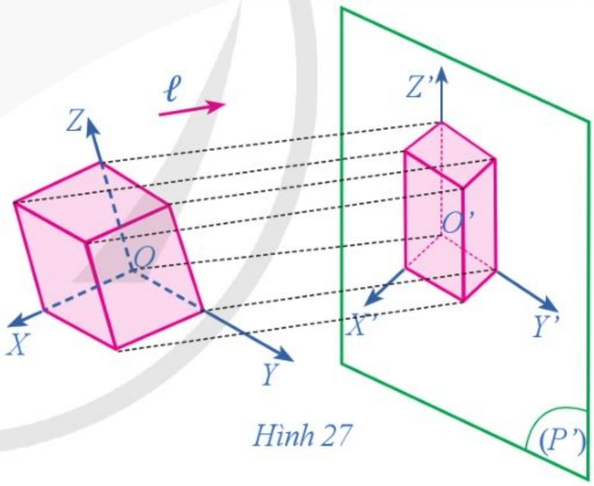
Hình 26

Nhận xét: Trên mặt phẳng (P'), tam giác $A'B'C'$ và hệ toạ độ $O'X'Y'Z'$ (*Hình 26*) gọi là *hình chiếu trục đo* của hình chóp tam giác đều $O.ABC$.

Một cách tổng quát, hình chiếu trục đo được xây dựng như sau:

Giả sử một vật thể có gắn hệ trục toạ độ vuông góc $OXYZ$ với các trục toạ độ đặt theo chiều dài, chiều rộng và chiều cao của vật thể. Chiếu vật thể cùng hệ toạ độ vuông góc lên mặt phẳng hình chiếu (P') theo phương ℓ (ℓ không song song với (P') và không song song với các trục toạ độ). Kết quả trên mặt phẳng (P') nhận được một hình chiếu của vật thể và hệ toạ độ $O'X'Y'Z'$. Hình biểu diễn đó gọi là *hình chiếu trục đo* của vật thể.

Trong phép chiếu trên, hình chiếu của các trục toạ độ OX, OY, OZ lần lượt là các trục $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ gọi là các *trục đo*. Góc giữa các trục đo: $\widehat{X'O'Y'}$; $\widehat{Y'O'Z'}$; $\widehat{Z'O'X'}$ gọi là các *góc trục đo* (*Hình 27*). Tỉ số giữa độ dài hình chiếu của một đoạn thẳng nằm trên trục toạ độ với độ dài thực của đoạn thẳng đó gọi là *hệ số biến dạng*. Như vậy ta có các hệ số biến dạng p, q, r lần lượt theo trục $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$.



Hình 27

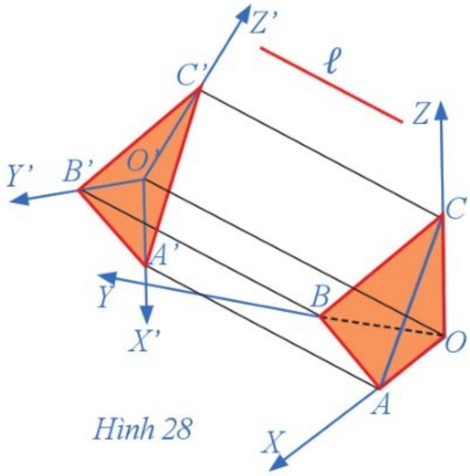
Nhận xét: Để dễ nhận biết hình dạng của vật thể, trên bản vẽ kĩ thuật thường kết hợp các hình chiếu vuông góc theo phương pháp góc chiếu thứ nhất với hình chiếu trục đo.

4 Trong Hoạt động 3, giả sử đường thẳng ℓ vuông góc với mặt phẳng (P') (*Hình 28*).

a) Tam giác $A'B'C'$ có phải là tam giác đều hay không?

b) Tìm số đo của các góc trục đo:

$\widehat{X'O'Y'}$; $\widehat{Y'O'Z'}$; $\widehat{Z'O'X'}$.

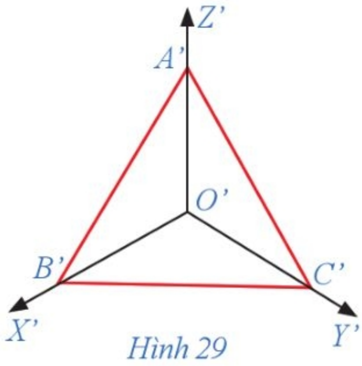


Hình 28

c) So sánh các hệ số biến dạng:

$$p = \frac{O'A'}{OA}; q = \frac{O'B'}{OB}; r = \frac{O'C'}{OC}.$$

Nhận xét: Trên mặt phẳng (P'), tam giác $A'B'C'$ và hệ toạ độ $O'X'Y'Z'$ (*Hình 29*) gọi là *hình chiếu trục đo vuông góc đều* của hình chóp tam giác đều $O.ABC$.



Hình 29

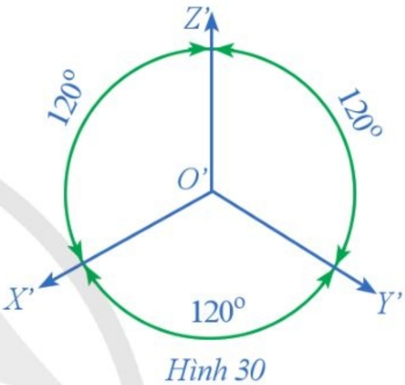
Một cách tổng quát, hình chiếu trục đo vuông góc đều được xây dựng như sau:

– Các góc trục đo đều bằng 120°, tức là:

$$\widehat{X'O'Y'} = \widehat{Y'O'Z'} = \widehat{Z'O'X'} = 120^{\circ}.$$

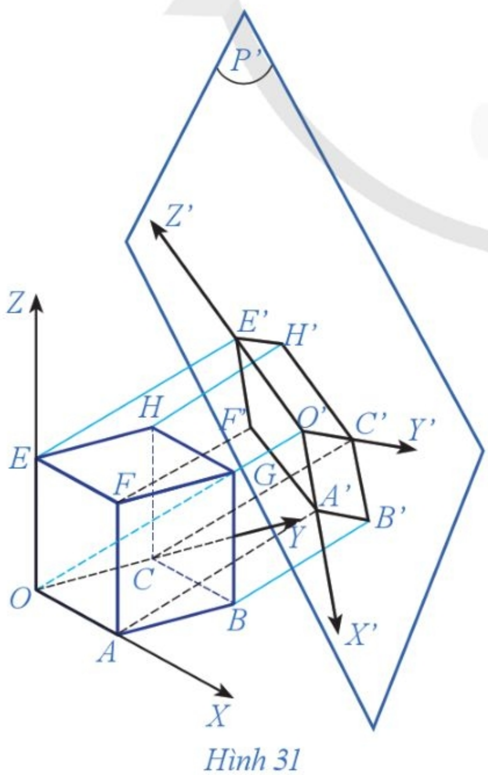
– Các hệ số biến dạng p, q, r đều bằng 1, tức là độ dài hình chiếu của một đoạn thẳng nằm trên trục toạ độ bằng độ dài thực của đoạn thẳng đó.

– Trục $O'Z'$ biểu thị chiều cao được đặt thẳng đứng (*Hình 30*).

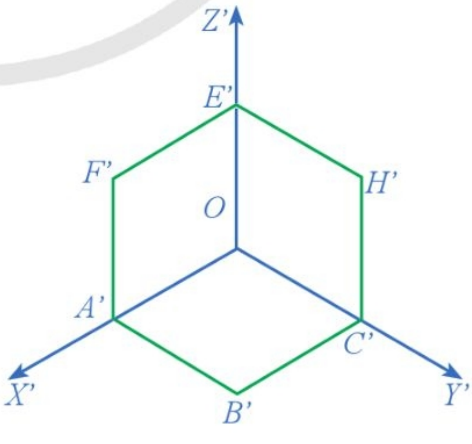


Hình 30

Ví dụ 5 Trong hệ trục toạ độ vuông góc $OXYZ$, cho khối lập phương $OABC.EFGH$. Gọi (P') là mặt phẳng vuông góc với đường thẳng OG. Hãy xác định hình chiếu trục đo vuông góc đều của khối lập phương $OABC.EFGH$ trên mặt phẳng (P').



Hình 31



Hình 32

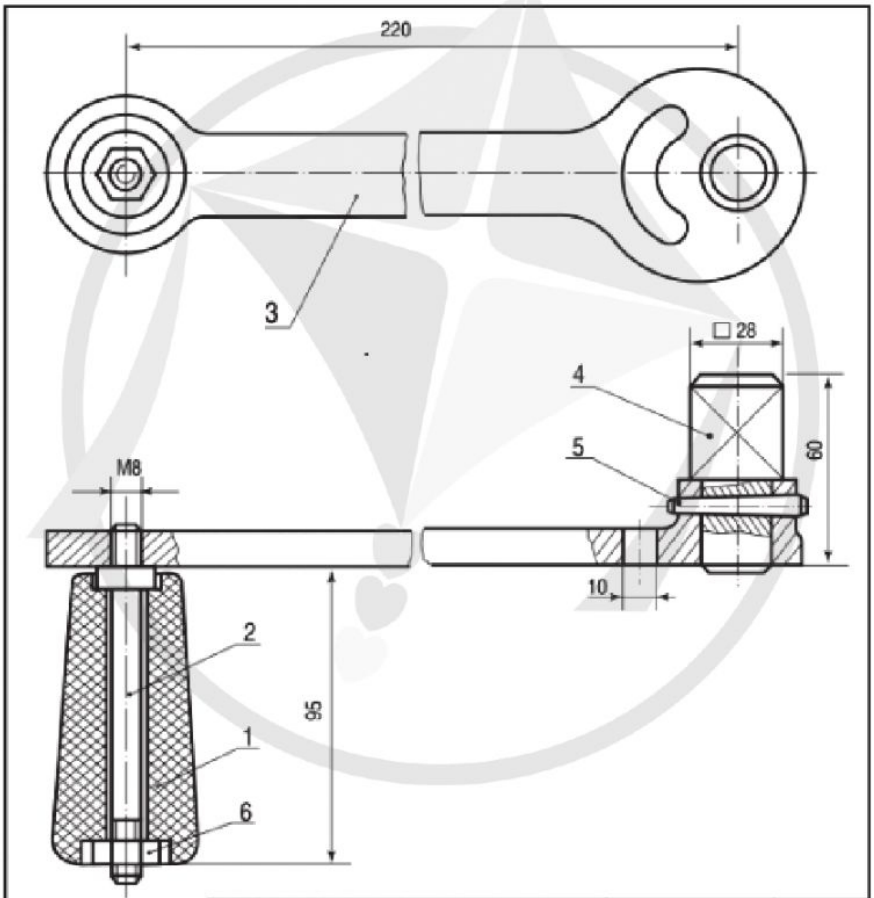
Giải

Ta thấy: Hình chiếu vuông góc của các điểm *A*, *B*, *C*, *E*, *F*, *H* trên mặt phẳng (*P'*) lần lượt là các đỉnh *A'*, *B'*, *C'*, *E'*, *F'*, *H'* của lục giác đều *A'B'C'H'E'F'*; hình chiếu vuông góc của các điểm *O*, *G* trên mặt phẳng (*P'*) là tâm *O'* của lục giác đều đó (*Hình 31*). Vì thế, hình chiếu trục đo vuông góc đều của khối lập phương *OABC.EFGH* được cho trong *Hình 32*.

3 Hãy xác định hình chiếu trục đo vuông góc đều của những hình tròn nằm trong các mặt phẳng song song với các mặt phẳng toạ độ.

III. MỘT SỐ TIÊU CHUẨN CỦA BẢN VẼ KĨ THUẬT

5 Quan sát bản vẽ lắp của tay quay ở *Hình 33*, hãy cho biết:



TT	Tên gọi	Số lg	Vật liệu	Ghi chú
6	Đai ốc M8	1	Thép 20	
5	Chốt côn ϕ 3x40	1	Thép 30	
4	Cũ vận	1	Thép 40	
3	Cần quay	1	Thép 50	
2	Trục ren	1	Thép 20	
1	Tay nắm	1	Chất dẻo	

TAY QUAY			Tỉ lệ	Bài số
			1 : 2	10.02
Người vẽ	Nguyễn Văn A	12.06	Trường THPT C	
Kiểm tra	Nguyễn Văn B			

(Nguồn: Công nghệ 11-Công nghiệp, NXBGD Việt Nam, 2014)

Hình 33

a) Tỉ lệ được quy định là bao nhiêu?

b) Các nét vẽ bao gồm những loại nào?

c) Ghi kích thước được thực hiện như thế nào?

Trên cơ sở những yêu cầu cần đạt cơ bản của việc vẽ hình biểu diễn của một vật thể trong không gian (như: vẽ đúng, vẽ trực quan, vẽ đẹp), người ta cũng đề xuất ra những tiêu chuẩn cơ bản về vẽ kĩ thuật, đặc biệt là một số nguyên tắc cơ bản về trình bày bản vẽ kĩ thuật.

Bản vẽ kĩ thuật là một công cụ dùng để giao tiếp giữa người thực hiện với người xây dựng, giữa người thực hiện và chủ công trình, do vậy cần trình bày theo nguyên tắc sau:

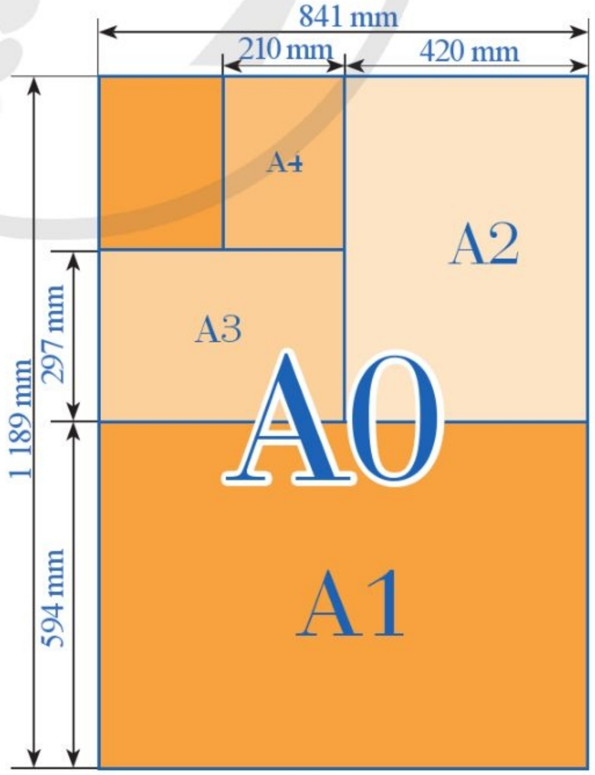
- Rõ ràng, dễ hiểu: đối với mọi đối tượng liên quan và chỉ có một cách hiểu duy nhất (không được hiểu theo nhiều nghĩa);
- Đầy đủ: phải chỉ ra trạng thái cuối cùng của đối tượng được biểu diễn với một chức năng xác định;
- Có thể nhân bản, sao lại.

Do bản vẽ kĩ thuật trình bày các thông tin về hình dạng, kích thước, đặc điểm của vật thể dưới dạng hình vẽ và các kí hiệu theo một quy tắc thống nhất nên bản vẽ kĩ thuật phải đảm bảo những tiêu chuẩn trình bày, liên quan đến *khổ giấy*, *nét vẽ*, *tỉ lệ*, *chữ viết*, *ghi kích thước*.

1. Khổ giấy

Bản vẽ kĩ thuật được vẽ trên các khổ giấy từ A0 đến A4 quy định theo Tiêu chuẩn Việt Nam (TCVN) 7285 : 2003 hay Tiêu chuẩn Quốc tế (ISO) 5457 : 1999, gồm những loại khổ giấy chính sau đây (*Hình 34*):

Kí hiệu	Kích thước (mm)
A0	1 189 × 841
A1	841 × 594
A2	594 × 420
A3	420 × 297
A4	297 × 210



Hình 34

2. Tỉ lệ

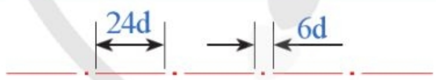
Tỉ lệ là tỉ số giữa kích thước đo được trên hình biểu diễn với kích thước tương ứng đo trên vật thể.

TCVN 7286 : 2003 (ISO 5455 : 1971) quy định tỉ lệ dùng trên các bản vẽ kĩ thuật như sau:

– Tỉ lệ thu nhỏ	1 : 2	1 : 5	1 : 10
	1 : 20	1 : 50	1 : 100 ...
– Tỉ lệ nguyên hình	1 : 1.		
– Tỉ lệ phóng to	2 : 1	5 : 1	10 : 1
	20 : 1	50 : 1	100 : 1 ...

3. Nét vẽ

TCVN 8-24 : 2002 quy định một số nét vẽ thường dùng trong bản vẽ kĩ thuật và được trình bày ở dưới đây:

Tên gọi	Hình dạng	Ứng dụng
1. Nét liền đậm		Đường bao thấy, cạnh thấy, khung vẽ, khung tên
2. Nét liền mảnh		Đường kích thước và đường gióng Đường gạch mặt cắt
3. Nét lượn sóng		Đường giới hạn một phần hình cắt
4. Nét đứt mảnh		Đường bao khuất, cạnh khuất
5. Nét gạch dài chấm-mảnh		Đường tâm, đường trục đối xứng
6. Nét gạch dài chấm-đậm		Vị trí của mặt phẳng cắt

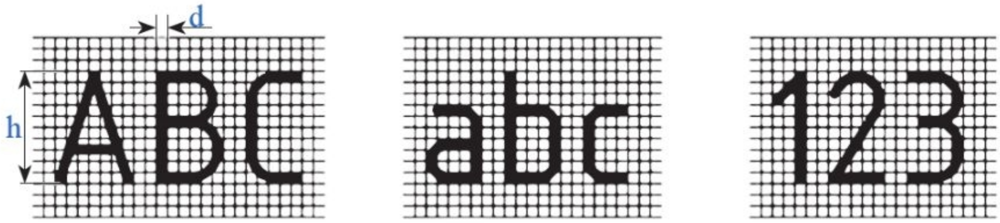
Chiều rộng nét vẽ d (được tính bằng milimét) phụ thuộc vào loại nét vẽ và kích thước của bản vẽ. Chiều rộng d được chọn trong dãy sau: 0,18; 0,25; 0,35; 0,5; 0,7; 1; 1,4; 2 mm.

Bản vẽ quy định sử dụng nét đậm và nét mảnh với tỉ lệ 2 : 1.

Bản vẽ trên khổ giấy A4 thường sử dụng chiều rộng nét đậm d = 0,5 mm, chiều rộng nét mảnh d = 0,25 mm.

4. Chữ viết

Chữ viết và số trên bản vẽ phải rõ ràng, thống nhất để người đọc tránh nhầm lẫn, TCVN 7284-0 : 2003 quy định chữ viết và số trong bản vẽ kĩ thuật như *Hình 35*:



a) Chữ hoa *b) Chữ thường* *c) Chữ số*

Hình 35

Khổ chữ danh nghĩa (h) là chiều cao của chữ hoa và được tính bằng milimét. Dãy các khổ chữ danh nghĩa được quy định như sau: 1,8; 2,5; 3,5; 5; 7; 10; 14 và 20 mm. Chiều rộng (d) của nét chữ thường lấy bằng h/10. Bản vẽ khổ giấy A4 thường sử dụng khổ chữ 2,5 và 5 cho chữ thường hoặc 3,5 và 7 cho chữ hoa.

5. Ghi kích thước

TCVN 7583-1 : 2006 quy định quy tắc ghi kích thước trên các bản vẽ kĩ thuật.

Mỗi kích thước chỉ được ghi một lần trên bản vẽ và được ghi trên hình chiếu nào thể hiện rõ nhất cấu tạo của phần tử được ghi. Số lượng kích thước phải đủ để chế tạo và kiểm tra vật thể.

a) Đường kích thước: vẽ bằng nét liền mảnh, ở đầu mút đường kích thước có vẽ mũi tên (trong bản vẽ xây dựng có thể dùng gạch chéo thay cho mũi tên).

b) Đường gióng kích thước: vẽ bằng nét liền mảnh, thường kẻ vuông góc với đường kích thước và vượt quá đường kích thước khoảng 2 ÷ 4 mm.

c) Chữ số kích thước: chỉ số đo kích thước thực, không phụ thuộc vào tỉ lệ bản vẽ và thường được ghi trên đường kích thước.

Ví dụ 6 Người ta vẽ một bể nước có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước chiều dài, chiều rộng, chiều cao của bể lần lượt là 5 m; 4 m; 1,2 m. Khi sử dụng tỉ lệ thu nhỏ 1 : 20 và giấy A4 (297 mm × 210 mm), các kích thước chiều dài, chiều rộng và chiều cao của bể nước đó trên bản vẽ là bao nhiêu milimét?

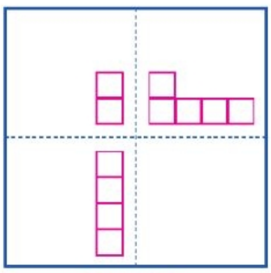
Giải

Các kích thước chiều dài, chiều rộng, chiều cao của bể nước trên bản vẽ lần lượt là 250 mm, 200 mm, 60 mm.

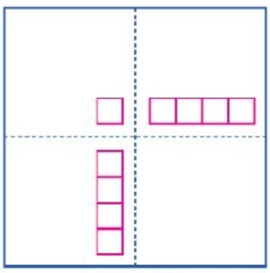
4 Người ta vẽ một cái đinh có chiều dài 20 mm. Khi sử dụng tỉ lệ phóng to 2 : 1, chiều dài cái đinh trên bản vẽ là bao nhiêu milimét?

BÀI TẬP

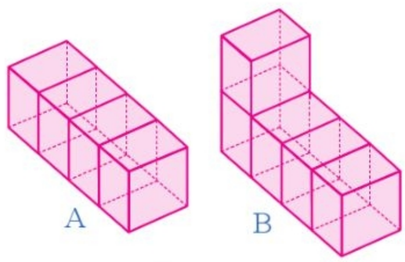
1. Bản vẽ các hình chiếu ở *Hình 36*, *Hình 37* biểu diễn vật thể tương ứng nào trong các vật thể ở *Hình 38*?



Hình 36

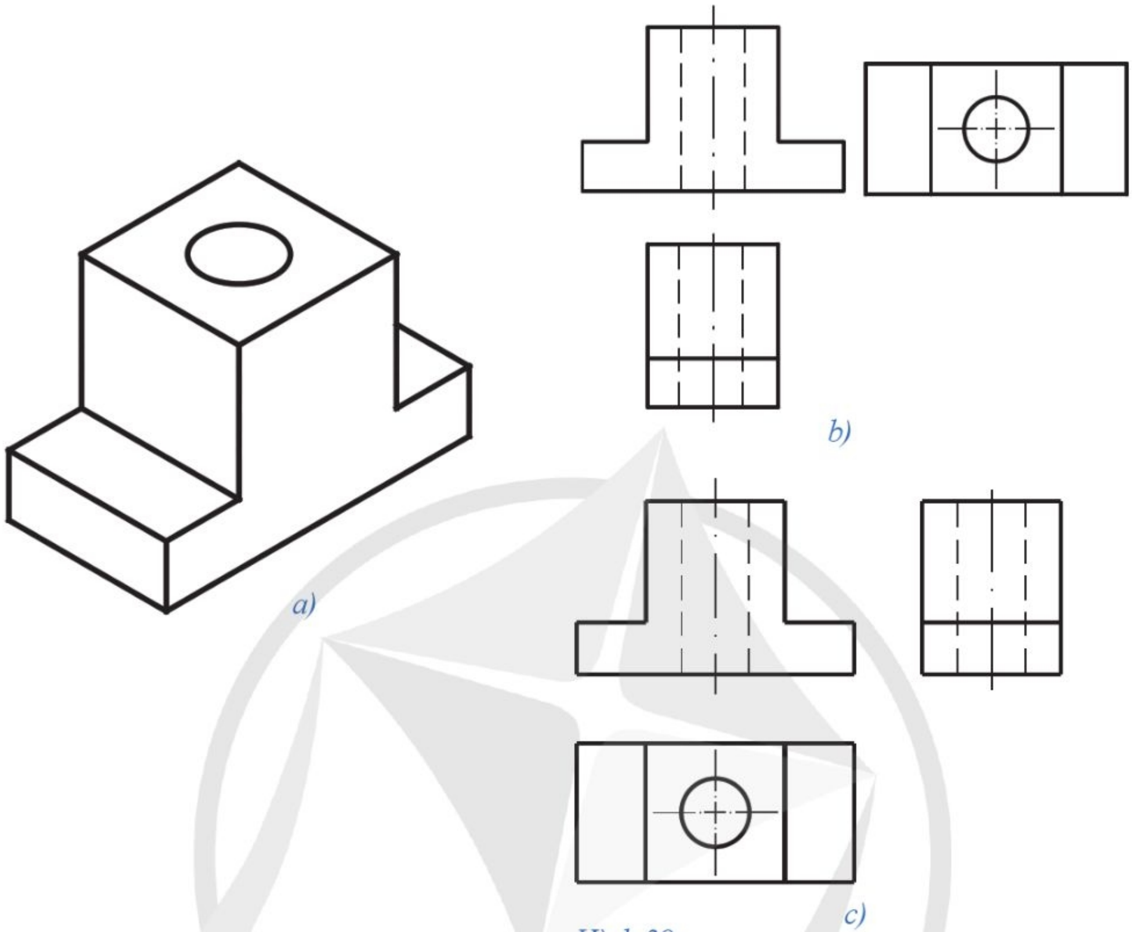


Hình 37



Hình 38

2. Cho vật thể ở *Hình 39a*. Hãy cho biết ở các *Hình 39b* và *Hình 39c*, hình nào bố trí đúng các hình chiếu vuông góc của vật thể? Tại sao?



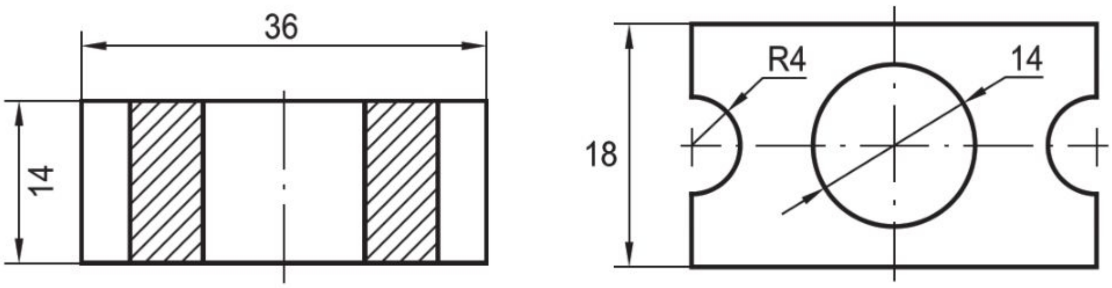
Hình 39

3. Vẽ các hình chiếu vuông góc của:

a) Hình chóp cụt tứ giác đều;

b) Hình nón cụt.

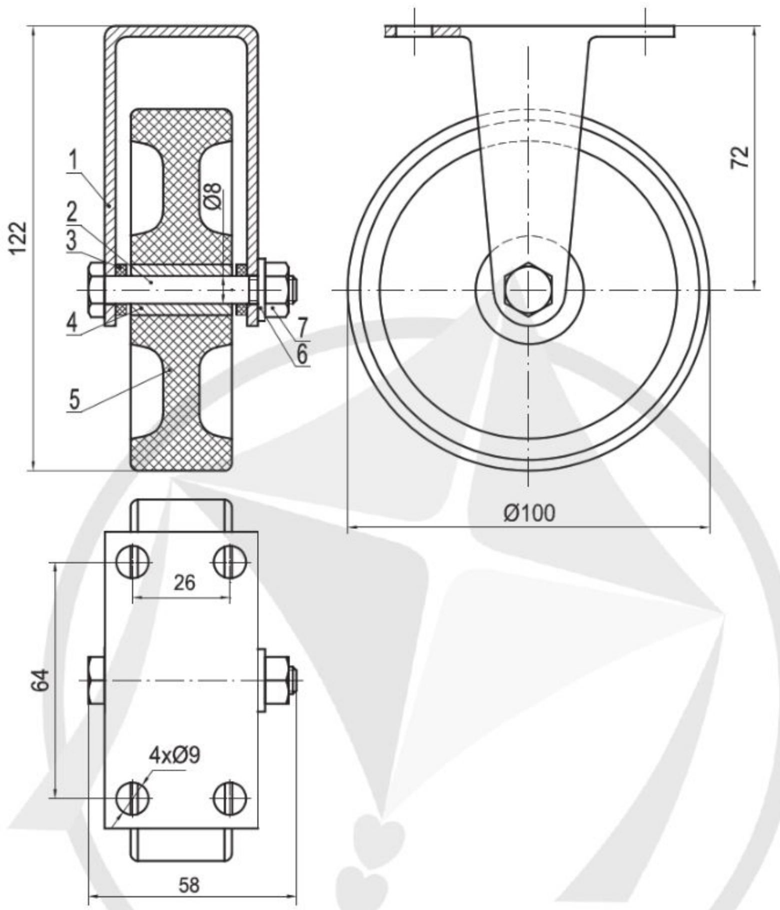
4. *Hình 40* ghi kích thước cho bản vẽ. Hãy xác định các kích thước ghi không đúng tiêu chuẩn trên *Hình 40* và trình bày cách ghi lại cho đúng.



Hình 40

§2 ĐỌC VÀ VẼ BẢN VẼ KĨ THUẬT ĐƠN GIẢN

Hình 41 biểu diễn bản vẽ lắp bộ bánh xe.



Vị trí	Kí hiệu	Tên gọi	Số lượng	Vật liệu	Ghi chú
7		Đai ốc M8	1	Thép	
6		Vòng đệm 8	1	Thép	
5		Bánh xe	1	Cao su	
4		Bạc	1	Đồng thanh	
3		Vòng chặn	2	Cao su	
2		Trục M8	1	Thép	
1		Càng đỡ	1	Thép	

Người vẽ	Nguyễn Văn A	06/04	BỘ BÁNH XE
Kiểm tra	Nguyễn Văn B		
Trường THPT C			TỈ LỆ 1:1

(Nguồn: Công nghệ 10 - Thiết kế và công nghệ, NXB ĐH Huế 2022)

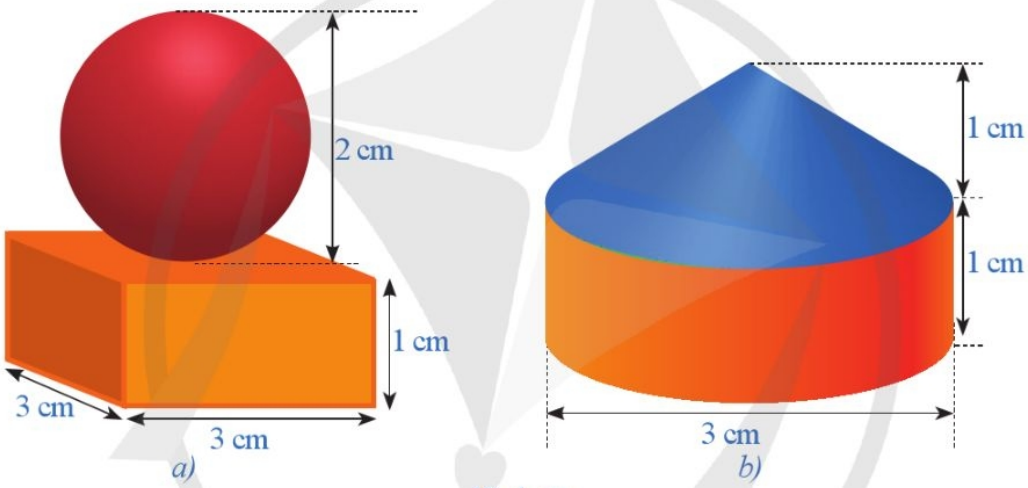
Hình 41

Đọc bản vẽ và hình dung được hình dạng của bộ bánh xe đó bằng cách nào?

I. ĐỌC BẢN VẼ KĨ THUẬT ĐƠN GIẢN

Đọc hiểu thông tin từ một bản vẽ kĩ thuật là công việc hết sức quan trọng đối với bất cứ ai liên quan đến hoạt động sản xuất, thiết kế, chế tạo, thi công, lắp ráp, trao đổi, sửa chữa, kiểm tra, … Chẳng hạn, muốn làm ra một sản phẩm nào đó thì ta phải dựa vào bản vẽ kĩ thuật để từ đó có thể sản xuất ra một sản phẩm có kích thước chính xác. Tuy nhiên, đọc hiểu bản vẽ kĩ thuật lại là một công việc không đơn giản, bởi lẽ đọc hiểu bản vẽ chiếu là một quá trình tư duy (không gian) chuyển dịch từ các hình phẳng hai chiều thành không gian ba chiều. Vậy làm thế nào để có thể đọc hiểu những bản vẽ kĩ thuật đơn giản?

1 Như chúng ta đã biết, một vật thể (dù đơn giản hay phức tạp) đều được tạo thành từ những khối hình học cơ bản (hay một phần của khối hình học cơ bản). Những vật thể ở *Hình 42* được tạo thành từ những khối hình học cơ bản nào?



Hình 42

Do bản vẽ kĩ thuật biểu diễn những dạng hình chiếu của vật thể (tức là tổng hợp những dạng hình chiếu của các khối hình học cơ bản tạo thành vật thể đó) nên để đọc hiểu bản vẽ và hình dung được hình dạng của vật thể ta cần nắm vững ba nguyên tắc sau:

- Xác định đúng hướng nhìn cho từng hình biểu diễn. Từ hình chiếu bằng, hình chiếu cạnh, hình chiếu đứng, hình dung hình dạng mặt trên, mặt trái, mặt trước của vật thể.
- Dựa trên các hình chiếu, chia vật thể thành những khối hình học cơ bản và hình dung được vị trí tương đối, sự sắp xếp giữa những khối này. Từ đặc điểm hình chiếu của các khối hình học cơ bản, nhận ra được những đặc điểm chính của vật thể để hình dung toàn bộ vật thể.
- Phân tích được ý nghĩa từng đường nét thể hiện trên các hình chiếu. Nét liền đậm, nét đứt, nét chấm gạch, … mỗi nét thể hiện đường nào đó của vật thể.

Đối với bản vẽ chi tiết, đọc các bản vẽ đó thường theo các bước sau:

Bước 1: Đọc khung tên để biết tên, tỉ lệ, vật liệu chế tạo chi tiết.

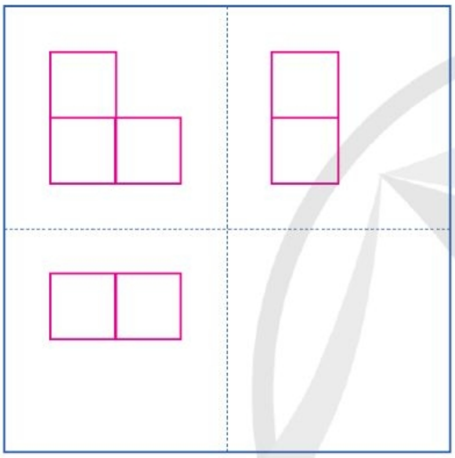
Bước 2: Đọc các hình biểu diễn để hình dung được hình dạng, kết cấu của chi tiết.

Bước 3: Đọc các kích thước để biết được kích thước chung (dài, rộng, cao) và kích thước từng bộ phận của chi tiết.

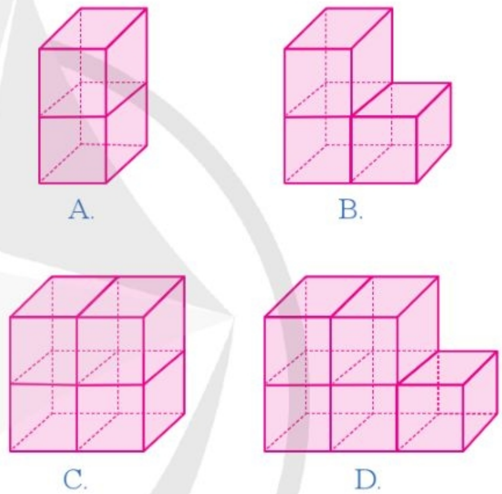
Bước 4: Đọc các yêu cầu kĩ thuật để biết các yêu cầu về gia công, xử lí bề mặt sau khi gia công.

Dưới đây ta sẽ tìm hiểu cách đọc bản vẽ kĩ thuật đơn giản thông qua một số ví dụ cụ thể.

Ví dụ 1 Bản vẽ các hình chiếu ở *Hình 43* biểu diễn vật thể nào trong các vật thể ở *Hình 44*, biết các vật thể đó được ghép bởi những viên gạch có dạng khối lập phương?



Hình 43



Hình 44

Giải

• Xét vật thể A: Có hình chiếu đứng và hình chiếu cạnh đều là hình chữ nhật gồm hai ô vuông; hình chiếu bằng là hình vuông gồm một ô vuông. Điều đó không thoả mãn bản vẽ ở *Hình 43*.

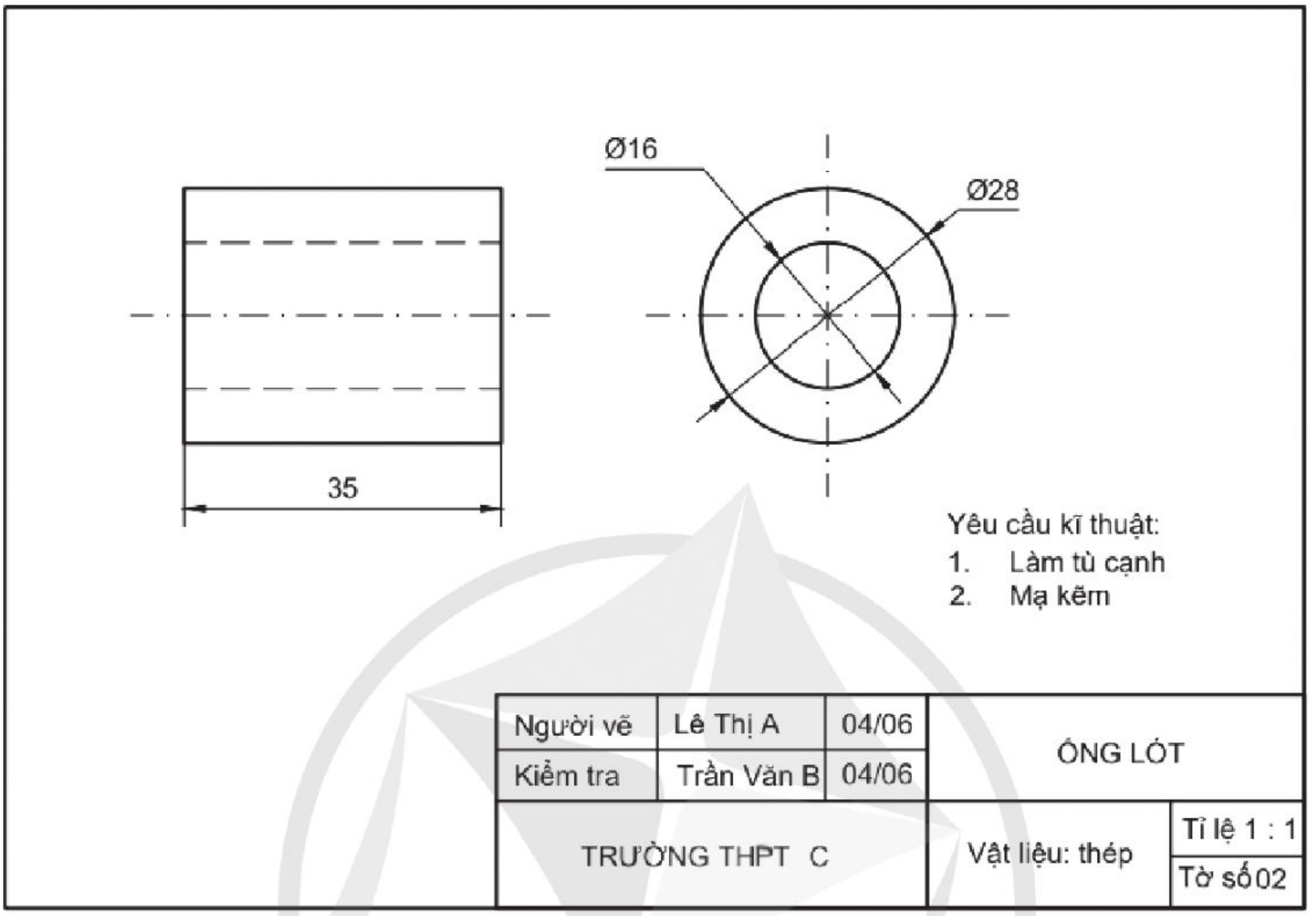
• Xét vật thể B: Có hình chiếu bằng và hình chiếu cạnh đều là hình chữ nhật gồm hai ô vuông; hình chiếu đứng là hình gồm ba ô vuông. Điều đó thoả mãn bản vẽ ở *Hình 43*.

• Xét vật thể C: Có hình chiếu bằng và hình chiếu cạnh đều là hình chữ nhật gồm hai ô vuông; hình chiếu đứng là hình vuông gồm bốn ô vuông. Điều đó không thoả mãn bản vẽ ở *Hình 43*.

• Xét vật thể D: Có hình chiếu bằng là hình chữ nhật gồm ba ô vuông; hình chiếu đứng là hình gồm năm ô vuông; hình chiếu cạnh gồm hai ô vuông. Điều đó không thoả mãn bản vẽ ở *Hình 43*.

Vậy bản vẽ ở *Hình 43* biểu diễn vật thể B ở *Hình 44*.

Ví dụ 2 Đọc bản vẽ chi tiết ống lót *Hình 45*.



Hình 45

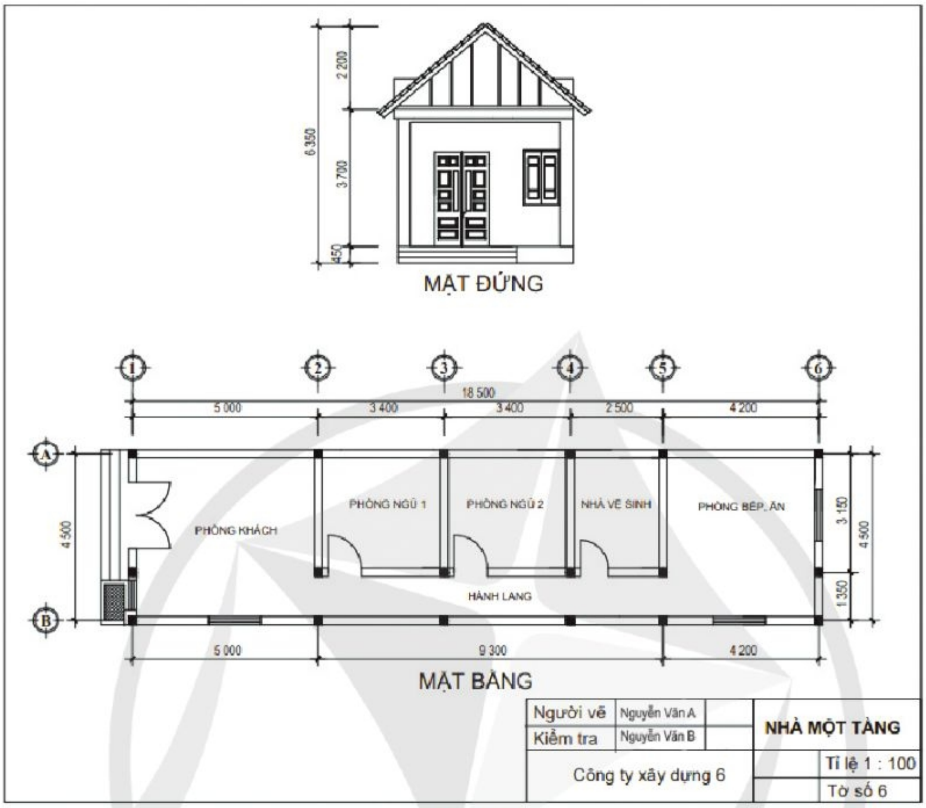
Giải

Đọc bản vẽ chi tiết ống lót *Hình 45* như sau:

Trình tự đọc	**Nội dung**	**Bản vẽ ống lót (*Hình 45*)**
1. Khung tên	– Tên gọi chi tiết. – Vật liệu. – Tỉ lệ.	– Ống lót. – Thép. – 1 : 1.
2. Hình biểu diễn	– Tên gọi hình chiếu. – Các hình biểu diễn khác (nếu có).	– Hình chiếu đứng, hình chiếu cạnh.
3. Kích thước	– Kích thước chung của chi tiết. – Kích thước các thành phần của chi tiết.	– ∅28, 35. – Đường kính ngoài ∅28. Đường kính lỗ ∅16. Chiều dài 35.
4. Yêu cầu kĩ thuật	– Gia công. – Xử lí bề mặt.	– Làm tù cạnh. – Mạ kẽm.

Trong vẽ kĩ thuật, bên cạnh việc sử dụng hình biểu diễn nhận được bằng phương pháp góc chiếu thứ nhất, người ta còn sử dụng mặt cắt. Mặt cắt là hình biểu diễn nhận được trên mặt phẳng cắt, khi ta tưởng tượng dùng mặt phẳng này cắt vật thể.

Ví dụ 3 Đọc bản vẽ của ngôi nhà một tầng ở *Hình 46*.



Hình 46

Giải

Đọc bản vẽ của ngôi nhà một tầng ở *Hình 46* như sau:

Các vấn đề	Nội dung cần hiểu	Bản vẽ nhà một tầng (*Hình 46*)
1. Khung tên	– Tên gọi ngôi nhà. – Tỉ lệ.	– Nhà một tầng. – 1 : 100.
2. Hình biểu diễn	Tên gọi các hình biểu diễn.	– Mặt đứng. – Mặt bằng.
3. Kích thước	– Kích thước chung. – Kích thước từng bộ phận.	– 18 500 × 4 500 × 6 350. – Phòng khách: 5 000 × 4 500. – Phòng bếp, ăn: 4 500 × 4 200. – Hai phòng ngủ mỗi phòng: 3 400 × 3 145. – Phòng vệ sinh: 3 145 × 2 500. – Hành lang: 9 300 × 1 350.
4. Các bộ phận	– Số phòng. – Số cửa đi và cửa sổ. – Các bộ phận khác.	– 1 phòng khách, 2 phòng ngủ, 1 bếp và 1 nhà vệ sinh. – 1 cửa đi 2 cánh, 3 cửa đi 1 cánh, 4 cửa sổ kép. – Hành lang.

II. VẼ BẢN VẼ KĨ THUẬT ĐƠN GIẢN

2 Hãy vẽ các hình chiếu vuông góc của hình lập phương theo phương pháp góc chiếu thứ nhất.

Để vẽ hình chiếu vuông góc của vật thể đơn giản, ta thực hiện các bước như sau:

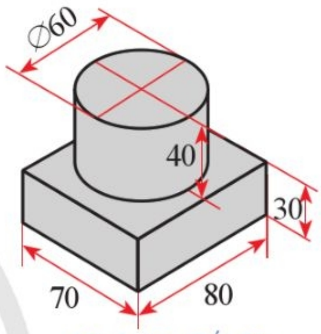
Bước 1. Phân tích vật thể thành các khối đơn giản

Bước 2. Chọn các hướng chiếu

Bước 3. Vẽ các hình chiếu từng phần của vật thể.

Bước 4. Hoàn thiện các nét vẽ và ghi kích thước.

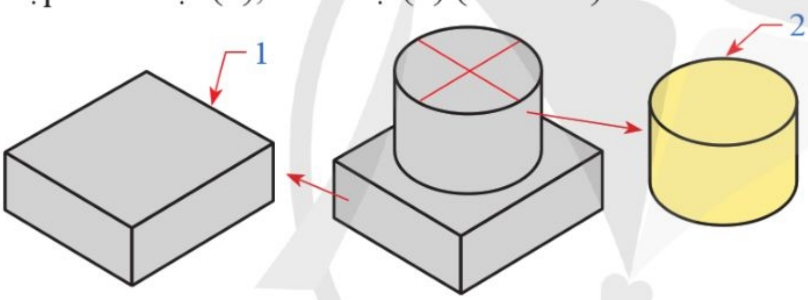
Ví dụ 4 Vẽ hình chiếu của một vật thể (gối đỡ) cho trong *Hình 47*.



Hình 47. Gối đỡ

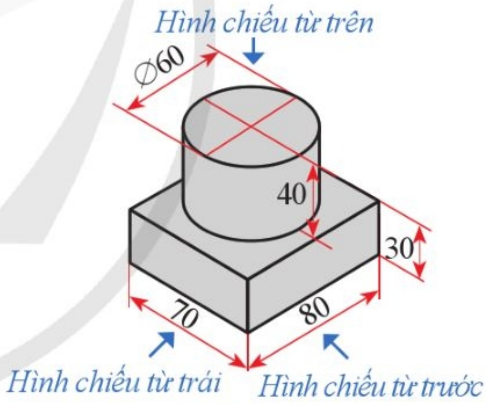
Giải

• Gối đỡ được phân tích thành hai khối đơn giản: khối hộp chữ nhật (1), khối trụ (2) (*Hình 48*).



Hình 48

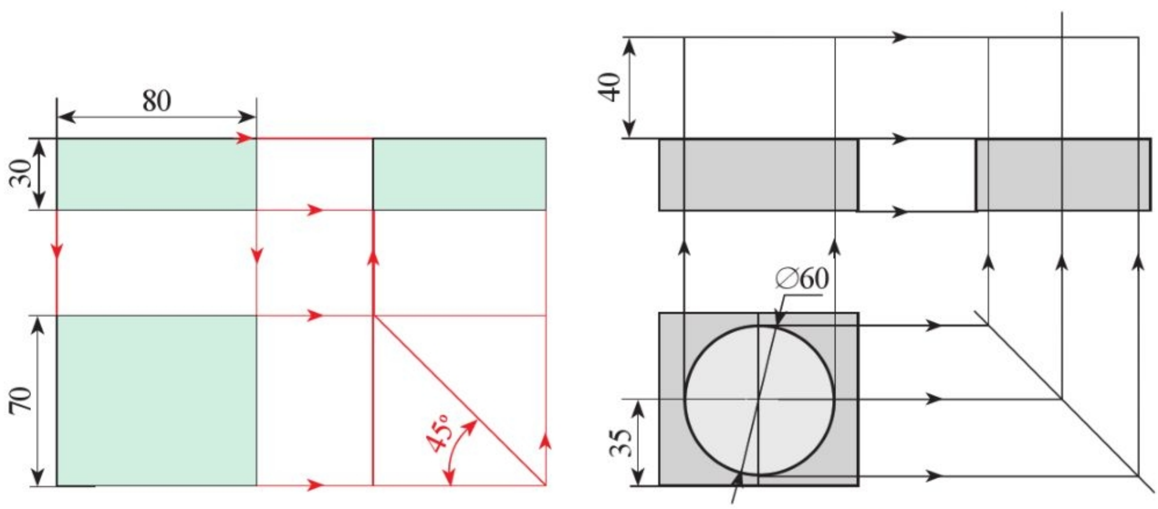
• Chọn các hướng chiếu như *Hình 49*.



Hình 49

• Vẽ các hình chiếu của khối hộp chữ nhật (1) (*Hình 50a*).

Vẽ các hình chiếu của khối trụ (2) (*Hình 50b*).

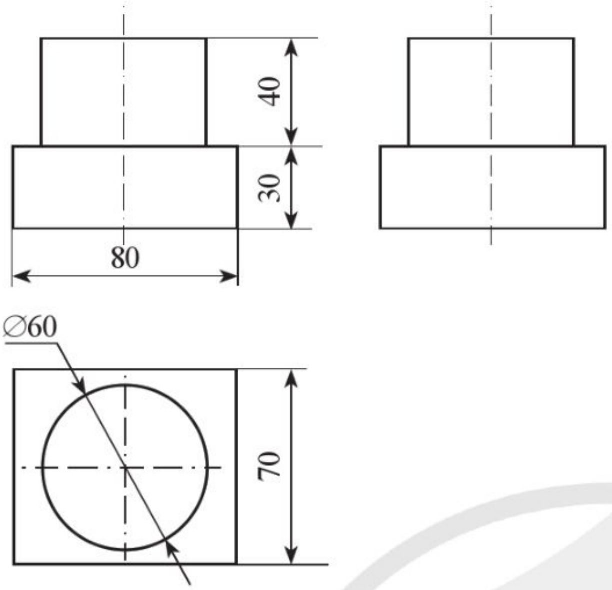


a) *b)*

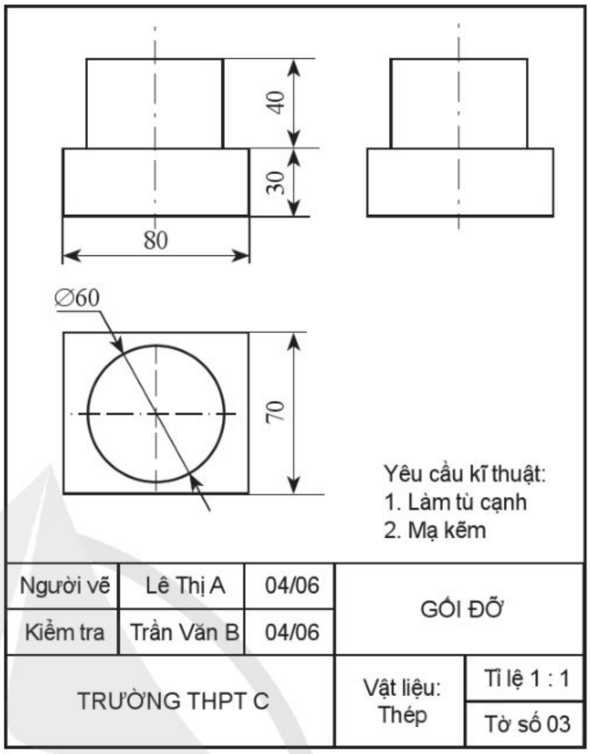
Hình 50

• Hoàn thiện các nét vẽ và ghi kích thước (*Hình 51*).

• Hoàn thiện bản vẽ chi tiết (*Hình 52*).



Hình 51



Hình 52

Ví dụ 5 Đọc bản vẽ ổ trục ở *Hình 53* và khôi phục lại hình dạng của ổ trục đó.

Giải

Đọc hai hình chiếu của ổ trục ta thấy:

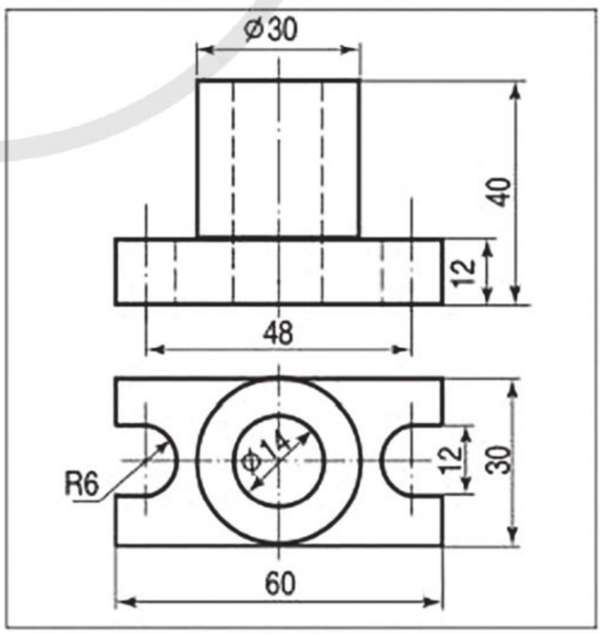
– Hình chiếu đứng gồm hai phần có kích thước khác nhau. Phần trên có chiều cao 28 và đường kính ∅30. Phần dưới có chiều cao 12 và chiều dài 60.

– Đối chiếu với hình chiếu bằng, ta thấy phần trên tương ứng với vòng tròn lớn ở giữa, phần dưới tương ứng với hình chữ nhật bao ngoài. Như vậy, phần trên thể hiện hình trụ và phần dưới thể hiện hình hộp chữ nhật (*Hình 53*).

– Trên hình chiếu đứng của phần hình trụ có hai nét đứt chạy suốt chiều cao tương ứng với đường tròn ∅14 ở hình chiếu bằng thể hiện lỗ trụ ở giữa.

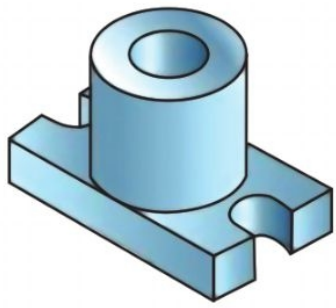
– Trên hình chiếu đứng của phần hình hộp có hai nét đứt ở hai bên tương ứng với phần khuyết tròn ở hình chiếu bằng thể hiện hai rãnh trên đế hình hộp.

1 Vẽ ba hình chiếu vuông góc của một đồ vật đơn giản trong gia đình em.

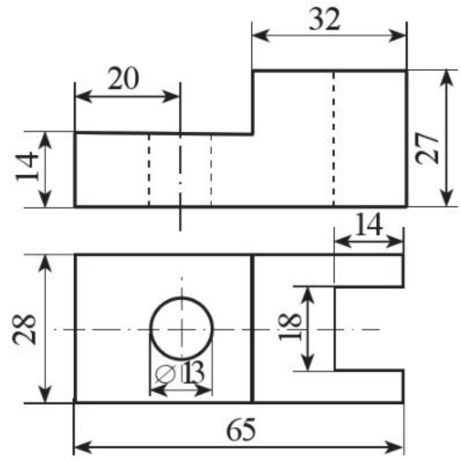


Hình 53

Từ đó, hình dạng ổ trục được biểu diễn ở *Hình 54*.



Hình 54

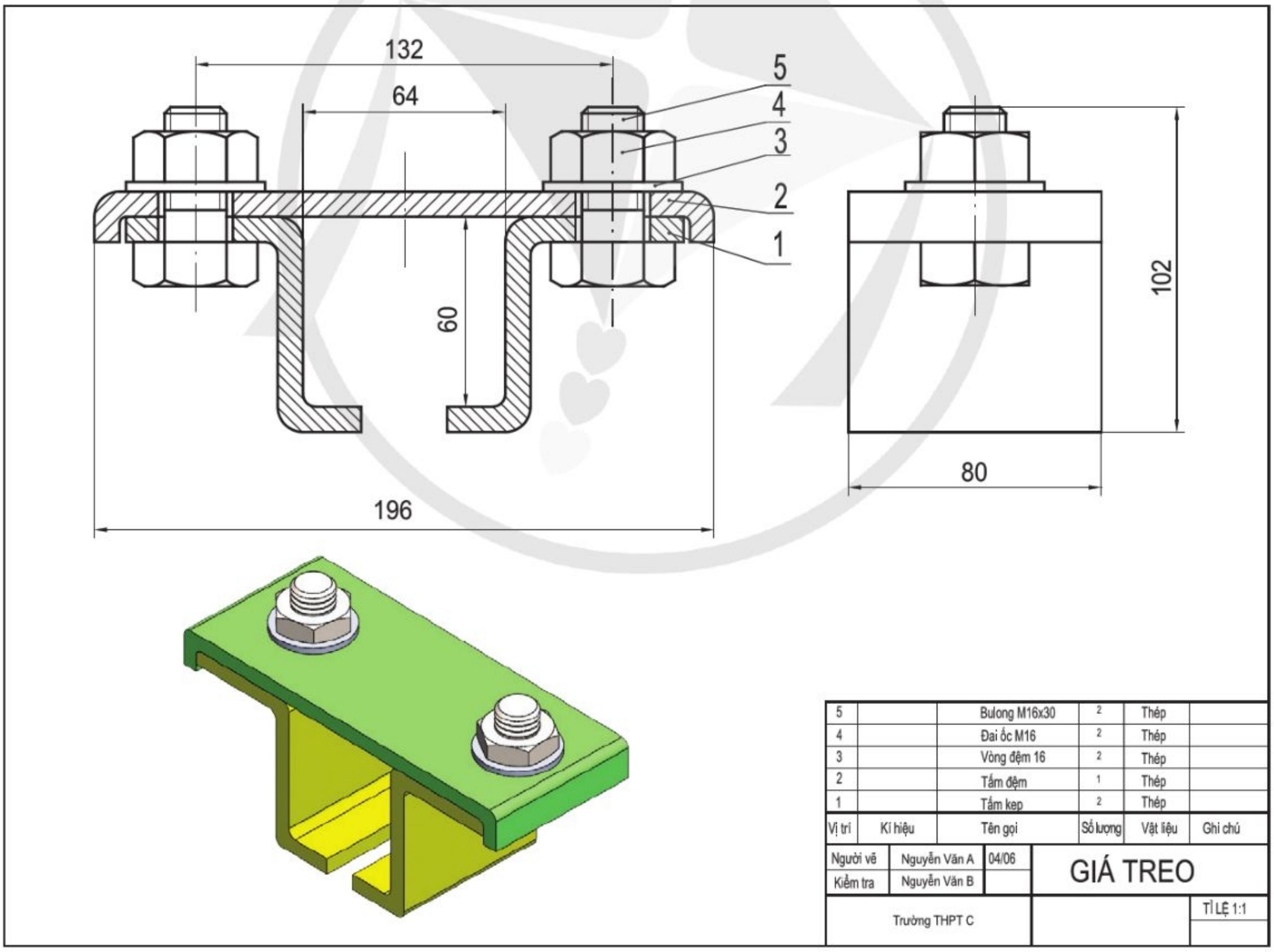


Hình 55

2 Đọc bản vẽ gá lỗ tròn trong *Hình 55* và khôi phục lại hình dạng của gá lỗ tròn đó.

BÀI TẬP

1. Đọc bản vẽ lắp giá treo ở *Hình 56* và ghi lại kết quả đọc theo bảng dưới đây.



5		Bulong M16x30	2	Thép	
4		Đai ốc M16	2	Thép	
3		Vòng đệm 16	2	Thép	
2		Tấm đệm	1	Thép	
1		Tấm kep	2	Thép	
Vị trí	Kí hiệu	Tên gọi	Số lượng	Vật liệu	Ghi chú

Người vẽ	Nguyễn Văn A	04/06	GIÁ TREO
Kiểm tra	Nguyễn Văn B		
Trường THPT C			TỈ LỆ 1:1

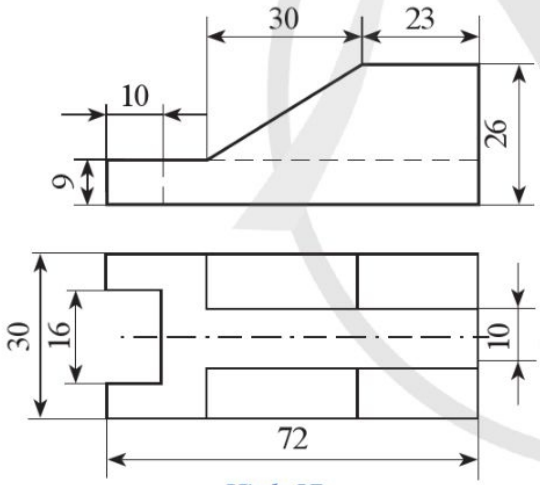
(Nguồn: Công nghệ 10 – Thiết kế và công nghệ, NXB ĐH Huế, 2022)

Hình 56

Trình tự đọc	Nội dung đọc	Kết quả
1. Khung tên	– Tên gọi sản phẩm. – Tỉ lệ.	?
2. Bảng kê	Tên gọi, số lượng chi tiết, vật liệu.	?
3. Hình biểu diễn	Tên gọi các hình chiếu, hình cắt.	?
4. Kích thước	– Kích thước chung. – Kích thước lắp ghép giữa các chi tiết.	?
5. Phân tích chi tiết	– Hình dáng, vị trí chi tiết 1. – Hình dáng, vị trí chi tiết 2.	?
6. Tổng hợp	– Công dụng của sản phẩm. – Trình tự tháo, lắp sản phẩm.	?

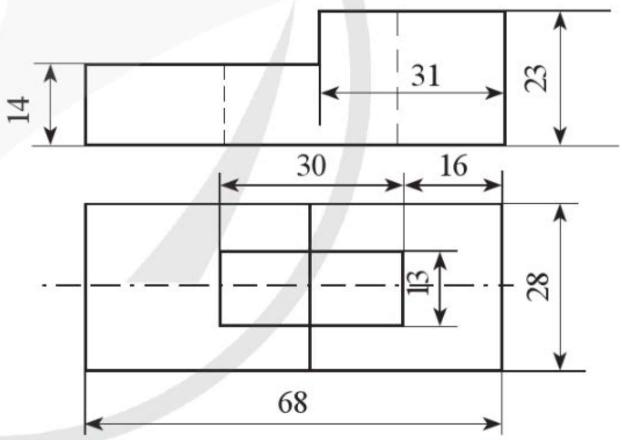
2. Đọc bản vẽ và khôi phục lại hình dạng của vật thể trong *Hình 57*, *Hình 58*:

a) Vật thể: Gá mặt nghiêng;



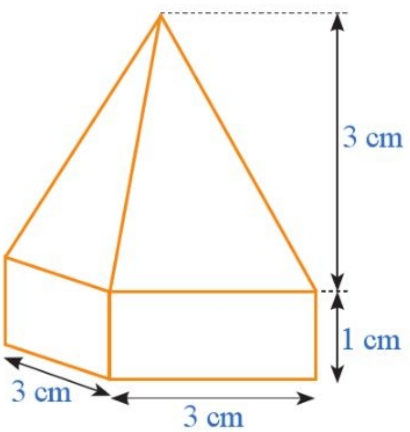
Hình 57

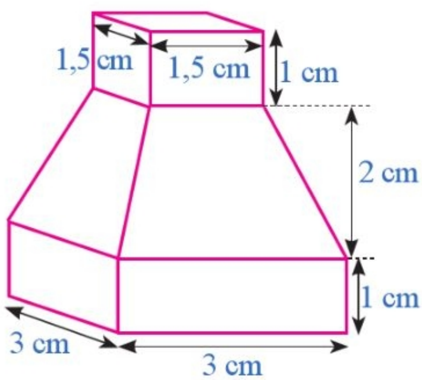
b) Vật thể: Gá lỗ chữ nhật.



Hình 58

3. Sử dụng phương pháp góc chiếu thứ nhất, vẽ các hình chiếu của mỗi vật thể sau:





BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

THUẬT NGỮ	GIẢI THÍCH	TRANG
chu trình	một đường đi khép kín (đỉnh ban đầu của đường đi trùng với đỉnh cuối của đường đi đó)	39
đồ thị có trọng số	mỗi cạnh của đồ thị được gắn với một con số thực có thể là độ dài của đường đi trên mỗi cạnh, ...	44
đồ thị liên thông	hai đỉnh bất kì của đồ thị đều được nối với nhau bằng một đường đi	39
đường đi Hamilton	đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần	41
đường đi Euler	đường đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, mỗi cạnh đúng một lần	40
hình chiếu bằng	hình chiếu vuông góc của vật thể lên mặt phẳng hình chiếu bằng	51
hình chiếu cạnh	hình chiếu vuông góc của vật thể lên mặt phẳng hình chiếu cạnh	51
hình chiếu đứng	hình chiếu vuông góc của vật thể lên mặt phẳng hình chiếu đứng	51
mặt phẳng hình chiếu bằng	phần mặt phẳng xác định bởi hai tia Ox và Oy	51
mặt phẳng hình chiếu cạnh	phần mặt phẳng xác định bởi hai tia Oy và Oz	51
mặt phẳng hình chiếu đứng	phần mặt phẳng xác định bởi hai tia Oz và Ox	51
phương pháp góc chiếu thứ nhất	một trong những phương pháp thể hiện nhiều thông tin chi tiết của hình khối	52

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

	TỪ NGỮ	TRANG
B	bậc của đỉnh	37
	bài toán Bảy cây cầu của Euler	34
	bài toán tìm đường đi ngắn nhất	45
C	chu trình	38
	chu trình Hamlton	41
Đ	định lí Dirac	42
	định lí Ore	42
	đồ thị đơn	36
	đồ thị liên thông	39
	đường đi Hamilton trên đồ thị	41
	đường đi Euler trên đồ thị	40
	đường đi trên đồ thị	38
H	hình chiếu bằng	51
	hình chiếu cạnh	51
	hình chiếu đứng	51
L	liên thông	39

	TỪ NGỮ	TRANG
M	mặt phẳng hình chiếu bằng	51
	mặt phẳng hình chiếu cạnh	51
	mặt phẳng hình chiếu đứng	51
P	phép biến hình	5
	phép dời hình	21
	phép đối xứng tâm	14
	phép đối xứng trục	10
	phép đồng dạng	30
	phép đồng nhất	6
	phép quay	17
	phép tịnh tiến	7
	phép vị tự	27
	phương pháp góc chiếu thứ nhất	52
T	tâm đối xứng của một hình	16
	tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị có trọng	45
	trục đối xứng của một hình	13

Chịu trách nhiệm tổ chức bản thảo và bản quyền nội dung:

CÔNG TY CỔ PHẦN ĐẦU TƯ XUẤT BẢN – THIẾT BỊ GIÁO DỤC VIỆT NAM

Chủ tịch Hội đồng Quản trị: NGƯT NGÔ TRẦN ÁI

Tổng Giám đốc: VŨ BÁ KHÁNH

Biên tập viên:

LÊ HUY ĐAN

Thiết kế sách:

ĐINH THỊ BÌNH

Trình bày bìa:

TRẦN TIỂU LÂM – NGUYỄN MẠNH HÙNG

Sửa bản in:

LÊ TRUNG DŨNG – VŨ MẠNH HUY

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP TOÁN 11

Mã số: ....

ISBN .....

In .... cuốn, khổ 19 x 26,5cm, tại ....

Địa chỉ: ....

Số xác nhận đăng kí xuất bản: ....

Quyết định xuất bản số: ....

In xong và nộp lưu chiểu tháng .... năm 20...........