

ĐỀ SỐ 12: ĐỀ TỰ LUYỆN BỒI DƯỠNG HSG CẤP HUYỆN LỚP 8

NĂM HỌC: 2023-2024

Thời gian làm bài 120 phút

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Chọn một phương án đúng

Câu 1. Với $x \neq 0$; $x \neq -1$; $x \neq 1/2$, rút gọn biểu thức

$$P = \left(\frac{x+2}{3x} + \frac{2}{x+1} - 3 \right) : \frac{2-4x}{x+1} - \frac{3x+1-x^2}{3x} \text{ là:}$$

A. $P = \frac{x+1}{3}$

B. $P = \frac{x-3}{3}$

C. $P = \frac{x-1}{-3}$

D. $P = \frac{x-1}{3}$

Câu 2. Tổng $S = 1.2 + 2.5 + 3.8 + \dots + 100.299$ là:

A. 1010100

B. 1010010

C. 1010110

D. 1010000

Câu 3. Rút gọn $S = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\dots(2^{1006}+1)+1$ là:

A. $S = 2^{2012}$

B. $S = 2^{2012} - 1$

C. $2^{2012} + 1$

D. Một số khác

Câu 4. Nghiệm của phương trình $-2(z+3)-5=z+4$ là

A. $z = -5$; B. $z = 5$; C. $z = 2$; D. $z = -2$

Câu 5. Tổng các nghiệm của phương trình $|x-2|^{2016} + |x-3|^{2015} = 1$ là:

A. 1

B. 2

C. 5

D. 2016

Câu 6. Các hệ số a và b sao cho đa thức $2x^3 + ax + b$ chia cho $x+1$ dư -6 , chia cho $x-2$ dư 21 là:

A. $a = 3$; $b = 1$

B. $a = -3$; $b = -1$

C. $a = -3$; $b = 1$

D. $a = 3$; $b = -1$

Câu 7. Cho đa thức $A(x) = ax^2 + bx + c$. Khi đó giá trị b biết rằng khi chia đa thức $A(x)$ cho $x-1$ và $x+1$ đều có cùng số dư là:

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

Câu 8. Cho đa thức $P(x) = x^4 + x^3 + 6x^2 - 40x + m - 1979$. Giá trị của m sao cho $P(x)$ chia hết cho $x-2$ là:

A. $m = -2011$

B. $m = 2011$

C. $m = 1979$

D. Một giá trị khác

Câu 9. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ$, $AB = 4\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$. Gọi H là hình chiếu của B trên AC. Độ dài HA là:

A. 2

B. 3

C. 5

D. Một số khác

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = a = 5\text{cm}$; $AC = b = 12\text{cm}$. AM, AD thứ tự là các đường trung tuyến và phân giác của tam giác. Độ dài đoạn thẳng BD là:

A. $\frac{13}{5}$

B. $\frac{65}{17}$

C. $\frac{169}{30}$

D. Một số khác

Câu 11. Cho tam giác ABC có $B = 60^\circ$, $BC = 8\text{ cm}$, $AB + AC = 12\text{cm}$. Độ dài AB, AC là

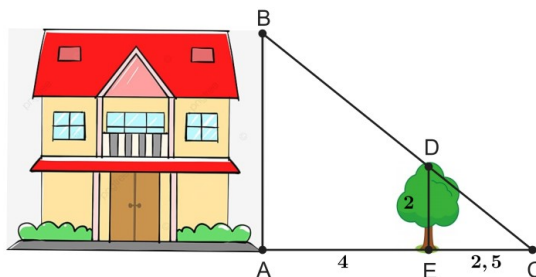
A. 5cm ; 7cm

B. 4cm ; 8cm

C. 6cm ; 6cm

D. 7cm ; 5cm

Câu 12: Để tính chiều cao AB của ngôi nhà (như hình vẽ), người ta đo chiều cao của cái cây $ED = 2\text{ m}$ và biết được các khoảng cách $AE = 4\text{ m}$, $EC = 2,5\text{ m}$.



Khi đó, chiều cao AB của ngôi nhà là:

A. 5,2 m

B. 8,125 m.

C. 4 m

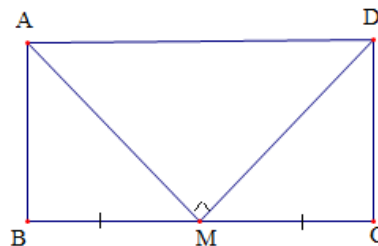
D. 6,5 m

Câu 13: Cho hình vuông cạnh dài $2cm$, đường chéo của nó bằng cạnh của hình vuông thứ hai. Độ dài đường chéo thứ hai là:

- A. $4\sqrt{2}cm$; B. $2cm$; C. $2\sqrt{2}cm$; D. $4cm$

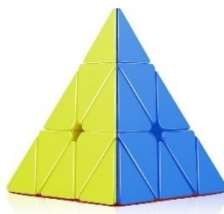
Câu 14: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có chu vi bằng $36cm$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Biết $MA \perp MD$. Tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật $ABCD$ (hình vẽ bên).

- A. $AB = DC = 6cm$, $AD = BC = 12cm$
 B. $AB = DC = 4cm$, $AD = BC = 14cm$
 C. $AB = DC = 5cm$, $AD = BC = 13cm$
 D. $AB = DC = 3cm$, $AD = BC = 15cm$



thể tích của

Câu 15: Một khối rubik có dạng hình chóp tam giác đều và khối đó là $44,002cm^3$. Tính chiều cao của khối rubik đó.



- A. $5,88cm$; B. $3,92cm$; C. $1,96cm$; D. $7,84cm$

Câu 16. Ngày 1/1/2016, ông Tư mang 50 000 000 đồng vào ngân hàng gửi tiết kiệm với lãi suất 7% năm. Đến ngày 1/1/2017 ông Tư đến ngân hàng không rút lãi ra mà gửi thêm vào 26 500 000 đồng với kì hạn 1 năm nhưng lãi suất hiện tại của ngân hàng là 7,5% năm. Ngày 1/1/2018 vì bận công việc nên ông không đến rút tiền lãi được và tiền lãi sẽ được cộng vào tiền gốc để tính lãi kép. Nếu vào ngày 1/1/2019 ông Tư đến rút cả gốc lẫn lãi thì được tất cả bao nhiêu tiền?

- A. 86tr B. 90tr600 nghìn C. 92tr450 nghìn D. 78tr700 nghìn

II. Phần tự luận (12 điểm)

Câu 1(3,5 điểm):

a. Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + n + 2$ là hợp số.

b. Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Câu 2 (3,0 điểm):a. Cho $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Tính $S = a^2 + b^{2012} + c^{2013}$.

b. Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x - 1$ dư 4, khi chia cho $x^2 + 1$ dư $3x + 5$. Tìm đa thức dư khi chia $f(x)$ cho $(x - 1)(x^2 + 1)$.

Câu 3 (4,5 điểm): Cho hình vuông $ABCD$ ($AB = a$), M là một điểm bất kỳ trên cạnh BC . Tia Ax vuông góc với AM cắt đường thẳng CD tại K . Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MK . Tia AI cắt đường thẳng CD tại E . Đường thẳng qua M song song với AB cắt AI tại N .

1/ Tứ giác $MNKE$ là hình gì? Chứng minh.

2/ Chứng minh: $AK^2 = KC \cdot KE$.

3/ Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên cạnh BC thì tam giác CME luôn có chu vi không đổi.

4/ Tia AM cắt đường thẳng CD ở G . Chứng minh rằng $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AG^2}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M .

Câu 4 (1,0 điểm): Cho $a, b, c > 0$.

Chứng minh rằng: $\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{a+b+c}{4}$

Hết

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Mỗi câu đúng 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	D	D	A	A	C	D	B	B	A	B
Câu	11	12	13	14	15	16				
Đáp án	A	A	D	A	A	C				

B. HƯỚNG DẪN

Câu 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{3x} + \frac{2}{x+1} - 3 \right) : \frac{2-4x}{x+1} - \frac{3x+1-x^2}{3x}$

ĐKXĐ : $x \neq 0$; $x \neq -1$; $x \neq 1/2$.

Rút gọn được $A = \frac{x-1}{3}$.

Câu 2. Tính tổng : $S_n = 1.2 + 2.5 + 3.8 + \dots + 100.299$

$$\begin{aligned} \text{ta có : } S_n &= \sum_{i=1}^n i(3i-1) = \sum_{i=1}^n (3i^2 - i) \\ &= 3 \sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n i \end{aligned}$$

Theo (I) ta có :

$$S_n = \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1)$$

Câu 3. Tính $B = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\dots(2^{1006}+1)+1$

$$b) B = (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\dots(2^{1006}+1)+1$$

$$= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\dots(2^{1006}+1)+1$$

$$= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)\dots(2^{1006}+1)+1$$

$$= \dots = \left((2^{1006})^2 - 1 \right) + 1 = 2^{2012}$$

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình $1 - \frac{2x-5}{6} > \frac{3-x}{4}$

Giải

$$\text{Xét bất phương trình : } 1 - \frac{2x-5}{6} > \frac{3-x}{4}$$

$$\Leftrightarrow 12 - 4x + 10 > 9 - 3x$$

$$\Leftrightarrow -4x + 3x > 9 - 22$$

$$\Leftrightarrow -x > -13$$

$$\Leftrightarrow x < 13$$

(2)

Câu 5. Giải phương trình : $|x-2|^{2016} + |x-3|^{2015} = 1$. Dễ thấy $x = 2$ hoặc $x = 3$ là nghiệm của phương trình.

- Với $x > 3$ ta có: $|x-2| > 1 \Rightarrow |x-2|^{2016} + |x-3|^{2015} > 1 \Rightarrow$ PT vô nghiệm.

- Với $x < 2$ ta có: $|x-3| > 1 \Rightarrow |x-2|^{2016} + |x-3|^{2015} > 1 \Rightarrow$ PT vô nghiệm.

- Với $2 < x < 3$. Ta có: $1 > x-2 > 0$; $1 > 3-x > 0 \Rightarrow (x-2)^{2015} < 1 \Rightarrow (x-2)^{2016} < x-2$;

$(3-x)^{2014} < 1 \Rightarrow (3-x)^{2015} < 3-x$; $\Rightarrow |x-2|^{2016} + |x-3|^{2015} < x-2+3-x=1 \Rightarrow$ PTVN.

- Vậy nghiệm của PT là $x = 2$; $x = 3$.

Câu 6. Xác định các hệ số a và b sao cho đa thức $2x^3 + ax + b$ chia cho $x + 1$ dư -6 , chia cho $x - 2$ dư 21

Đa thức $2x^3 + ax + b$ chia cho $x + 1$ dư $-6 \Rightarrow -a + b = -4$ ⁽¹⁾

Đa thức $2x^3 + ax + b$ chia cho $x - 2$ dư $21 \Rightarrow 2a + b = 5$ ⁽²⁾

Từ (1) và (2), suy ra $a = 3$; $b = -1$

Câu 7. Cho đa thức $A(x) = ax^2 + bx + c$. Xác định b biết rằng khi chia đa thức $A(x)$ cho $x - 1$ và $x + 1$ đều có cùng số dư.

Đặt $A(x) = ax^2 + bx + c = (x - 1).Q_1 + R$ ⁽¹⁾

$A(x) = ax^2 + bx + c = (x + 1).Q_2 + R$ ⁽²⁾

Từ (1) suy ra $A(1) = a + b + c = R$; Từ (2) suy ra $A(-1) = a - b + c = R$

$\Rightarrow a + b + c = a - b + c \Rightarrow b = -b \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$

Câu 8. Cho đa thức $P(x) = x^4 + x^3 + 6x^2 - 40x + m - 1979$.

a) Tìm m sao cho $P(x)$ chia hết cho $x - 2$.

$P(x) = (x - 2)(x^3 + 3x^2 + 12x - 16) + m - 2011$

Do đó $P(x)$ chia hết cho $(x - 2) \Leftrightarrow m - 2011 = 0 \Leftrightarrow m = 2011$

Câu 9. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ$, $AB = 4\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$. Gọi H là hình chiếu của B trên AC.

a. Tính độ dài HA.

b. Tính độ dài trung tuyến AM của tam giác ABC.

a. Tính độ dài HA:

Tam giác ABC có góc A tù (gt) nên đường cao kẻ từ B nằm ngoài tam giác tức A nằm giữa H và C. Ta có $\angle BAH = 60^\circ$ (kề bù với góc BAC) **(1đ)**

Tam giác vuông BHA có:

$HA = AB \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ (cm)}$

b. Tính AM:

Vẽ MF vuông góc với HC

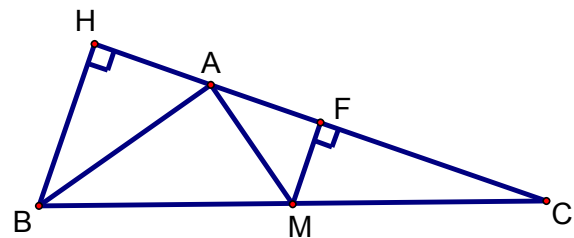
Tam giác vuông BHA có:

$BH = \sqrt{BA^2 - AH^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Tam giác BHC có $MB = MC$

$MF \parallel BH$ (cùng vuông góc với HC)

Nên $FH = FC$



Suy ra MF là đường trung bình tam giác BHC

$$\Rightarrow MF = \frac{1}{2} BH = \sqrt{3}$$

Lại có: $HC = HA + AC = 2 + 6 = 8$

$$\Rightarrow FH = FC = \frac{1}{2} HC = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$$

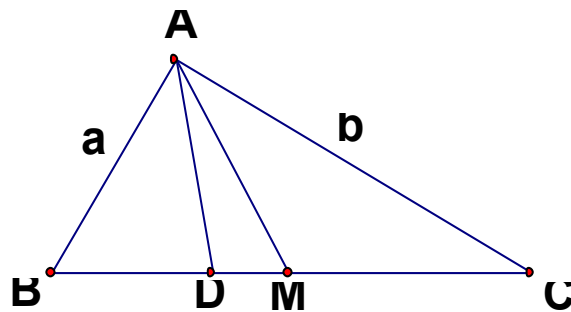
$$\Rightarrow AF = HF - HA = 4 - 2 = 2$$

Trong tam giác vuông AMF có:

$$AM = \sqrt{AF^2 + MF^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$$

Vậy: $AM = \sqrt{7}$ cm.

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = a = 5$ cm; $AC = b = 12$ cm. AM, AD thứ tự là các đường trung tuyến và phân giác của tam giác. Độ dài đoạn thẳng BD là:



Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + b^2$. (Theo Pitago)

Theo tính chất đường phân giác ta có: $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{BD + CD} = \frac{AB}{AB + AC}$

$$\Leftrightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow BD = \frac{a \cdot BC}{a+b} = \frac{a \sqrt{a^2 + b^2}}{a+b} = \frac{5 \cdot 13}{5+12} = \frac{65}{17}$$

Câu 11. Cho tam giác ABC có $B=60^\circ$, $BC=8$ cm, $AB+AC=12$ cm. Độ dài AB, AC là: 5cm; 7cm (Bồi dưỡng HSG toán Hình học 8 Trang 122)

Câu 12. Cho hình thoi ABCD cạnh a có $A = 60^\circ$, một đường thẳng bất kỳ qua C cắt tia đối của các tia BA, DA tại M, N

a) Chứng minh rằng tích BM. DN có giá trị không đổi

b) Gọi K là giao điểm của BN và DM. Tính số đo của góc BKD

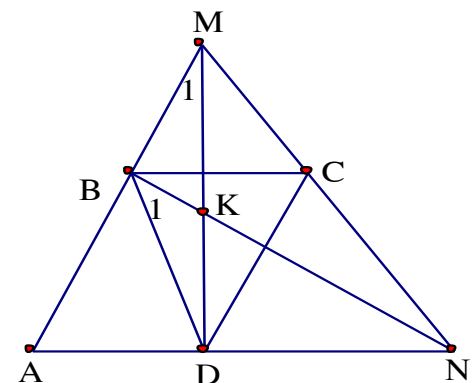
Giải

$$a) BC \parallel AN \Rightarrow \frac{MB}{BA} = \frac{CM}{CN} \quad (1)$$

$$CD \parallel AM \Rightarrow \frac{CM}{CN} = \frac{AD}{DN} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{MB}{BA} = \frac{AD}{DN} \Rightarrow MB \cdot DN = BA \cdot AD = a \cdot a = a^2$$

b) $\triangle MBD$ và $\triangle BDN$ có $\angle MBD = \angle BDN = 120^\circ$



$$\frac{MB}{BD} = \frac{MB}{BA} = \frac{CM}{CN} = \frac{AD}{DN} = \frac{BD}{DN} \text{ (Do } ABCD \text{ là hình thoi có } A = 60^\circ \text{ nên } AB = BC = CD =$$

$$DA) \Rightarrow \triangle MBD \sim \triangle BDN$$

Suy ra $M_1 = B_1$. $\triangle MBD$ và $\triangle BKD$ có $BDM = BDK$ và $M_1 = B_1$ nên $BKD = MBD = 120^\circ$

Câu 13. Cho hình bình hành $ABCD$ có đường chéo lớn AC , tia Dx cắt SC , AB , BC lần lượt tại I , M , N . Vẽ CE vuông góc với AB , CF vuông góc với AD , BG vuông góc với AC . Gọi K là điểm đối xứng với D qua I . Chứng minh rằng

a) $IM \cdot IN = ID^2$

b) $\frac{KM}{KN} = \frac{DM}{DN}$

c) $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$

Giải

a) Từ $AD \parallel CM \Rightarrow \frac{IM}{ID} = \frac{CI}{AI}$ (1)

Từ $CD \parallel AN \Rightarrow \frac{CI}{AI} = \frac{ID}{IN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{IM}{ID} = \frac{ID}{IN}$ hay $ID^2 = IM \cdot IN$

b) Ta có $\frac{DM}{MN} = \frac{CM}{MB} \Rightarrow \frac{DM}{MN + DM} = \frac{CM}{MB + CM} \Rightarrow \frac{DM}{DN} = \frac{CM}{CB}$ (3)

Từ $ID = IK$ và $ID^2 = IM \cdot IN$ suy ra $IK^2 = IM \cdot IN$

$$\Rightarrow \frac{IK}{IM} = \frac{IN}{IK} \Rightarrow \frac{IK - IM}{IM} = \frac{IN - IK}{IK} \Rightarrow \frac{KM}{IM} = \frac{KN}{IK} \Rightarrow \frac{KM}{KN} = \frac{IM}{IK} \Rightarrow \frac{KM}{KN} = \frac{IM}{ID} = \frac{CM}{AD} = \frac{CM}{CB} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{KM}{KN} = \frac{DM}{DN}$

c) Ta có $\triangle AGB \sim \triangle AEC \Rightarrow \frac{AE}{AG} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB \cdot AE = AC \cdot AG$

$$\Rightarrow AB \cdot AE = AG(AG + CG) \quad (5)$$

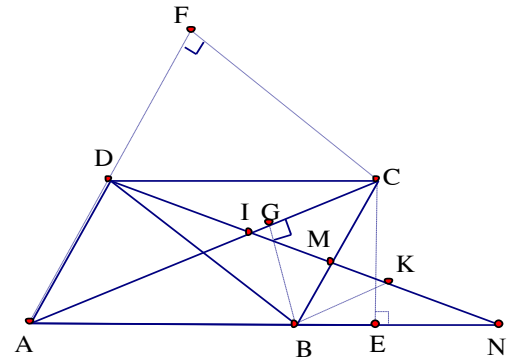
$$\triangle CGB \sim \triangle AFC \Rightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{CG}{CB} = \frac{CG}{AD} \text{ (vì } CB = AD)$$

$$\Rightarrow AF \cdot AD = AC \cdot CG \Rightarrow AF \cdot AD = (AG + CG) \cdot CG \quad (6)$$

Cộng (5) và (6) vế theo vế ta có:

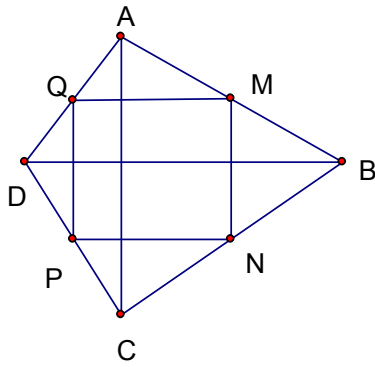
$$AB \cdot AE + AF \cdot AD = (AG + CG) \cdot AG + (AG + CG) \cdot CG$$

$$\Leftrightarrow AB \cdot AE + AF \cdot AD = AG^2 + 2 \cdot AG \cdot CG + CG^2 = (AG + CG)^2 = AC^2$$



Câu 14. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành.

Tứ giác $ABCD$ cần điều kiện gì thì $MNPQ$ là hình chữ nhật.

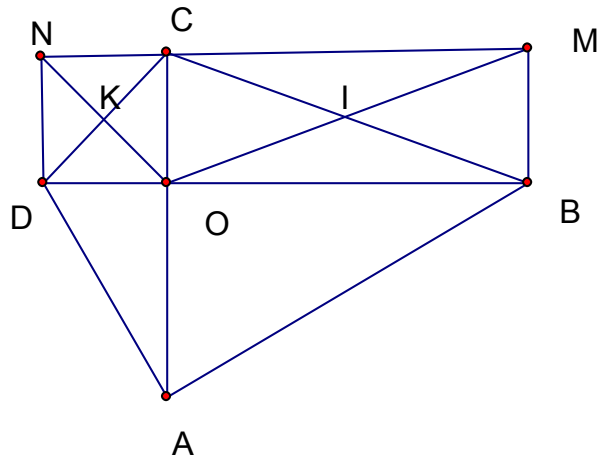


Trong tam giác ABD có QM là đường trung bình nên $QM \parallel BD$ và $QM = \frac{1}{2}BD$
 Tương tự trong tam giác BCD có PN là đường trung bình nên $PN \parallel BD$ và $PN = \frac{1}{2}BD$

Vậy $PN \parallel QM$ và $PN = QM$
 Hay MNPQ là hình bình hành.

Câu 15. Cho tứ giác ABCD. Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo (không vuông góc), I và K lần lượt là trung điểm của BC và CD. Gọi M và N theo thứ tự là điểm đối xứng của điểm O qua tâm I và K.

- C/m rằng tứ giác BMND là hình bình hành.
- Với điều kiện nào của hai đường chéo AC và BD thì tứ giác BMND là hình chữ nhật.
- Chứng minh 3 điểm M, C, N thẳng hàng



a/ Ta có OCND là hình bình hành vì có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Do đó $OC \parallel ND$ và $OC = ND$.

Tương tự ta có OCBM là hình bình hành nên $OC \parallel MB$ và $OC = MB$

Vậy $MB \parallel DN$ và $MB = DN$

Hay BMND là hình bình hành.

b/ Để BMND là hình chữ nhật thì

$\angle COB = 90^\circ$ hay CA và BD vuông góc.

c/ Ta có OCND là hình bình hành nên

$NC \parallel DO$, Tứ giác BMND là hình bình hành nên $MN \parallel BD$.

Mà qua N chỉ có một đường thẳng song song với BD do đó M, N, C thẳng hàng.

Câu 16. Trong đợt trồng cây đầu năm, lớp 5A cử một số bạn đi trồng cây và trồng được 180 cây, mỗi học sinh trồng được 8 hoặc 9 cây. Tính số học sinh tham gia trồng cây, biết số học sinh tham gia là một số chia hết cho 3.

Bài giải:

Nếu mỗi bạn trồng 9 cây thì số người tham gia sẽ ít nhất và chính là : $180 : 9 = 20$ (người).

Vì $180 : 8 = 22$ (dư 4) nên số người tham gia nhiều nhất là 22 người và khi đó có 4 người trồng 9 cây, còn lại mỗi người trồng 8 cây.

Theo đầu bài số người tham gia là một số chia hết cho 3 nên có 21 bạn tham gia.

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,5 điểm): a. Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + n + 2$ là hợp số.

b. Cho hai số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của hai số đó cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

b. 1 điểm	Ta có: $n^3 + n + 2 = n^3 + 1 + n + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1) + (n + 1)$ $= (n + 1)(n^2 - n + 2)$ Do $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $n + 1 > 1$ và $n^2 - n + 2 > 1$ Vậy $n^3 + n + 2$ là hợp số
c. 1 điểm	Gọi hai số lần lượt là a^2 và $(a+1)^2$ Theo bài ra ta có: $a^2 + (a + 1)^2 + a^2(a + 1)^2 = a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$ $= (a^4 + 2a^3 + a^2) + 2(a^2 + a) + 1 = (a^2 + a)^2 + 2(a + 1) + 1$ $= (a^2 + a + 1)^2$ là một số chính phương lẻ vì $a^2 + a = a(a + 1)$ là số chẵn $\Rightarrow a^2 + a + 1$ là số lẻ

Câu 2 (3,0 điểm): a. Cho $a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Tính $S = a^2 + b^{2012} + c^{2013}$.

b. Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x - 1$ dư 4, khi chia cho $x^2 + 1$ dư $3x + 5$. Tìm đa thức dư khi chia $f(x)$ cho $(x - 1)(x^2 + 1)$.

a. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{x-1}{2012} - 1 + \frac{x-2}{2011} - 1 + \frac{x-3}{2010} - 1 + \dots + \frac{x-2012}{1} - 1 + 2012 = 2012 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-2013}{2012} + \frac{x-2013}{2011} + \frac{x-2013}{2010} + \dots + \frac{x-2013}{1} = 0 \Leftrightarrow (x-2013)\left(\frac{1}{2012} + \frac{1}{2011} + \frac{1}{2010} + \dots + \frac{1}{1}\right) = 0 \Leftrightarrow x$$

$$= 2013$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{2013\}$

b. Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x - 1$ dư 4, khi chia cho $x^2 + 1$ dư $3x + 5$. Tìm đa thức dư khi chia $f(x)$ cho $(x - 1)(x^2 + 1)$.

Lời giải

Ta có: $f(x)$ chia cho đa thức $(x - 1)(x^2 + 1)$ có bậc là 3

$\Rightarrow f(x)$ chia cho đa thức $(x - 1)(x^2 + 1)$ có thương là $Q(x)$ và đa thức dư là

$$ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = (x - 1)(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x - 1)(x^2 + 1)Q(x) + a(x^2 + 1) + bx + c - a$$

$$= [(x - 1)Q(x) + a](x^2 + 1) + bx + c - a$$

$$f(x) \text{ chia } (x - 1) \text{ dư } 4 \Rightarrow f(1) = 4 \Rightarrow a + b + c = 4 \quad (1)$$

$$f(x) \text{ chia } x^2 + 1 \text{ dư } 3x + 5 \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c - a = 5 \end{cases} (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = 3 \end{cases}$$

Vậy đa thức dư là $-2x^2 + 3x + 3$

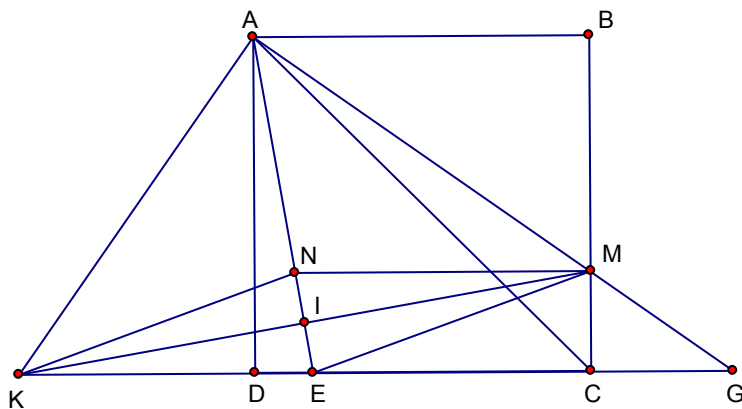
Câu 3 (4,5 điểm): Cho hình vuông ABCD ($AB = a$), M là một điểm bất kỳ trên cạnh BC. Tia Ax vuông góc với AM cắt đường thẳng CD tại K. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MK. Tia AI cắt đường thẳng CD tại E. Đường thẳng qua M song song với AB cắt AI tại N.

1/ Tứ giác MNKE là hình gì ? Chứng minh.

2/ Chứng minh: $AK^2 = KC \cdot KE$.

3/ Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên cạnh BC thì tam giác CME luôn có chu vi không đổi.

4/ Tia AM cắt đường thẳng CD ở G. Chứng minh rằng $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AG^2}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.



Câu 1: 1,0 điểm.

+ Từ $MN \parallel AB \parallel CD$ và $MI = IK$ áp dụng định lý Ta let ta có $NI = IE$

(0,25 điểm)

+ Chỉ ra tam giác AMK vuông cân tại A để có $AE \perp KM$

+ Tứ giác MNKE là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau nên MNKE là hình thoi.

Câu 2: 1,0 điểm.

+ Từ tính chất hình vuông có $\angle ACK = 45^\circ$.

+ Chứng minh hai tam giác AKE và CKA đồng dạng, suy ra ĐPCM.

Câu 3: 1, 0 điểm.

+ Từ hai tam giác ABM và ADK bằng nhau ta có $MB = DK$ nên $EK = MB + ED$.

(0,25 điểm)

+ Tam giác AMK vuông cân tại A có $MI = IK$ nên AI là trung trực của MK do đó $ME = EK$.

(0,25 điểm)

+ Từ đó $ME = MB + ED$, suy ra $ME + CM + CE = 2a$.

+ KL:

Câu 4: 1, 5 điểm.

+ Tam giác AMK vuông cân tại A nên $AM = AK$; do đó

$$\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AG^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AG^2}.$$

+ Tam giác AKG vuông tại A nên $AK \cdot AG = KG \cdot AD = 2$. dt AKG, do đó $AK^2 \cdot AG^2 = KG^2 \cdot AD^2$.
(0,25 điểm)

+ Mặt khác lại có $KG^2 = AK^2 + AG^2$ và $AD = a$ nên ta có
 $AK^2 \cdot AG^2 = a^2(AK^2 + AG^2)$, hay $\frac{AK^2 + AG^2}{AK^2 \cdot AG^2} = \frac{1}{a^2}$, suy ra $\frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AG^2} = \frac{1}{a^2}$

Câu 4 (1,0 điểm): Cho $a, b, c > 0$.

Chứng minh rằng: $\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{a+b+c}{4}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức: $\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

$$\begin{aligned} VT &= ab \cdot \frac{1}{(a+c)+(b+c)} + bc \cdot \frac{1}{(b+a)+(c+a)} + ca \cdot \frac{1}{(b+c)+(b+a)} \leq \frac{1}{4} ab \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right) + \frac{1}{4} bc \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right) \\ &+ \frac{1}{4} ca \left(\frac{1}{b+a} + \frac{1}{b+c} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{bc+ca}{a+b} + \frac{ab+bc}{b+c} + \frac{ab+bc}{a+c} \right) = \frac{a+b+c}{4} \end{aligned}$$

Hết