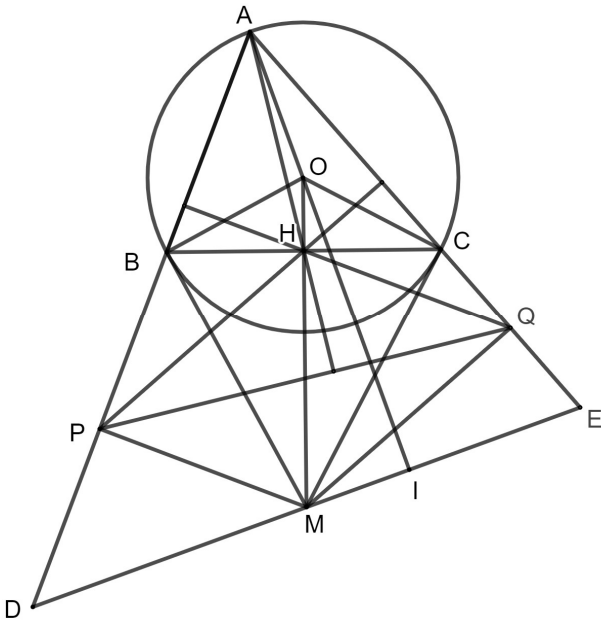


Chú ý: Cách giải nêu trong đáp án chỉ là một phương án, các cách giải khác đúng, phù hợp với chương trình thì cho điểm tương đương. Điểm toàn bài giữ nguyên không làm tròn.

Câu	Ý	Nội dung	Biểu điểm
Câu 1 (3,0 điểm)	1)	Cho biểu thức $A = \frac{x}{\sqrt{x+2}} + \frac{3}{\sqrt{x-3}} + \frac{2\sqrt{x}-21}{x-\sqrt{x}-6}$ với $x \geq 0, x \neq 9$. Rút gọn và tìm x để $A \leq 2$.	2,0 điểm
		$A = \frac{x}{\sqrt{x+2}} + \frac{3}{\sqrt{x-3}} + \frac{2\sqrt{x}-21}{x-\sqrt{x}-6} = \frac{x(\sqrt{x-3}) + 3(\sqrt{x+2}) + 2\sqrt{x}-21}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-3})}$ $= \frac{x(\sqrt{x-3}) + 5(\sqrt{x-3})}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-3})}$ $= \frac{(\sqrt{x-3}) \cdot (x+5)}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-3})} = \frac{x+5}{\sqrt{x+2}}$	0,5 0,5
		Với $x \geq 0, x \neq 9$: Để $A \leq 2$ thì $\frac{x+5}{\sqrt{x+2}} \leq 2 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 \leq 0$ (vì $\sqrt{x+2} > 0$)	0,5
		$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn) Vậy $x=1$ thì $A \leq 2$	0,5
	2)	Tìm các số thực $x \geq y \geq 4$ thỏa mãn $\frac{x+y}{2} = 2\sqrt{y-4} + \sqrt{xy-y^2}$.	1,0 điểm
		$\frac{x+y}{2} = 2\sqrt{y-4} + \sqrt{xy-y^2} \Leftrightarrow x+y-4\sqrt{y-4}-2\sqrt{y(x-y)}=0$ $\Leftrightarrow y-4-4\sqrt{y-4}+4+(x-y)-2\sqrt{y(x-y)}+y=0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{y-4}-2)^2 + (\sqrt{x-y}-\sqrt{y})^2 = 0$	0,5
		$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y-4}-2=0 \\ \sqrt{x-y}-\sqrt{y}=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y=8 \\ x=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=8 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$ Vậy $x=16, y=8$	0,5

Câu 2 (5,0 điểm)	1)	Giải phương trình: $\frac{x^2}{2} + x = 4 - 3\sqrt{2x+3}$	2,5 điểm
		Điều kiện xác định: $x \geq -\frac{3}{2}$	0,25
		$\frac{x^2}{2} + x = 4 - 3\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x^2 + 2x = 8 - 6\sqrt{2x+3}$ $\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 4) = [(2x+3) - 6\sqrt{2x+3} + 9]$	0,5
		$(x+2)^2 = (\sqrt{2x+3} - 3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = \sqrt{2x+3} - 3 & (1) \\ x+2 = 3 - \sqrt{2x+3} & (2) \end{cases}$	0,5
		$(1) \Leftrightarrow 2x+4 = 2\sqrt{2x+3} - 6 \Leftrightarrow 2x+3 - 2\sqrt{2x+3} + 1 = -6$ $\Leftrightarrow (\sqrt{2x+3} - 1)^2 = -6$ (loại)	0,25
		$(2) \Leftrightarrow 2x+4 = 6 - 2\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow 2x+3 + 2\sqrt{2x+3} + 1 = 6$ $\Leftrightarrow (\sqrt{2x+3} + 1)^2 = 6 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} + 1 = \sqrt{6}$ (vì $\sqrt{2x+3} + 1 > 0$)	0,25
		$\sqrt{2x+3} = \sqrt{6} - 1 \Leftrightarrow 2x+3 = 7 - 2\sqrt{6} \Leftrightarrow 2x = 4 - 2\sqrt{6}$ $\Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{6}$ (thỏa mãn)	0,5
		Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{2 - \sqrt{6}\}$	0,25
	2)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-1 = \sqrt{2xy-4x-y^2+2y} \\ \sqrt{y-4} - 2\sqrt{5-x} = x^2-3y-2 \end{cases} (*)$	2,5 điểm
		ĐKXĐ: $2x \geq y, x \leq 5, y \geq 4$	0,25
		$x-1 = \sqrt{2xy-4x-y^2+2y} \Leftrightarrow 2(x-1) = 2\sqrt{(2x-y)(y-2)}$ $\Leftrightarrow 2x-y-2\sqrt{(2x-y)(y-2)} + y-2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2x-y} - \sqrt{y-2})^2 = 0$	0,5
		$\Leftrightarrow \sqrt{2x-y} - \sqrt{y-2} = 0 \Leftrightarrow y = x+1$	0,25
		Thay $y = x+1$ vào phương trình (*) ta có $\Leftrightarrow \sqrt{x-3} - 2\sqrt{5-x} = x^2-3x-5 \quad (3 \leq x \leq 5)$	0,25
		$\Leftrightarrow \sqrt{x-3} - 1 - 2(\sqrt{5-x} - 1) = x^2-3x-4$ $\Leftrightarrow \frac{x-4}{\sqrt{x-3}+1} - \frac{2(4-x)}{\sqrt{5-x}+1} - (x+1)(x-4) = 0$ $\Leftrightarrow (x-4) \left(\frac{1}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{2}{\sqrt{5-x}+1} - x-1 \right) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ \frac{1}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{2}{\sqrt{5-x}+1} - x-1 = 0 \end{cases} (1)$	0,5
		$x=4 \Rightarrow y=5$ (thỏa mãn)	0,25
		Giải phương trình (1): $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{2}{\sqrt{5-x}+1} = x+1$	

		Từ đó ta có $x^y + y^x \equiv r^y (1 - r^{x-y}) \pmod{p} \equiv 0 \pmod{p}$ $\Rightarrow x^y + y^x$ chia hết cho p Mà x, y là các số tự nhiên lẻ nên $x^y + y^x$ chia hết cho 2, $(2; p) = 1$ $\Rightarrow x^y + y^x$ chia hết cho $2p$	0,25 0,25
Câu 4. (7,0 điểm)	1)	Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại điểm M. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng AO tại I cắt đường thẳng AB, AC lần lượt tại D và E, OM cắt BC tại H. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BD và CE. Chứng minh rằng: a) Bốn điểm B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn có tâm là M; b) AH vuông góc với PQ.	
			
	a)	Bốn điểm B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn có tâm là M ;	2,5 điểm
		Xét (O) có MB, MC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M suy ra $MB = MC, OB = OC, MC \perp OC, MB \perp OB$ $\Rightarrow MO$ là đường trung trực của BC $\Rightarrow MO \perp BC$ tại H và H là trung điểm của BC.	0,5
		Có $\widehat{IDA} + \widehat{IAD} = 90^\circ, \widehat{OBA} + \widehat{MBD} = 90^\circ$ Mà tam giác OAB cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \widehat{IAD}$ $\Rightarrow \widehat{IDA} = \widehat{MBD}$ hay $\widehat{MDB} = \widehat{MBD}$ Do đó tam giác MBD cân tại $M \Rightarrow MD = MB$	1,0
		Chứng minh tương tự ta có $ME = MC$ Mà $MB = MC$ (theo chứng minh trên) $\Rightarrow MB = MC = MD = ME$ $\Rightarrow B, D, C, E$ cùng thuộc đường tròn có tâm là M	1,0

	b) AH vuông góc với PQ. 2,5 điểm	
	Chứng minh được tứ giác $MPHQ$ là hình bình hành Suy ra $PH \parallel MQ, QH \parallel MP$ 1,0	
	Xét tam giác MBD cân tại M có MP là đường trung tuyến đồng thời là đường cao $\Rightarrow MP \perp BD$ Chứng minh tương tự $\Rightarrow MQ \perp CE$ Mà $PH \parallel MQ, QH \parallel MP$ (theo chứng minh trên) $\Rightarrow PH \perp AQ, QH \perp AP$ 1,0	
	Xét tam giác có $PH \perp AQ, QH \perp AP$, mà PH cắt QH tại H $\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác APQ Từ đó suy ra AH vuông góc với PQ. 0,5	
	2) Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$, đường cao AH. Đường tròn tâm O đường kính AH cắt cạnh AB ở D, cắt cạnh AC ở E. Đường thẳng đi qua A vuông góc với DE tại I cắt cạnh BC tại F, DE cắt AH tại M. Chứng minh rằng $\frac{S_{\triangle ADM}}{S_{\triangle AFC}} = \sin^2 \widehat{ABC} \cdot \sin^2 \widehat{ACB}$ 2,0 điểm	
	Chứng minh hai tam giác AED và ABC đồng dạng $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ACB}$ hay $\Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{ACF}$ 0,5	
	Xét tam giác AMI có $\widehat{AMD}$ là góc ngoài tại đỉnh M $\Rightarrow \widehat{AMD} = 90^\circ + \widehat{MAI}$ Chứng minh tương tự: $\widehat{AFC} = 90^\circ + \widehat{HAF}$ $\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{AFC}$ Từ đó suy ra hai tam giác AMD và AFC đồng dạng (g.g) Nên ta có $\frac{S_{\triangle ADM}}{S_{\triangle AFC}} = \left(\frac{AD}{AC}\right)^2$ 0,5	
	Ta có $\sin^2 \widehat{ABC} = \left(\frac{AH}{AB}\right)^2 = \frac{AH^2}{AB^2} = \frac{AD \cdot AB}{AB^2} = \frac{AD}{AB}$ $\sin^2 \widehat{ACB} = \left(\frac{AH}{AC}\right)^2 = \frac{AH^2}{AC^2} = \frac{AD \cdot AB}{AC^2}$ 0.5	

		Suy ra $\sin^2 \widehat{ABC} \cdot \sin^2 \widehat{ACB} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AD \cdot AB}{AC^2} = \left(\frac{AD}{AC} \right)^2$ do đó $\frac{S_{\triangle ADM}}{S_{\triangle AFC}} = \sin^2 \widehat{ABC} \cdot \sin^2 \widehat{ACB}$	0,5
Câu 5 (2,0 điểm)	1)	Cho các số thực dương x, y thay đổi thoả mãn $\sqrt{xy} \geq 4y^2 + 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $E = \frac{2313xy}{2023(x^2 + y^2)}$.	1,0 điểm
		Có $\sqrt{xy} \geq 4y^2 + 1 \geq 4y \Rightarrow xy \geq 16y^2 \Rightarrow x \geq 16y \Rightarrow \frac{x}{y} \geq 16$ $E = \frac{2313xy}{2023(x^2 + y^2)} = \frac{2313}{2023} \cdot \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}$ Đặt $\frac{x}{y} = a \Rightarrow a \geq 16$ thì ta có $E = \frac{2313}{2023} \cdot \frac{1}{a + \frac{1}{a}}$	0,25
		Có $N = a + \frac{1}{a} = \frac{a}{256} + \frac{1}{a} + \frac{255a}{256}$ Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số dương ta có: $\frac{a}{256} + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{256} \cdot \frac{1}{a}} = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}, a \geq 16 \Rightarrow \frac{255a}{256} \geq \frac{255}{16}$	0,25
		$\Rightarrow N \geq \frac{1}{8} + \frac{255}{16} = \frac{257}{16} \Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq \frac{257}{16} \Rightarrow \frac{1}{a + \frac{1}{a}} \leq \frac{16}{257}$ Do đó $E = \frac{2313}{2023} \cdot \frac{1}{a + \frac{1}{a}} \leq \frac{2313}{2023} \cdot \frac{16}{257} = \frac{144}{2023}$	0,25
		Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} x = 16y \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ (thoả mãn) Vậy giá trị lớn nhất của E là $\frac{144}{2023}$ khi $\begin{cases} x = 8 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$	0,25
	2)	Cho $n+1$ ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$) số tự nhiên phân biệt và nhỏ hơn $2n$. Chứng minh rằng trong các số đã cho luôn có thể chọn ra 3 số mà một trong ba số này bằng tổng của hai số còn lại.	1,0 điểm

	Không giảm tổng quát, giả sử $n+1$ số tự nhiên khác nhau đó là : $0 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < 2n \quad (1) \quad (a_i \in \mathbb{N})$ Xét dãy các hiệu : $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_n - a_1, a_{n+1} - a_1$, có n số Do $a_{i+1} > a_i$ ($1 \leq i \leq n$) nên $a_{i+1} - a_1 \geq 1$, $a_{i+1} - a_1 < 2n$ và $1 \leq a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < \dots < a_n - a_1 < a_{n+1} - a_1 < 2n \quad (2)$	0,5
	Như vậy ta có dãy $2n+1$ số : $1 \leq a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_n - a_1, a_{n+1} - a_1 < 2n$ Do đó trong dãy $2n+1$ số trên phải có 2 số bằng nhau. Vì các số ở mỗi dãy (1) và (2) đều khác nhau do đó phải có 1 số ở dãy (1) bằng 1 số ở dãy (2) Suy ra tồn tại hai số nguyên dương i, j thoả mãn $a_i = a_j - a_1 \quad (1 \leq i \leq n, j > i)$ $\Rightarrow a_j = a_i + a_1$ Vậy trong các số đã cho luôn có thể chọn ra 3 số mà một trong ba số này bằng tổng của hai số còn lại.	0,25 0,25

____Hết____