

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ 06

Câu 1: Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$; BC là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (IBC) tạo với mặt phẳng đáy hình nón một góc 60° . Tính theo a diện tích S của tam giác IBC .

A. $S = \frac{\sqrt{2}a^2}{6}$

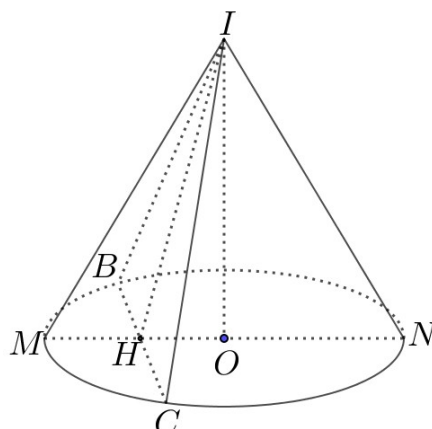
B. $S = \frac{a^2}{3}$

C. $S = \frac{\sqrt{2}a^2}{3}$

D. $S = \frac{2a^2}{3}$

Lời giải

Chọn C



Giả sử thiết diện là tam giác $IMN \Rightarrow IM = IN = a; OB = OC = OM = ON = OI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (với O là tâm của đường tròn đáy hình nón).

Gọi H là trung điểm BC .

Ta có
$$IH = \frac{OI}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; OH = IH \cdot \cos 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow HC = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$$

Vậy
$$S_{\triangle IBC} = IH \cdot HC = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{2}a^2}{3}$$

Câu 2: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - (a - 3)z + a^2 + a = 0$ (a là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để phương trình có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$?

A. 2

B. 3

C. 4

D. 1

Lời giải

Chọn C

Ta có
$$\Delta = (a - 3)^2 - 4(a^2 + a) = -3a^2 - 10a + 9$$

TH1: $\Delta \geq 0$, khi đó $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ khi phương trình có nghiệm bằng 0, hay

$$a^2 + a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

TH2: $\Delta < 0$, khi đó $Z_{1,2} = \frac{a - 3 \pm i\sqrt{3a^2 + 10a - 9}}{2}$.

Khi đó $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow (a - 3)^2 = 3a^2 + 10a - 9 \Leftrightarrow 2a^2 + 16a - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -9 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1;2;2)$, song song với mặt phẳng $(P): x - y + z + 3 = 0$ đồng thời cắt đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ và $I = \Delta \cap d \Rightarrow I \in d \Rightarrow I(1+t; 2+t; 3+t) \Rightarrow \overline{MI} = (t; t; 1+t)$.

Mà $\overline{MI} \parallel (P)$ nên $\overline{MI} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \Leftrightarrow t - t + 1 + t = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow \overline{MI} = (-1; -1; 0)$.

Đường thẳng Δ đi qua $M(1;2;2)$ và nhận $\overline{MI}$ làm một vectơ chỉ phương là: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 2 \end{cases}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ và $f'(x) = \frac{2}{\sin^2 x} + 1, \forall x \in (0; \pi)$. Khi đó $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2}{9} - 2 \ln 2$. B. $\frac{\pi^2}{9} - 2 \ln \frac{1}{2}$. C. $\frac{5\pi^2}{36} - 2 \ln 2$. D. $-\frac{\pi^2}{9} + \ln \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

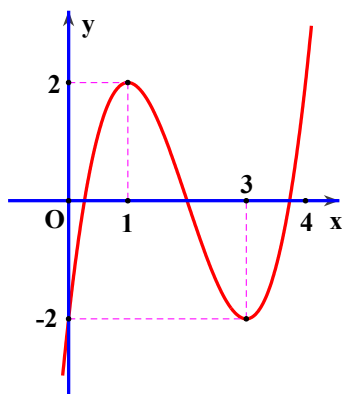
Ta có: $f'(x) = \frac{2}{\sin^2 x} + 1, \forall x \in (0; \pi) \Rightarrow f(x) = -2 \cot x + x + C, \forall x \in (0; \pi)$

Mà $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 + \frac{\pi}{2} + C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = -2 \cot x + x$.

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (-2 \cot x + x) dx = -2 \ln |\sin x| + \frac{1}{2} x^2 \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} + 2 \ln \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{72} = \frac{\pi^2}{9} - 2 \ln 2$.

Xét

Câu 5: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình sau:



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2.f(f(x)+2)+1=0$ là

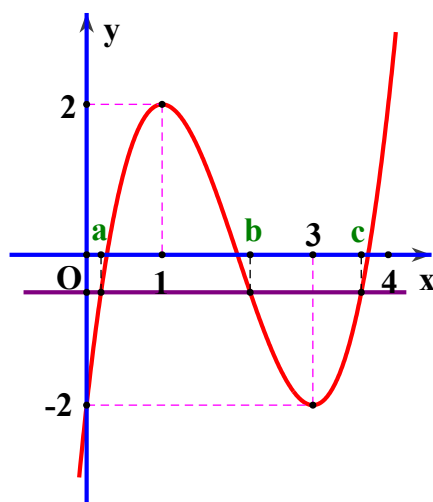
A. 7. B. 10. C. 8. D. 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2.f(f(x)+2)+1=0 \Leftrightarrow f(f(x)+2)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+2=a \in (0;1) \\ f(x)+2=b \in (1;3) \\ f(x)+2=c \in (3;4) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a-2 \in (-2;-1) & (1) \\ f(x)=b-2 \in (-1;1) & (2) \\ f(x)=c-2 \in (1;2) & (3) \end{cases}$$



Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra các phương trình (1), (2), (3) đều có 3 nghiệm phân biệt và các nghiệm này khác nhau.

Vậy phương trình $2.f(f(x)+2)+1=0$ có 9 nghiệm thực phân biệt.

Câu 6: Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 2x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - 2x$ với $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-2, -1, 3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $g'(x)$ bằng

A. $\frac{131}{4}$.

B. $\frac{131}{6}$.

C. $\frac{125}{12}$.

D. $\frac{125}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Do hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-2, -1, 3$ nên ta có:

$$f'(x) - g'(x) = 4a(x+2)(x+1)(x-3)$$

$$\text{Mà } f'(x) - g'(x) = 4ax^3 + (3b - 3m)x^2 + (2c - 2n)x + 4$$

$$\text{Đồng nhất hệ số, ta được: } -24a = 4 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{6} \Rightarrow f'(x) - g'(x) = -\frac{2}{3}(x+2)(x+1)(x-3)$$

$$\text{Vậy: } S = \int_{-2}^3 |f'(x) - g'(x)| dx = \frac{2}{3} \int_{-2}^3 |(x+2)(x+1)(x-3)| dx = \frac{131}{6}$$

Câu 7: Giả sử (x, y) là cặp số nguyên thỏa mãn đồng thời $8 \leq x \leq 2022$ và $2^y - \log_2(x + 2^{y-1}) = 2x - y$. Tổng các giá trị của y bằng

A. 60.

B. 63.

C. 2022.

D. 49.

Lời giải

Chọn A

$$2^y - \log_2(x + 2^{y-1}) = 2x - y \Leftrightarrow 2 \cdot 2^y + y = 2(x + 2^{y-1}) + \log_2(x + 2^{y-1})$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^y + \log_2 2^y = 2(x + 2^{y-1}) + \log_2(x + 2^{y-1})$$

Hàm số $f(t) = 2t + \log_2 t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$\text{Do vậy, } f(2^y) = f(x + 2^{y-1}) \Leftrightarrow 2^y = x + 2^{y-1} \Leftrightarrow x = 2^{y-1}$$

$$8 \leq x \leq 2022 \Rightarrow 8 \leq 2^{y-1} \leq 2022 \Leftrightarrow 3 \leq y - 1 \leq 10 \Leftrightarrow 4 \leq y \leq 11$$

$$\text{Vậy } 4 + 5 + 6 + \dots + 11 = 60$$

Câu 8: Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 2i| = 9$ và $|z - 2 + mi| = |z - m + i|$, (trong đó $m \in \mathbb{R}$). Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $|z_1 - z_2|$ lớn nhất, khi đó giá trị của $|z_1 + z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$.

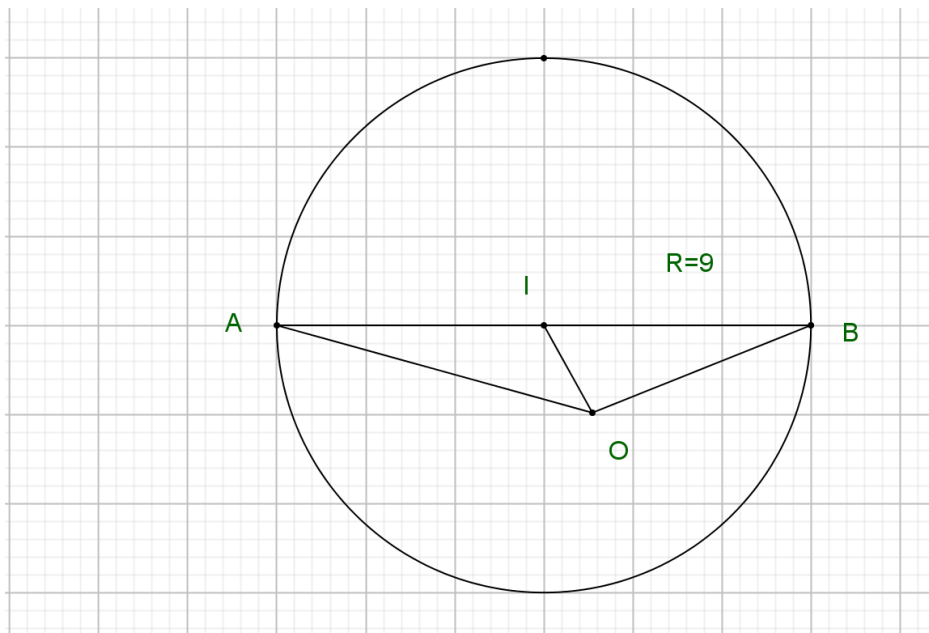
B. 6.

C. $\sqrt{5}$.

D. 18.

Lời giải

Chọn A



Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z + 1 - 2i| = 9 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 81$.

$$|z - 2 + mi| = |z - m + i| \Leftrightarrow |x - 2 + (y - m)i| = |x - m + (y + 1)i| \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - m)^2 = (x - m)^2 + (y + 1)^2 \\ \Leftrightarrow 2(2 - m)x + 2(m + 1)y - 3 = 0$$

Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $|z_1 - z_2|$ lớn nhất

Giả sử A, B là 2 điểm biểu diễn z_1, z_2 . Khi đó $|z_1 - z_2|$ lớn nhất khi AB là đường kính
 $|z_1 - z_2| = AB = 18$.

$$\text{Ta có } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = 4OI^2 + 2R^2 \Rightarrow |z_1 + z_2| = 2OI = 2\sqrt{5}$$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 0; -2)$ và $B(3; 4; 1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 16$ với $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 10 = 0$. M, N là hai điểm thuộc (P) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ là

A. $\sqrt{34} - 1$.

B. $\sqrt{34}$.

C. 5.

D. 4

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 10 = 0 \\ (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0$$

Vậy (P) là mặt phẳng (Oxy) .

Gọi $A'(0; 0; 0)$ và $B'(3; 4; 0)$ là hình chiếu của A, B trên mặt phẳng Oxy .

Ta có $A'M + MN + NB' \geq A'B' \Leftrightarrow A'M + NB' \geq 5 - 1 = 4$

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski:

$$AM + BN = \sqrt{AA'^2 + A'M^2} + \sqrt{BB'^2 + B'N^2} \geq \sqrt{(AA' + BB')^2 + (A'M + B'N)^2} \geq 5$$

Đẳng thức xảy ra khi A', M, N, B' thẳng hàng và $\frac{AA'}{A'M} = \frac{BB'}{B'N}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \left| -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m+3)x^2 - (m^2+3m)x + \frac{2}{3} \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-9; 9]$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$?

A. 3.

B. 2.

C. 16.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m+3)x^2 - (m^2+3m)x + \frac{2019}{2020}$

$$\Rightarrow g'(x) = -x^2 + (2m+3)x - (m^2+3m)$$

Để $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $g(x)$ nghịch biến và không âm trên khoảng $(1; 2)$.

$$\begin{cases} g'(x) \leq 0, \forall x \in (1; 2) \\ g(2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + (2m+3)x - (m^2+3m) \leq 0, \forall x \in (1; 2) \\ -\frac{1}{3} \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \cdot (2m+3) \cdot 2^2 - (m^2+3m) \cdot 2 + \frac{2}{3} \geq 0 \end{cases}$$

Tức là:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m+3, \forall x \in (1; 2) \\ x \leq m, \forall x \in (1; 2) \\ -2m^2 - 2m + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Trường hợp 2: $g(x)$ đồng biến và không dương trên khoảng $(1; 2)$.

$$\begin{cases} g'(x) \geq 0, \forall x \in (1; 2) \\ g(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + (2m+3)x - (m^2+3m) \geq 0, \forall x \in (1; 2) \\ -\frac{1}{3} \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \cdot (2m+3) \cdot 2^2 - (m^2+3m) \cdot 2 + \frac{2}{3} \leq 0 \end{cases}$$

Tức là:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq x \leq m+3, \forall x \in (1; 2) \\ -2m^2 - 2m + 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 1 \\ m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$