ĐỀ SỐ 032

(Đề học sinh giỏi môn toán lớp 9 tỉnh Phú Yên 2023-2024)

Thời gian làm bài : 150 phút

Câu 1.(3,00 điểm) Cho biểu thức: $A=\sqrt{x+\frac{3}{4}+\sqrt{x+\frac{1}{2}}}+x$.

a) Tìm điều kiện của x để A có nghĩa.

b) Tính x khi $A=2$.

Câu 2.(4,00 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}505x+253y=2022\\ x^3+3(x^2+y^2)+4x=y^3+4y-4.\end{cases}$$

Câu 3.(3,00 điểm) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $2(x+y)+4=5xy$.

Câu 4.(3,00 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính $AB=2R, C$ là trung điểm của OA, M là một điểm thuộc (O) sao cho $MA>MB$. Đường thẳng MC cắt (O) tại D (D khác M), đường thẳng qua D và vuông góc với AB cắt (O) tại E (E khác D), đường thẳng ME cắt đường thẳng AB tại F.

a) Chứng minh $AF=AO$.

b) Đường thẳng qua M song song với DE cắt AB tại H và cắt (O) tại điểm thứ hai N. Chứng minh rằng 3 điểm F,D,N thẳng hàng.

c) Trong trường hợp $EF=MC$, tính độ dài đoạn thẳng CH theo R.

Câu 5.(5,00 điểm)

a) Cho a,b,c là 3 số dương. Chứng minh rằng: $\frac{2ab}{a+b}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{2ca}{c+a}\le a+b+c$.

b) Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{z}{y}\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{z}{x}}$.

Chứng minh rằng $x=y=z$.

Câu 6.(2,00 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AD. Gọi E,F,G lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACD, ABC. Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng AG và EF. Chứng minh rằng $\frac{1}{HG}=\frac{1}{HA}+\frac{1}{HE}+\frac{1}{HF}$.

ĐÁP ÁN

Câu 1.(3,00 điểm)

a) Tìm điều kiện của x để A có nghĩa là:

Vì $x+\frac{3}{4}+\sqrt{x+\frac{1}{2}}=\left(\sqrt{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$ nên điều kiện của x để A có nghĩa là:

$x+\frac{1}{2}\geq 0\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}$

b) Tính x biết $A=2$

Biến đổi ta có: $\sqrt{\left(\sqrt{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\right)^2}+x=2\Leftrightarrow \sqrt{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}+x=2$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Câu 2.(4,00 điểm)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}505x+253y=2022\ (1)\\ x^3+3(x^2+y^2)+4x=y^3+4y-4\ (2)\end{cases}$

Phương trình (2) tương đương:

$x^3+3x^2+3x+1+x+1=y^3-3y^2+3y-1+y-1$

$\Leftrightarrow (x+1)^3+x+1=(y-1)^3+y-1\ (3).$

Đặt $u=x+1;v=y-1$ thì phương trình (3) là:

$u^3+u=v^3+v\Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+1)=0\ (4).$

Ta thấy: $u^2+uv+v^2+1=\left(u+\frac{v}{2}\right)^2+\frac{3}{4}v^2+1>0$ nên từ (4) suy ra $u=v$.

Từ $u=v$ ta có: $x+1=y-1\Leftrightarrow y=x+2$. Thế vào (1) ta được:

$505x+253(x+2)\Leftrightarrow 758x=1516\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=4$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $(x;y)=(2;4)$.

Câu 3.(3,00 điểm)

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $2(x+y)+4=5xy\ \ (1)$.

Biến đổi (1): $5xy-2x-2y=4\Leftrightarrow y(5x-2)-\frac{2}{5}(5x-2)=4+\frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow (5x-1)(5y-2)=24\ (2).$

Giả sử $x\leq y$ thì $5x-2\leq 5y-2$.

Từ (2) ta có các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}5x-2=1\\5y-2=24\end{cases}$; b) $\begin{cases}5x-2=-24\\5y-2=-1\end{cases}$

c) $\begin{cases}5x-2=2\\5y-2=12\end{cases}$; d) $\begin{cases}5x-2=-12\\5y-2=-2\end{cases}$

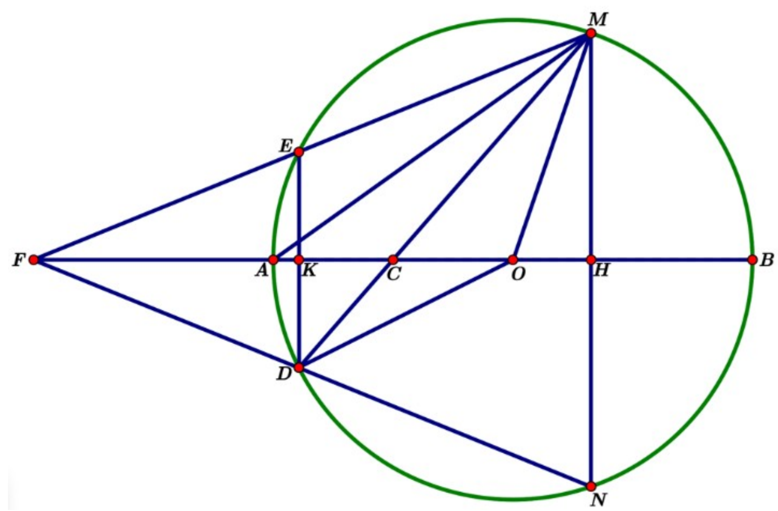
e) $\begin{cases}5x-2=3\\5y-2=8\end{cases}$; f) $\begin{cases}5x-2=-8\\5y-2=-3\end{cases}$

g) $\begin{cases}5x-2=4\\5y-2=6\end{cases}$; k) $\begin{cases}5x-2=-6\\5y-2=-4\end{cases}$

Chỉ có hệ d) có nghiệm nguyên $(x;y)=(-2;0)$ và hệ e) có nghiệm nguyên $(x;y)=(1;2)$.

Vậy hệ có 4 cặp nghiệm $(x;y):(1;2),(2;1),(-2;0),(0;-2)$.

Câu 4.(3,00 điểm)



a) Chứng minh $AF=AO$

Dễ thấy $\triangle MOA$ cân tại $O\Rightarrow \widehat{MAO}=\widehat{AMO}=\widehat{AMC}+\widehat{CMO}$ (1).

Theo tính chất góc ngoài tam giác thì $\widehat{MAO}=\widehat{FMA}+\widehat{MFA}$ (2).

Từ (1) và (2) kết hợp với $\widehat{AMC}=\widehat{FMA}$ suy ra $\widehat{CMO}=\widehat{MFA}$

Suy ra $\triangle OMC\sim\triangle OFM\,(\text{g.g})\Rightarrow \dfrac{MF}{MC}=\dfrac{MO}{OC}=2$.

Vì điểm A nằm chính giữa cung DE nên MA là đường phân giác của $\triangle MFC$

$\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{MF}{MC}=2$ (3) $\Rightarrow AF=2AC\Rightarrow AF=AO.$

b) Chứng minh 3 điểm F,D,K thẳng hàng

Vì $MN//DE$ và $AB\perp DE$ suy ra $AB\perp MN$ nên

$\overset{\frown}{MB}=\overset{\frown}{BN}\Rightarrow \overset{\frown}{MA}=\overset{\frown}{AN}\Rightarrow \widehat{MBF}=\widehat{NBF}$

$\Rightarrow \triangle MBF=\triangle NBF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MFB}=\widehat{NFB}.$

Gọi K là giao điểm của ED và AB. $\triangle EFD$ có FK vừa là đường cao, vừa là trung tuyến nên cân tại F suy ra $\widehat{EFK} = \widehat{DFK}$ (5). Từ (4) và (5) suy ra $\widehat{DFB} = \widehat{NFB}$; hay F, D, N thẳng hàng.

c) Tính số đo CH theo R khi $EF = MC$

Khi $EF = MC$, kết hợp với (3) suy ra $EF = EM$. Vì $ED // MN$ (gt) nên ED là đường trung bình $\triangle MFN$, suy ra D là trung điểm của FN.

Khi đó C là trọng tâm $\triangle MFN \Rightarrow CH = \frac{1}{2}CF = \frac{1}{2}\cdot\frac{3R}{2} = \frac{3}{4}R$.

Câu 5.(5,00 điểm)

a) Cho a, b, c là 3 số dương. CMR: $\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a} \le a + b + c$.

Xét hiệu: $P = (a+b+c) - \left(\frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a}\right)$.

Ta thấy: $P = \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} + \frac{b+c}{2} - \frac{2bc}{b+c} + \frac{c+a}{2} - \frac{2ca}{c+a}$

$$= \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)} + \frac{(b+c)^2 - 4bc}{2(b+c)} + \frac{(c+a)^2 - 4ca}{2(c+a)}$$

$$= \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} + \frac{(b-c)^2}{2(b+c)} + \frac{(c-a)^2}{2(c+a)}$$

Vì a, b, c là 3 số dương nên $a+b>0, b+c>0, c+a>0$ nên $P \ge 0$ (Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$).

Theo định nghĩa bất đẳng thức ta có điều phải chứng minh.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{z}{y}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{z}{x}}$ (1)

Chứng minh rằng $x = y = z$.

Đặt $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}$ thì $a > 0, b > 0$. (1) viết lại là: $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} = \frac{1}{1+ab}$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+b}\right)^2=\frac{1}{1+a}-\frac{2}{(1+a)(1+b)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{(1+a)^2(1+b)^2}=\frac{a+b-ab-1}{(1+ab)(1+a)(1+b)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{(1+a)(1+b)}=\frac{-(1-a)(1-b)}{1+ab}$$

$$\Leftrightarrow (1+ab)(a-b)^2+(1-a^2)(1-b^2)=0$$

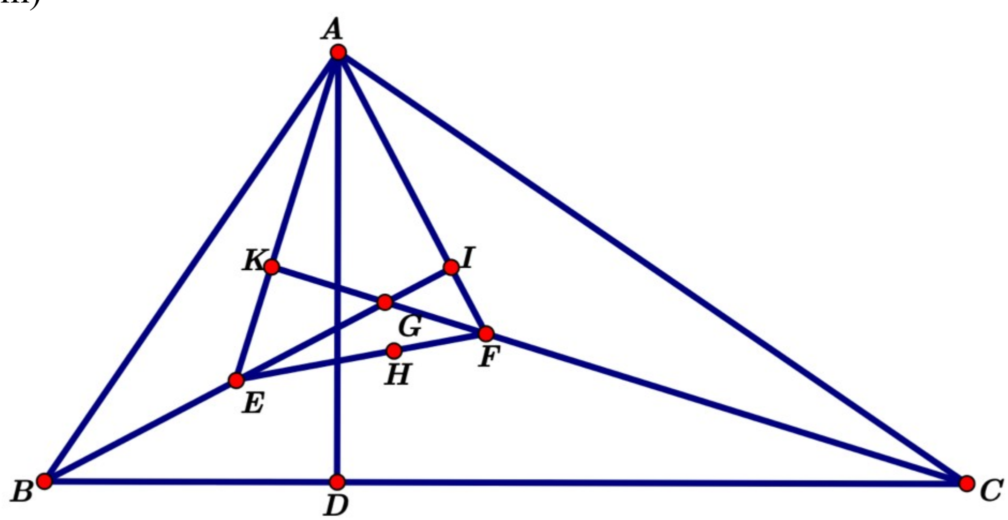
$$\Leftrightarrow ab(a-b)^2+(ab-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2=(ab-1)^2=0 \ \ (\text{do } ab>0)$$

$$\Leftrightarrow a=b=1$$

Vì vậy $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}=1 \Leftrightarrow x=y=z$ (dpcm).

Câu 6.(2,00 điểm)



Gọi I,K lần lượt là giao điểm của BE với AF và CF với AE.

Ta có $\widehat{BAD}=\widehat{ACD} \Rightarrow \widehat{BAE}=\widehat{ACK}$.

Mà $\widehat{BAE}+\widehat{EAC}=90^\circ \Rightarrow \widehat{ACK}+\widehat{KAC}=90^\circ$

do đó $CK\perp AE$ hay $FK\perp AE$ (1).

Chứng minh tương tự ta cũng có $EI\perp AF$ (2).

Từ (1) và (2), kết hợp với EI và FK cùng đi qua điểm G suy ra G là trực tâm của tam giác AEF, do đó AH là đường cao của tam giác AEF.

Ta thấy $\triangle HGF\sim\triangle HEA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{HG}{HE}=\frac{HF}{HA}\Rightarrow HG\cdot HA=HE\cdot HF$

$\Rightarrow HG\cdot(HG+GA)=HE\cdot HF$ (3)

Mặt khác $\widehat{BAD}+\widehat{DAC}=90^\circ \Rightarrow \widehat{FAD}+\widehat{DAE}=45^\circ \Rightarrow \widehat{FAK}=45^\circ$

Suy ra tam giác $\triangle AKF$ vuông cân

$\Rightarrow KA = KF \Rightarrow \triangle KAG = \triangle KFE$ (g.c.g) $\Rightarrow AG = EF$ (4)

Từ (3) và (4) ta có:

$HG \cdot (HG + EF) = HE \cdot HF \Leftrightarrow HG \cdot (HG + HE + HF) = HE \cdot HF.$

Chia hai vế đẳng thức trên cho biểu thức $HE.HF.HG$ với chú ý rằng $HE.HF = HG.HA$ ta được

$$\frac{1}{HG} = \frac{1}{HA} + \frac{1}{HE} + \frac{1}{HF}.$$