

**TUYỂN TẬP CÁC CHUYÊN ĐỀ
CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC**

MỤC LỤC

		Trang
Chương I. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN		
Chủ đề 1	Kỹ thuật biến đổi tương đương	3
Chủ đề 2	Sử dụng các tính chất của tỉ số, tính chất giá trị tuyệt đối và tính chất của tam thức bậc hai trong chứng minh bất đẳng thức	44
	1. Sử dụng tính chất của tỉ số	45
	2. Sử dụng tính chất giá trị tuyệt đối	54
	3. Sử dụng tính chất tam thức bậc hai.	59
Chủ đề 3	Chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp phản chứng	68
Chủ đề 4	Chứng minh các bất đẳng thức về tổng, tích của dãy số - Phương pháp quy nạp	86
Chủ đề 5	Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức CAUCHY	117
	1. Kỹ thuật chọn điểm rơi trong đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân	118
	2. Kỹ thuật chọn điểm rơi trong đánh giá từ trung bình nhân sang trung bình cộng.	141
	3. Kỹ thuật ghép cặp trong bất đẳng thức Cauchy	161
	4. Kỹ thuật thêm bớt	175
	5. Kỹ thuật Cauchy ngược dấu	191
	6. Kỹ thuật đổi biến số	199
Chủ đề 6	Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức BUNHIACOPXKI	220
	1. Kỹ thuật chọn điểm rơi	221
	2. Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản	236
	3. Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức	252
	4. Kỹ thuật thêm bớt	275
	5. Kỹ thuật đổi biến trong bất đẳng thức Bunhiacopxki	289
Chương II. MỘT SỐ KỸ THUẬT GIẢI TOÁN ĐẶC SẮC		
Chủ đề 7	Ứng dụng nguyên lý DIRICHLET trong chứng minh bất đẳng thức	307
Chủ đề 8	Phương pháp hệ số bất định trong chứng minh bất đẳng thức	319
Chủ đề 9	Ứng dụng một hệ quả của bất đẳng thức SCHUR	333

Chủ đề 10	Ứng dụng của đạo hàm trong chứng minh bất đẳng thức và bài toán tìm cực trị.	344
	1. Dồn biến nhờ vận dụng kỹ thuật sử dụng các bất đẳng thức kinh điển	344
	2. Dồn biến nhờ kết hợp với kỹ thuật đổi biến số.	367
	3. Dồn biến nhờ kết hợp với kỹ thuật sắp thứ tự các biến	382
	4. Phương pháp tiếp tuyến	389
	5. Khảo sát hàm nhiều biến số	393
	6. Kết hợp với việc sử dụng Bổ đề	398
	7. Vận dụng kỹ thuật dồn biến cổ điển	405
Chương III. TUYỂN CHỌN MỘT SỐ BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC		
Chủ đề 11	Một số bất đẳng thức hay và khó	409
Chủ đề 12	Một số bất đẳng thức trong các đề thi học sinh giỏi, thi TSDH và tuyển sinh lớp 10 chuyên toán.	649

MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

I. Định nghĩa

Giả sử A và B là hai biểu thức bằng số hoặc bằng chữ. Khi đó

+ $A > B$; $A < B$; $A \geq B$; $A \leq B$ được gọi là các bất đẳng thức.

+ Các bất đẳng thức trên được viết lại như sau

$$A - B > 0; A - B < 0; A - B \geq 0; A - B \leq 0$$

+ Một bất đẳng thức bất kì có thể đúng, cũng có thể sai.

Quy ước: Khi nói về một bất đẳng thức mà không nói gì thêm thì ta hiểu đó là một bất đẳng thức đúng.

II. Tính chất cơ bản của bất đẳng thức

+ Tính chất giao hoán

Với các số thực A và B bất kì, ta luôn có $A \leq B \Leftrightarrow B \geq A$

+ Tính chất bắc cầu

Với các số thực A, B, C bất kì, ta luôn có $A \leq B, B \leq C \Rightarrow A \leq C$

+ Tính chất liên hệ với phép cộng

- Với các số thực A, B và M bất kì, ta luôn có

$$A \leq B \Leftrightarrow A \pm M \leq B \pm M$$

- Với các số thực A, B, C, D bất kì, ta luôn có

$$\bullet A \leq B; C \leq D \Rightarrow A + C \leq B + D$$

$$\bullet A \leq B; C \leq D \Rightarrow A - D \leq B - C$$

+ Tính chất liên hệ với phép nhân

- Với các số thực A, B bất kì, ta luôn có

$$\bullet A \leq B; M > 0 \Rightarrow A.M \leq B.M$$

$$\bullet A \leq B; M < 0 \Rightarrow A.M \geq B.M$$

- Với các số thực A, B, C, D bất kì, ta luôn có

$$\begin{cases} 0 < A < B \\ 0 < C < D \end{cases} \Rightarrow 0 < A.C < B.D$$

+ Tính chất liên hệ với lũy thừa

- Với các số thực A, B bất kì, ta luôn có

$$\bullet A \geq B \geq 0 \Leftrightarrow A^n \geq B^n \geq 0, \text{ với } n \text{ là số thực dương.}$$

$$\bullet A \geq B \Leftrightarrow A^n \geq B^n, \text{ với } n \text{ là số tự nhiên lẻ.}$$

$$\bullet |A| \geq |B| \Leftrightarrow A^n \geq B^n \geq 0, \text{ với } n \text{ là số tự nhiên chẵn.}$$

$$\bullet m \geq n > 0; A \geq 1 \Rightarrow A^m \geq A^n$$

$$\bullet m \geq n > 0; 0 < A < 1 \Rightarrow A^m \leq A^n$$

+ Tính chất liên hệ với tính nghịch đảo

$$\text{- Với các số thực dương A, B bất kì, ta luôn có } A \geq B \Leftrightarrow \frac{1}{A} \leq \frac{1}{B}$$

III. Một số bất đẳng thức cơ bản cần nhớ

$$+ A^2 \geq 0 \text{ với } \forall A$$

+ $A^{2k} \geq 0$ với $\forall A$ và k là số tự nhiên

+ $|A| \geq 0$ với $\forall A$

+ $|A + B| \geq |A| + |B|$

+ $|A - B| \leq |A| - |B|$

Chương I – MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Nội dung cơ bản của chương I gồm:

- Giới thiệu các phương pháp chứng minh bất đẳng thức.
- Nêu một số tính chất liên quan, một số lưu ý của các phương pháp chứng minh bất đẳng thức trên.
- Giới thiệu các bài tập mẫu cùng quá trình phân tích, suy luận để tìm ra các lời giải và các lời giải được trình bày cụ thể.
- Giới thiệu một số bài tập tự luyện.

Chủ đề 1

MỘT SỐ KỸ THUẬT BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

1. Kiến thức cần nhớ

Giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$. Tư tưởng của phương pháp là biến đổi tương đương bất đẳng thức trên thành một bất đẳng thức đúng mà phổ biến là các dạng sau:

+ Sử dụng định nghĩa bất đẳng thức: $A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$

+ Dạng tổng bình phương: $A \geq B \Leftrightarrow mX^2 + nY^2 + kZ^2 \geq 0$, với các số m, n, k dương.

+ Dạng tích hai thừa số cùng dấu:

$$A \geq B \Leftrightarrow X.Y \geq 0 \text{ hoặc } A \geq B \Leftrightarrow X^{2n}.Y \geq 0$$

+ Xây dựng các bất đẳng thức từ các điều kiện ban đầu: Nếu $x, y, z \in [a, b]$ thì ta nghĩ ngay tới một trong các bất đẳng thức đúng sau đây

$$(x - a)(x - b) \leq 0; (x - a)(y - a)(z - a) \geq 0; (x - b)(y - b)(z - b) \leq 0$$

Một số đẳng thức cần nhớ

$$+ (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2; \quad a^2 + b^2 = \frac{(a + b)^2}{2} + \frac{(a - b)^2}{2}$$

$$+ (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$+ (a + b)(b + c)(c + a) = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc$$

$$+ (a + b + c)(ab + bc + ca) = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 3abc$$

$$+ (a + b)(b + c)(c + a) + abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)$$

$$+ (a + 1)(b + 1)(c + 1) = abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1$$

$$+ (a - 1)(b - 1)(c - 1) = abc - (ab + bc + ca) + a + b + c - 1$$

$$+ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$+ (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$+ (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2$$

Một số bất đẳng thức cơ bản

$$+ a^2 + b^2 \geq 2ab; \quad 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \geq 4ab$$

$$+ a^2 + b^2 - ab \geq \frac{3(a+b)^2}{4}$$

$$+ a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$+ 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$$

$$+ 3(a^4 + b^4 + c^4) \geq (ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$$

+ Bất đẳng thức tam giác

$$\begin{cases} |b - c| < a < b + c \\ |c - a| < b < c + a \\ |a - b| < c < a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c > 0 \\ b + c - a > 0 \\ c + a - b > 0 \end{cases}$$

Với a, b, c là ba cạnh của một tam giác.

Một số kỹ thuật cơ bản trong phép biến đổi tương đương

- + Kỹ thuật xét hiệu hai biểu thức.
- + Kỹ thuật sử dụng các hằng đẳng thức.
- + Kỹ thuật thêm bớt một hằng số, một biểu thức.
- + Kỹ thuật đặt biến phụ.
- + Kỹ thuật sắp thứ tự các biến.
- + Kỹ thuật khai thác tính bị chặn của các biến.

2. Một số ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$a) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$b) \quad a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$$

Phân tích: Các bất đẳng thức trên khá quen thuộc, ta có thể giải bằng cách xét hiệu vế trái và vế phải rồi phân tích thành tổng các bình phương.

Lời giải

a) Xét hiệu hai vế của bất đẳng thức

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) &= \frac{a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2}{2} \\ &= \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

b) Xét hiệu hai vế của bất đẳng thức

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2 + 3) - 2(a + b + c) &= a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + c^2 - 2c + 1 \\ &= (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Ví dụ 2. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2$$

Phân tích: Đây là một bất đẳng thức khá quen thuộc, ta có thể giải bằng cách xét hiệu vế trái và vế phải rồi phân tích thành tổng các bình phương.

Lời giải

Xét hiệu hai vế của bất đẳng thức

$$\begin{aligned} a \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2 &= \frac{3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2}{9} \\ &= \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{9} \end{aligned}$$

Suy ra
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét: Qua hai ví dụ trên ta nhận thấy khi biến đổi tương đương bất đẳng thức bậc hai thường xuất hiện các đại lượng $(a - b)^2$; $(b - c)^2$; $(c - a)^2$ với điều kiện dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Do đó trước khi biến đổi bất đẳng thức ta nên dự đoán dấu đẳng thức xảy ra để từ đó có hướng đi hợp lý.

Ví dụ 3. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$$

Phân tích: Bất đẳng thức cần chứng minh có hình thức tương tự như các bất đẳng thức trên, ta có thể giải bằng cách xét hiệu vế trái và vế phải rồi phân tích thành tổng các bình phương. Để được các tích ab, ac, ad, ae vào trong bình phương ta cần ghép a với b, c, d, e , và vì vai trò của b, c, d, e như nhau nên ta có thể nghĩ đến việc biến đổi như sau

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 &\geq a(b + c + d + e) \\ \Leftrightarrow (a - kb)^2 + (a - kc)^2 + (a - kd)^2 + (a - ke)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Trong trường hợp trên ta có thể chọn $k = 2$, tức là ta phải nhân hai vế với 4.

Lời giải

Xét hiệu hai vế của bất đẳng thức

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b + c + d + e) \\ &= \frac{4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) - 4(ab + ac + ad + ae)}{4} \\ &= \frac{(a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) + (a^2 - 4ad + 4d^2) + (a^2 - 4ae + 4e^2)}{4} \\ &= \frac{(a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + (a - 2e)^2}{4} \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2b = 2c = 2d = 2e$.

Nhận xét: Với bất đẳng thức trên, ngoài phép biến đổi tương đương ta còn có thể dùng tính chất của tam thức bậc hai để chứng minh.

Ví dụ 4. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a, b, c \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab} \quad \text{b) } \frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} \geq \frac{3}{1+abc}$$

Phân tích: Để ý ta thấy, mẫu của các biểu thức xuất hiện các bình phương, ý tưởng chứng minh bất đẳng thức trên là xét hiệu và phân tích làm xuất hiện các bình phương. Chú ý đến giả thiết $a, b \geq 1 \Rightarrow ab - 1 \geq 0$.

Lời giải

a) Xét hiệu hai vế của bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{2}{1+ab} &= \frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab} \\ &= \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)} \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra
$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

b) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với.

$$\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} \geq \frac{3}{1+abc} \Leftrightarrow \frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} + \frac{1}{1+abc} \geq \frac{4}{1+abc}$$

Áp dụng bất đẳng thức ở câu a ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} + \frac{1}{1+abc} &\geq \frac{2}{1+\sqrt{a^3b^3}} + \frac{2}{1+\sqrt{abc^4}} \\ &\geq \frac{4}{1+\sqrt{a^3b^3}\sqrt{abc^4}} = \frac{4}{1+abc} \end{aligned}$$

Suy ra
$$\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} \geq \frac{3}{1+abc}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^3 + b^3 = a - b$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + ab < 1$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta thấy có biểu thức $a^2 + b^2 + ab$. Trong khi đó giả thiết lại xuất hiện biểu thức $a - b$. Vậy mối liên hệ của hai biểu thức này như thế nào? Để thấy được hằng đẳng thức $(a-b)(a^2 + b^2 + ab) = a^3 - b^3$. Do đó một cách rất tự nhiên ta nhân hai vế của giả thiết với biểu thức $a^2 + b^2 + ab$ để làm xuất hiện $a^3 - b^3$ và $a^2 + b^2 + ab$, khi đó ta được $a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$. Tới đây chỉ cần chứng minh $\frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3} < 1$ là xong.

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được

$$a^3 + b^3 = a - b \Leftrightarrow (a^3 + b^3)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\Leftrightarrow (a^3 + b^3)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$$

Ta cần chứng minh được

$$\frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3} < 1 \Leftrightarrow a^3 - b^3 < a^3 + b^3 \Leftrightarrow 0 < 2b^3 \Leftrightarrow 0 < b$$

Do $b > 0$ hiển nhiên đúng. Nên bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 6. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a > b$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - b^2} > a$$

Phân tích: Bất đẳng thức có chứa căn bậc hai và các biểu thức trong căn có chứa các bình phương, lại có thêm điều kiện $a > b > 0$, nên ta bình phương hai vế để biến đổi bất đẳng thức.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\left(\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - b^2}\right)^2 > a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{2ab - b^2} + 2ab - b^2 > a^2$$

$$\Leftrightarrow 2b(a - b) + 2\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{2ab - b^2} > 0$$

Vì $a > b > 0$ nên $b(a - b) > 0$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh

Ví dụ 7. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$$

Phân tích: Bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức cơ bản có vế trái là các lũy thừa bậc chẵn. Để ý ta thấy $abc(a + b + c) = ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab$, do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến việc biến đổi bất đẳng thức thành tổng của các bình phương.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^2bc - b^2ac - c^2ab \geq 0 \Leftrightarrow 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 2a^2bc - 2b^2ac - 2c^2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2 - c^2)^2 + 2b^2c^2 + (c^2 - a^2)^2 + 2a^2c^2 - 2a^2bc - 2b^2ac - 2c^2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 + (ab - bc)^2 + (bc - ac)^2 + (ab - ac)^2 \geq 0$$

Suy ra
$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 8. Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) \geq (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)$$

Phân tích: Để ý ta thấy $a^{10} \cdot a^2 = a^8 \cdot a^4$, $b^{10} \cdot b^2 = b^8 \cdot b^4$, do đó ta biến đổi tương đương để thu gọn và chứng minh bất đẳng thức.

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
& (a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) \geq (a^8 + b^8)(a^4 + b^4) \\
\Leftrightarrow & a^{12} + a^{10}b^2 + a^2b^{10} + b^{12} \geq a^{12} + a^8b^4 + a^4b^8 + b^{12} \\
& \Leftrightarrow a^8b^2(a^2 - b^2) + a^2b^8(b^2 - a^2) \geq 0 \Leftrightarrow a^2b^2(a^2 - b^2)(a^6 - b^6) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow a^2b^2(a^2 - b^2)^2(a^4 + a^2b^2 + b^4) \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 9. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

$$ab + 2bc + 3ca \leq 0$$

Phân tích: Từ giả thiết $a + b + c = 0$ ta có thể rút một biến theo các biến còn lại, chẳng hạn $c = -a - b$, thay vào biểu thức của bất đẳng thức ta được $3a^2 + 4ab + 2b^2$ là biểu thức chỉ chứa hai biến và xuất hiện các bình phương. Đến đây ta tìm cách phân tích thành tổng các bình phương để chứng minh bất đẳng thức.

Lời giải

Theo giả thiết thì $c = -(a + b)$, nên bất đẳng thức đã cho tương ứng với

$$\begin{aligned}
& ab + c(2a + 3a) \leq 0 \Leftrightarrow ab + (-a - b)(2b + 3a) \leq 0 \\
\Leftrightarrow & ab - 2ab - 3a^2 - 2b^2 - 3ab \leq 0 \Leftrightarrow 3a^2 + 4ab + 2b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2(a + b)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 0$.

Ví dụ 10. Chứng minh với các số thực a dương, ta có: $\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{5(a^2 + 1)}{2a} \geq \frac{11}{2}$

Phân tích: Bất đẳng thức cần chứng minh chỉ chứa một biến a , nên thông thường ta sử dụng phương pháp biến đổi tương đương để chứng minh. Để ý thêm nữa ta thấy, bất đẳng thức chứa các đại lượng $a^2 + 1$ và $2a$ làm ta liên tưởng đến hằng đẳng thức $(a - 1)^2$, lại thấy đẳng thức xảy ra khi $a = 1$ nên suy nghĩ rất tự nhiên là biến đổi tương đương bất đẳng thức làm xuất hiện đại lượng $(a - 1)^2$ xem có thể

chứng minh bài toán được không. Với $a = 1$ khi đó ta có $\frac{a}{a^2 + 1} = \frac{1}{2}$; $\frac{5(a^2 + 1)}{2a} = 5$ và $\frac{11}{2} = \frac{1}{2} + 5$ nên ta chuyển về để biến đổi bất đẳng thức.

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{a^2 + 1} + \frac{5(a^2 + 1)}{2a} \geq \frac{11}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{a^2 + 1} - \frac{1}{2} + \frac{5(a^2 + 1)}{2a} - 5 \geq 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{-(a - 1)^2}{2(a^2 + 1)} + \frac{5(a - 1)^2}{2a} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a - 1)^2}{2} \left(\frac{5}{a} - \frac{1}{a^2 + 1} \right) \geq 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{(a - 1)^2}{2} \cdot \frac{5a^2 - a + 5}{a(a^2 + 1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a - 1)^2}{2} \cdot \frac{(a - 1)^2 + 9(a^2 + 1)}{2(a^2 + 1)} \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$.

Ví dụ 11. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3 + b^3}{ab} + \frac{b^3 + c^3}{bc} + \frac{c^3 + a^3}{ca} \geq 2(a + b + c)$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta nhận thấy những đặc điểm sau:

+ Hai vế của bất đẳng thức cùng có bậc một.

+ Bất đẳng thức cần chứng minh làm ta liên tưởng đến một bất đẳng thức khá hay dùng $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$ với x, y là các số dương

Thật vậy

$$x^3 + y^3 \geq xy(x + y) \Leftrightarrow (x + y)(x^2 + y^2 - xy) \geq xy(x + y) \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3 + b^3}{ab} + \frac{b^3 + c^3}{bc} + \frac{c^3 + a^3}{ca} \geq \frac{ab(a + b)}{ab} + \frac{bc(b + c)}{bc} + \frac{ca(c + a)}{ca} = 2(a + b + c)$$

Suy ra
$$\frac{a^3 + b^3}{ab} + \frac{b^3 + c^3}{bc} + \frac{c^3 + a^3}{ca} \geq 2(a + b + c)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 12. Chứng minh rằng với mọi số thực x ta luôn có

$$(2x + 1) \cdot \sqrt{x^2 - x + 1} > (2x - 1) \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}$$

Phân tích: Bất đẳng thức chỉ chứa một biến và có chứa căn bậc hai. Trước hết ta kiểm tra điều kiện xác định của các căn thức

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ và } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

Nên bất đẳng thức được xác định với mọi x .

Quan sát bất đẳng thức ta thấy nếu thay x bằng $-x$ thì vế trái của bất đẳng thức trở là $(-2x + 1) \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}$ và vế phải của bất đẳng thức là $(2x - 1) \cdot \sqrt{x^2 - x + 1}$, khi đó nếu nhân hai vế với -1 thì được $(2x - 1) \cdot \sqrt{x^2 + x + 1} < (2x + 1) \cdot \sqrt{x^2 - x + 1}$, tức là bất đẳng thức không thay đổi gì cả. Như vậy ta chỉ cần xét trường hợp x không âm là được.

Với $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, ta thấy vế trái luôn dương và vế phải nhỏ hơn hoặc bằng không nên ta có thể

chia nhỏ các trường hợp $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ và $x > \frac{1}{2}$ để chứng minh bất đẳng thức.

Lời giải

$$\text{Vì } x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ và } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

Nên bất đẳng thức được xác định với mọi x .

Nếu $x < 0$, ta đặt $x = -t$, $t > 0$ khi đó bất đẳng thức trở thành.

$$\begin{aligned} & (-2t+1)\sqrt{t^2+t+1} > (-2t-1)\sqrt{t^2-t+1} \\ \Leftrightarrow & (2t+1)\sqrt{t^2-t+1} > (2t-1)\sqrt{t^2+t+1} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối này có dạng như bất đẳng thức ở đề bài và quan trọng hơn lúc này ta lại có $t > 0$. Như vậy, với lập luận này ta thấy rằng chỉ cần xét bài toán trong trường hợp $x \geq 0$ là đủ. Lúc này có hai khả năng xảy ra :

+ Nếu $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ thì $(2x+1)\sqrt{x^2-x+1} > 0; (2x-1)\sqrt{x^2+x+1} \leq 0$

suy ra $(2x+1)\sqrt{x^2-x+1} > (2x-1)\sqrt{x^2+x+1}$. Nên bất đẳng thức đúng.

+ Nếu $x > \frac{1}{2}$ thì hai vế cùng dương, nên bình phương hai vế ta được

$$\begin{aligned} & (2x+1)^2(x^2-x+1) > (2x-1)^2(x^2+x+1) \\ \Leftrightarrow & 4x^4+x^2+3x+1 > 4x^4+x^2-3x+1 \Leftrightarrow x > 0 \end{aligned}$$

Mà $x > \frac{1}{2}$ nên bất đẳng thức cuối cùng đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 13. Cho các số thực $a, b, c \in [0, 1]$. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^3 + c^2 - ab - bc - ac \leq 1$$

Phân tích: Từ giả thiết $a, b, c \in [0, 1]$ ta được $0 \leq a, b, c \leq 1$, khi đó theo tính chất của lũy thừa ta được $a \geq a^4$; $b \geq b^3$; $c \geq c^2$. Biểu thức ở vế trái của bất đẳng thức được thay bằng đại lượng $a + b + c - ab - bc - ca$. Cũng từ giả thiết $a, b, c \in [0, 1]$ và biểu thức bên làm ta liên tưởng đến tích $(1-a)(1-b)(1-c) \geq 0$. Do đó ta sử dụng phép biến đổi tương đương để chứng minh bất đẳng thức trên.

Lời giải

Theo giả thiết $a, b, c \in [0, 1]$ ta có

$$\begin{aligned} & (1-a)(1-b)(1-c) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 1 - (a+b+c) + ab + bc + ac - abc \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 1 \geq a + b + c - ab - bc - ac + abc \end{aligned}$$

Cũng từ giả thiết $a, b, c \in [0, 1]$ nên $abc \geq 0$ và $a \geq a^4$; $b \geq b^3$; $c \geq c^2$.

Do đó ta suy ra $1 \geq a + b + c - ab - bc - ac \geq a^4 + b^3 + c^2 - ab - bc - ac$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = 1; b = c = 0$ và các hoán vị.

Ví dụ 14. Chứng minh rằng với mọi số thực khác không a, b ta có: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

Phân tích: Để ý ta thấy $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2$, do đó ta có thể biến đổi bất đẳng thức thành

$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 0$. Đến đây ta có thể phân tích thành tích rồi quy đồng hoặc đặt biến phụ

$t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, chú ý điều kiện $|t| \geq 2$.

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) \geq 0$$

Đến đây ta có hai hướng xử lý bất đẳng thức trên.

+ Hướng 1: Biến đổi tương đương tiếp ta được bất đẳng thức

$$\frac{(a^2 + b^2 + ab)(a - b)^2}{a^2 b^2} \geq 0$$

$$\text{Mà} \quad a^2 + b^2 + ab = \frac{(a + b)^2 + (a^2 + b^2)}{2} \geq 0$$

Do đó bất đẳng thức được chứng minh.

+ Hướng 2: Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, khi đó ta được $t^2 = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 \geq 4 \Rightarrow |t| \geq 2$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $(t + 1)(t - 2) \geq 0$.

- Nếu $t \geq 2$, suy ra $t - 2 \geq 0$ nên $(t + 1)(t - 2) \geq 0$.

- Nếu $t \leq -2$, suy ra $t + 1 < 0$; $t - 2 < 0$ nên $(t + 1)(t - 2) > 0$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

Ví dụ 15. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b ta có:

$$ab(a - 2)(b + 6) + 12a^2 - 24a + 3b^2 + 18b + 36 > 0$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy vế trái của có sự xuất hiện các đại lượng $a(a - 2)$; $b(b + 6)$ và chú ý thêm các đại lượng bên ta nhận thấy $a(a - 2) + 1 = (a - 1)^2$ và $b(b + 6) + 9 = (b + 3)^2$. Đến đây ta thấy có hai ý tưởng chứng minh bất đẳng thức trên.

+ Thứ nhất là ta biến đổi tương đương làm xuất hiện các bình phương $(a - 1)^2$, $(b + 3)^2$.

+ Thứ hai là đặt biến phụ $x = a(a - 2)$; $y = b(b + 6)$ và sử dụng điều kiện của biến phụ để chứng minh.

Lời giải

Cách 1: Gọi P là vế trái của bất đẳng thức đã cho, ta có

$$\begin{aligned} P &= ab(a - 2)(b + 6) + 12a^2 - 24a + 3b^2 + 18b + 36 \\ &= a(a - 2)[b(b + 6) + 12] + 3[b(b + 6) + 12] \\ &= [b(b + 6) + 12][a(a - 2) + 3] = [(b + 3)^2 + 3][(a - 1)^2 + 2] > 0 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$ab(a-2)(b+6) + 12(a-1)^2 + 3(b+3)^2 - 3 > 0$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = a(a-2) \\ y = b(b+6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = (a-1)^2 \geq 0 \\ y+9 = (b+3)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$xy + 12(x+1) + 3(y+9) - 3 > 0 \Leftrightarrow (x+3)(y+12) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $x+1 \geq 0$; $y+3 \geq 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 16. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$1019a^2 + 18b^4 + 1007c^2 \geq 30ab^2 + 6b^2c + 2008ca$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta thấy vế trái xuất hiện các lũy thừa bậc chẵn và vế phải xuất hiện tích của hai trong ba biến nên ta nghĩ đến việc biến đổi bất đẳng thức thành tổng các bình phương. Tuy nhiên vì hệ số khác nhau nên ta cần phải tinh ý khi phân tích.

Sau khi chuyển vế ta phân tích thành $m(a-b^2)^2 + n(b^2-c)^2 + k(c-a)^2$ và cần tìm m, n, k sao cho $m+k=1019$; $n+k=18$; $k+m=1007$. Giải hệ điều kiện trên ta tìm được $m=15$; $n=3$; $k=1004$. Đến đây ta chứng minh được bất đẳng thức.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$15(a^2 - 2ab^2 + b^2) + 3(b^4 - 2b^2c + c^2) + 1004(c^2 - 2ca + a^2) \geq 0 \\ \Leftrightarrow 15(a-b^2)^2 + 3(b^2-c)^2 + 1004(c-a)^2 \geq 0$$

Vật bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b^2 = c$.

Ví dụ 17. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a \geq 1$; $b \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$$

Phân tích: Bất đẳng thức có chứa căn bậc hai và đẳng thức xảy ra tại $a = b = 2$, do đó ta có các ý tưởng chứng minh bất đẳng thức sau đây:

+ Thứ nhất là đặt biến phụ $x = \sqrt{a-1}$; $y = \sqrt{b-1}$ để làm mất căn bậc hai và phân tích thành các bình phương.

+ Thứ hai là khử căn bậc hai bằng một đánh giá quen thuộc $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Để ý đến chiều bất đẳng thức và điều kiện dấu bằng xảy ra tại $a = b = 2$ ta đánh giá được

$$\sqrt{a-1} \leq \sqrt{(a-1) \cdot 1} \leq \frac{a-1+1}{2} = \frac{a}{2}; \quad \sqrt{b-1} = \sqrt{(b-1) \cdot 1} \leq \frac{b-1+1}{2} = \frac{b}{2}$$

Lời giải

Cách 1: Đặt $x = \sqrt{a-1}$; $y = \sqrt{b-1}$, khi đó $x \geq 0$; $y \geq 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $(x^2+1)y + (y^2+1)x \leq (x^2+1)(y^2+1)$

$$\begin{aligned}
& (x^2 + 1)y + (y^2 + 1)x \leq (x^2 + 1)(y^2 + 1) \\
& \Leftrightarrow (x^2 + 1)(y^2 + 1) - 2(x^2 + 1)y + (x^2 + 1)(y^2 + 1) - 2(y^2 + 1)x \geq 0 \\
& \Leftrightarrow (x^2 + 1)(y - 1)^2 + (y^2 + 1)(x - 1)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$ hay $a = b = 2$.

Cách 2: Áp dụng một bất đẳng thức quen thuộc ta được

$$\begin{aligned}
\sqrt{a-1} &\leq \sqrt{(a-1) \cdot 1} \leq \frac{a-1+1}{2} = \frac{a}{2} \\
\sqrt{b-1} &= \sqrt{(b-1) \cdot 1} \leq \frac{b-1+1}{2} = \frac{b}{2}
\end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta được} \quad a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = ab$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2$.

Ví dụ 18. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b ta có: $2(a^4 + b^4) \geq ab^3 + a^3b + 2a^2b^2$

Phân tích: Để ý ta thấy, với $a = b$ thì dấu đẳng thức xảy ra nên ta tách các hạng tử để tạo ra nhân tử chung $(a - b)^2$.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + a^4 - a^3b + b^4 - ab^3 &\geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (a^3 - b^3)(a - b) \geq 0 \\
\Leftrightarrow (a - b)^2 \left[(a + b)^2 + (a^2 + ab + b^2) \right] &\geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \left[3(a + b)^2 + a^2 + b^2 \right] \geq 0
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 19. Cho a, b là hai số thực khác không. Chứng minh rằng:

$$\frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 3$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy khi $a^2 = b^2$ thì bất đẳng thức xảy ra dấu bằng và

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2b^2} - 2. \text{ Nên ta có các ý tưởng biến đổi tương đương bất đẳng thức như sau:}$$

+ Thứ nhất là quy đồng hai vế và phân tích làm xuất hiện nhân tử chung $(a^2 - b^2)^2$

+ Thứ hai là đặt biến phụ $t = \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2} \right)^2$, chú ý điều kiện $0 < t \leq 1$.

Lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức đã cho tương đương với.

$$\begin{aligned}
& \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} - 1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4a^2b^2 - (a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{a^2b^2} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{-(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2b^2} \geq 0 \Leftrightarrow (a^2-b^2)^2 \left[\frac{1}{a^2b^2} - \frac{1}{(a^2+b^2)^2} \right] \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{(a^2-b^2)^2 \left[(a^2+b^2)^2 - a^2b^2 \right]}{a^2b^2(a^2+b^2)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a^2-b^2)^2 (a^4 + b^4 + a^2b^2)}{a^2b^2(a^2+b^2)^2} \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \pm b$.

Cách 2: Bất đẳng thức được viết lại thành $\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{(a^2+b^2)^2}{a^2b^2} \geq 5$.

Đặt $t = \left(\frac{2ab}{a^2+b^2} \right)^2$, khi đó ta được $0 < t \leq 1$. Suy ra $\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2b^2} = 4 \left(\frac{a^2+b^2}{2ab} \right)^2 = \frac{4}{t}$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$t + \frac{4}{t} \geq 5 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-4) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $0 < t \leq 1$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \pm b$.

Ví dụ 20. Cho các số thực dương a, b, m, n ($m \geq n$). Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{na+mb} + \frac{b}{mb+na} \geq \frac{2}{m+n}$$

Phân tích: Nhận thấy bất đẳng thức xảy ra dấu bằng tại $a = b$, do đó một cách tự nhiên ta nghĩ đến biến đổi bất đẳng thức làm xuất hiện $(a-b)^2$, chú ý đến điều kiện $m \geq n$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{na+mb} - \frac{1}{n+m} + \frac{b}{mb+na} - \frac{1}{n+m} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{m(a-b)}{(na+mb)(n+m)} - \frac{m(a-b)}{(nb+ma)(n+m)} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{m(a-b)}{n+m} \left(\frac{1}{na+mb} - \frac{1}{nb+ma} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{m(a-b)^2}{n+m} \cdot \frac{m-n}{(na+mb)(nb+ma)} \geq 0
\end{aligned}$$

Vì $a, b > 0$ và $m \geq n$ nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b$ hoặc $m = n$.

Ví dụ 21. Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b}{2a^3+b^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy dấu đẳng thức xảy ra với $a = b$, khi đó rất tự nhiên ta nghĩ đến biến đổi bất đẳng thức làm xuất hiện đại lượng $(a-b)^2$. Mặt khác với $a = b$ ta lại có

$\frac{a^2b}{2a^3+b^3} = \frac{1}{3}$; $\frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2} = 1$. Để ý là $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$, nên ta biến đổi bất đẳng thức thành $\frac{a^2b}{2a^3+b^3} - \frac{1}{3} \geq \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2} - 1$. Tới đây ta quy đồng hai vế và phân tích thành các bình phương.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{a^2b}{2a^3+b^3} + \frac{2}{3} &\geq \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2} \Leftrightarrow \frac{a^2b}{2a^3+b^3} - \frac{1}{3} \geq \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2} - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{-(a-b)^2(2a+b)}{3(2a^3+b^3)} &\geq \frac{-(a-b)^2}{2a^2+b^2} \Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\frac{1}{2a^2+b^2} - \frac{2a+b}{3(2a^3+b^3)} \right] \geq 0 \\ \Leftrightarrow (a-b)^2 \left[3(2a^3+b^3) - (2a^2+b^2)(2a+b) \right] &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a-b)^2 (2a^3+2b^3-2a^2b-2ab^2) &\geq 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^4 \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vật bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 22. Cho các số thực a, b không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{2ab}{a^2+4b^2} + \frac{b^2}{3a^2+2b^2} \leq \frac{3}{5}$$

Phân tích: Dấu đẳng thức xảy ra với $a = b$, khi đó $\frac{2ab}{a^2+4b^2} = \frac{2}{5}$; $\frac{b^2}{3a^2+2b^2} = \frac{1}{5}$. Nên ta biến đổi

bất đẳng thức thành $\frac{2}{5} - \frac{2ab}{a^2+4b^2} + \frac{1}{5} - \frac{b^2}{3a^2+2b^2} \geq 0$. Tới đây ta quy đồng hai vế và phân tích thành các bình phương.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{2ab}{a^2+4b^2} + \frac{b^2}{3a^2+2b^2} &\leq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{5} - \frac{2ab}{a^2+4b^2} + \frac{1}{5} - \frac{b^2}{3a^2+2b^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2a^2-10ab+8b^2}{a^2+4b^2} + \frac{3a^2-3b^2}{3a^2+2b^2} &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(a-b)(a-4b)}{a^2+4b^2} + \frac{3(a-b)(a+b)}{3a^2+2b^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow (a-b) \left[\frac{2(a-4b)(3a^2+2b^2)}{(a^2+4b^2)(3a^2+2b^2)} + \frac{3(a+b)(a^2+4b^2)}{(a^2+4b^2)(3a^2+2b^2)} \right] &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a-b) (9a^3-21a^2b+16ab^2-4b^3) &\geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 (3a-2b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ hoặc $3a = 2b$

Ví dụ 23. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

- $a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$
- $a^6 + b^6 + c^6 \geq a^5b + b^5c + c^5a$

Phân tích:

a) Quan sát bất đẳng thức thứ nhất ta nhận thấy $a - c = (a - b) + (b - c)$ do đó bất đẳng thức lúc này tương đương với $a(a - b)^2 + c(a - c)(b - c) \geq 0$. Đến đây chỉ cần sắp thứ tự các biến sao cho $c(a - c)(b - c) \geq 0$ là xong.

b) Tương tự như trên ta có $a - c = (a - b) + (b - c)$, biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được bất đẳng thức $(a - b)(a^5 - b^5) + (a - c)(b^5 - c^5) \geq 0$. Đến đây ta chỉ cần sắp thứ tự các biến sao cho $(a - c)(b^5 - c^5) \geq 0$ là xong.

Lời giải

a) Vì vai trò của a, b, c trong bất đẳng thức như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & a(a - b)(a - c) + a(b - c)(b - a) + c(c - a)(c - b) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & a(a - b)[(a - b) + (b - c)] + b(b - c)(b - a) + c(c - a)(c - b) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & a(a - b)^2 + a(a - b)(b - c) - a(b - c)(a - b) + c(a - c)(b - c) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a - b)^2(a + b - c) + c(a - c)(b - c) \geq 0 \end{aligned}$$

Vì $a \geq b \geq c \geq 0$ nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

b) Vì vai trò của a, b, c trong bất đẳng thức như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq c \geq 0; b \geq c \geq 0$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & a^6 - a^5b + b^6 - b^5c + c^6 - c^5a \geq 0 \Leftrightarrow a^5(a - b) + b^5(b - c) + c^5(c - a) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & a^5(a - b) - b^5[(a - b) + (c - a)] + c^5(c - a) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a - b)(a^5 - b^5) + (a - c)(b^5 - c^5) \geq 0 \end{aligned}$$

Vì $a \geq c \geq 0; b \geq c \geq 0$ nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 24. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta có các nhận xét như sau:

+ Quy đồng hai vế của bất đẳng thức thì vế trái xuất hiện $(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2$ và vế phải xuất hiện $abc(a + b + c) = ab.bc + bc.ca + ca.ab$. Như vậy chỉ cần chuyển vế trái ta viết được thành tổng các bình phương

$$+ \text{Đề ý ta thấy } \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} - 2c = \frac{c(a - b)^2}{ab}. \text{ Như vậy ta cần nhân hai vế với 2 và ghép tương tự.}$$

Lời giải

Cách 1: Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên như sau

$$\begin{aligned}\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} &\geq a + b + c \Leftrightarrow (bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2 \geq abc(a + b + c) \\ &\Leftrightarrow 2(bc)^2 + 2(ca)^2 + 2(ab)^2 - 2abc(a + b + c) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên như sau

$$\begin{aligned}\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} &\geq a + b + c \Leftrightarrow 2\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) \geq 2(a + b + c) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} - 2c\right) + \left(\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} - 2a\right) + \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} - 2b\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{c(b^2 + a^2 - 2ab)}{ab} + \frac{a(c^2 + b^2 - 2bc)}{bc} + \frac{b(c^2 + a^2 - 2ca)}{ca} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{c(a - b)^2}{ab} + \frac{a(b - c)^2}{bc} + \frac{b(c - a)^2}{ca} \geq 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 25. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$$

Phân tích: Nhận thấy $\frac{a^2}{b} - 2a + b = \frac{(a - b)^2}{b}$. Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a^2}{b} - 2a + b\right) + \left(\frac{b^2}{c} - 2b + c\right) + \left(\frac{c^2}{a} - 2c + a\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a^2 - 2ab + b^2}{b} + \frac{b^2 - 2bc + c^2}{c} + \frac{c^2 - 2ca + a^2}{a} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(a - b)^2}{b} + \frac{(b - c)^2}{c} + \frac{(c - a)^2}{a} \geq 0\end{aligned}$$

Vì a, b, c là các số thực dương nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 26. Cho a, b là các số thực dương, tìm hằng số k lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức.

$$\frac{k}{a^2 + b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8 + 2k}{(a + b)^2}$$

Phân tích: Vì vai trò của a, b như nhau nên ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b$, do đó khi biến đổi bất đẳng thức ta cần làm xuất hiện nhân tử $(a - b)^2$. Khi đó bất đẳng thức trở thành

$(a - b)^2 \left[(a^2 + 4ab + b^2)(a^2 + b^2) - ka^2b^2 \right] \geq 0$. Để tìm k lớn nhất ta cho $a = b$, khi đó ta được $12a^4 - ka^4 \geq 0 \Rightarrow k \leq 12$. Đến đây ta chỉ cần chứng minh $k = 12$ bất đẳng thức đúng là được.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
 & \frac{k}{a^2 + b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8 + 2k}{(a + b)^2} \\
 \Leftrightarrow & \frac{k}{a^2 + b^2} - \frac{2k}{(a + b)^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{4}{(a + b)^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{4}{(a + b)^2} \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{-k(a - b)^2}{(a^2 + b^2)(a + b)^2} + \frac{(b - a)(b + 3a)}{a^2(a + b)^2} + \frac{(a - b)(3a + b)}{b^2(a + b)^2} \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{(a - b)^2(a^2 + 4ab + b^2)}{a^2b^2(a + b)^2} - \frac{k(a - b)^2}{(a^2 + b^2)(a + b)^2} \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & (a - b)^2 \left[(a^2 + 4ab + b^2)(a^2 + b^2) - ka^2b^2 \right] \geq 0
 \end{aligned}$$

Vì $(a - b)^2 \geq 0$ nên bất đẳng thức đúng khi và chỉ khi

$$(a^2 + 4ab + b^2)(a^2 + b^2) - ka^2b^2 \geq 0$$

Cho $a = b$ thì bất đẳng thức trên trở thành $12a^4 - ka^4 \geq 0 \Rightarrow k \leq 12$. Ta chứng minh $k = 12$ là hằng số lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức đã cho

Thật vậy, ta xét các trường hợp sau

+ Với $k < 12$ thì ta được $(a^2 + 4ab + b^2)(a^2 + b^2) - ka^2b^2 > 0$.

+ Với $k = 12$ thì bất đẳng thức $(a^2 + 4ab + b^2)(a^2 + b^2) - ka^2b^2 \geq 0$ trở thành

$$\begin{aligned}
 & (a^2 + 4ab + b^2)(a^2 + b^2) - 12a^2b^2 \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 + 4ab(a^2 + b^2 - 2ab) \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + 4ab(a - b)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Vậy hằng số k lớn nhất là 12.

Ví dụ 27. Cho a, b là các số thực dương, tìm hằng số k lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức

$$\frac{k}{a^3 + b^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \geq \frac{16 + 4k}{(a + b)^3}$$

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh ta được

$$\begin{aligned}
 & \frac{k}{a^3 + b^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \geq \frac{16 + 4k}{(a + b)^3} \\
 \Leftrightarrow & \frac{k}{a^3 + b^3} - \frac{4k}{(a + b)^3} + \frac{1}{a^3} - \frac{8}{(a + b)^3} + \frac{1}{b^3} - \frac{8}{(a + b)^3} \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{a - b}{(a + b)^3} \left(\frac{7b^2 + 4ab + a^2}{b^3} - \frac{7a^2 + 4ab + b^2}{a^3} \right) - \frac{3k(a - b)^2(a + b)}{(a^3 + b^3)(a + b)^3} \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{(a - b)^2(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)}{a^3b^3} - \frac{3k(a - b)^2}{a^2 - ab + b^2} \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & (a - b)^2 \left[(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)(a^2 - ab + b^2) - 3ka^3b^3 \right] \geq 0
 \end{aligned}$$

Vì $(a - b)^2 \geq 0$ nên bất đẳng thức đúng khi và chỉ khi

$$(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)(a^2 - ab + b^2) - 3ka^3b^3 \geq 0$$

Cho $a = b$ thì bất đẳng thức trên trở thành $24a^6 - 3ka^6 \geq 0 \Rightarrow k \leq 8$. Ta chứng minh $k = 8$ là hằng số lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức đã cho. Thật vậy, ta xét các trường hợp sau

+ Với $k < 8$ thì $(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)(a^2 - ab + b^2) - 3ka^3b^3 > 0$.

+ Với $k = 8$ thì bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)(a^2 - ab + b^2) - 24a^3b^3 \geq 0$$

Ta có $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$; $a^2 + b^2 \geq 2ab$ nên

$$a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4 = a^4 + b^4 + 5ab(a^2 + b^2) + 12a^2b^2 \geq 24a^2b^2$$

Và $a^2 - ab + b^2 \geq ab$

Do đó ta có $(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)(a^2 - ab + b^2) \geq 24a^3b^3$

Suy ra bất đẳng thức được chứng minh. Vậy hằng số k lớn nhất là 8.

Ví dụ 28. Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{3a^2 + 2ab + 3b^2}{a + b} \geq 2\sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

Phân tích: Đẳng thức xảy ra khi $a = b$, do đó ta cố biến đổi bất đẳng thức làm xuất hiện đại lượng $(a - b)^2$. Bất đẳng thức cần chứng minh có chứa căn, nên để xuất hiện nhân tử chung có dạng $(a - b)^2$ ta cần chú ý đến phép biến đổi $2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = (a - b)^2$

$$\text{Khi đó ta có } \sqrt{2(a^2 + b^2)} - (a + b) = \frac{(a - b)^2}{\sqrt{2(a^2 + b^2)} + (a + b)}$$

Lời giải

Ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$\begin{aligned} & \frac{3a^2 + 2ab + 3b^2}{a + b} \geq 2\sqrt{2(a^2 + b^2)} \\ \Leftrightarrow & \frac{3a^2 + 2ab + 3b^2}{a + b} - 2(a + b) \geq 2\sqrt{2(a^2 + b^2)} - 2(a + b) \\ \Leftrightarrow & \frac{(a - b)^2}{a + b} \geq \frac{2(a - b)^2}{\sqrt{2(a^2 + b^2)} + (a + b)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a - b)^2 \left[\sqrt{2(a^2 + b^2)} + (a + b) - 2(a + b) \right] \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a - b)^2 \left[\sqrt{2(a^2 + b^2)} - (a + b) \right] \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a - b)^4}{\sqrt{2(a^2 + b^2)} + a + b} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng cuối cùng đúng do a, b dương. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 29. Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{2ab}{(a + b)} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \sqrt{ab} + \frac{a + b}{2}$$

Phân tích: Để ý ta thấy $\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$

Lại có
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} = \frac{\frac{a^2+b^2}{2} - ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}} = \frac{(a-b)^2}{2\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}\right)}$$

Do đó ta biến đổi tương đương để chứng minh bất đẳng thức

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh được biến đổi như sau

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} &\geq \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}} - \frac{1}{a+b} \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[2a+2b - \sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab} \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Vì $(a-b)^2 \geq 0$ nên ta cần chứng minh $2a+2b - \sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab} \geq 0$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} a+b - \sqrt{2(a^2+b^2)} &= -\frac{(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + (a+b)} \\ a+b - 2\sqrt{ab} &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \frac{(a-b)^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \end{aligned}$$

Do vậy bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} &(a-b)^2 \left[\frac{1}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} - \frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + (a+b)} \right] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\sqrt{2(a^2+b^2)} + a+b - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \right] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab} \right] \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \frac{2(a^2+b^2) - 4ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + 2\sqrt{ab}} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2(a-b)^4}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + 2\sqrt{ab}} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối này hiển nhiên đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 30. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

- a) $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$
- b) $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

Lời giải

a) Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có

$$\begin{cases} 0 < a < b + c \\ 0 < b < a + c \\ 0 < c < a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 < a(b + c) \\ b^2 < b(a + c) \\ c^2 < c(a + b) \end{cases}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

b) Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có

$$a^2 \geq a^2 - (b - c)^2 = (a - b + c)(a + b - c) > 0$$

Chứng minh tương tự ta được $b^2 \geq b^2 - (c - a)^2 > 0; c^2 \geq c^2 - (a - b)^2 > 0$

Nhân vế các bất đẳng thức ta được

$$\begin{aligned} a^2 b^2 c^2 &\geq \left[a^2 - (b - c)^2 \right] \left[b^2 - (c - a)^2 \right] \left[c^2 - (a - b)^2 \right] \\ &\Rightarrow a^2 b^2 c^2 \geq (a + b - c)^2 (b + c - a)^2 (c + a - b)^2 \end{aligned}$$

Mà ta lại có $a + b - c > 0; b + c - a > 0; c + a - b > 0$

Nên từ bất đẳng thức trên ta được $abc \geq (a + b - c) \cdot (b + c - a) \cdot (c + a - b)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét: Bất đẳng thức $abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$ không chỉ đúng với a, b, c là các cạnh của một tam giác, mà nó còn đúng cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Bất đẳng này là một trường hợp của bất đẳng thức Schur. Trong phần Phụ lục 3, ta sẽ bàn nhiều về bất đẳng thức này hơn.

Bài 31. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác chứng minh rằng:

$$a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 > a^3 + b^3 + c^3$$

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} &a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 > a^3 + b^3 + c^3 \\ \Leftrightarrow &a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 - a^3 - b^3 - c^3 > 0 \\ \Leftrightarrow &a[(b - c)^2 - a^2] + b[(c - a)^2 - b^2] + c[(a - b)^2 - c^2] > 0 \\ \Leftrightarrow &a(b - c - a)(b - c + a) + b(c - a - b)(c - a + b) + c(a - b - c)(a - b + c) > 0 \\ \Leftrightarrow &(a + b - c)(c - a + b)(c + a - b) > 0 \end{aligned}$$

Do a, b, c là độ dài ba cạnh trong một tam giác nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 32. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \geq 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta có các nhận xét như sau:

+ Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

+ Khi thay 1 bằng $a + b + c$ vào bất đẳng thức và chuyển vế thì ta được các nhóm $\sqrt{a + bc} - a - \sqrt{bc}$; $\sqrt{b + ca} - b - \sqrt{ca}$; $\sqrt{c + ab} - c - \sqrt{ab}$. Vì vai trò a, b, c như nhau nên ta dự đoán mỗi nhóm trên không âm. Để chứng minh dự đoán trên ta có thể bình phương làm mất căn bậc hai rồi biến đổi tương đương thành tổng các bình phương.

+ Để ý giả thiết $a + b + c = 1$, khi đó ta có $\sqrt{a + bc} = \sqrt{(a + b)(a + c)}$. Dễ dàng nhận ra $\sqrt{(a + b)(a + c)} \geq a + \sqrt{bc}$. Như vậy chỉ cần áp dụng tương tự cho hai trường hợp còn lại thì bất đẳng thức được chứng minh.

Lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \geq a + b + c + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt{a + bc} - a - \sqrt{bc} \right) + \left(\sqrt{b + ca} - b - \sqrt{ca} \right) + \left(\sqrt{c + ab} - c - \sqrt{ab} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\sqrt{a + bc} - a - \sqrt{bc} \geq 0; \quad \sqrt{b + ca} - b - \sqrt{ca} \geq 0; \quad \sqrt{c + ab} - c - \sqrt{ab} \geq 0$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{a + bc} - a - \sqrt{bc} \geq 0 & \Leftrightarrow \sqrt{a + bc} \geq a + \sqrt{bc} \Leftrightarrow a + bc \geq a^2 + 2a\sqrt{bc} + bc \\ & \Leftrightarrow 1 \geq a + 2\sqrt{bc} \Leftrightarrow a + b + c \geq a + 2\sqrt{bc} \Leftrightarrow (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta được $\sqrt{b + ca} - b - \sqrt{ca} \geq 0$; $\sqrt{c + ab} - c - \sqrt{ab} \geq 0$.

Đến đây bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Cách 2: Kết hợp với giả thiết $a + b + c = 1$ ta có

$$\sqrt{a + bc} = \sqrt{(a + b)(a + c)}; \quad \sqrt{b + ca} = \sqrt{(a + b)(b + c)}; \quad \sqrt{c + ab} = \sqrt{(c + a)(b + c)}$$

Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\sqrt{(a + b)(a + c)} + \sqrt{(a + b)(b + c)} + \sqrt{(c + a)(b + c)} \geq 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{(a + b)(a + c)} & \geq a + \sqrt{bc} \Leftrightarrow a^2 + ab + bc + ca \geq a^2 + 2a\sqrt{bc} + bc \\ & \Leftrightarrow b + c \geq 2\sqrt{bc} \Leftrightarrow (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{(b + c)(a + b)} \geq b + \sqrt{ca}; \quad \sqrt{(c + a)(b + c)} \geq c + \sqrt{ab}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{(a + b)(a + c)} + \sqrt{(a + b)(b + c)} + \sqrt{(c + a)(b + c)} \geq a + b + c + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

Hay $\sqrt{(a + b)(a + c)} + \sqrt{(a + b)(b + c)} + \sqrt{(c + a)(b + c)} \geq 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 33. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta có những nhận xét sau:

+ Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ và vai trò các biến là như nhau.

+ Để ý ta thấy $abc - a^2(b+c-a) = a(a-b)(a-c)$, như vậy bất đẳng thức được viết lại thành $a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(a-c)(b-c) \geq 0$, là bất đẳng thức được chứng minh ở **Ví dụ 23**.

+ Để đơn giản hóa bất đẳng thức ta có thể sử dụng cách đặt biến phụ:

$$x = b + c - a; \quad y = c + a - b; \quad z = a + b - c$$

Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{x(y+z)^2}{4} + \frac{y(z+x)^2}{4} + \frac{z(x+y)^2}{4} \leq \frac{3(x+y)(y+z)(z+x)}{8}$$

Chú ý đến đẳng thức $(x+y)(y+z)(z+x) = x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 + 2xyz$ ta có thể biến đổi tương đương để chứng minh bất đẳng thức trên.

Lời giải

Cách 1: Vai trò của a, b, c là như nhau nên có thể giả thiết $a \geq b \geq c \geq 0$.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & abc - a^2(b+c-a) + abc - b^2(c+a-b) + abc - c^2(a+b-c) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(a-c)(b-c) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a-b)[a(a-c) - b(b-c)] + c(a-c)(b-c) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a-b)^2(a+b-c) + c(a-c)(b-c) \geq 0 \end{aligned}$$

Vì $a \geq b \geq c \geq 0$ nên $a+b-c \geq 0$; $(a-c)(b-c) \geq 0$, suy ra bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Do đó bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b$; $c = 0$ và các hoán vị.

Cách 2: Đặt $x = b + c - a$; $y = c + a - b$; $z = a + b - c$. Khi đó ta được

$$a = \frac{y+z}{2}; \quad b = \frac{z+x}{2}; \quad c = \frac{x+y}{2}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{x(y+z)^2}{4} + \frac{y(z+x)^2}{4} + \frac{z(x+y)^2}{4} \leq \frac{3(x+y)(y+z)(z+x)}{8}$$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên như sau

$$\begin{aligned} & \frac{x(y+z)^2}{4} + \frac{y(z+x)^2}{4} + \frac{z(x+y)^2}{4} \leq \frac{3(x+y)(y+z)(z+x)}{8} \\ \Leftrightarrow & 2(x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 + 6xyz) \leq 3(x+y)(y+z)(z+x) \\ \Leftrightarrow & 2(x+y)(y+z)(z+x) + 8xyz \leq 3(x+y)(y+z)(z+x) \\ \Leftrightarrow & 8xyz \leq (x+y)(y+z)(z+x) \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $8xyz \leq (x+y)(y+z)(z+x)$

Thật vậy, áp dụng một bất đẳng thức quen thuộc ta được

$$x + y \geq 2\sqrt{|xy|}; y + z \geq 2\sqrt{|yz|}; z + x \geq 2\sqrt{|zx|}$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được $8xyz \leq (x + y)(y + z)(z + x)$.

Do đó bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b; c = 0$ và các hoán vị.

Ví dụ 34. Cho các số thực $a, b, c \in [-1, 2]$ và $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

$$a) \quad a^2 + b^2 + c^2 \leq 6$$

$$b) \quad 2abc \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 2abc + 2$$

$$c) \quad a^2 + b^2 + c^2 \leq 8 - abc$$

Phân tích:

a) Từ điều kiện $a, b, c \in [-1, 2]$, để tạo ra a^2 ta có thể sử dụng các bất đẳng thức $(a + 1)(a - 2) \geq 0$, áp dụng tương tự và để ý đến giả thiết $a + b + c = 0$

b) Để chứng minh được bất đẳng thức ta cần làm như thế nào để vừa có thể tạo ra $a^2 + b^2 + c^2$ vừa làm xuất hiện tích abc . Để ý giả thiết $a + b + c = 0$ có thể biến đổi tương đương thành $ab + bc + ca = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$. Như vậy trong bất đẳng thức có thêm sự xuất hiện của $ab + bc + ca$. Từ điều kiện $a, b, c \in [-1, 2]$ ta cũng nên để ý đến bất đẳng thức $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 0$.

c) Cũng tương tự như câu b nhưng trong bất đẳng thức ở câu c có sự xuất hiện của biểu thức $8 - abc$ nên ta lại chú ý đến $(a - 2)(b - 2)(c - 2) \leq 0$.

Lời giải

a) Do $a, b, c \in [-1, 2]$ nên ta có $(a + 1)(a - 2) \geq 0$ hay $a^2 \leq a + 2$.

Chứng minh tương tự ta được $b^2 \leq b + 2; c^2 \leq c + 2$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên và kết hợp với giả thiết $a + b + c = 0$ ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a + b + c + 6 = 6$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

b) Trước hết ta chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2abc + 2$

Do $a, b, c \in [-1, 2]$ nên ta có $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 0$

Hay $abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 \geq 0 \Leftrightarrow abc + ab + bc + ca + 1 \geq 0$

Mặt khác, vì $a + b + c = 0$ nên $(a + b + c)^2 = 0$

$$\text{Hay} \quad ab + bc + ca = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

Khi đó ta được $abc - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 2abc + 2$

Ta cần chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2abc$.

Thật vậy, vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Từ đó suy ra

$$-1 \leq c \leq \frac{a + b + c}{3} \leq 0 \Rightarrow |c| \leq 1$$

Khi đó ta được $2abc \leq 2|a| \cdot |b| \cdot |c| \leq 2|a| \cdot |b|$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 - 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2 - 2|a| \cdot |b| = (|a| + |b|)^2 + c^2 \geq 0$

Do đó ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2abc$

Kết hợp hai kết quả trên ta được bất đẳng thức cần chứng minh chứng minh.

c) Do $a, b, c \in [-1, 2]$ nên ta có $(a-2)(b-2)(c-2) \leq 0$

Hay $abc - 2(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) - 8 \leq 0 \Leftrightarrow abc - 2(ab + bc + ca) - 8 \leq 0$

Mà ta có $ab + bc + ca = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$

Nên $abc + a^2 + b^2 + c^2 - 8 \leq 0$ hay $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8 - abc$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 35. Cho các số thực $a, b, c \in [0, 2]$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$3 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$$

Lời giải

Đặt $x = a + 1$; $y = b + 1$; $z = c + 1$, khi đó ta được $x, y, z \in [-1, 1]$ và $x + y + z = 0$

Ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2(x+y+z) + 3 = x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 3 \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức có khi $x = y = z = 0$ hay $a = b = c = 1$.

Mặt khác do $x, y, z \in [-1, 1]$ nên ta có

$$\begin{aligned} (1-x)(1-y)(1-z) + (1+x)(1+y)(1+z) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2 + 2(xy + yx + zx) &\geq 0 \Leftrightarrow 2 - (x^2 + y^2 + z^2) + (x+y+z)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 &\leq 2 \end{aligned}$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$. Đẳng thức xảy ra khi $a = 2$; $b = 1$; $c = 0$ và các hoán vị.

Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta được $3 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 36. Cho các số thực $a, b, c \in [0, 2]$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$3 \leq a^3 + b^3 + c^3 - 3(a-1)(b-1)(c-1) \leq 9$$

Lời giải

Đặt $x = a - 1$; $y = b - 1$; $z = c - 1$, khi đó ta được $x, y, z \in [-1, 1]$ và $x + y + z = 0$

Đặt $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(a-1)(b-1)(c-1)$, khi đó P được viết lại thành

$$\begin{aligned} P &= (x+1)^3 + (y+1)^3 + (z+1)^3 - 3xyz \\ &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 3(x^2 + y^2 + z^2) + 3(x+y+z) + 3 \end{aligned}$$

Mà $x + y + z = 0$ nên ta có

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) = 0$$

Do đó $P = 3(x^2 + y^2 + z^2) + 3$

Mà ta chứng minh được $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ nên $3 \leq P \leq 9$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 37. Cho các số thực $a, b, c \in [0, 1]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \leq 2$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy

+ Với $a + b + c = 0$ thì $a = b = c = 0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Như vậy ta cần tìm cách chứng minh cho trường hợp $a + b + c > 0$

+ Từ giả thiết $a, b, c \in [0, 1]$ và trường hợp $a + b + c > 0$ dẫn đến $0 < a, b, c \leq 1$.

Khi đó để tạo ra $1 + bc$ ta nghĩ đến bất đẳng thức $(1-b)(1-c) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + bc \geq b + c$. Để ý về phải của

bất đẳng thức có thể được viết thành $\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}$, do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến chứng minh bất đẳng

thức $\frac{a}{1+bc} \leq \frac{2a}{a+b+c}$.

Lời giải

Vì $a, b, c \in [0, 1]$ nên ta có $0 \leq a, b, c \leq 1$.

+ Xét trường hợp $a + b + c = 0$ suy ra $a = b = c = 0$, khi này bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng.

+ Xét trường hợp $a + b + c > 0$, khi đó ta có

$$\begin{cases} a \leq 1 \\ (b-1)(c-1) \geq 0 \\ bc \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 1 \\ b+c \leq 1+bc \\ 0 \leq bc \end{cases} \Rightarrow 0 < a+b+c \leq 2bc+2$$

Khi đó ta có $\frac{1}{1+bc} \leq \frac{2}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{a}{1+bc} \leq \frac{2a}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự ta được $\frac{b}{1+ca} \leq \frac{2b}{a+b+c}; \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2c}{a+b+c}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = 2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1; c = 0$ và các hoán vị

Ví dụ 38. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}$$

Phân tích: Để ý từ giả thiết $a + b + c = 1$ ta có $a + bc = (a+b)(a+c)$, khi đó bất đẳng thức có thể viết lại thành

$$\frac{a(a+b+c)-bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b(a+b+c)-ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{c(a+b+c)-ab}{(c+a)(c+b)} \leq \frac{3}{2}$$

Đến đây ta quy đồng hai vế và biến đổi tương đương bất đẳng thức, chú ý đến đẳng thức

$$(a+b)(b+c)(c+a) = ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 + 2abc$$

Lời giải

Áp dụng giả thiết $a + b + c = 1$ ta được

$$a + bc = a(a + b + c) + bc = (a + b)(a + c)$$

Áp dụng tương tự ta được $b + ca = (b + c)(a + b)$; $c + ab = (c + a)(b + c)$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{a(a + b + c) - bc}{(a + b)(a + c)} + \frac{b(a + b + c) - ca}{(b + c)(b + a)} + \frac{c(a + b + c) - ab}{(c + a)(c + b)} \leq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & (a^2 + ab + ac - bc)(b + c) + (b^2 + ba + bc - ca)(c + a) + \\ & (c^2 + cb + ca - ab)(a + b) \leq \frac{3}{2}(a + b)(b + c)(c + a) \\ \Leftrightarrow & ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 \geq 6abc \\ \Leftrightarrow & a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Nhận xét: Trong bất đẳng thức trên, có một kinh nghiệm nên nhớ khi tìm lời giải đó là tìm cách đổi chiều bất đẳng thức. Cách đơn giản nhất là nhân hai vế với -1 khi đó ta được:

$$\frac{bc - a}{a + bc} + \frac{ca - b}{b + ca} + \frac{ab - c}{c + ab} \geq -\frac{3}{2}$$

Bây giờ ta chưa biến đổi ngay mà tìm cách triệt tiêu các đại lượng âm trong các biểu thức trước và đổi dấu về phải. Để ý ta thấy $a + bc + bc - a = 2bc$, do vậy chỉ cần cộng 1 vào mỗi phân số rồi quy đồng là ta triệt tiêu được các đại lượng âm, không những vậy ta còn đổi được dấu bên vế phải, cụ thể là

$$1 + \frac{bc - a}{a + bc} + 1 + \frac{ca - b}{b + ca} + 1 + \frac{ab - c}{c + ab} \geq 3 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2bc}{a + bc} + \frac{2ca}{b + ca} + \frac{2ab}{c + ab} \geq \frac{3}{2}$$

Đến đây ta sẽ tìm thấy các hướng khác để xử lý bài toán.

Ví dụ 39. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}$$

Phân tích: Bất đẳng thức cần chứng minh là bất đẳng thức Neibizt nổi tiếng, hiện nay có rất nhiều cách chứng minh cho bất đẳng thức này. Để chứng minh bằng phương pháp biến đổi tương đương ta có các ý tưởng như sau

+ Thứ nhất ta xét hiệu hai vế và chú ý $\frac{a}{b + c} - \frac{1}{2} = \frac{a - b}{2(b + c)} + \frac{a - c}{2(b + c)}$, khi đó ta có 6 phân thức.

Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$, nên ta ghép hai phân thức làm một nhóm sao cho có thể phân tích được thành bình phương của hiệu hai trong ba số a, b, c . Để ý là

$$\frac{a - b}{b + c} - \frac{a - b}{c + a} = \frac{(a - b)^2}{(b + c)(c + a)}.$$

+ Thứ hai ta để ý đến biến đổi $\frac{a}{b + c} + 1 = \frac{a + b + c}{b + c}$. Do đó ta cộng vào hai vế của bất đẳng thức với 3, thực hiện biến đổi như trên ta được được bất đẳng thức về dạng như sau $(2a + 2b + 2c) \left(\frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} + \frac{1}{a + b} \right) \geq 9$, đến đây ta có thể đơn giản hóa bất đẳng thức bằng việc đặt biến phụ $x = b + c$; $y = c + a$; $z = a + b$.

+ Thứ ba là ta tiến hành đặt biến phụ $x = b + c$; $y = c + a$; $z = a + b$ ngay từ đầu, khi đó ta được

$$a = \frac{y + z - x}{2}; b = \frac{z + x - y}{2}; c = \frac{x + y - z}{2} \text{ và bất đẳng thức cần chứng minh thu được ở đây là}$$

$$\frac{y + z - x}{x} + \frac{z + x - y}{y} + \frac{x + y - z}{z} \geq 3 \text{ sẽ chứng minh dễ dàng hơn.}$$

Lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} + \frac{b}{c+a} - \frac{1}{2} + \frac{c}{a+b} - \frac{1}{2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{a-b}{b+c} + \frac{a-c}{b+c} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{b-a}{c+a} + \frac{c-a}{a+b} + \frac{c-b}{a+b} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{a-b}{b+c} - \frac{a-b}{c+a} \right) + \left(\frac{b-c}{c+a} - \frac{b-c}{a+b} \right) + \left(\frac{c-a}{a+b} - \frac{c-a}{b+c} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} + \frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)} + \frac{(c-b)^2}{(a+b)(b+c)} \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2} + \frac{b}{c+a} + \frac{1}{2} + \frac{c}{a+b} + \frac{1}{2} \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow (2a+2b+2c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 9$$

Đặt $x = b + c$; $y = c + a$; $z = a + b$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} & (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 6 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2 \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} - 2 \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{2xy} + \frac{(y-z)^2}{2yz} + \frac{(z-x)^2}{2zx} \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 3: Đặt $x = b + c$; $y = c + a$; $z = a + b$, khi đó ta được

$$a = \frac{y + z - x}{2}; b = \frac{z + x - y}{2}; c = \frac{x + y - z}{2}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{y + z - x}{x} + \frac{z + x - y}{y} + \frac{x + y - z}{z} \geq 3 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2 \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} - 2 \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{2xy} + \frac{(y-z)^2}{2yz} + \frac{(z-x)^2}{2zx} \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 40. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $6a + 2b + 3c = 11$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2b + 3c + 16}{6a + 1} + \frac{6a + 3c + 16}{2b + 1} + \frac{6a + 2b + 16}{3c + 1} \geq 15$$

Phân tích: Quan sát giả thiết và bất đẳng thức cần chứng minh ta nghĩ ngay đến việc đổi biến $x = 6a + 1$; $y = 2b + 1$; $z = 3c + 1$, chính việc đổi biến này ta thu được kết quả không thể hợp lý hơn là $x + y + z = 14$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + 14\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 15$$

Đến đây việc chứng minh bất đẳng thức hết sức đơn giản.

Lời giải

Đặt $x = 6a + 1$; $y = 2b + 1$; $z = 3c + 1$, suy ra $x + y + z = 14$.

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\begin{aligned} & \frac{y+z+14}{x} + \frac{z+x+14}{y} + \frac{x+y+14}{z} \geq 15 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + 14\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 15 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 15 \\ \Leftrightarrow & 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 2\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + 2\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + 3 \geq 15 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} - 2\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{2xy} + \frac{(y-z)^2}{2yz} + \frac{(z-x)^2}{2zx} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{14}{3}$ hay $a = \frac{11}{18}$; $b = \frac{11}{6}$; $c = \frac{11}{9}$.

Ví dụ 41. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$ab(a+b-2c) + bc(b+c-2a) + ca(c+a-2b) \geq 0$$

Phân tích: Với bất đẳng thức trên ta có các ý tưởng chứng minh sau:

+ Thứ nhất là ta khai triển các tích và nhóm các hạng tử với nhau một cách hợp lý, chú ý là $ab^2 + ac^2 - 2abc = a(b^2 + c^2 - 2bc) = a(b-c)^2$.

+ Thứ hai là vì a là số thực dương nên ta có $\frac{ab(a+b-2c)}{abc} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 2$, áp dụng tương tự ta biến đổi được bất đẳng thức về dạng đơn giản.

Lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & a^2b + ab^2 - 2abc + b^2c + bc^2 - 2abc + c^2a + ca^2 - 2abc \geq 0 \\ \Leftrightarrow & a(b^2 + c^2 - 2bc) + b(c^2 + a^2 - 2ca) + c(a^2 + b^2 - 2ab) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{ab(a+b-2c)}{abc} + \frac{bc(b+c-2a)}{abc} + \frac{ca(c+a-2b)}{abc} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{a+b-2c}{c} + \frac{b+c-2a}{a} + \frac{c+a-2b}{b} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 6 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 42. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} + \frac{9(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 33$$

Phân tích: Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Khi đó ta có được kết quả đẹp là

$\frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} = 6; \frac{9(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 27$, do đó ta rất tự nhiên ta nghĩ đến xét hiệu hai vế của bất đẳng thức. Hơn nữa ta lại có hai kết quả sau

$$2(a^3 + b^3 + c^3) - 6abc = 2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$27(a^2 + b^2 + c^2) - 9(a + b + c)^2 = 18(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

Đến đây càng thấy yên tâm là đã đi đúng hướng.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} - 6 + \frac{9(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} - 27 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{abc} - \frac{18(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \left(\frac{a + b + c}{abc} - \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right] \left[(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - 9abc \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Do $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} & (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - 9abc \geq 0 \\ \Leftrightarrow & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) - 6abc \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này đúng vì ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{(a + b + c) \left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right]}{2} \geq 0$$

$$\text{Và } a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) - 6abc = a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 43. Cho a, b, c là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c)^4 + (b + c - a)^4 + (c + a - b)^4 + (a + b - c)^4 \leq 28(a^4 + b^4 + c^4)$$

Phân tích: Bài toán gọi cho ta hằng đẳng thức:

$$(x - y)^4 + (x + y)^4 = 2(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} (a + b + c)^4 + (b + c - a)^4 &= 2 \left[(b + c)^4 + 6a^2(b + c)^2 + a^4 \right] \\ (c + a - b)^4 + (a + b - c)^4 &= 2 \left[(b - c)^4 + 6a^2(b - c)^2 + a^4 \right] \\ (b + c)^4 + (b - c)^4 &= 2(b^4 + 6b^2c^2 + c^4) \end{aligned}$$

Đề ý đến bất đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được $(x - y)^4 + (x + y)^4 = 2(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)$

Áp dụng hằng đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned}(a + b + c)^4 + (b + c - a)^4 &= 2 \left[(b + c)^4 + 6a^2(b + c)^2 + a^4 \right] \\(c + a - b)^4 + (a + b - c)^4 &= 2 \left[(b - c)^4 + 6a^2(b - c)^2 + a^4 \right] \\(b + c)^4 + (b - c)^4 &= 2(b^4 + 6b^2c^2 + c^4)\end{aligned}$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned}&(a + b + c)^4 + (b + c - a)^4 + (c + a - b)^4 + (a + b - c)^4 \\&= 4(a^4 + b^4 + c^4) + 24b^2c^2 + 12a^2 \left[(b + c)^2 + (b - c)^2 \right] \\&= 4(a^4 + b^4 + c^4) + 24(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\end{aligned}$$

Như vậy ta cần chứng minh

$$\begin{aligned}4(a^4 + b^4 + c^4) + 24(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) &\leq 28(a^4 + b^4 + c^4) \\ \Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &\leq a^4 + b^4 + c^4\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 44. Cho a, b, c là các số thực khác 1 thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(a-1)^2} + \frac{b^2}{(b-1)^2} + \frac{c^2}{(c-1)^2} \geq 1$$

Phân tích: Từ giả thiết $abc = 1$ ta nghĩ đến cách đặt biến phụ $a = \frac{1}{x}$; $b = \frac{1}{y}$; $c = \frac{1}{z}$. Khi đó bất đẳng

thức cần chứng minh trở thành $\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-y)^2} + \frac{1}{(1-z)^2} \geq 1$.

Sử dụng các biến đổi cơ bản và giả thiết $xyz = 1$ ta có các kết quả sau

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z} &= 1 + \frac{3 - (x + y + z)}{xy + yz + zx - (x + y + z)} \\ \frac{1}{(1-x)(1-y)} + \frac{1}{(1-y)(1-z)} + \frac{1}{(1-z)(1-x)} &= \frac{3 - (x + y + z)}{xy + yz + zx - (x + y + z)}\end{aligned}$$

Đến đây ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z} \right)^2 - 2 \left[\frac{1}{(1-x)(1-y)} + \frac{1}{(1-y)(1-z)} + \frac{1}{(1-z)(1-x)} \right] \geq 1$$

Và sử dụng các kết quả trên.

Lời giải

Vì $abc = 1$ nên $a, b, c \neq 0$. Đặt $a = \frac{1}{x}$; $b = \frac{1}{y}$; $c = \frac{1}{z}$, khi đó $xyz = 1$ và $x, y, z \neq 1$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-y)^2} + \frac{1}{(1-z)^2} \geq 1$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z} \right)^2 - 2 \left[\frac{1}{(1-x)(1-y)} + \frac{1}{(1-y)(1-z)} + \frac{1}{(1-z)(1-x)} \right] \geq 1 \\
& \Leftrightarrow \left[\frac{3 - 2(x+y+z) + xy + yz + zx}{xy + yz + zx - (x+y+z)} \right]^2 - 2 \left[\frac{3 - (x+y+z)}{xy + yz + zx - (x+y+z)} \right] \geq 1 \\
& \Leftrightarrow \left[1 + \frac{3 - (x+y+z)}{xy + yz + zx - (x+y+z)} \right]^2 - 2 \left[1 + \frac{3 - (x+y+z)}{xy + yz + zx - (x+y+z)} \right] + 1 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \left[1 + \frac{3 - (x+y+z)}{xy + yz + zx - (x+y+z)} \right]^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 45. Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} + \frac{(b+c)^2}{(b-c)^2} + \frac{(c+a)^2}{(c-a)^2} \geq 2$$

Phân tích: Quan sát kĩ bất đẳng thức cần chứng minh ta có các nhận xét như sau

+ Để ý ta thấy $\frac{a+b}{a-b} + 1 = \frac{2a}{a-b}$, $\frac{a+b}{a-b} - 1 = \frac{2b}{a-b}$, do đó ta có kết quả sau

$$\left(\frac{a+b}{a-b} + 1 \right) \left(\frac{b+c}{b-c} + 1 \right) \left(\frac{c+a}{c-a} + 1 \right) = \left(\frac{a+b}{a-b} - 1 \right) \left(\frac{b+c}{b-c} - 1 \right) \left(\frac{c+a}{c-a} - 1 \right)$$

Để đơn giản hóa bất đẳng thức ta có thể đặt $x = \frac{a+b}{a-b}$; $y = \frac{b+c}{b-c}$; $z = \frac{c+a}{c-a}$, khi đó ta được $(x+1)(y+1)(z+1) = (x-1)(y-1)(z-1)$ hay $xy + yz + zx = -1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại là $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2$. Đến đây ta có thể chứng minh được bất đẳng thức

+ Với cách đặt $x = \frac{a+b}{a-b}$; $y = \frac{b+c}{b-c}$ như trên ta có được một kết quả khác như sau

$$\frac{xy+1}{x+y} = \left(\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{b+c}{b-c} + 1 \right) : \left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} \right) = \frac{a+c}{a-c}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{xy+1}{x+y} \right)^2 \geq 2 \Leftrightarrow (x+y)^2 + \left(\frac{xy+1}{x+y} \right)^2 - 2xy \geq 2$$

Đến đây ta cũng có thể chứng minh được bất đẳng thức.

Lời giải

Cách 1: Đặt $x = \frac{a+b}{a-b}$; $y = \frac{b+c}{b-c}$; $z = \frac{c+a}{c-a}$.

Khi đó ta có $(x+1)(y+1)(z+1) = \frac{8abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

Và $(x-1)(y-1)(z-1) = \frac{8abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

Suy ra

$$\begin{aligned}
& (x+1)(y+1)(z+1) = (x-1)(y-1)(z-1) \\
& \Leftrightarrow 2(xy + yz + zx) = -2 \Leftrightarrow xy + yz + zx = -1
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq 0 \Leftrightarrow (x + y + z)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x + y + z = 0$ hay một trong ba số a, b, c bằng 0.

Cách 2: Đặt $x = \frac{a+b}{a-b}$; $y = \frac{b+c}{b-c}$. Khi đó ta được

$$\begin{aligned} \frac{xy+1}{x+y} &= \left(\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{b+c}{b-c} + 1 \right) : \left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} \right) \\ &= \frac{(a+b)(b+c) + (a-b)(b-c)}{(a-b)(b-c)} : \frac{(a+b)(b-c) + (a-b)(b+c)}{(a-b)(b-c)} \\ &= \frac{2ab + 2bc}{2ab - 2bc} = \frac{a+c}{a-c} \end{aligned}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{xy+1}{x+y} \right)^2 \geq 2 \Leftrightarrow (x+y)^2 + \left(\frac{xy+1}{x+y} \right)^2 - 2xy \geq 2$$

Để thấy $(x+y)^2 + \left(\frac{xy+1}{x+y} \right)^2 \geq 2(xy+1)$

Do đó ta được $(x+y)^2 + \left(\frac{xy+1}{x+y} \right)^2 - 2xy \geq 2(xy+1) - 2xy = 2$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi một trong ba số a, b, c bằng 0.

Ví dụ 46. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c} \leq \frac{3}{4}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta có thể đưa ra các ý tưởng sau

+ Thứ nhất ta để ý đến biến đổi sau $1 - \frac{a}{2a+b+c} = \frac{a+b+c}{2a+b+c}$. Áp dụng tương tự ta có thể đổi chiều bất đẳng thức. Đến đây để đơn giản hóa bất đẳng thức ta có thể đặt biến phụ $x = 2a+b+c$; $y = a+2b+c$; $z = a+b+2c$.

+ Đặt biến phụ $x = 2a+b+c$; $y = a+2b+c$; $z = a+b+2c$ ngay từ đầu và khi đó ta được bất đẳng thức $\frac{3x-y-z}{4x} + \frac{3y-x-z}{4y} + \frac{3z-x-y}{4z} \leq \frac{3}{4}$.

+ Đặt biến phụ $x = b+c$; $y = a+c$; $z = a+b$ và viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau $\frac{y+z-x}{2(y+z)} + \frac{z+x-y}{2(z+x)} + \frac{x+y-z}{2(x+y)} \leq \frac{3}{4}$.

Với các bất đẳng thức ở cả ba ý tưởng trên ta có thể chứng minh tiếp bằng biến đổi tương đương.

Lời giải

Cách 1: Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh

$$\begin{aligned} &1 - \frac{a}{2a+b+c} + 1 - \frac{b}{a+2b+c} + 1 - \frac{c}{a+b+2c} \geq \frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow &\frac{a+b+c}{2a+b+c} + \frac{a+b+c}{a+2b+c} + \frac{a+b+c}{a+b+2c} \geq \frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow &4(a+b+c) \left(\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \right) \geq 9 \end{aligned}$$

Đặt $x = 2a + b + c$; $y = a + 2b + c$; $z = a + b + 2c \Rightarrow x + y + z = 4(a + b + c)$

Khi đó bất đẳng thức trên trở thành

$$\begin{aligned} (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) &\geq 9 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2 \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} - 2 \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x - y)^2}{2xy} + \frac{(y - z)^2}{2yz} + \frac{(z - x)^2}{2zx} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Đặt $x = 2a + b + c$; $y = a + 2b + c$; $z = a + b + 2c$

Suy ra $a = \frac{3x - y - z}{4}$; $b = \frac{3y - x - z}{4}$; $c = \frac{3z - x - y}{4}$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\begin{aligned} \frac{3x - y - z}{4x} + \frac{3y - x - z}{4y} + \frac{3z - x - y}{4z} &\leq \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) &\geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 6 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2 \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} - 2 \right) &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - y)^2}{2xy} + \frac{(y - z)^2}{2yz} + \frac{(z - x)^2}{2zx} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 3: Đặt $x = b + c$; $y = a + c$; $z = a + b$

Suy ra $a = \frac{y + z - x}{2}$; $b = \frac{x + z - y}{2}$; $c = \frac{x + y - z}{2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{y + z - x}{2(y + z)} + \frac{z + x - y}{2(z + x)} + \frac{x + y - z}{2(x + y)} \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{y + z} + \frac{y}{z + x} + \frac{z}{x + y} \geq \frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức cuối cùng là bất đẳng thức Neibizt.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 47. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{b + c}{a^2 + bc} + \frac{c + a}{b^2 + ca} + \frac{a + b}{c^2 + ab}$$

Phân tích: Bất đẳng thức cần chứng minh thực sự đã gây ra rất nhiều khó khăn khi giải nó. Khi thực hiện biến đổi tương đương thì ý nghĩ đầu tiên là chuyển về và xét các hiệu theo nhóm, nhưng ta cần ghép các nhóm như thế nào cho phù hợp. Để ý một công cụ rất hiệu quả trong lúc bế tắc đó là vai trò các biến như nhau nên có thể sắp thứ tự các biến. Cho nên ta ghép đại các nhóm như sau

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{a} - \frac{a + b}{c^2 + ab} \right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{b + c}{a^2 + bc} \right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{c + a}{b^2 + ca} \right) \\ &= \frac{(c - a)^2 (c + a)(bc + ab - ab)}{ca(a^2 + bc)(c^2 + ab)} + \frac{(b - c)(b - a)}{b^3 + abc} \end{aligned}$$

Đến đây thì hay rồi, chỉ cần chọn b là số lớn nhất trong ba số a, b, c là bài toán coi như xong. Nói thật nếu khi ghép theo cách khác và được kết quả khác thì ta có thể sắp thứ tự các biến theo kiểu khác cũng không sao cả.

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức như sau

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{a} - \frac{a+b}{c^2+ab} \right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{b+c}{a^2+bc} \right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{c+a}{b^2+ca} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (c^2 - a^2) \left[\frac{1}{a(c^2+ab)} - \frac{1}{c(a^2+bc)} \right] + \frac{(b-c)(b-a)}{b^3+abc} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(c-a)^2(c+a)(bc+ab-ab)}{ca(a^2+bc)(c^2+ab)} + \frac{(b-c)(b-a)}{b^3+abc} \geq 0 \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử b là số lớn nhất trong ba số a, b, c khi đó ta được

$$bc + ab - ca \geq 0; \quad \frac{(b-c)(b-a)}{b^3+abc} \geq 0$$

Do vậy bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 48. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

Phân tích: Bất đẳng thức cần chứng minh có hình thức công kênh và phức tạp, ở đây ta cũng có dấu bằng xảy ra tại $a = b = c$ nên khi biến đổi tương đương ta thường nghĩ đến các đại lượng $(a-b)^2$; $(b-c)^2$; $(c-a)^2$. Ta để ý đến việc xét các hiệu

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} - \frac{a}{b+c}; \quad \frac{b^2}{a^2+c^2} - \frac{b}{c+a}; \quad \frac{c^2}{a^2+b^2} - \frac{c}{a+b}$$

Kết quả thu được là

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b^2+c^2} - \frac{a}{b+c} &= \frac{ab(a-b)}{(b^2+c^2)(b+c)} - \frac{ac(c-a)}{(b^2+c^2)(b+c)} \\ \frac{b^2}{a^2+c^2} - \frac{b}{c+a} &= \frac{bc(b-c)}{(c^2+a^2)(c+a)} - \frac{ab(a-b)}{(c^2+a^2)(c+a)} \\ \frac{c^2}{a^2+b^2} - \frac{c}{a+b} &= \frac{ca(c-a)}{(a^2+b^2)(a+b)} - \frac{bc(b-c)}{(a^2+b^2)(a+b)} \end{aligned}$$

Khi đó có 6 phân thức rất phức tạp. Đến đây ta chọn các biểu thức cùng tử để ghép cặp vì ghép các phân thức cùng mẫu lại không cho ta kết quả tốt. Chẳng hạn

$$\frac{ab(a-b)}{(b^2+c^2)(b+c)} - \frac{ab(a-b)}{(c^2+a^2)(c+a)}$$

Với các biểu thức như trên ta có thể biến đổi tiếp hoặc tìm cách sắp thứ tự biến.

Lời giải

Xét hiệu hai vế ta được bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2} - \frac{a}{b + c} + \frac{b^2}{a^2 + c^2} - \frac{b}{c + a} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} - \frac{c}{a + b} \geq 0$$

Đặt $A = \frac{a^2}{b^2 + c^2} - \frac{a}{b + c}$; $B = \frac{b^2}{a^2 + c^2} - \frac{b}{c + a}$; $C = \frac{c^2}{a^2 + b^2} - \frac{c}{a + b}$

Ta có

$$A = \frac{a^2}{b^2 + c^2} - \frac{a}{b + c} = \frac{a^2(b + c) - a(b^2 + c^2)}{(b^2 + c^2)(b + c)} = \frac{ab(a - b)}{(b^2 + c^2)(b + c)} - \frac{ac(c - a)}{(b^2 + c^2)(b + c)}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$B = \frac{bc(b - c)}{(c^2 + a^2)(c + a)} - \frac{ab(a - b)}{(c^2 + a^2)(c + a)}; \quad C = \frac{ca(c - a)}{(a^2 + b^2)(a + b)} - \frac{bc(b - c)}{(a^2 + b^2)(a + b)}$$

Khi bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{ab(a - b)}{(b^2 + c^2)(b + c)} - \frac{ac(c - a)}{(b^2 + c^2)(b + c)} + \frac{bc(b - c)}{(c^2 + a^2)(c + a)} - \frac{ab(a - b)}{(c^2 + a^2)(c + a)} \\ & + \frac{ca(c - a)}{(a^2 + b^2)(a + b)} - \frac{bc(b - c)}{(a^2 + b^2)(a + b)} \geq 0 \end{aligned}$$

Đến đây ta có hai hướng chứng minh bất đẳng thức trên

+ Hướng 1: Xét các hiệu sau

$$\frac{ab(a - b)}{(b^2 + c^2)(b + c)} - \frac{ab(a - b)}{(c^2 + a^2)(c + a)} = \frac{ab(a - b)^2(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)}{(b^2 + c^2)(b + c)(c^2 + a^2)(c + a)} \geq 0$$

$$\frac{bc(b - c)}{(c^2 + a^2)(c + a)} - \frac{bc(b - c)}{(a^2 + b^2)(a + b)} = \frac{bc(b - c)^2(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)}{(c^2 + a^2)(c + a)(a^2 + b^2)(a + b)} \geq 0$$

$$\frac{ca(c - a)}{(a^2 + b^2)(a + b)} - \frac{ac(c - a)}{(b^2 + c^2)(b + c)} = \frac{ca(c - a)^2(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)}{(a^2 + b^2)(a + b)(b^2 + c^2)(b + c)} \geq 0$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

+ Hướng 2: Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \geq b \geq c > 0$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & \frac{ab(a - b)}{(b^2 + c^2)(b + c)} - \frac{ab(a - b)}{(c^2 + a^2)(c + a)} = (a - b) \left[\frac{ab}{(b^2 + c^2)(b + c)} - \frac{ab}{(c^2 + a^2)(c + a)} \right] \geq 0 \\ & \frac{bc(b - c)}{(c^2 + a^2)(c + a)} - \frac{bc(b - c)}{(a^2 + b^2)(a + b)} = (b - c) \left[\frac{bc}{(c^2 + a^2)(c + a)} - \frac{bc}{(a^2 + b^2)(a + b)} \right] \geq 0 \\ & \frac{ca(c - a)}{(a^2 + b^2)(a + b)} - \frac{ac(c - a)}{(b^2 + c^2)(b + c)} = (a - c) \left[\frac{ca}{(b^2 + c^2)(b + c)} - \frac{ca}{(a^2 + b^2)(a + b)} \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Một số bài toán khác

Ví dụ 49. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{b} - 2a + b + \frac{b^2}{c} - 2b + c + \frac{c^2}{a} - 2c + a \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}} - \frac{a + b + c}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} - \frac{b+c}{2} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}} - \frac{c+a}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \geq \frac{(a-b)^2}{2\sqrt{2(a^2 + b^2)} + 2(a+b)} \\ & + \frac{(b-c)^2}{2\sqrt{2(b^2 + c^2)} + 2(b+c)} + \frac{(c-a)^2}{2\sqrt{2(c^2 + a^2)} + 2(c+a)} \\ \Leftrightarrow & A(a-b)^2 + B(b-c)^2 + C(c-a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Với

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{b} - \frac{1}{2\sqrt{2(a^2 + b^2)} + 2(a+b)} \\ B &= \frac{1}{c} - \frac{1}{2\sqrt{2(b^2 + c^2)} + 2(b+c)} \\ C &= \frac{1}{a} - \frac{1}{2\sqrt{2(c^2 + a^2)} + 2(c+a)} \end{aligned}$$

Chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $A, B, C \geq 0$. Thật vậy

$$A = \frac{1}{b} - \frac{1}{2\sqrt{2(a^2 + b^2)} + 2(a+b)} = \frac{2\sqrt{2(a^2 + b^2)} + 2a + b}{2\sqrt{2(a^2 + b^2)} + 2(a+b)} > 0$$

Hoàn toàn tương tự ta có $B, C \geq 0$. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 50. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc} + \sqrt{c^2 + a^2 - ca}$$

Lời giải

Nhận thấy

$$\frac{a^2}{b} - 2a + b = \frac{(a-b)^2}{b} \quad \text{và} \quad \sqrt{a^2 - ab + b^2} - \frac{a+b}{2} = \frac{3(a-b)^2}{4\sqrt{a^2 - ab + b^2} + 2a + 2b}$$

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \geq \frac{3(a-b)^2}{4\sqrt{a^2+b^2-2ab}+2(a+b)} + \frac{3(b-c)^2}{4\sqrt{b^2+c^2-2bc}+2(b+c)} + \frac{3(c-a)^2}{4\sqrt{c^2+a^2-2ca}+2(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow A(a-b)^2 + B(b-c)^2 + C(c-a)^2 \geq 0$$

Với

$$A = \frac{1}{b} - \frac{3}{4\sqrt{a^2+b^2-2ab}+2(a+b)}$$

$$B = \frac{1}{c} - \frac{3}{4\sqrt{b^2+c^2-2bc}+2(b+c)}$$

$$C = \frac{1}{a} - \frac{3}{4\sqrt{c^2+a^2-2ca}+2(c+a)}$$

Chúng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $A, B, C \geq 0$. Thật vậy

$$A = \frac{1}{b} - \frac{3}{4\sqrt{a^2+b^2-2ab}+2(a+b)} = \frac{4\sqrt{a^2+b^2-2ab}+2a+b}{4\sqrt{a^2+b^2-2ab}+2(a+b)} > 0$$

Hoàn toàn tương tự ta có $B, C \geq 0$. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Nhận xét: Hai bất đẳng thức trên ngoài phép biến đổi tương đương ta còn có thể chứng minh bằng nhiều cách khác nhau. Lời giải các cách khác được trình bày trong chủ đề “**Tuyển chọn các bất đẳng thức hay và khó**”.

Ví dụ 51. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}$$

Lời giải

Ta có
$$\frac{a^2-b^2}{a+b} + \frac{b^2-c^2}{b+c} + \frac{c^2-a^2}{c+a} = a-b+b-c+c-a=0$$

Do đó
$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} = \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a}$$

Khi đó ta cần chứng minh
$$\frac{2a^2}{b+c} + \frac{2b^2}{c+a} + \frac{2c^2}{a+b} \geq \frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{2a^2-b^2+c^2}{b+c} + \frac{2b^2-c^2+a^2}{c+a} + \frac{2c^2-a^2+b^2}{a+b} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(a-b)^2(a+b)}{(a+c)(b+c)} + \frac{(b-c)^2(b+c)}{(a+b)(a+c)} + \frac{(c-a)^2(c+a)}{(a+b)(b+c)} \geq 0 \end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 52. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-2ab+b^2} + \frac{b^2+c^2}{b^2-2bc+c^2} + \frac{c^2+a^2}{c^2-2ca+a^2} \geq \frac{5}{2}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{(a-b)^2} + \frac{(b+c)^2 + (b-c)^2}{(b-c)^2} + \frac{(c+a)^2 + (c-a)^2}{(c-a)^2} \geq 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} + \frac{(b+c)^2}{(b-c)^2} + \frac{(c+a)^2}{(c-a)^2} \geq 2$$

Đặt $x = \frac{a+b}{a-b}$; $y = \frac{b+c}{b-c}$; $z = \frac{c+a}{c-a}$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2$$

Ta có

$$\begin{aligned} xy + yz + zx &= \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{b+c}{b-c} + \frac{b+c}{b-c} \cdot \frac{c+a}{c-a} + \frac{c+a}{c-a} \cdot \frac{a+b}{a-b} \\ &= \frac{(a+b)(b+c)(c-a) + (b+c)(c+a)(a-b) + (c+a)(a+b)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -1 \end{aligned}$$

Mà $(x+y+z)^2 \geq 0$, do vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq -2(xy + yz + zx) = 2$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 53. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{b^2 + c^2}{b+c} + \frac{c^2 + a^2}{c+a} \leq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a+b+c}$$

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức như sau

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{b^2 + c^2}{b+c} + \frac{c^2 + a^2}{c+a} &\leq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a+b+c} \\ \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{c(a^2 + b^2)}{a+b} + \frac{a(b^2 + c^2)}{b+c} + \frac{b(c^2 + a^2)}{c+a} &\leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \\ \Leftrightarrow \frac{c[(a+b)^2 - 2ab]}{a+b} + \frac{a[(b+c)^2 - 2bc]}{b+c} + \frac{b[(c+a)^2 - 2ca]}{c+a} &\leq a^2 + b^2 + c^2 \\ \Leftrightarrow 2(ab + bc + ca) &\leq a^2 + b^2 + c^2 + abc \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức dạng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$ ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c}$$

Ta cần chỉ ra được $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab + bc + ca)$, bất đẳng thức này tương đương với

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a(b+c) + b(c+a) + c(a+b).$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử a là số lớn nhất trong ba số a, b, c . Khi đó ta có

$$(a-b)^2(a+b-c) + c(a-c)(b-c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)$$

Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 54. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^3} + \frac{5a^3 - c^3}{ca - 3a^2} \leq a + b + c$$

Lời giải

Cách 1: Ta sẽ chứng minh $\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \leq 2b - a$ với a, b là các số thực dương.

Thật vậy, biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$5b^3 - a^3 \leq (2b - a)(ab + 3b^2) \Leftrightarrow 5b^3 - a^3 \leq 2ab^2 + 6b^3 - a^2b - 3ab^2$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng, do đó bất đẳng thức trên được chứng minh.

Chứng minh tương tự ta được $\frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^3} \leq 2c - b$; $\frac{5a^3 - c^3}{ca - 3a^2} \leq 2a - c$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^3} + \frac{5a^3 - c^3}{ca - 3a^2} \leq a + b + c$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Ta có

$$a^3 - 5b^3 + 2b(ab + 3b^2) = a^3 + b^3 + 2ab^2$$

$$= (a^3 + ab^2) + (b^3 + a^2b) + 2ab^2 - (a^2b + ab^2)$$

$$\geq 2a^2b + 2ab^2 + 2ab^2 - (a^2b + ab^2) = a(ab + 3b^2)$$

Do đó ta có $\frac{a^3 - 5b^3}{ab + 3b^2} + 2b \geq a$ hay ta được $\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \leq 2b - a$

Áp dụng tương tự ta được $\frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^3} \leq 2c - b$; $\frac{5a^3 - c^3}{ca - 3a^2} \leq 2a - c$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^3} + \frac{5a^3 - c^3}{ca - 3a^2} \leq a + b + c$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét: Trong hai cách chứng minh trên, mục đích chung đều là đi chứng minh bất đẳng thức

$\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \leq 2b - a$, nhưng vấn đề đặt ra là làm thế nào để tìm ra được đại lượng $2b - a$. Câu trả lời sẽ được trình bày trong phụ lục “**Phương pháp hệ số bất định trong chứng minh bất đẳng thức**”.

Ví dụ 55. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 2$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq 9$$

Lời giải

Cách 1: Đặt $A = a^3 + b^3 + c^3$ và kết hợp với giả thiết của bài toán ta được

$$A = a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a) \\ = 27 - 3(3 - c)(3 - a)(3 - b) = 27 - 9(ab + bc + ca) + 3abc$$

Mặt khác, do $0 \leq a, b, c \leq 2$ nên $(2 - a)(2 - b)(2 - c) \geq 0$ hay

$$8 - 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca) - abc \geq 0 \\ \Leftrightarrow 2(ab + bc + ca) - abc \geq 4(a + b + c) - 8 = 4 \\ \Leftrightarrow 2(ab + bc + ca) \geq abc + 4$$

Khi đó ta được

$$2A = 54 - 9.2(ab + bc + ca) + 6abc \leq 54 - 9.(abc + 4) + 3abc = 18 - 6abc \leq 18$$

Suy ra $A \leq 9$, do đó ta được bất đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 \leq 9$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} abc = 0 \\ 2(ab + bc + ca) = 4 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a = 2; b = 1; c = 0$ và các hoán vị của nó.

Cách 2: Không mất tính tổng quát, ta giả sử a là số lớn nhất. Khi đó ta được

$$3 = a + b + c \leq 3a, \text{ suy ra } 1 \leq a \leq 2. \text{ Do đó ta được } (a - 1)(a - 2) \leq 0$$

Ta có

$$A = a^3 + b^3 + c^3 \leq a^3 + b^3 + c^3 + 3bc(b + c) = a^3 + (b + c)^3 = a^3 + (3 - a)^3 = 9 + (a - 1)(a - 2) \leq 9$$

Hay ta được bất đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 \leq 9$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2; b = 1; c = 0$ và các hoán vị của nó.

MỘT SỐ KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

I. Định nghĩa

Giả sử A và B là hai biểu thức bằng số hoặc bằng chữ. Khi đó

+ $A > B$; $A < B$; $A \geq B$; $A \leq B$ được gọi là các bất đẳng thức.

+ Các bất đẳng thức trên được viết lại như sau

$$A - B > 0; A - B < 0; A - B \geq 0; A - B \leq 0$$

+ Một bất đẳng thức bất kì có thể đúng, cũng có thể sai.

Quy ước: Khi nói về một bất đẳng thức mà không nói gì thêm thì ta hiểu đó là một bất đẳng thức đúng.

II. Tính chất cơ bản của bất đẳng thức

+ Tính chất giao hoán

Với các số thực A và B bất kì, ta luôn có $A \leq B \Leftrightarrow B \geq A$

+ Tính chất bắc cầu

Với các số thực A, B, C bất kì, ta luôn có $A \leq B, B \leq C \Rightarrow A \leq C$

+ Tính chất liên hệ với phép cộng

- Với các số thực A, B và M bất kì, ta luôn có

$$A \leq B \Leftrightarrow A \pm M \leq B \pm M$$

- Với các số thực A, B, C, D bất kì, ta luôn có

$$\bullet A \leq B; C \leq D \Rightarrow A + C \leq B + D$$

$$\bullet A \leq B; C \leq D \Rightarrow A - D \leq B - C$$

+ Tính chất liên hệ với phép nhân

- Với các số thực A, B bất kì, ta luôn có

$$\bullet A \leq B; M > 0 \Rightarrow A.M \leq B.M$$

$$\bullet A \leq B; M < 0 \Rightarrow A.M \geq B.M$$

- Với các số thực A, B, C, D bất kì, ta luôn có

$$\begin{cases} 0 < A < B \\ 0 < C < D \end{cases} \Rightarrow 0 < A.C < B.D$$

+ Tính chất liên hệ với lũy thừa

- Với các số thực A, B bất kì, ta luôn có

$$\bullet A \geq B \geq 0 \Leftrightarrow A^n \geq B^n \geq 0, \text{ với } n \text{ là số thực dương.}$$

$$\bullet A \geq B \Leftrightarrow A^n \geq B^n, \text{ với } n \text{ là số tự nhiên lẻ.}$$

$$\bullet |A| \geq |B| \Leftrightarrow A^n \geq B^n \geq 0, \text{ với } n \text{ là số tự nhiên chẵn.}$$

$$\bullet m \geq n > 0; A \geq 1 \Rightarrow A^m \geq A^n$$

$$\bullet m \geq n > 0; 0 < A < 1 \Rightarrow A^m \leq A^n$$

+ Tính chất liên hệ với tính nghịch đảo

$$\text{- Với các số thực dương A, B bất kì, ta luôn có } A \geq B \Leftrightarrow \frac{1}{A} \leq \frac{1}{B}$$

III. Một số bất đẳng thức cơ bản cần nhớ

$$+ A^2 \geq 0 \text{ với } \forall A$$

+ $A^{2k} \geq 0$ với $\forall A$ và k là số tự nhiên

+ $|A| \geq 0$ với $\forall A$

+ $|A + B| \geq |A| + |B|$

+ $|A - B| \leq |A| - |B|$

Chương I – MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Nội dung cơ bản của chương I gồm:

- Giới thiệu các phương pháp chứng minh bất đẳng thức.
- Nêu một số tính chất liên quan, một số lưu ý của các phương pháp chứng minh bất đẳng thức trên.
- Giới thiệu các bài tập mẫu cùng quá trình phân tích, suy luận để tìm ra các lời giải và các lời giải được trình bày cụ thể.
- Giới thiệu một số bài tập tự luyện.

Chủ đề 1

MỘT SỐ KỸ THUẬT BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

1. Kiến thức cần nhớ

Giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$. Tư tưởng của phương pháp là biến đổi tương đương bất đẳng thức trên thành một bất đẳng thức đúng mà phổ biến là các dạng sau:

+ Sử dụng định nghĩa bất đẳng thức: $A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$

+ Dạng tổng bình phương: $A \geq B \Leftrightarrow mX^2 + nY^2 + kZ^2 \geq 0$, với các số m, n, k dương.

+ Dạng tích hai thừa số cùng dấu:

$$A \geq B \Leftrightarrow X.Y \geq 0 \text{ hoặc } A \geq B \Leftrightarrow X^{2n}.Y \geq 0$$

+ Xây dựng các bất đẳng thức từ các điều kiện ban đầu: Nếu $x, y, z \in [a, b]$ thì ta nghĩ ngay tới một trong các bất đẳng thức đúng sau đây

$$(x - a)(x - b) \leq 0; (x - a)(y - a)(z - a) \geq 0; (x - b)(y - b)(z - b) \leq 0$$

Một số đẳng thức cần nhớ

$$+ (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2; \quad a^2 + b^2 = \frac{(a + b)^2}{2} + \frac{(a - b)^2}{2}$$

$$+ (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$+ (a + b)(b + c)(c + a) = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc$$

$$+ (a + b + c)(ab + bc + ca) = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 3abc$$

$$+ (a + b)(b + c)(c + a) + abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)$$

$$+ (a + 1)(b + 1)(c + 1) = abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1$$

$$+ (a - 1)(b - 1)(c - 1) = abc - (ab + bc + ca) + a + b + c - 1$$

$$+ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$+ (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$+ (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) = a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2$$

Một số bất đẳng thức cơ bản

$$+ a^2 + b^2 \geq 2ab; \quad 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \geq 4ab$$

$$+ a^2 + b^2 - ab \geq \frac{3(a+b)^2}{4}$$

$$+ a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$+ 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$$

$$+ 3(a^4 + b^4 + c^4) \geq (ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$$

+ Bất đẳng thức tam giác

$$\begin{cases} |b-c| < a < b+c \\ |c-a| < b < c+a \\ |a-b| < c < a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c > 0 \\ b+c-a > 0 \\ c+a-b > 0 \end{cases}$$

Với a, b, c là ba cạnh của một tam giác.

Một số kỹ thuật cơ bản trong phép biến đổi tương đương

- + Kỹ thuật xét hiệu hai biểu thức.
- + Kỹ thuật sử dụng các hằng đẳng thức.
- + Kỹ thuật thêm bớt một hằng số, một biểu thức.
- + Kỹ thuật đặt biến phụ.
- + Kỹ thuật sắp thứ tự các biến.
- + Kỹ thuật khai thác tính bị chặn của các biến.

2. Một số ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$a) \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

$$b) \quad a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$$

Phân tích: Các bất đẳng thức trên khá quen thuộc, ta có thể giải bằng cách xét hiệu vế trái và vế phải rồi phân tích thành tổng các bình phương.

Lời giải

a) Xét hiệu hai vế của bất đẳng thức

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) &= \frac{a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2}{2} \\ &= \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

b) Xét hiệu hai vế của bất đẳng thức

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2 + 3) - 2(a+b+c) &= a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + c^2 - 2c + 1 \\ &= (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Ví dụ 2. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2$$

Phân tích: Đây là một bất đẳng thức khá quen thuộc, ta có thể giải bằng cách xét hiệu vế trái và vế phải rồi phân tích thành tổng các bình phương.

Lời giải

Xét hiệu hai vế của bất đẳng thức

$$\begin{aligned} a \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2 &= \frac{3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2}{9} \\ &= \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{9} \end{aligned}$$

Suy ra
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét: Qua hai ví dụ trên ta nhận thấy khi biến đổi tương đương bất đẳng thức bậc hai thường xuất hiện các đại lượng $(a - b)^2$; $(b - c)^2$; $(c - a)^2$ với điều kiện dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Do đó trước khi biến đổi bất đẳng thức ta nên dự đoán dấu đẳng thức xảy ra để từ đó có hướng đi hợp lý.

Ví dụ 3. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$$

Phân tích: Bất đẳng thức cần chứng minh có hình thức tương tự như các bất đẳng thức trên, ta có thể giải bằng cách xét hiệu vế trái và vế phải rồi phân tích thành tổng các bình phương. Để được các tích ab, ac, ad, ae vào trong bình phương ta cần ghép a với b, c, d, e , và vì vai trò của b, c, d, e như nhau nên ta có thể nghĩ đến việc biến đổi như sau

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 &\geq a(b + c + d + e) \\ \Leftrightarrow (a - kb)^2 + (a - kc)^2 + (a - kd)^2 + (a - ke)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Trong trường hợp trên ta có thể chọn $k = 2$, tức là ta phải nhân hai vế với 4.

Lời giải

Xét hiệu hai vế của bất đẳng thức

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b + c + d + e) \\ &= \frac{4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) - 4(ab + ac + ad + ae)}{4} \\ &= \frac{(a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) + (a^2 - 4ad + 4d^2) + (a^2 - 4ae + 4e^2)}{4} \\ &= \frac{(a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + (a - 2e)^2}{4} \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2b = 2c = 2d = 2e$.

Nhận xét: Với bất đẳng thức trên, ngoài phép biến đổi tương đương ta còn có thể dùng tính chất của tam thức bậc hai để chứng minh.

Ví dụ 4. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a, b, c \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab} \quad \text{b) } \frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} \geq \frac{3}{1+abc}$$

Phân tích: Để ý ta thấy, mẫu của các biểu thức xuất hiện các bình phương, ý tưởng chứng minh bất đẳng thức trên là xét hiệu và phân tích làm xuất hiện các bình phương. Chú ý đến giả thiết $a, b \geq 1 \Rightarrow ab - 1 \geq 0$.

Lời giải

a) Xét hiệu hai vế của bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{2}{1+ab} &= \frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab} \\ &= \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)} \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra
$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

b) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với.

$$\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} \geq \frac{3}{1+abc} \Leftrightarrow \frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} + \frac{1}{1+abc} \geq \frac{4}{1+abc}$$

Áp dụng bất đẳng thức ở câu a ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} + \frac{1}{1+abc} &\geq \frac{2}{1+\sqrt{a^3b^3}} + \frac{2}{1+\sqrt{abc^4}} \\ &\geq \frac{4}{1+\sqrt{a^3b^3}\sqrt{abc^4}} = \frac{4}{1+abc} \end{aligned}$$

Suy ra
$$\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} \geq \frac{3}{1+abc}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^3 + b^3 = a - b$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + ab < 1$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta thấy có biểu thức $a^2 + b^2 + ab$. Trong khi đó giả thiết lại xuất hiện biểu thức $a - b$. Vậy mối liên hệ của hai biểu thức này như thế nào? Để thấy được hằng đẳng thức $(a-b)(a^2 + b^2 + ab) = a^3 - b^3$. Do đó một cách rất tự nhiên ta nhân hai vế của giả thiết với biểu thức $a^2 + b^2 + ab$ để làm xuất hiện $a^3 - b^3$ và $a^2 + b^2 + ab$, khi đó ta được $a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$. Tới đây chỉ cần chứng minh $\frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3} < 1$ là xong.

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được

$$a^3 + b^3 = a - b \Leftrightarrow (a^3 + b^3)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\Leftrightarrow (a^3 + b^3)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$$

Ta cần chứng minh được

$$\frac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3} < 1 \Leftrightarrow a^3 - b^3 < a^3 + b^3 \Leftrightarrow 0 < 2b^3 \Leftrightarrow 0 < b$$

Do $b > 0$ hiển nhiên đúng. Nên bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 6. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a > b$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - b^2} > a$$

Phân tích: Bất đẳng thức có chứa căn bậc hai và các biểu thức trong căn có chứa các bình phương, lại có thêm điều kiện $a > b > 0$, nên ta bình phương hai vế để biến đổi bất đẳng thức.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\left(\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - b^2}\right)^2 > a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{2ab - b^2} + 2ab - b^2 > a^2$$

$$\Leftrightarrow 2b(a - b) + 2\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{2ab - b^2} > 0$$

Vì $a > b > 0$ nên $b(a - b) > 0$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh

Ví dụ 7. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$$

Phân tích: Bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức cơ bản có vế trái là các lũy thừa bậc chẵn. Để ý ta thấy $abc(a + b + c) = ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab$, do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến việc biến đổi bất đẳng thức thành tổng của các bình phương.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^2bc - b^2ac - c^2ab \geq 0 \Leftrightarrow 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 2a^2bc - 2b^2ac - 2c^2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2 - c^2)^2 + 2b^2c^2 + (c^2 - a^2)^2 + 2a^2c^2 - 2a^2bc - 2b^2ac - 2c^2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 + (ab - bc)^2 + (bc - ac)^2 + (ab - ac)^2 \geq 0$$

Suy ra
$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 8. Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) \geq (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)$$

Phân tích: Để ý ta thấy $a^{10} \cdot a^2 = a^8 \cdot a^4$, $b^{10} \cdot b^2 = b^8 \cdot b^4$, do đó ta biến đổi tương đương để thu gọn và chứng minh bất đẳng thức.

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
& (a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) \geq (a^8 + b^8)(a^4 + b^4) \\
\Leftrightarrow & a^{12} + a^{10}b^2 + a^2b^{10} + b^{12} \geq a^{12} + a^8b^4 + a^4b^8 + b^{12} \\
& \Leftrightarrow a^8b^2(a^2 - b^2) + a^2b^8(b^2 - a^2) \geq 0 \Leftrightarrow a^2b^2(a^2 - b^2)(a^6 - b^6) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow a^2b^2(a^2 - b^2)^2(a^4 + a^2b^2 + b^4) \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 9. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

$$ab + 2bc + 3ca \leq 0$$

Phân tích: Từ giả thiết $a + b + c = 0$ ta có thể rút một biến theo các biến còn lại, chẳng hạn $c = -a - b$, thay vào biểu thức của bất đẳng thức ta được $3a^2 + 4ab + 2b^2$ là biểu thức chỉ chứa hai biến và xuất hiện các bình phương. Đến đây ta tìm cách phân tích thành tổng các bình phương để chứng minh bất đẳng thức.

Lời giải

Theo giả thiết thì $c = -(a + b)$, nên bất đẳng thức đã cho tương ứng với

$$\begin{aligned}
& ab + c(2a + 3a) \leq 0 \Leftrightarrow ab + (-a - b)(2b + 3a) \leq 0 \\
\Leftrightarrow & ab - 2ab - 3a^2 - 2b^2 - 3ab \leq 0 \Leftrightarrow 3a^2 + 4ab + 2b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2(a + b)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 0$.

Ví dụ 10. Chứng minh với các số thực a dương, ta có: $\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{5(a^2 + 1)}{2a} \geq \frac{11}{2}$

Phân tích: Bất đẳng thức cần chứng minh chỉ chứa một biến a , nên thông thường ta sử dụng phương pháp biến đổi tương đương để chứng minh. Để ý thêm nữa ta thấy, bất đẳng thức chứa các đại lượng $a^2 + 1$ và $2a$ làm ta liên tưởng đến hằng đẳng thức $(a - 1)^2$, lại thấy đẳng thức xảy ra khi $a = 1$ nên suy nghĩ rất tự nhiên là biến đổi tương đương bất đẳng thức làm xuất hiện đại lượng $(a - 1)^2$ xem có thể

chứng minh bài toán được không. Với $a = 1$ khi đó ta có $\frac{a}{a^2 + 1} = \frac{1}{2}$; $\frac{5(a^2 + 1)}{2a} = 5$ và $\frac{11}{2} = \frac{1}{2} + 5$ nên ta chuyển về để biến đổi bất đẳng thức.

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{a^2 + 1} + \frac{5(a^2 + 1)}{2a} \geq \frac{11}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{a^2 + 1} - \frac{1}{2} + \frac{5(a^2 + 1)}{2a} - 5 \geq 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{-(a - 1)^2}{2(a^2 + 1)} + \frac{5(a - 1)^2}{2a} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a - 1)^2}{2} \left(\frac{5}{a} - \frac{1}{a^2 + 1} \right) \geq 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{(a - 1)^2}{2} \cdot \frac{5a^2 - a + 5}{a(a^2 + 1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a - 1)^2}{2} \cdot \frac{(a - 1)^2 + 9(a^2 + 1)}{2(a^2 + 1)} \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$.

Ví dụ 11. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3 + b^3}{ab} + \frac{b^3 + c^3}{bc} + \frac{c^3 + a^3}{ca} \geq 2(a + b + c)$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta nhận thấy những đặc điểm sau:

+ Hai vế của bất đẳng thức cùng có bậc một.

+ Bất đẳng thức cần chứng minh làm ta liên tưởng đến một bất đẳng thức khá hay dùng $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$ với x, y là các số dương

Thật vậy

$$x^3 + y^3 \geq xy(x + y) \Leftrightarrow (x + y)(x^2 + y^2 - xy) \geq xy(x + y) \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3 + b^3}{ab} + \frac{b^3 + c^3}{bc} + \frac{c^3 + a^3}{ca} \geq \frac{ab(a + b)}{ab} + \frac{bc(b + c)}{bc} + \frac{ca(c + a)}{ca} = 2(a + b + c)$$

Suy ra
$$\frac{a^3 + b^3}{ab} + \frac{b^3 + c^3}{bc} + \frac{c^3 + a^3}{ca} \geq 2(a + b + c)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 12. Chứng minh rằng với mọi số thực x ta luôn có

$$(2x + 1) \cdot \sqrt{x^2 - x + 1} > (2x - 1) \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}$$

Phân tích: Bất đẳng thức chỉ chứa một biến và có chứa căn bậc hai. Trước hết ta kiểm tra điều kiện xác định của các căn thức

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ và } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

Nên bất đẳng thức được xác định với mọi x .

Quan sát bất đẳng thức ta thấy nếu thay x bằng $-x$ thì vế trái của bất đẳng thức trở là $(-2x + 1) \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}$ và vế phải của bất đẳng thức là $(2x - 1) \cdot \sqrt{x^2 - x + 1}$, khi đó nếu nhân hai vế với -1 thì được $(2x - 1) \cdot \sqrt{x^2 + x + 1} < (2x + 1) \cdot \sqrt{x^2 - x + 1}$, tức là bất đẳng thức không thay đổi gì cả. Như vậy ta chỉ cần xét trường hợp x không âm là được.

Với $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, ta thấy vế trái luôn dương và vế phải nhỏ hơn hoặc bằng không nên ta có thể

chia nhỏ các trường hợp $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ và $x > \frac{1}{2}$ để chứng minh bất đẳng thức.

Lời giải

$$\text{Vì } x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ và } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

Nên bất đẳng thức được xác định với mọi x .

Nếu $x < 0$, ta đặt $x = -t$, $t > 0$ khi đó bất đẳng thức trở thành.

$$\begin{aligned} & (-2t+1)\sqrt{t^2+t+1} > (-2t-1)\sqrt{t^2-t+1} \\ \Leftrightarrow & (2t+1)\sqrt{t^2-t+1} > (2t-1)\sqrt{t^2+t+1} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối này có dạng như bất đẳng thức ở đề bài và quan trọng hơn lúc này ta lại có $t > 0$. Như vậy, với lập luận này ta thấy rằng chỉ cần xét bài toán trong trường hợp $x \geq 0$ là đủ. Lúc này có hai khả năng xảy ra :

+ Nếu $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ thì $(2x+1)\sqrt{x^2-x+1} > 0$; $(2x-1)\sqrt{x^2+x+1} \leq 0$

suy ra $(2x+1)\sqrt{x^2-x+1} > (2x-1)\sqrt{x^2+x+1}$. Nên bất đẳng thức đúng.

+ Nếu $x > \frac{1}{2}$ thì hai vế cùng dương, nên bình phương hai vế ta được

$$\begin{aligned} & (2x+1)^2(x^2-x+1) > (2x-1)^2(x^2+x+1) \\ \Leftrightarrow & 4x^4+x^2+3x+1 > 4x^4+x^2-3x+1 \Leftrightarrow x > 0 \end{aligned}$$

Mà $x > \frac{1}{2}$ nên bất đẳng thức cuối cùng đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 13. Cho các số thực $a, b, c \in [0, 1]$. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^3 + c^2 - ab - bc - ac \leq 1$$

Phân tích: Từ giả thiết $a, b, c \in [0, 1]$ ta được $0 \leq a, b, c \leq 1$, khi đó theo tính chất của lũy thừa ta được $a \geq a^4$; $b \geq b^3$; $c \geq c^2$. Biểu thức ở vế trái của bất đẳng thức được thay bằng đại lượng $a + b + c - ab - bc - ca$. Cũng từ giả thiết $a, b, c \in [0, 1]$ và biểu thức bên làm ta liên tưởng đến tích $(1-a)(1-b)(1-c) \geq 0$. Do đó ta sử dụng phép biến đổi tương đương để chứng minh bất đẳng thức trên.

Lời giải

Theo giả thiết $a, b, c \in [0, 1]$ ta có

$$\begin{aligned} & (1-a)(1-b)(1-c) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 1 - (a+b+c) + ab + bc + ac - abc \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 1 \geq a + b + c - ab - bc - ac + abc \end{aligned}$$

Cũng từ giả thiết $a, b, c \in [0, 1]$ nên $abc \geq 0$ và $a \geq a^4$; $b \geq b^3$; $c \geq c^2$.

Do đó ta suy ra $1 \geq a + b + c - ab - bc - ac \geq a^4 + b^3 + c^2 - ab - bc - ac$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = 1$; $b = c = 0$ và các hoán vị.

Ví dụ 14. Chứng minh rằng với mọi số thực khác không a, b ta có: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

Phân tích: Để ý ta thấy $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2$, do đó ta có thể biến đổi bất đẳng thức thành

$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 0$. Đến đây ta có thể phân tích thành tích rồi quy đồng hoặc đặt biến phụ

$t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, chú ý điều kiện $|t| \geq 2$.

Lời giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) \geq 0$$

Đến đây ta có hai hướng xử lý bất đẳng thức trên.

+ Hướng 1: Biến đổi tương đương tiếp ta được bất đẳng thức

$$\frac{(a^2 + b^2 + ab)(a - b)^2}{a^2 b^2} \geq 0$$

$$\text{Mà} \quad a^2 + b^2 + ab = \frac{(a + b)^2 + (a^2 + b^2)}{2} \geq 0$$

Do đó bất đẳng thức được chứng minh.

+ Hướng 2: Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$, khi đó ta được $t^2 = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 \geq 4 \Rightarrow |t| \geq 2$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $(t + 1)(t - 2) \geq 0$.

- Nếu $t \geq 2$, suy ra $t - 2 \geq 0$ nên $(t + 1)(t - 2) \geq 0$.

- Nếu $t \leq -2$, suy ra $t + 1 < 0$; $t - 2 < 0$ nên $(t + 1)(t - 2) > 0$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

Ví dụ 15. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b ta có:

$$ab(a - 2)(b + 6) + 12a^2 - 24a + 3b^2 + 18b + 36 > 0$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy vế trái của có sự xuất hiện các đại lượng $a(a - 2)$; $b(b + 6)$ và chú ý thêm các đại lượng bên ta nhận thấy $a(a - 2) + 1 = (a - 1)^2$ và $b(b + 6) + 9 = (b + 3)^2$. Đến đây ta thấy có hai ý tưởng chứng minh bất đẳng thức trên.

+ Thứ nhất là ta biến đổi tương đương làm xuất hiện các bình phương $(a - 1)^2$, $(b + 3)^2$.

+ Thứ hai là đặt biến phụ $x = a(a - 2)$; $y = b(b + 6)$ và sử dụng điều kiện của biến phụ để chứng minh.

Lời giải

Cách 1: Gọi P là vế trái của bất đẳng thức đã cho, ta có

$$\begin{aligned} P &= ab(a - 2)(b + 6) + 12a^2 - 24a + 3b^2 + 18b + 36 \\ &= a(a - 2)[b(b + 6) + 12] + 3[b(b + 6) + 12] \\ &= [b(b + 6) + 12][a(a - 2) + 3] = [(b + 3)^2 + 3][(a - 1)^2 + 2] > 0 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$ab(a-2)(b+6) + 12(a-1)^2 + 3(b+3)^2 - 3 > 0$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = a(a-2) \\ y = b(b+6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = (a-1)^2 \geq 0 \\ y+9 = (b+3)^2 \geq 0 \end{cases}$$

Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$xy + 12(x+1) + 3(y+9) - 3 > 0 \Leftrightarrow (x+3)(y+12) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $x+1 \geq 0$; $y+3 \geq 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 16. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$1019a^2 + 18b^4 + 1007c^2 \geq 30ab^2 + 6b^2c + 2008ca$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta thấy vế trái xuất hiện các lũy thừa bậc chẵn và vế phải xuất hiện tích của hai trong ba biến nên ta nghĩ đến việc biến đổi bất đẳng thức thành tổng các bình phương. Tuy nhiên vì hệ số khác nhau nên ta cần phải tinh ý khi phân tích.

Sau khi chuyển vế ta phân tích thành $m(a-b^2)^2 + n(b^2-c)^2 + k(c-a)^2$ và cần tìm m, n, k sao cho $m+k=1019$; $n+k=18$; $k+m=1007$. Giải hệ điều kiện trên ta tìm được $m=15$; $n=3$; $k=1004$. Đến đây ta chứng minh được bất đẳng thức.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$15(a^2 - 2ab^2 + b^2) + 3(b^4 - 2b^2c + c^2) + 1004(c^2 - 2ca + a^2) \geq 0 \\ \Leftrightarrow 15(a-b^2)^2 + 3(b^2-c)^2 + 1004(c-a)^2 \geq 0$$

Vật bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b^2 = c$.

Ví dụ 17. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a \geq 1$; $b \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$$

Phân tích: Bất đẳng thức có chứa căn bậc hai và đẳng thức xảy ra tại $a = b = 2$, do đó ta có các ý tưởng chứng minh bất đẳng thức sau đây:

+ Thứ nhất là đặt biến phụ $x = \sqrt{a-1}$; $y = \sqrt{b-1}$ để làm mất căn bậc hai và phân tích thành các bình phương.

+ Thứ hai là khử căn bậc hai bằng một đánh giá quen thuộc $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Để ý đến chiều bất đẳng thức và điều kiện dấu bằng xảy ra tại $a = b = 2$ ta đánh giá được

$$\sqrt{a-1} \leq \sqrt{(a-1) \cdot 1} \leq \frac{a-1+1}{2} = \frac{a}{2}; \sqrt{b-1} = \sqrt{(b-1) \cdot 1} \leq \frac{b-1+1}{2} = \frac{b}{2}$$

Lời giải

Cách 1: Đặt $x = \sqrt{a-1}$; $y = \sqrt{b-1}$, khi đó $x \geq 0$; $y \geq 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $(x^2+1)y + (y^2+1)x \leq (x^2+1)(y^2+1)$

$$\begin{aligned}
& (x^2 + 1)y + (y^2 + 1)x \leq (x^2 + 1)(y^2 + 1) \\
& \Leftrightarrow (x^2 + 1)(y^2 + 1) - 2(x^2 + 1)y + (x^2 + 1)(y^2 + 1) - 2(y^2 + 1)x \geq 0 \\
& \Leftrightarrow (x^2 + 1)(y - 1)^2 + (y^2 + 1)(x - 1)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$ hay $a = b = 2$.

Cách 2: Áp dụng một bất đẳng thức quen thuộc ta được

$$\begin{aligned}
\sqrt{a-1} & \leq \sqrt{(a-1) \cdot 1} \leq \frac{a-1+1}{2} = \frac{a}{2} \\
\sqrt{b-1} & = \sqrt{(b-1) \cdot 1} \leq \frac{b-1+1}{2} = \frac{b}{2}
\end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta được} \quad a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = ab$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2$.

Ví dụ 18. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b ta có: $2(a^4 + b^4) \geq ab^3 + a^3b + 2a^2b^2$

Phân tích: Để ý ta thấy, với $a = b$ thì dấu đẳng thức xảy ra nên ta tách các hạng tử để tạo ra nhân tử chung $(a - b)^2$.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + a^4 - a^3b + b^4 - ab^3 & \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (a^3 - b^3)(a - b) \geq 0 \\
\Leftrightarrow (a - b)^2 \left[(a + b)^2 + (a^2 + ab + b^2) \right] & \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \left[3(a + b)^2 + a^2 + b^2 \right] \geq 0
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 19. Cho a, b là hai số thực khác không. Chứng minh rằng:

$$\frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 3$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy khi $a^2 = b^2$ thì bất đẳng thức xảy ra dấu bằng và

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2b^2} - 2. \text{ Nên ta có các ý tưởng biến đổi tương đương bất đẳng thức như sau:}$$

+ Thứ nhất là quy đồng hai vế và phân tích làm xuất hiện nhân tử chung $(a^2 - b^2)^2$

+ Thứ hai là đặt biến phụ $t = \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2} \right)^2$, chú ý điều kiện $0 < t \leq 1$.

Lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức đã cho tương đương với.

$$\begin{aligned}
& \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} - 1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4a^2b^2 - (a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{a^2b^2} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{-(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2b^2} \geq 0 \Leftrightarrow (a^2-b^2)^2 \left[\frac{1}{a^2b^2} - \frac{1}{(a^2+b^2)^2} \right] \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{(a^2-b^2)^2 \left[(a^2+b^2)^2 - a^2b^2 \right]}{a^2b^2(a^2+b^2)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a^2-b^2)^2 (a^4 + b^4 + a^2b^2)}{a^2b^2(a^2+b^2)^2} \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \pm b$.

Cách 2: Bất đẳng thức được viết lại thành $\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{(a^2+b^2)^2}{a^2b^2} \geq 5$.

Đặt $t = \left(\frac{2ab}{a^2+b^2} \right)^2$, khi đó ta được $0 < t \leq 1$. Suy ra $\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2b^2} = 4 \left(\frac{a^2+b^2}{2ab} \right)^2 = \frac{4}{t}$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$t + \frac{4}{t} \geq 5 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-4) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $0 < t \leq 1$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \pm b$.

Ví dụ 20. Cho các số thực dương a, b, m, n ($m \geq n$). Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{na+mb} + \frac{b}{mb+na} \geq \frac{2}{m+n}$$

Phân tích: Nhận thấy bất đẳng thức xảy ra dấu bằng tại $a = b$, do đó một cách tự nhiên ta nghĩ đến biến đổi bất đẳng thức làm xuất hiện $(a-b)^2$, chú ý đến điều kiện $m \geq n$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{na+mb} - \frac{1}{n+m} + \frac{b}{mb+na} - \frac{1}{n+m} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{m(a-b)}{(na+mb)(n+m)} - \frac{m(a-b)}{(nb+ma)(n+m)} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{m(a-b)}{n+m} \left(\frac{1}{na+mb} - \frac{1}{nb+ma} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{m(a-b)^2}{n+m} \cdot \frac{m-n}{(na+mb)(nb+ma)} \geq 0
\end{aligned}$$

Vì $a, b > 0$ và $m \geq n$ nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b$ hoặc $m = n$.

Ví dụ 21. Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b}{2a^3+b^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy dấu đẳng thức xảy ra với $a = b$, khi đó rất tự nhiên ta nghĩ đến biến đổi bất đẳng thức làm xuất hiện đại lượng $(a-b)^2$. Mặt khác với $a = b$ ta lại có

$\frac{a^2b}{2a^3+b^3} = \frac{1}{3}$; $\frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2} = 1$. Để ý là $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$, nên ta biến đổi bất đẳng thức thành $\frac{a^2b}{2a^3+b^3} - \frac{1}{3} \geq \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2} - 1$. Tới đây ta quy đồng hai vế và phân tích thành các bình phương.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{a^2b}{2a^3+b^3} + \frac{2}{3} &\geq \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2} \Leftrightarrow \frac{a^2b}{2a^3+b^3} - \frac{1}{3} \geq \frac{a^2+2ab}{2a^2+b^2} - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{-(a-b)^2(2a+b)}{3(2a^3+b^3)} &\geq \frac{-(a-b)^2}{2a^2+b^2} \Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\frac{1}{2a^2+b^2} - \frac{2a+b}{3(2a^3+b^3)} \right] \geq 0 \\ \Leftrightarrow (a-b)^2 \left[3(2a^3+b^3) - (2a^2+b^2)(2a+b) \right] &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a-b)^2 (2a^3+2b^3-2a^2b-2ab^2) &\geq 0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^4 \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vật bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 22. Cho các số thực a, b không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{2ab}{a^2+4b^2} + \frac{b^2}{3a^2+2b^2} \leq \frac{3}{5}$$

Phân tích: Dấu đẳng thức xảy ra với $a = b$, khi đó $\frac{2ab}{a^2+4b^2} = \frac{2}{5}$; $\frac{b^2}{3a^2+2b^2} = \frac{1}{5}$. Nên ta biến đổi

bất đẳng thức thành $\frac{2}{5} - \frac{2ab}{a^2+4b^2} + \frac{1}{5} - \frac{b^2}{3a^2+2b^2} \geq 0$. Tới đây ta quy đồng hai vế và phân tích thành các bình phương.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{2ab}{a^2+4b^2} + \frac{b^2}{3a^2+2b^2} &\leq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{5} - \frac{2ab}{a^2+4b^2} + \frac{1}{5} - \frac{b^2}{3a^2+2b^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2a^2-10ab+8b^2}{a^2+4b^2} + \frac{3a^2-3b^2}{3a^2+2b^2} &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(a-b)(a-4b)}{a^2+4b^2} + \frac{3(a-b)(a+b)}{3a^2+2b^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow (a-b) \left[\frac{2(a-4b)(3a^2+2b^2) + 3(a+b)(a^2+4b^2)}{(a^2+4b^2)(3a^2+2b^2)} \right] &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a-b)(9a^3-21a^2b+16ab^2-4b^3) &\geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(3a-2b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ hoặc $3a = 2b$

Ví dụ 23. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

- $a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0$
- $a^6 + b^6 + c^6 \geq a^5b + b^5c + c^5a$

Phân tích:

a) Quan sát bất đẳng thức thứ nhất ta nhận thấy $a - c = (a - b) + (b - c)$ do đó bất đẳng thức lúc này tương đương với $a(a - b)^2 + c(a - c)(b - c) \geq 0$. Đến đây chỉ cần sắp thứ tự các biến sao cho $c(a - c)(b - c) \geq 0$ là xong.

b) Tương tự như trên ta có $a - c = (a - b) + (b - c)$, biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được bất đẳng thức $(a - b)(a^5 - b^5) + (a - c)(b^5 - c^5) \geq 0$. Đến đây ta chỉ cần sắp thứ tự các biến sao cho $(a - c)(b^5 - c^5) \geq 0$ là xong.

Lời giải

a) Vì vai trò của a, b, c trong bất đẳng thức như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & a(a - b)(a - c) + a(b - c)(b - a) + c(c - a)(c - b) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & a(a - b)[(a - b) + (b - c)] + b(b - c)(b - a) + c(c - a)(c - b) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & a(a - b)^2 + a(a - b)(b - c) - a(b - c)(a - b) + c(a - c)(b - c) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a - b)^2(a + b - c) + c(a - c)(b - c) \geq 0 \end{aligned}$$

Vì $a \geq b \geq c \geq 0$ nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

b) Vì vai trò của a, b, c trong bất đẳng thức như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq c \geq 0; b \geq c \geq 0$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & a^6 - a^5b + b^6 - b^5c + c^6 - c^5a \geq 0 \Leftrightarrow a^5(a - b) + b^5(b - c) + c^5(c - a) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & a^5(a - b) - b^5[(a - b) + (c - a)] + c^5(c - a) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a - b)(a^5 - b^5) + (a - c)(b^5 - c^5) \geq 0 \end{aligned}$$

Vì $a \geq c \geq 0; b \geq c \geq 0$ nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 24. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta có các nhận xét như sau:

+ Quy đồng hai vế của bất đẳng thức thì vế trái xuất hiện $(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2$ và vế phải xuất hiện $abc(a + b + c) = ab.bc + bc.ca + ca.ab$. Như vậy chỉ cần chuyển vế trái ta viết được thành tổng các bình phương

$$+ \text{Đề ý ta thấy } \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} - 2c = \frac{c(a - b)^2}{ab}. \text{ Như vậy ta cần nhân hai vế với 2 và ghép tương tự.}$$

Lời giải

Cách 1: Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên như sau

$$\begin{aligned}\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} &\geq a + b + c \Leftrightarrow (bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2 \geq abc(a + b + c) \\ &\Leftrightarrow 2(bc)^2 + 2(ca)^2 + 2(ab)^2 - 2abc(a + b + c) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên như sau

$$\begin{aligned}\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} &\geq a + b + c \Leftrightarrow 2\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) \geq 2(a + b + c) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} - 2c\right) + \left(\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} - 2a\right) + \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} - 2b\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{c(b^2 + a^2 - 2ab)}{ab} + \frac{a(c^2 + b^2 - 2bc)}{bc} + \frac{b(c^2 + a^2 - 2ca)}{ca} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{c(a-b)^2}{ab} + \frac{a(b-c)^2}{bc} + \frac{b(c-a)^2}{ca} \geq 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 25. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$$

Phân tích: Nhận thấy $\frac{a^2}{b} - 2a + b = \frac{(a-b)^2}{b}$. Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}&\left(\frac{a^2}{b} - 2a + b\right) + \left(\frac{b^2}{c} - 2b + c\right) + \left(\frac{c^2}{a} - 2c + a\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a^2 - 2ab + b^2}{b} + \frac{b^2 - 2bc + c^2}{c} + \frac{c^2 - 2ca + a^2}{a} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \geq 0\end{aligned}$$

Vì a, b, c là các số thực dương nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 26. Cho a, b là các số thực dương, tìm hằng số k lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức.

$$\frac{k}{a^2 + b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8 + 2k}{(a + b)^2}$$

Phân tích: Vì vai trò của a, b như nhau nên ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b$, do đó khi biến đổi bất đẳng thức ta cần làm xuất hiện nhân tử $(a - b)^2$. Khi đó bất đẳng thức trở thành

$(a - b)^2 \left[(a^2 + 4ab + b^2)(a^2 + b^2) - ka^2b^2 \right] \geq 0$. Để tìm k lớn nhất ta cho $a = b$, khi đó ta được $12a^4 - ka^4 \geq 0 \Rightarrow k \leq 12$. Đến đây ta chỉ cần chứng minh $k = 12$ bất đẳng thức đúng là được.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
 & \frac{k}{a^2 + b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{8 + 2k}{(a + b)^2} \\
 \Leftrightarrow & \frac{k}{a^2 + b^2} - \frac{2k}{(a + b)^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{4}{(a + b)^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{4}{(a + b)^2} \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{-k(a - b)^2}{(a^2 + b^2)(a + b)^2} + \frac{(b - a)(b + 3a)}{a^2(a + b)^2} + \frac{(a - b)(3a + b)}{b^2(a + b)^2} \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{(a - b)^2(a^2 + 4ab + b^2)}{a^2b^2(a + b)^2} - \frac{k(a - b)^2}{(a^2 + b^2)(a + b)^2} \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & (a - b)^2 \left[(a^2 + 4ab + b^2)(a^2 + b^2) - ka^2b^2 \right] \geq 0
 \end{aligned}$$

Vì $(a - b)^2 \geq 0$ nên bất đẳng thức đúng khi và chỉ khi

$$(a^2 + 4ab + b^2)(a^2 + b^2) - ka^2b^2 \geq 0$$

Cho $a = b$ thì bất đẳng thức trên trở thành $12a^4 - ka^4 \geq 0 \Rightarrow k \leq 12$. Ta chứng minh $k = 12$ là hằng số lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức đã cho

Thật vậy, ta xét các trường hợp sau

+ Với $k < 12$ thì ta được $(a^2 + 4ab + b^2)(a^2 + b^2) - ka^2b^2 > 0$.

+ Với $k = 12$ thì bất đẳng thức $(a^2 + 4ab + b^2)(a^2 + b^2) - ka^2b^2 \geq 0$ trở thành

$$\begin{aligned}
 & (a^2 + 4ab + b^2)(a^2 + b^2) - 12a^2b^2 \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 + 4ab(a^2 + b^2 - 2ab) \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + 4ab(a - b)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Vậy hằng số k lớn nhất là 12.

Ví dụ 27. Cho a, b là các số thực dương, tìm hằng số k lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức

$$\frac{k}{a^3 + b^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \geq \frac{16 + 4k}{(a + b)^3}$$

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh ta được

$$\begin{aligned}
 & \frac{k}{a^3 + b^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \geq \frac{16 + 4k}{(a + b)^3} \\
 \Leftrightarrow & \frac{k}{a^3 + b^3} - \frac{4k}{(a + b)^3} + \frac{1}{a^3} - \frac{8}{(a + b)^3} + \frac{1}{b^3} - \frac{8}{(a + b)^3} \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{a - b}{(a + b)^3} \left(\frac{7b^2 + 4ab + a^2}{b^3} - \frac{7a^2 + 4ab + b^2}{a^3} \right) - \frac{3k(a - b)^2(a + b)}{(a^3 + b^3)(a + b)^3} \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{(a - b)^2(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)}{a^3b^3} - \frac{3k(a - b)^2}{a^2 - ab + b^2} \geq 0 \\
 \Leftrightarrow & (a - b)^2 \left[(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)(a^2 - ab + b^2) - 3ka^3b^3 \right] \geq 0
 \end{aligned}$$

Vì $(a - b)^2 \geq 0$ nên bất đẳng thức đúng khi và chỉ khi

$$(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)(a^2 - ab + b^2) - 3ka^3b^3 \geq 0$$

Cho $a = b$ thì bất đẳng thức trên trở thành $24a^6 - 3ka^6 \geq 0 \Rightarrow k \leq 8$. Ta chứng minh $k = 8$ là hằng số lớn nhất thỏa mãn bất đẳng thức đã cho. Thật vậy, ta xét các trường hợp sau

+ Với $k < 8$ thì $(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)(a^2 - ab + b^2) - 3ka^3b^3 > 0$.

+ Với $k = 8$ thì bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)(a^2 - ab + b^2) - 24a^3b^3 \geq 0$$

Ta có $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$; $a^2 + b^2 \geq 2ab$ nên

$$a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4 = a^4 + b^4 + 5ab(a^2 + b^2) + 12a^2b^2 \geq 24a^2b^2$$

Và $a^2 - ab + b^2 \geq ab$

Do đó ta có $(a^4 + 5a^3b + 12a^2b^2 + 5ab^3 + b^4)(a^2 - ab + b^2) \geq 24a^3b^3$

Suy ra bất đẳng thức được chứng minh. Vậy hằng số k lớn nhất là 8.

Ví dụ 28. Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{3a^2 + 2ab + 3b^2}{a + b} \geq 2\sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

Phân tích: Đẳng thức xảy ra khi $a = b$, do đó ta cố biến đổi bất đẳng thức làm xuất hiện đại lượng $(a - b)^2$. Bất đẳng thức cần chứng minh có chứa căn, nên để xuất hiện nhân tử chung có dạng $(a - b)^2$ ta cần chú ý đến phép biến đổi $2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = (a - b)^2$

$$\text{Khi đó ta có } \sqrt{2(a^2 + b^2)} - (a + b) = \frac{(a - b)^2}{\sqrt{2(a^2 + b^2)} + (a + b)}$$

Lời giải

Ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$\begin{aligned} & \frac{3a^2 + 2ab + 3b^2}{a + b} \geq 2\sqrt{2(a^2 + b^2)} \\ \Leftrightarrow & \frac{3a^2 + 2ab + 3b^2}{a + b} - 2(a + b) \geq 2\sqrt{2(a^2 + b^2)} - 2(a + b) \\ \Leftrightarrow & \frac{(a - b)^2}{a + b} \geq \frac{2(a - b)^2}{\sqrt{2(a^2 + b^2)} + (a + b)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a - b)^2 \left[\sqrt{2(a^2 + b^2)} + (a + b) - 2(a + b) \right] \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a - b)^2 \left[\sqrt{2(a^2 + b^2)} - (a + b) \right] \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a - b)^4}{\sqrt{2(a^2 + b^2)} + a + b} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng cuối cùng đúng do a, b dương. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 29. Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{2ab}{(a + b)} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \sqrt{ab} + \frac{a + b}{2}$$

Phân tích: Để ý ta thấy $\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$

Lại có
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} = \frac{\frac{a^2+b^2}{2} - ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}} = \frac{(a-b)^2}{2\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}\right)}$$

Do đó ta biến đổi tương đương để chứng minh bất đẳng thức

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh được biến đổi như sau

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} &\geq \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}} - \frac{1}{a+b} \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[2a+2b - \sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab} \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Vì $(a-b)^2 \geq 0$ nên ta cần chứng minh $2a+2b - \sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab} \geq 0$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} a+b - \sqrt{2(a^2+b^2)} &= -\frac{(a-b)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + (a+b)} \\ a+b - 2\sqrt{ab} &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \frac{(a-b)^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} \end{aligned}$$

Do vậy bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} &(a-b)^2 \left[\frac{1}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} - \frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + (a+b)} \right] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\sqrt{2(a^2+b^2)} + a+b - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \right] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\sqrt{2(a^2+b^2)} - 2\sqrt{ab} \right] \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \frac{2(a^2+b^2) - 4ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + 2\sqrt{ab}} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2(a-b)^4}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + 2\sqrt{ab}} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối này hiển nhiên đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 30. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

- $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$
- $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

Lời giải

a) Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có

$$\begin{cases} 0 < a < b + c \\ 0 < b < a + c \\ 0 < c < a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 < a(b + c) \\ b^2 < b(a + c) \\ c^2 < c(a + b) \end{cases}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

b) Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có

$$a^2 \geq a^2 - (b - c)^2 = (a - b + c)(a + b - c) > 0$$

Chứng minh tương tự ta được $b^2 \geq b^2 - (c - a)^2 > 0; c^2 \geq c^2 - (a - b)^2 > 0$

Nhân vế các bất đẳng thức ta được

$$\begin{aligned} a^2 b^2 c^2 &\geq \left[a^2 - (b - c)^2 \right] \left[b^2 - (c - a)^2 \right] \left[c^2 - (a - b)^2 \right] \\ &\Rightarrow a^2 b^2 c^2 \geq (a + b - c)^2 (b + c - a)^2 (c + a - b)^2 \end{aligned}$$

Mà ta lại có $a + b - c > 0; b + c - a > 0; c + a - b > 0$

Nên từ bất đẳng thức trên ta được $abc \geq (a + b - c) \cdot (b + c - a) \cdot (c + a - b)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét: Bất đẳng thức $abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$ không chỉ đúng với a, b, c là các cạnh của một tam giác, mà nó còn đúng cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Bất đẳng này là một trường hợp của bất đẳng thức Schur. Trong phần Phụ lục 3, ta sẽ bàn nhiều về bất đẳng thức này hơn.

Bài 31. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác chứng minh rằng:

$$a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 > a^3 + b^3 + c^3$$

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} &a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 > a^3 + b^3 + c^3 \\ \Leftrightarrow &a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 - a^3 - b^3 - c^3 > 0 \\ \Leftrightarrow &a[(b - c)^2 - a^2] + b[(c - a)^2 - b^2] + c[(a - b)^2 - c^2] > 0 \\ \Leftrightarrow &a(b - c - a)(b - c + a) + b(c - a - b)(c - a + b) + c(a - b - c)(a - b + c) > 0 \\ \Leftrightarrow &(a + b - c)(c - a + b)(c + a - b) > 0 \end{aligned}$$

Do a, b, c là độ dài ba cạnh trong một tam giác nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 32. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \geq 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta có các nhận xét như sau:

+ Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

+ Khi thay 1 bằng $a + b + c$ vào bất đẳng thức và chuyển vế thì ta được các nhóm $\sqrt{a + bc} - a - \sqrt{bc}$; $\sqrt{b + ca} - b - \sqrt{ca}$; $\sqrt{c + ab} - c - \sqrt{ab}$. Vì vai trò a, b, c như nhau nên ta dự đoán mỗi nhóm trên không âm. Để chứng minh dự đoán trên ta có thể bình phương làm mất căn bậc hai rồi biến đổi tương đương thành tổng các bình phương.

+ Để ý giả thiết $a + b + c = 1$, khi đó ta có $\sqrt{a + bc} = \sqrt{(a + b)(a + c)}$. Dễ dàng nhận ra $\sqrt{(a + b)(a + c)} \geq a + \sqrt{bc}$. Như vậy chỉ cần áp dụng tương tự cho hai trường hợp còn lại thì bất đẳng thức được chứng minh.

Lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \geq a + b + c + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt{a + bc} - a - \sqrt{bc} \right) + \left(\sqrt{b + ca} - b - \sqrt{ca} \right) + \left(\sqrt{c + ab} - c - \sqrt{ab} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\sqrt{a + bc} - a - \sqrt{bc} \geq 0; \quad \sqrt{b + ca} - b - \sqrt{ca} \geq 0; \quad \sqrt{c + ab} - c - \sqrt{ab} \geq 0$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{a + bc} - a - \sqrt{bc} \geq 0 & \Leftrightarrow \sqrt{a + bc} \geq a + \sqrt{bc} \Leftrightarrow a + bc \geq a^2 + 2a\sqrt{bc} + bc \\ & \Leftrightarrow 1 \geq a + 2\sqrt{bc} \Leftrightarrow a + b + c \geq a + 2\sqrt{bc} \Leftrightarrow (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta được $\sqrt{b + ca} - b - \sqrt{ca} \geq 0$; $\sqrt{c + ab} - c - \sqrt{ab} \geq 0$.

Đến đây bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Cách 2: Kết hợp với giả thiết $a + b + c = 1$ ta có

$$\sqrt{a + bc} = \sqrt{(a + b)(a + c)}; \quad \sqrt{b + ca} = \sqrt{(a + b)(b + c)}; \quad \sqrt{c + ab} = \sqrt{(c + a)(b + c)}$$

Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\sqrt{(a + b)(a + c)} + \sqrt{(a + b)(b + c)} + \sqrt{(c + a)(b + c)} \geq 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{(a + b)(a + c)} & \geq a + \sqrt{bc} \Leftrightarrow a^2 + ab + bc + ca \geq a^2 + 2a\sqrt{bc} + bc \\ & \Leftrightarrow b + c \geq 2\sqrt{bc} \Leftrightarrow (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{(b + c)(a + b)} \geq b + \sqrt{ca}; \quad \sqrt{(c + a)(b + c)} \geq c + \sqrt{ab}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{(a + b)(a + c)} + \sqrt{(a + b)(b + c)} + \sqrt{(c + a)(b + c)} \geq a + b + c + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$$

Hay $\sqrt{(a + b)(a + c)} + \sqrt{(a + b)(b + c)} + \sqrt{(c + a)(b + c)} \geq 1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 33. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta có những nhận xét sau:

+ Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ và vai trò các biến là như nhau.

+ Để ý ta thấy $abc - a^2(b+c-a) = a(a-b)(a-c)$, như vậy bất đẳng thức được viết lại thành $a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(a-c)(b-c) \geq 0$, là bất đẳng thức được chứng minh ở **Ví dụ 23**.

+ Để đơn giản hóa bất đẳng thức ta có thể sử dụng cách đặt biến phụ:

$$x = b + c - a; y = c + a - b; z = a + b - c$$

Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{x(y+z)^2}{4} + \frac{y(z+x)^2}{4} + \frac{z(x+y)^2}{4} \leq \frac{3(x+y)(y+z)(z+x)}{8}$$

Chú ý đến đẳng thức $(x+y)(y+z)(z+x) = x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 + 2xyz$ ta có thể biến đổi tương đương để chứng minh bất đẳng thức trên.

Lời giải

Cách 1: Vai trò của a, b, c là như nhau nên có thể giả thiết $a \geq b \geq c \geq 0$.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & abc - a^2(b+c-a) + abc - b^2(c+a-b) + abc - c^2(a+b-c) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(a-c)(b-c) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a-b)[a(a-c) - b(b-c)] + c(a-c)(b-c) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a-b)^2(a+b-c) + c(a-c)(b-c) \geq 0 \end{aligned}$$

Vì $a \geq b \geq c \geq 0$ nên $a+b-c \geq 0$; $(a-c)(b-c) \geq 0$, suy ra bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Do đó bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b$; $c = 0$ và các hoán vị.

Cách 2: Đặt $x = b + c - a$; $y = c + a - b$; $z = a + b - c$. Khi đó ta được

$$a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{z+x}{2}; c = \frac{x+y}{2}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{x(y+z)^2}{4} + \frac{y(z+x)^2}{4} + \frac{z(x+y)^2}{4} \leq \frac{3(x+y)(y+z)(z+x)}{8}$$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên như sau

$$\begin{aligned} & \frac{x(y+z)^2}{4} + \frac{y(z+x)^2}{4} + \frac{z(x+y)^2}{4} \leq \frac{3(x+y)(y+z)(z+x)}{8} \\ \Leftrightarrow & 2(x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 + 6xyz) \leq 3(x+y)(y+z)(z+x) \\ \Leftrightarrow & 2(x+y)(y+z)(z+x) + 8xyz \leq 3(x+y)(y+z)(z+x) \\ \Leftrightarrow & 8xyz \leq (x+y)(y+z)(z+x) \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $8xyz \leq (x+y)(y+z)(z+x)$

Thật vậy, áp dụng một bất đẳng thức quen thuộc ta được

$$x + y \geq 2\sqrt{|xy|}; y + z \geq 2\sqrt{|yz|}; z + x \geq 2\sqrt{|zx|}$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được $8xyz \leq (x + y)(y + z)(z + x)$.

Do đó bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b; c = 0$ và các hoán vị.

Ví dụ 34. Cho các số thực $a, b, c \in [-1, 2]$ và $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

$$a) \quad a^2 + b^2 + c^2 \leq 6$$

$$b) \quad 2abc \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 2abc + 2$$

$$c) \quad a^2 + b^2 + c^2 \leq 8 - abc$$

Phân tích:

a) Từ điều kiện $a, b, c \in [-1, 2]$, để tạo ra a^2 ta có thể sử dụng các bất đẳng thức $(a + 1)(a - 2) \geq 0$, áp dụng tương tự và để ý đến giả thiết $a + b + c = 0$

b) Để chứng minh được bất đẳng thức ta cần làm như thế nào để vừa có thể tạo ra $a^2 + b^2 + c^2$ vừa làm xuất hiện tích abc . Để ý giả thiết $a + b + c = 0$ có thể biến đổi tương đương thành $ab + bc + ca = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$. Như vậy trong bất đẳng thức có thêm sự xuất hiện của $ab + bc + ca$. Từ điều kiện $a, b, c \in [-1, 2]$ ta cũng nên để ý đến bất đẳng thức $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 0$.

c) Cũng tương tự như câu b nhưng trong bất đẳng thức ở câu c có sự xuất hiện của biểu thức $8 - abc$ nên ta lại chú ý đến $(a - 2)(b - 2)(c - 2) \leq 0$.

Lời giải

a) Do $a, b, c \in [-1, 2]$ nên ta có $(a + 1)(a - 2) \geq 0$ hay $a^2 \leq a + 2$.

Chứng minh tương tự ta được $b^2 \leq b + 2; c^2 \leq c + 2$.

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên và kết hợp với giả thiết $a + b + c = 0$ ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq a + b + c + 6 = 6$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

b) Trước hết ta chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2abc + 2$

Do $a, b, c \in [-1, 2]$ nên ta có $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 0$

Hay $abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 \geq 0 \Leftrightarrow abc + ab + bc + ca + 1 \geq 0$

Mặt khác, vì $a + b + c = 0$ nên $(a + b + c)^2 = 0$

$$\text{Hay} \quad ab + bc + ca = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

Khi đó ta được $abc - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 2abc + 2$

Ta cần chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2abc$.

Thật vậy, vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Từ đó suy ra

$$-1 \leq c \leq \frac{a + b + c}{3} \leq 0 \Rightarrow |c| \leq 1$$

Khi đó ta được $2abc \leq 2|a| \cdot |b| \cdot |c| \leq 2|a| \cdot |b|$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 - 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2 - 2|a| \cdot |b| = (|a| + |b|)^2 + c^2 \geq 0$

Do đó ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2abc$

Kết hợp hai kết quả trên ta được bất đẳng thức cần chứng minh chứng minh.

c) Do $a, b, c \in [-1, 2]$ nên ta có $(a-2)(b-2)(c-2) \leq 0$

Hay $abc - 2(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) - 8 \leq 0 \Leftrightarrow abc - 2(ab + bc + ca) - 8 \leq 0$

Mà ta có $ab + bc + ca = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$

Nên $abc + a^2 + b^2 + c^2 - 8 \leq 0$ hay $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8 - abc$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 35. Cho các số thực $a, b, c \in [0, 2]$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$3 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$$

Lời giải

Đặt $x = a + 1$; $y = b + 1$; $z = c + 1$, khi đó ta được $x, y, z \in [-1, 1]$ và $x + y + z = 0$

Ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2(x+y+z) + 3 = x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 3 \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức có khi $x = y = z = 0$ hay $a = b = c = 1$.

Mặt khác do $x, y, z \in [-1, 1]$ nên ta có

$$\begin{aligned} (1-x)(1-y)(1-z) + (1+x)(1+y)(1+z) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2 + 2(xy + yx + zx) &\geq 0 \Leftrightarrow 2 - (x^2 + y^2 + z^2) + (x+y+z)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 &\leq 2 \end{aligned}$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$. Đẳng thức xảy ra khi $a = 2$; $b = 1$; $c = 0$ và các hoán vị.

Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta được $3 \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 36. Cho các số thực $a, b, c \in [0, 2]$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$3 \leq a^3 + b^3 + c^3 - 3(a-1)(b-1)(c-1) \leq 9$$

Lời giải

Đặt $x = a - 1$; $y = b - 1$; $z = c - 1$, khi đó ta được $x, y, z \in [-1, 1]$ và $x + y + z = 0$

Đặt $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3(a-1)(b-1)(c-1)$, khi đó P được viết lại thành

$$\begin{aligned} P &= (x+1)^3 + (y+1)^3 + (z+1)^3 - 3xyz \\ &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 3(x^2 + y^2 + z^2) + 3(x+y+z) + 3 \end{aligned}$$

Mà $x + y + z = 0$ nên ta có

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) = 0$$

Do đó $P = 3(x^2 + y^2 + z^2) + 3$

Mà ta chứng minh được $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ nên $3 \leq P \leq 9$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 37. Cho các số thực $a, b, c \in [0, 1]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \leq 2$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy

+ Với $a + b + c = 0$ thì $a = b = c = 0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Như vậy ta cần tìm cách chứng minh cho trường hợp $a + b + c > 0$

+ Từ giả thiết $a, b, c \in [0, 1]$ và trường hợp $a + b + c > 0$ dẫn đến $0 < a, b, c \leq 1$.

Khi đó để tạo ra $1 + bc$ ta nghĩ đến bất đẳng thức $(1-b)(1-c) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + bc \geq b + c$. Để ý về phải của

bất đẳng thức có thể được viết thành $\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}$, do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến chứng minh bất đẳng

thức $\frac{a}{1+bc} \leq \frac{2a}{a+b+c}$.

Lời giải

Vì $a, b, c \in [0, 1]$ nên ta có $0 \leq a, b, c \leq 1$.

+ Xét trường hợp $a + b + c = 0$ suy ra $a = b = c = 0$, khi này bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng.

+ Xét trường hợp $a + b + c > 0$, khi đó ta có

$$\begin{cases} a \leq 1 \\ (b-1)(c-1) \geq 0 \\ bc \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 1 \\ b+c \leq 1+bc \\ 0 \leq bc \end{cases} \Rightarrow 0 < a+b+c \leq 2bc+2$$

Khi đó ta có $\frac{1}{1+bc} \leq \frac{2}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{a}{1+bc} \leq \frac{2a}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự ta được $\frac{b}{1+ca} \leq \frac{2b}{a+b+c}; \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2c}{a+b+c}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = 2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1; c = 0$ và các hoán vị

Ví dụ 38. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}$$

Phân tích: Để ý từ giả thiết $a + b + c = 1$ ta có $a + bc = (a+b)(a+c)$, khi đó bất đẳng thức có thể viết lại thành

$$\frac{a(a+b+c)-bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b(a+b+c)-ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{c(a+b+c)-ab}{(c+a)(c+b)} \leq \frac{3}{2}$$

Đến đây ta quy đồng hai vế và biến đổi tương đương bất đẳng thức, chú ý đến đẳng thức

$$(a+b)(b+c)(c+a) = ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 + 2abc$$

Lời giải

Áp dụng giả thiết $a + b + c = 1$ ta được

$$a + bc = a(a + b + c) + bc = (a + b)(a + c)$$

$$\text{Áp dụng tương tự ta được } b + ca = (b + c)(a + b); c + ab = (c + a)(b + c)$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{a(a + b + c) - bc}{(a + b)(a + c)} + \frac{b(a + b + c) - ca}{(b + c)(b + a)} + \frac{c(a + b + c) - ab}{(c + a)(c + b)} \leq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & (a^2 + ab + ac - bc)(b + c) + (b^2 + ba + bc - ca)(c + a) + \\ & (c^2 + cb + ca - ab)(a + b) \leq \frac{3}{2}(a + b)(b + c)(c + a) \\ \Leftrightarrow & ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 \geq 6abc \\ \Leftrightarrow & a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Nhận xét: Trong bất đẳng thức trên, có một kinh nghiệm nên nhớ khi tìm lời giải đó là tìm cách đổi chiều bất đẳng thức. Cách đơn giản nhất là nhân hai vế với -1 khi đó ta được:

$$\frac{bc - a}{a + bc} + \frac{ca - b}{b + ca} + \frac{ab - c}{c + ab} \geq -\frac{3}{2}$$

Bây giờ ta chưa biến đổi ngay mà tìm cách triệt tiêu các đại lượng âm trong các biểu thức trước và đổi dấu về phải. Để ý ta thấy $a + bc + bc - a = 2bc$, do vậy chỉ cần cộng 1 vào mỗi phân số rồi quy đồng là ta triệt tiêu được các đại lượng âm, không những vậy ta còn đổi được dấu bên vế phải, cụ thể là

$$1 + \frac{bc - a}{a + bc} + 1 + \frac{ca - b}{b + ca} + 1 + \frac{ab - c}{c + ab} \geq 3 - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2bc}{a + bc} + \frac{2ca}{b + ca} + \frac{2ab}{c + ab} \geq \frac{3}{2}$$

Đến đây ta sẽ tìm thấy các hướng khác để xử lý bài toán.

Ví dụ 39. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}$$

Phân tích: Bất đẳng thức cần chứng minh là bất đẳng thức Neibizt nổi tiếng, hiện nay có rất nhiều cách chứng minh cho bất đẳng thức này. Để chứng minh bằng phương pháp biến đổi tương đương ta có các ý tưởng như sau

+ Thứ nhất ta xét hiệu hai vế và chú ý $\frac{a}{b + c} - \frac{1}{2} = \frac{a - b}{2(b + c)} + \frac{a - c}{2(b + c)}$, khi đó ta có 6 phân thức.

Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$, nên ta ghép hai phân thức làm một nhóm sao cho có thể phân tích được thành bình phương của hiệu hai trong ba số a, b, c . Để ý là

$$\frac{a - b}{b + c} - \frac{a - b}{c + a} = \frac{(a - b)^2}{(b + c)(c + a)}.$$

+ Thứ hai ta để ý đến biến đổi $\frac{a}{b + c} + 1 = \frac{a + b + c}{b + c}$. Do đó ta cộng vào hai vế của bất đẳng thức với 3, thực hiện biến đổi như trên ta được được bất đẳng thức về dạng như sau $(2a + 2b + 2c) \left(\frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} + \frac{1}{a + b} \right) \geq 9$, đến đây ta có thể đơn giản hóa bất đẳng thức bằng việc đặt biến phụ $x = b + c; y = c + a; z = a + b$.

+ Thứ ba là ta tiến hành đặt biến phụ $x = b + c$; $y = c + a$; $z = a + b$ ngay từ đầu, khi đó ta được

$$a = \frac{y + z - x}{2}; b = \frac{z + x - y}{2}; c = \frac{x + y - z}{2} \text{ và bất đẳng thức cần chứng minh thu được ở đây là}$$

$$\frac{y + z - x}{x} + \frac{z + x - y}{y} + \frac{x + y - z}{z} \geq 3 \text{ sẽ chứng minh dễ dàng hơn.}$$

Lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b+c} - \frac{1}{2} + \frac{b}{c+a} - \frac{1}{2} + \frac{c}{a+b} - \frac{1}{2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{a-b}{b+c} + \frac{a-c}{b+c} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{b-a}{c+a} + \frac{c-a}{a+b} + \frac{c-b}{a+b} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{a-b}{b+c} - \frac{a-b}{c+a} \right) + \left(\frac{b-c}{c+a} - \frac{b-c}{a+b} \right) + \left(\frac{c-a}{a+b} - \frac{c-a}{b+c} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} + \frac{(b-c)^2}{(c+a)(a+b)} + \frac{(c-b)^2}{(a+b)(b+c)} \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2} + \frac{b}{c+a} + \frac{1}{2} + \frac{c}{a+b} + \frac{1}{2} \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow (2a+2b+2c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 9$$

Đặt $x = b + c$; $y = c + a$; $z = a + b$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} & (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 6 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2 \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} - 2 \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{2xy} + \frac{(y-z)^2}{2yz} + \frac{(z-x)^2}{2zx} \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 3: Đặt $x = b + c$; $y = c + a$; $z = a + b$, khi đó ta được

$$a = \frac{y + z - x}{2}; b = \frac{z + x - y}{2}; c = \frac{x + y - z}{2}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{y + z - x}{x} + \frac{z + x - y}{y} + \frac{x + y - z}{z} \geq 3 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2 \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} - 2 \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{2xy} + \frac{(y-z)^2}{2yz} + \frac{(z-x)^2}{2zx} \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 40. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $6a + 2b + 3c = 11$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2b + 3c + 16}{6a + 1} + \frac{6a + 3c + 16}{2b + 1} + \frac{6a + 2b + 16}{3c + 1} \geq 15$$

Phân tích: Quan sát giả thiết và bất đẳng thức cần chứng minh ta nghĩ ngay đến việc đổi biến $x = 6a + 1$; $y = 2b + 1$; $z = 3c + 1$, chính việc đổi biến này ta thu được kết quả không thể hợp lý hơn là $x + y + z = 14$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + 14\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 15$$

Đến đây việc chứng minh bất đẳng thức hết sức đơn giản.

Lời giải

Đặt $x = 6a + 1$; $y = 2b + 1$; $z = 3c + 1$, suy ra $x + y + z = 14$.

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\begin{aligned} & \frac{y+z+14}{x} + \frac{z+x+14}{y} + \frac{x+y+14}{z} \geq 15 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + 14\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 15 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 15 \\ \Leftrightarrow & 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 2\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + 2\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + 3 \geq 15 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} - 2\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{2xy} + \frac{(y-z)^2}{2yz} + \frac{(z-x)^2}{2zx} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{14}{3}$ hay $a = \frac{11}{18}$; $b = \frac{11}{6}$; $c = \frac{11}{9}$.

Ví dụ 41. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$ab(a+b-2c) + bc(b+c-2a) + ca(c+a-2b) \geq 0$$

Phân tích: Với bất đẳng thức trên ta có các ý tưởng chứng minh sau:

+ Thứ nhất là ta khai triển các tích và nhóm các hạng tử với nhau một cách hợp lý, chú ý là $ab^2 + ac^2 - 2abc = a(b^2 + c^2 - 2bc) = a(b-c)^2$.

+ Thứ hai là vì a là số thực dương nên ta có $\frac{ab(a+b-2c)}{abc} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 2$, áp dụng tương tự ta biến đổi được bất đẳng thức về dạng đơn giản.

Lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & a^2b + ab^2 - 2abc + b^2c + bc^2 - 2abc + c^2a + ca^2 - 2abc \geq 0 \\ \Leftrightarrow & a(b^2 + c^2 - 2bc) + b(c^2 + a^2 - 2ca) + c(a^2 + b^2 - 2ab) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{ab(a+b-2c)}{abc} + \frac{bc(b+c-2a)}{abc} + \frac{ca(c+a-2b)}{abc} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{a+b-2c}{c} + \frac{b+c-2a}{a} + \frac{c+a-2b}{b} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 6 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 42. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} + \frac{9(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 33$$

Phân tích: Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Khi đó ta có được kết quả đẹp là $\frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} = 6; \frac{9(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 27$, do đó ta rất tự nhiên ta nghĩ đến xét hiệu hai vế của bất đẳng thức. Hơn nữa ta lại có hai kết quả sau

$$2(a^3 + b^3 + c^3) - 6abc = 2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$27(a^2 + b^2 + c^2) - 9(a + b + c)^2 = 18(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

Đến đây càng thấy yên tâm là đã đi đúng hướng.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} - 6 + \frac{9(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} - 27 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{abc} - \frac{18(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \left(\frac{a + b + c}{abc} - \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right] \left[(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - 9abc \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Do $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} & (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - 9abc \geq 0 \\ \Leftrightarrow & a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) - 6abc \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này đúng vì ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{(a + b + c) \left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right]}{2} \geq 0$$

$$\text{Và } a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) - 6abc = a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 43. Cho a, b, c là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c)^4 + (b + c - a)^4 + (c + a - b)^4 + (a + b - c)^4 \leq 28(a^4 + b^4 + c^4)$$

Phân tích: Bài toán gợi cho ta hằng đẳng thức:

$$(x - y)^4 + (x + y)^4 = 2(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} (a + b + c)^4 + (b + c - a)^4 &= 2 \left[(b + c)^4 + 6a^2(b + c)^2 + a^4 \right] \\ (c + a - b)^4 + (a + b - c)^4 &= 2 \left[(b - c)^4 + 6a^2(b - c)^2 + a^4 \right] \\ (b + c)^4 + (b - c)^4 &= 2(b^4 + 6b^2c^2 + c^4) \end{aligned}$$

Đề ý đến bất đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được $(x - y)^4 + (x + y)^4 = 2(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)$

Áp dụng hằng đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned}(a + b + c)^4 + (b + c - a)^4 &= 2 \left[(b + c)^4 + 6a^2(b + c)^2 + a^4 \right] \\(c + a - b)^4 + (a + b - c)^4 &= 2 \left[(b - c)^4 + 6a^2(b - c)^2 + a^4 \right] \\(b + c)^4 + (b - c)^4 &= 2(b^4 + 6b^2c^2 + c^4)\end{aligned}$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned}&(a + b + c)^4 + (b + c - a)^4 + (c + a - b)^4 + (a + b - c)^4 \\&= 4(a^4 + b^4 + c^4) + 24b^2c^2 + 12a^2 \left[(b + c)^2 + (b - c)^2 \right] \\&= 4(a^4 + b^4 + c^4) + 24(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\end{aligned}$$

Như vậy ta cần chứng minh

$$\begin{aligned}4(a^4 + b^4 + c^4) + 24(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) &\leq 28(a^4 + b^4 + c^4) \\ \Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &\leq a^4 + b^4 + c^4\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 44. Cho a, b, c là các số thực khác 1 thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(a-1)^2} + \frac{b^2}{(b-1)^2} + \frac{c^2}{(c-1)^2} \geq 1$$

Phân tích: Từ giả thiết $abc = 1$ ta nghĩ đến cách đặt biến phụ $a = \frac{1}{x}$; $b = \frac{1}{y}$; $c = \frac{1}{z}$. Khi đó bất đẳng

thức cần chứng minh trở thành $\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-y)^2} + \frac{1}{(1-z)^2} \geq 1$.

Sử dụng các biến đổi cơ bản và giả thiết $xyz = 1$ ta có các kết quả sau

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z} &= 1 + \frac{3 - (x + y + z)}{xy + yz + zx - (x + y + z)} \\ \frac{1}{(1-x)(1-y)} + \frac{1}{(1-y)(1-z)} + \frac{1}{(1-z)(1-x)} &= \frac{3 - (x + y + z)}{xy + yz + zx - (x + y + z)}\end{aligned}$$

Đến đây ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z} \right)^2 - 2 \left[\frac{1}{(1-x)(1-y)} + \frac{1}{(1-y)(1-z)} + \frac{1}{(1-z)(1-x)} \right] \geq 1$$

Và sử dụng các kết quả trên.

Lời giải

Vì $abc = 1$ nên $a, b, c \neq 0$. Đặt $a = \frac{1}{x}$; $b = \frac{1}{y}$; $c = \frac{1}{z}$, khi đó $xyz = 1$ và $x, y, z \neq 1$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-y)^2} + \frac{1}{(1-z)^2} \geq 1$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z} \right)^2 - 2 \left[\frac{1}{(1-x)(1-y)} + \frac{1}{(1-y)(1-z)} + \frac{1}{(1-z)(1-x)} \right] \geq 1 \\
& \Leftrightarrow \left[\frac{3 - 2(x+y+z) + xy + yz + zx}{xy + yz + zx - (x+y+z)} \right]^2 - 2 \left[\frac{3 - (x+y+z)}{xy + yz + zx - (x+y+z)} \right] \geq 1 \\
& \Leftrightarrow \left[1 + \frac{3 - (x+y+z)}{xy + yz + zx - (x+y+z)} \right]^2 - 2 \left[1 + \frac{3 - (x+y+z)}{xy + yz + zx - (x+y+z)} \right] + 1 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \left[1 + \frac{3 - (x+y+z)}{xy + yz + zx - (x+y+z)} \right]^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 45. Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} + \frac{(b+c)^2}{(b-c)^2} + \frac{(c+a)^2}{(c-a)^2} \geq 2$$

Phân tích: Quan sát kỹ bất đẳng thức cần chứng minh ta có các nhận xét như sau

+ Để ý ta thấy $\frac{a+b}{a-b} + 1 = \frac{2a}{a-b}$, $\frac{a+b}{a-b} - 1 = \frac{2b}{a-b}$, do đó ta có kết quả sau

$$\left(\frac{a+b}{a-b} + 1 \right) \left(\frac{b+c}{b-c} + 1 \right) \left(\frac{c+a}{c-a} + 1 \right) = \left(\frac{a+b}{a-b} - 1 \right) \left(\frac{b+c}{b-c} - 1 \right) \left(\frac{c+a}{c-a} - 1 \right)$$

Để đơn giản hóa bất đẳng thức ta có thể đặt $x = \frac{a+b}{a-b}$; $y = \frac{b+c}{b-c}$; $z = \frac{c+a}{c-a}$, khi đó ta được $(x+1)(y+1)(z+1) = (x-1)(y-1)(z-1)$ hay $xy + yz + zx = -1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại là $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2$. Đến đây ta có thể chứng minh được bất đẳng thức

+ Với cách đặt $x = \frac{a+b}{a-b}$; $y = \frac{b+c}{b-c}$ như trên ta có được một kết quả khác như sau

$$\frac{xy+1}{x+y} = \left(\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{b+c}{b-c} + 1 \right) : \left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} \right) = \frac{a+c}{a-c}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{xy+1}{x+y} \right)^2 \geq 2 \Leftrightarrow (x+y)^2 + \left(\frac{xy+1}{x+y} \right)^2 - 2xy \geq 2$$

Đến đây ta cũng có thể chứng minh được bất đẳng thức.

Lời giải

Cách 1: Đặt $x = \frac{a+b}{a-b}$; $y = \frac{b+c}{b-c}$; $z = \frac{c+a}{c-a}$.

Khi đó ta có $(x+1)(y+1)(z+1) = \frac{8abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

Và $(x-1)(y-1)(z-1) = \frac{8abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

Suy ra

$$\begin{aligned}
& (x+1)(y+1)(z+1) = (x-1)(y-1)(z-1) \\
& \Leftrightarrow 2(xy + yz + zx) = -2 \Leftrightarrow xy + yz + zx = -1
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq 0 \Leftrightarrow (x + y + z)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x + y + z = 0$ hay một trong ba số a, b, c bằng 0.

Cách 2: Đặt $x = \frac{a+b}{a-b}$; $y = \frac{b+c}{b-c}$. Khi đó ta được

$$\begin{aligned} \frac{xy+1}{x+y} &= \left(\frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{b+c}{b-c} + 1 \right) : \left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{b+c}{b-c} \right) \\ &= \frac{(a+b)(b+c) + (a-b)(b-c)}{(a-b)(b-c)} : \frac{(a+b)(b-c) + (a-b)(b+c)}{(a-b)(b-c)} \\ &= \frac{2ab + 2bc}{2ab - 2bc} = \frac{a+c}{a-c} \end{aligned}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{xy+1}{x+y} \right)^2 \geq 2 \Leftrightarrow (x+y)^2 + \left(\frac{xy+1}{x+y} \right)^2 - 2xy \geq 2$$

Để thấy $(x+y)^2 + \left(\frac{xy+1}{x+y} \right)^2 \geq 2(xy+1)$

Do đó ta được $(x+y)^2 + \left(\frac{xy+1}{x+y} \right)^2 - 2xy \geq 2(xy+1) - 2xy = 2$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi một trong ba số a, b, c bằng 0.

Ví dụ 46. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c} \leq \frac{3}{4}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta có thể đưa ra các ý tưởng sau

+ Thứ nhất ta để ý đến biến đổi sau $1 - \frac{a}{2a+b+c} = \frac{a+b+c}{2a+b+c}$. Áp dụng tương tự ta có thể đổi chiều bất đẳng thức. Đến đây để đơn giản hóa bất đẳng thức ta có thể đặt biến phụ $x = 2a + b + c$; $y = a + 2b + c$; $z = a + b + 2c$.

+ Đặt biến phụ $x = 2a + b + c$; $y = a + 2b + c$; $z = a + b + 2c$ ngay từ đầu và khi đó ta được bất đẳng thức $\frac{3x-y-z}{4x} + \frac{3y-x-z}{4y} + \frac{3z-x-y}{4z} \leq \frac{3}{4}$.

+ Đặt biến phụ $x = b + c$; $y = a + c$; $z = a + b$ và viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau $\frac{y+z-x}{2(y+z)} + \frac{z+x-y}{2(z+x)} + \frac{x+y-z}{2(x+y)} \leq \frac{3}{4}$.

Với các bất đẳng thức ở cả ba ý tưởng trên ta có thể chứng minh tiếp bằng biến đổi tương đương.

Lời giải

Cách 1: Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh

$$\begin{aligned} &1 - \frac{a}{2a+b+c} + 1 - \frac{b}{a+2b+c} + 1 - \frac{c}{a+b+2c} \geq \frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow &\frac{a+b+c}{2a+b+c} + \frac{a+b+c}{a+2b+c} + \frac{a+b+c}{a+b+2c} \geq \frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow &4(a+b+c) \left(\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \right) \geq 9 \end{aligned}$$

Đặt $x = 2a + b + c$; $y = a + 2b + c$; $z = a + b + 2c \Rightarrow x + y + z = 4(a + b + c)$

Khi đó bất đẳng thức trên trở thành

$$\begin{aligned} (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) &\geq 9 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2 \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} - 2 \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x - y)^2}{2xy} + \frac{(y - z)^2}{2yz} + \frac{(z - x)^2}{2zx} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Đặt $x = 2a + b + c$; $y = a + 2b + c$; $z = a + b + 2c$

Suy ra $a = \frac{3x - y - z}{4}$; $b = \frac{3y - x - z}{4}$; $c = \frac{3z - x - y}{4}$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\begin{aligned} \frac{3x - y - z}{4x} + \frac{3y - x - z}{4y} + \frac{3z - x - y}{4z} &\leq \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) &\geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 6 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2 \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} - 2 \right) &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - y)^2}{2xy} + \frac{(y - z)^2}{2yz} + \frac{(z - x)^2}{2zx} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 3: Đặt $x = b + c$; $y = a + c$; $z = a + b$

Suy ra $a = \frac{y + z - x}{2}$; $b = \frac{x + z - y}{2}$; $c = \frac{x + y - z}{2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{y + z - x}{2(y + z)} + \frac{z + x - y}{2(z + x)} + \frac{x + y - z}{2(x + y)} \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{y + z} + \frac{y}{z + x} + \frac{z}{x + y} \geq \frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức cuối cùng là bất đẳng thức Neibizt.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 47. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{b + c}{a^2 + bc} + \frac{c + a}{b^2 + ca} + \frac{a + b}{c^2 + ab}$$

Phân tích: Bất đẳng thức cần chứng minh thực sự đã gây ra rất nhiều khó khăn khi giải nó. Khi thực hiện biến đổi tương đương thì ý nghĩ đầu tiên là chuyển về và xét các hiệu theo nhóm, nhưng ta cần ghép các nhóm như thế nào cho phù hợp. Để ý một công cụ rất hiệu quả trong lúc bế tắc đó là vai trò các biến như nhau nên có thể sắp thứ tự các biến. Cho nên ta ghép đại các nhóm như sau

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{a} - \frac{a + b}{c^2 + ab} \right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{b + c}{a^2 + bc} \right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{c + a}{b^2 + ca} \right) \\ &= \frac{(c - a)^2 (c + a)(bc + ab - ab)}{ca(a^2 + bc)(c^2 + ab)} + \frac{(b - c)(b - a)}{b^3 + abc} \end{aligned}$$

Đến đây thì hay rồi, chỉ cần chọn b là số lớn nhất trong ba số a, b, c là bài toán coi như xong. Nói thật nếu khi ghép theo cách khác và được kết quả khác thì ta có thể sắp thứ tự các biến theo kiểu khác cũng không sao cả.

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức như sau

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{a} - \frac{a+b}{c^2+ab} \right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{b+c}{a^2+bc} \right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{c+a}{b^2+ca} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (c^2 - a^2) \left[\frac{1}{a(c^2+ab)} - \frac{1}{c(a^2+bc)} \right] + \frac{(b-c)(b-a)}{b^3+abc} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(c-a)^2(c+a)(bc+ab-ab)}{ca(a^2+bc)(c^2+ab)} + \frac{(b-c)(b-a)}{b^3+abc} \geq 0 \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử b là số lớn nhất trong ba số a, b, c khi đó ta được

$$bc + ab - ca \geq 0; \quad \frac{(b-c)(b-a)}{b^3+abc} \geq 0$$

Do vậy bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 48. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

Phân tích: Bất đẳng thức cần chứng minh có hình thức công kênh và phức tạp, ở đây ta cũng có dấu bằng xảy ra tại $a = b = c$ nên khi biến đổi tương đương ta thường nghĩ đến các đại lượng $(a-b)^2$; $(b-c)^2$; $(c-a)^2$. Ta để ý đến việc xét các hiệu

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} - \frac{a}{b+c}; \quad \frac{b^2}{a^2+c^2} - \frac{b}{c+a}; \quad \frac{c^2}{a^2+b^2} - \frac{c}{a+b}$$

Kết quả thu được là

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b^2+c^2} - \frac{a}{b+c} &= \frac{ab(a-b)}{(b^2+c^2)(b+c)} - \frac{ac(c-a)}{(b^2+c^2)(b+c)} \\ \frac{b^2}{a^2+c^2} - \frac{b}{c+a} &= \frac{bc(b-c)}{(c^2+a^2)(c+a)} - \frac{ab(a-b)}{(c^2+a^2)(c+a)} \\ \frac{c^2}{a^2+b^2} - \frac{c}{a+b} &= \frac{ca(c-a)}{(a^2+b^2)(a+b)} - \frac{bc(b-c)}{(a^2+b^2)(a+b)} \end{aligned}$$

Khi đó có 6 phân thức rất phức tạp. Đến đây ta chọn các biểu thức cùng tử để ghép cặp vì ghép các phân thức cùng mẫu lại không cho ta kết quả tốt. Chẳng hạn

$$\frac{ab(a-b)}{(b^2+c^2)(b+c)} - \frac{ab(a-b)}{(c^2+a^2)(c+a)}$$

Với các biểu thức như trên ta có thể biến đổi tiếp hoặc tìm cách sắp thứ tự biến.

Lời giải

Xét hiệu hai vế ta được bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b^2 + c^2} - \frac{a}{b + c} + \frac{b^2}{a^2 + c^2} - \frac{b}{c + a} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} - \frac{c}{a + b} \geq 0$$

Đặt $A = \frac{a^2}{b^2 + c^2} - \frac{a}{b + c}$; $B = \frac{b^2}{a^2 + c^2} - \frac{b}{c + a}$; $C = \frac{c^2}{a^2 + b^2} - \frac{c}{a + b}$

Ta có

$$A = \frac{a^2}{b^2 + c^2} - \frac{a}{b + c} = \frac{a^2(b + c) - a(b^2 + c^2)}{(b^2 + c^2)(b + c)} = \frac{ab(a - b)}{(b^2 + c^2)(b + c)} - \frac{ac(c - a)}{(b^2 + c^2)(b + c)}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$B = \frac{bc(b - c)}{(c^2 + a^2)(c + a)} - \frac{ab(a - b)}{(c^2 + a^2)(c + a)}; C = \frac{ca(c - a)}{(a^2 + b^2)(a + b)} - \frac{bc(b - c)}{(a^2 + b^2)(a + b)}$$

Khi bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{ab(a - b)}{(b^2 + c^2)(b + c)} - \frac{ac(c - a)}{(b^2 + c^2)(b + c)} + \frac{bc(b - c)}{(c^2 + a^2)(c + a)} - \frac{ab(a - b)}{(c^2 + a^2)(c + a)} \\ & + \frac{ca(c - a)}{(a^2 + b^2)(a + b)} - \frac{bc(b - c)}{(a^2 + b^2)(a + b)} \geq 0 \end{aligned}$$

Đến đây ta có hai hướng chứng minh bất đẳng thức trên

+ Hướng 1: Xét các hiệu sau

$$\frac{ab(a - b)}{(b^2 + c^2)(b + c)} - \frac{ab(a - b)}{(c^2 + a^2)(c + a)} = \frac{ab(a - b)^2(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)}{(b^2 + c^2)(b + c)(c^2 + a^2)(c + a)} \geq 0$$

$$\frac{bc(b - c)}{(c^2 + a^2)(c + a)} - \frac{bc(b - c)}{(a^2 + b^2)(a + b)} = \frac{bc(b - c)^2(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)}{(c^2 + a^2)(c + a)(a^2 + b^2)(a + b)} \geq 0$$

$$\frac{ca(c - a)}{(a^2 + b^2)(a + b)} - \frac{ac(c - a)}{(b^2 + c^2)(b + c)} = \frac{ca(c - a)^2(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)}{(a^2 + b^2)(a + b)(b^2 + c^2)(b + c)} \geq 0$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

+ Hướng 2: Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \geq b \geq c > 0$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & \frac{ab(a - b)}{(b^2 + c^2)(b + c)} - \frac{ab(a - b)}{(c^2 + a^2)(c + a)} = (a - b) \left[\frac{ab}{(b^2 + c^2)(b + c)} - \frac{ab}{(c^2 + a^2)(c + a)} \right] \geq 0 \\ & \frac{bc(b - c)}{(c^2 + a^2)(c + a)} - \frac{bc(b - c)}{(a^2 + b^2)(a + b)} = (b - c) \left[\frac{bc}{(c^2 + a^2)(c + a)} - \frac{bc}{(a^2 + b^2)(a + b)} \right] \geq 0 \\ & \frac{ca(c - a)}{(a^2 + b^2)(a + b)} - \frac{ac(c - a)}{(b^2 + c^2)(b + c)} = (a - c) \left[\frac{ca}{(b^2 + c^2)(b + c)} - \frac{ca}{(a^2 + b^2)(a + b)} \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Một số bài toán khác

Ví dụ 49. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{b} - 2a + b + \frac{b^2}{c} - 2b + c + \frac{c^2}{a} - 2c + a \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}} - \frac{a + b + c}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} - \frac{b+c}{2} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}} - \frac{c+a}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \geq \frac{(a-b)^2}{2\sqrt{2(a^2 + b^2)} + 2(a+b)} \\ & + \frac{(b-c)^2}{2\sqrt{2(b^2 + c^2)} + 2(b+c)} + \frac{(c-a)^2}{2\sqrt{2(c^2 + a^2)} + 2(c+a)} \\ \Leftrightarrow & A(a-b)^2 + B(b-c)^2 + C(c-a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Với

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{b} - \frac{1}{2\sqrt{2(a^2 + b^2)} + 2(a+b)} \\ B &= \frac{1}{c} - \frac{1}{2\sqrt{2(b^2 + c^2)} + 2(b+c)} \\ C &= \frac{1}{a} - \frac{1}{2\sqrt{2(c^2 + a^2)} + 2(c+a)} \end{aligned}$$

Chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $A, B, C \geq 0$. Thật vậy

$$A = \frac{1}{b} - \frac{1}{2\sqrt{2(a^2 + b^2)} + 2(a+b)} = \frac{2\sqrt{2(a^2 + b^2)} + 2a + b}{2\sqrt{2(a^2 + b^2)} + 2(a+b)} > 0$$

Hoàn toàn tương tự ta có $B, C \geq 0$. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 50. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc} + \sqrt{c^2 + a^2 - ca}$$

Lời giải

Nhận thấy

$$\frac{a^2}{b} - 2a + b = \frac{(a-b)^2}{b} \quad \text{và} \quad \sqrt{a^2 - ab + b^2} - \frac{a+b}{2} = \frac{3(a-b)^2}{4\sqrt{a^2 - ab + b^2} + 2a + 2b}$$

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \geq \frac{3(a-b)^2}{4\sqrt{a^2+b^2-2ab}+2(a+b)} + \frac{3(b-c)^2}{4\sqrt{b^2+c^2-2bc}+2(b+c)} + \frac{3(c-a)^2}{4\sqrt{c^2+a^2-2ca}+2(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow A(a-b)^2 + B(b-c)^2 + C(c-a)^2 \geq 0$$

Với

$$A = \frac{1}{b} - \frac{3}{4\sqrt{a^2+b^2-2ab}+2(a+b)}$$

$$B = \frac{1}{c} - \frac{3}{4\sqrt{b^2+c^2-2bc}+2(b+c)}$$

$$C = \frac{1}{a} - \frac{3}{4\sqrt{c^2+a^2-2ca}+2(c+a)}$$

Chúng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $A, B, C \geq 0$. Thật vậy

$$A = \frac{1}{b} - \frac{3}{4\sqrt{a^2+b^2-2ab}+2(a+b)} = \frac{4\sqrt{a^2+b^2-2ab}+2a+b}{4\sqrt{a^2+b^2-2ab}+2(a+b)} > 0$$

Hoàn toàn tương tự ta có $B, C \geq 0$. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Nhận xét: Hai bất đẳng thức trên ngoài phép biến đổi tương đương ta còn có thể chứng minh bằng nhiều cách khác nhau. Lời giải các cách khác được trình bày trong chủ đề “**Tuyển chọn các bất đẳng thức hay và khó**”.

Ví dụ 51. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}$$

Lời giải

Ta có
$$\frac{a^2-b^2}{a+b} + \frac{b^2-c^2}{b+c} + \frac{c^2-a^2}{c+a} = a-b+b-c+c-a=0$$

Do đó
$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} = \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a}$$

Khi đó ta cần chứng minh
$$\frac{2a^2}{b+c} + \frac{2b^2}{c+a} + \frac{2c^2}{a+b} \geq \frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{2a^2-b^2+c^2}{b+c} + \frac{2b^2-c^2+a^2}{c+a} + \frac{2c^2-a^2+b^2}{a+b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(a+b)}{(a+c)(b+c)} + \frac{(b-c)^2(b+c)}{(a+b)(a+c)} + \frac{(c-a)^2(c+a)}{(a+b)(b+c)} \geq 0$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 52. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-2ab+b^2} + \frac{b^2+c^2}{b^2-2bc+c^2} + \frac{c^2+a^2}{c^2-2ca+a^2} \geq \frac{5}{2}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{(a-b)^2} + \frac{(b+c)^2 + (b-c)^2}{(b-c)^2} + \frac{(c+a)^2 + (c-a)^2}{(c-a)^2} \geq 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} + \frac{(b+c)^2}{(b-c)^2} + \frac{(c+a)^2}{(c-a)^2} \geq 2$$

Đặt $x = \frac{a+b}{a-b}$; $y = \frac{b+c}{b-c}$; $z = \frac{c+a}{c-a}$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2$$

Ta có

$$\begin{aligned} xy + yz + zx &= \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{b+c}{b-c} + \frac{b+c}{b-c} \cdot \frac{c+a}{c-a} + \frac{c+a}{c-a} \cdot \frac{a+b}{a-b} \\ &= \frac{(a+b)(b+c)(c-a) + (b+c)(c+a)(a-b) + (c+a)(a+b)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -1 \end{aligned}$$

Mà $(x+y+z)^2 \geq 0$, do vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq -2(xy + yz + zx) = 2$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 53. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{b^2 + c^2}{b+c} + \frac{c^2 + a^2}{c+a} \leq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a+b+c}$$

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức như sau

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{b^2 + c^2}{b+c} + \frac{c^2 + a^2}{c+a} &\leq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a+b+c} \\ \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{c(a^2 + b^2)}{a+b} + \frac{a(b^2 + c^2)}{b+c} + \frac{b(c^2 + a^2)}{c+a} &\leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \\ \Leftrightarrow \frac{c[(a+b)^2 - 2ab]}{a+b} + \frac{a[(b+c)^2 - 2bc]}{b+c} + \frac{b[(c+a)^2 - 2ca]}{c+a} &\leq a^2 + b^2 + c^2 \\ \Leftrightarrow 2(ab + bc + ca) &\leq a^2 + b^2 + c^2 + abc \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức dạng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$ ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c}$$

Ta cần chỉ ra được $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab + bc + ca)$, bất đẳng thức này tương đương với

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a(b+c) + b(c+a) + c(a+b).$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử a là số lớn nhất trong ba số a, b, c . Khi đó ta có

$$(a-b)^2(a+b-c) + c(a-c)(b-c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)$$

Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 54. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} + \frac{5a^3 - c^3}{ca - 3a^2} \leq a + b + c$$

Lời giải

Cách 1: Ta sẽ chứng minh $\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \leq 2b - a$ với a, b là các số thực dương.

Thật vậy, biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$5b^3 - a^3 \leq (2b - a)(ab + 3b^2) \Leftrightarrow 5b^3 - a^3 \leq 2ab^2 + 6b^3 - a^2b - 3ab^2$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng, do đó bất đẳng thức trên được chứng minh.

Chứng minh tương tự ta được $\frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} \leq 2c - b$; $\frac{5a^3 - c^3}{ca - 3a^2} \leq 2a - c$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} + \frac{5a^3 - c^3}{ca - 3a^2} \leq a + b + c$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Ta có

$$a^3 - 5b^3 + 2b(ab + 3b^2) = a^3 + b^3 + 2ab^2$$

$$= (a^3 + ab^2) + (b^3 + a^2b) + 2ab^2 - (a^2b + ab^2)$$

$$\geq 2a^2b + 2ab^2 + 2ab^2 - (a^2b + ab^2) = a(ab + 3b^2)$$

Do đó ta có $\frac{a^3 - 5b^3}{ab + 3b^2} + 2b \geq a$ hay ta được $\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \leq 2b - a$

Áp dụng tương tự ta được $\frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} \leq 2c - b$; $\frac{5a^3 - c^3}{ca - 3a^2} \leq 2a - c$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} + \frac{5a^3 - c^3}{ca - 3a^2} \leq a + b + c$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét: Trong hai cách chứng minh trên, mục đích chung đều là đi chứng minh bất đẳng thức

$\frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} \leq 2b - a$, nhưng vấn đề đặt ra là làm thế nào để tìm ra được đại lượng $2b - a$. Câu trả lời sẽ được trình bày trong phụ lục “**Phương pháp hệ số bất định trong chứng minh bất đẳng thức**”.

Ví dụ 55. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 2$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq 9$$

Lời giải

Cách 1: Đặt $A = a^3 + b^3 + c^3$ và kết hợp với giả thiết của bài toán ta được

$$A = a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a) \\ = 27 - 3(3 - c)(3 - a)(3 - b) = 27 - 9(ab + bc + ca) + 3abc$$

Mặt khác, do $0 \leq a, b, c \leq 2$ nên $(2 - a)(2 - b)(2 - c) \geq 0$ hay

$$8 - 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca) - abc \geq 0 \\ \Leftrightarrow 2(ab + bc + ca) - abc \geq 4(a + b + c) - 8 = 4 \\ \Leftrightarrow 2(ab + bc + ca) \geq abc + 4$$

Khi đó ta được

$$2A = 54 - 9.2(ab + bc + ca) + 6abc \leq 54 - 9.(abc + 4) + 3abc = 18 - 6abc \leq 18$$

Suy ra $A \leq 9$, do đó ta được bất đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 \leq 9$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} abc = 0 \\ 2(ab + bc + ca) = 4 \\ a + b + c = 3 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a = 2; b = 1; c = 0$ và các hoán vị của nó.

Cách 2: Không mất tính tổng quát, ta giả sử a là số lớn nhất. Khi đó ta được

$$3 = a + b + c \leq 3a, \text{ suy ra } 1 \leq a \leq 2. \text{ Do đó ta được } (a - 1)(a - 2) \leq 0$$

Ta có

$$A = a^3 + b^3 + c^3 \leq a^3 + b^3 + c^3 + 3bc(b + c) = a^3 + (b + c)^3 = a^3 + (3 - a)^3 = 9 + (a - 1)(a - 2) \leq 9$$

Hay ta được bất đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 \leq 9$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2; b = 1; c = 0$ và các hoán vị của nó.

Chủ đề 2

SỬ DỤNG CÁC TÍNH CHẤT CỦA TỈ SỐ, TÍNH CHẤT GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI VÀ TÍNH CHẤT CỦA TAM THỨC BẬC HAI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Một số tính chất của tỉ số

+ Với các số thực dương a, b bất kì, ta luôn có $a \geq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$

+ Với các số thực dương a, b, c, d bất kì, ta có:

- Nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

- Nếu $\frac{a}{b} > 1$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$

- Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

2. Một số tính chất của giá trị tuyệt đối trong bất đẳng thức

+ $|a| \geq a; |a| \geq 0$

+ $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$

+ $|a| \geq b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq b \\ a \leq -b \end{cases}$

+ $|a+b| \leq |a|+|b|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a, b cùng dấu.

+ $|a-b| \leq |a|+|b|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a, b cùng dấu.

+ $|a|-|b| \leq |a-b|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a \geq b \geq 0$ hoặc $a \leq b \leq 0$.

+ Cho các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$, thế thì hiển nhiên ta có

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

+ Cho các số thực khác không bất kì a, b , thế thì hiển nhiên ta có

$$\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| \geq 2. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a = \pm b.$$

3. Một số tính chất của tam thức bậc hai thường dùng trong bất đẳng thức.

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$. Khi đó ta viết được

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(ax - \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac$$

Từ đó ta có một số tính chất sau:

Tính chất 1: Đa thức có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$

Tính chất 2: Nếu $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$ thì $af(x) \geq 0$.

Tính chất 3: Nếu $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ và đa thức có hai nghiệm $x_1; x_2$ ($x_1 < x_2$) thì

+ $af(x) \leq 0$ với mọi giá trị $x_1 \leq x \leq x_2$.

+ $af(x) > 0$ với mọi giá trị $x \leq x_1$ hoặc $x \geq x_2$.

B. Một số ví dụ minh họa.

1. Sử dụng tính chất của tỉ số.

Ví dụ 1. Cho a, b là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{a+2b} < 1$$

Phân tích: Để ý ta thấy $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$, như vậy để chứng minh bất đẳng thức ta cần đánh giá được

$$\frac{a}{2a+b} < \frac{a}{a+b}; \quad \frac{b}{2b+a} < \frac{b}{a+b}.$$

Lời giải

Do a, b là các số dương nên ta có $2a+b > a+b$; $a+2b > a+b$

Từ đó suy ra
$$\frac{a}{2a+b} < \frac{a}{a+b}; \quad \frac{b}{2b+a} < \frac{b}{a+b}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+a} < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức kép trên ta nhận thấy khó có thể biến đổi tương đương để chứng minh bài toán, ở đây ta cũng không cần phải dự đoán dấu đẳng thức xảy ra. Để ý một chút ta có

$1 = \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c}$, như vậy cần đánh giá được $\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b}$. Dễ nhận thấy

đánh giá đó hiển nhiên đúng, do đó chỉ cần áp dụng tương tự thì bất đẳng thức bên trái được chứng minh.

Để chứng minh được bất đẳng thức bên phải thì ta cần phải đánh giá được $\frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$, việc này hoàn toàn có thể thực hiện được nhờ tính chất của tỉ số.

Lời giải

Do a, b, c là các số dương nên ta có $\frac{a}{a+b} < 1$. Vì vậy theo tính chất của tỉ số ta được

$$\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$$

Áp dụng tương tự ta có

$$\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c} < \frac{a+b}{a+b+c}, \quad \frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a} < \frac{b+c}{a+b+c}$$

Cộng về theo về của ba bất đẳng thức kép trên ta được

$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 3. Cho a, b, c, d là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

Lời giải

Theo tính chất của tỉ số ta có

$$\frac{a}{a+b+c} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d}$$

Mặt khác ta lại có

$$\frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d}$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d}$$

Tương tự ta có

$$\begin{aligned} \frac{b}{a+b+c+d} &< \frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{a+b+c+d} \\ \frac{c}{a+b+c+d} &< \frac{c}{c+d+a} < \frac{c+b}{a+b+c+d} \\ \frac{d}{a+b+c+d} &< \frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d} \end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được.

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

Nhận xét: Để chứng minh các bất đẳng thức ta cần tinh ý sử dụng các tính chất của tỉ số. Ngoài ra các bất đẳng thức trong ở hai ví dụ trên có thể được phát biểu lại như sau: Cho các biểu thức với a, b, c là các số thực dương.

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \\ B &= \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} \end{aligned}$$

Chứng minh A, B không thể nhận các giá trị nguyên.

Ví dụ 4. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$$

Phân tích: Để ý ta nhận thấy $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ab}{b^2} < \frac{cd}{d^2}$, đến đây ta áp dụng tính chất của tỉ số để chứng minh bất đẳng thức.

Lời giải

Từ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ suy ra $\frac{ab}{b^2} < \frac{cd}{d^2}$, theo tính chất tỉ số ta được

$$\frac{ab}{b^2} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{cd}{d^2} = \frac{c}{d}$$

Do đó ta có

$$\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 5. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$$

Phân tích: Bất đẳng thức cần chứng minh có chứa căn, nhìn chiều bất đẳng thức ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Cauchy. Tuy nhiên để đánh giá được bất đẳng thức theo Cauchy không hề đơn giản tí nào với những ai mới học bất đẳng thức.

Chú ý đến giả thiết a, b, c là ba cạnh của một tam giác, nó có mối liên hệ như thế nào với $\frac{a}{b+c}$,

do $b+c > a$ nên ta thấy được $0 < \frac{a}{b+c} < 1$, với kết quả đó ta có thể khử căn bằng đánh giá

$\sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{b+c}$. Đến đây thì bài toán được giải quyết triệt để tương tự như ví dụ thứ nhất.

Lời giải

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có

$$0 < \frac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{b+c}$$

Vì a là số dương nên theo tính chất của tỉ số ta được $\frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c}$

Do đó ta có $\sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự ta được $\sqrt{\frac{b}{c+a}} > \frac{b}{a+b+c}$; $\sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{c}{a+b+c}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 6. Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right) < \frac{a+b}{a+b+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$$

Phân tích: Để ý ta thấy $\frac{a}{a+1} < 1$ nên có $\frac{a}{a+b+1} < \frac{a}{a+1}$ và $\frac{a}{a+1} < \frac{a+b}{a+b+1}$, áp dụng tương tự ta chứng minh được bất đẳng thức.

Lời giải

+ Trước hết ta chứng minh $\frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right) < \frac{a+b}{a+b+1}$

Do a là số thực dương nên ta có $\frac{a}{a+1} < 1$ suy ra $\frac{a}{a+1} < \frac{a+b}{a+b+1}$

Chứng minh tương tự ta có $\frac{b}{b+1} < \frac{a+b}{a+b+1}$

Cộng vế với vế của hai bất đẳng thức cuối ta được

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right) < \frac{a+b}{a+b+1}$$

+ Ta chứng minh $\frac{a+b}{a+b+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$

Do a, b dương ta có $\frac{a}{a+1} > \frac{a}{a+b+1}$ và $\frac{b}{b+1} > \frac{b}{a+b+1}$

Cộng vế với vế của hai bất đẳng thức này ta được $\frac{a+b}{a+b+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta được bài toán cần chứng minh.

Ví dụ 7. Cho $a_1; a_2; \dots; a_n; b_1; b_2; \dots; b_n$ là các số thực dương. Kí hiệu

$$M = \max\left(\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; \dots; \frac{a_n}{b_n}\right); m = \min\left(\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; \dots; \frac{a_n}{b_n}\right)$$

Chứng minh rằng: $m \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \leq M$

Phân tích: Nhận thấy $M = \max\left(\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; \dots; \frac{a_n}{b_n}\right); m = \min\left(\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; \dots; \frac{a_n}{b_n}\right)$ nên ta có $m \leq \frac{a_i}{b_i} \leq M$

với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Do đó ta được $mb_i \leq a_i \leq Mb_i$, đến đây ta áp dụng cho $i = 1, 2, \dots, n$ thì ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Lời giải

Vì $M = \max\left(\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; \dots; \frac{a_n}{b_n}\right); m = \min\left(\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; \dots; \frac{a_n}{b_n}\right)$ nên ta được

$$m \leq \frac{a_i}{b_i} \leq M \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n.$$

Suy ra $mb_i \leq a_i \leq Mb_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Lần lượt cho i bằng các giá trị $1, 2, \dots, n$ rồi cộng các theo vế lại với nhau ta được

$$(b_1 + b_2 + \dots + b_n)m \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq M(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

Hay $m \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \leq M$. Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 8. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy cần phải thay đại lượng ở các mẫu bên vế trái bởi các đại lượng nhỏ hơn sao cho khi biểu thức thu được vẫn nhỏ hơn hoặc bằng vế phải. Điều đó có nghĩa là cần tìm vế phải cho bất đẳng thức $a^3 + b^3 + abc \geq ?$, để ý trong vế trái của bất đẳng thức ta không đánh giá được gì từ tích abc , cho nên ta tập trung đánh giá $a^3 + b^3$. Trong vế phải của bất đẳng thức cần chứng minh có chứa tích abc ở mẫu nên khi đánh giá mẫu vế trái ta cũng cần làm xuất hiện tích abc ở các phân thức, như vậy khi đánh giá $a^3 + b^3$ cần làm xuất hiện tích ab , điều này gợi ý cho ta đánh giá rất đẹp $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$. Nếu chứng minh được bất đẳng thức đó thì ta thu được kết quả là $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ khi đó ta suy ra được đánh giá $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a+b+c)$. Đến đây ta có các đánh giá tiếp theo

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{ab(a+b+c)} = \frac{c}{abc(a+b+c)}$$

Như vậy ta cần tập trung chứng minh $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$, bất đẳng thức này được biến đổi tương đương thành $(a + b)(a - b)^2 \geq 0$ là một đánh giá đúng.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 - ab(a + b) &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b) \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2 - ab) = (a + b)(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= (a + b)(a - b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 \geq ab(a + b) &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b) + abc \\ &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b + c) \end{aligned}$$

Từ đó ta được

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{ab(a + b + c)} = \frac{c}{abc(a + b + c)}$$

Chứng minh tương tự ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} &\leq \frac{1}{bc(a + b + c)} = \frac{a}{abc(a + b + c)} \\ \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} &\leq \frac{1}{ac(a + b + c)} = \frac{b}{abc(a + b + c)} \end{aligned}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét: Bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức hay. Để chứng minh được nó ta cần chứng minh $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$. Nhưng vấn đề là làm sao tìm ra được bất đẳng thức phụ đó. Đầu tiên là do yêu cầu làm xuất hiện tích ab , kể đến là cần phải làm cho hai vế đồng bậc 3 và cuối cùng là chú ý khi $a = b$ thì hai vế của bất đẳng thức đó bằng nhau. Khi phân tích bài toán ta cần chú ý đến các yếu tố như đẳng thức xảy ra ở đâu, tính đồng bậc của bất đẳng thức, chọn chiều đánh giá như thế nào cho hợp lý,... Tuy nhiên khi tiến hành các bước phân tích mà giả thiết càng gần với kết luận thì cơ hội càng lớn.

Ví dụ 9. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2}$$

Phân tích: Ý tưởng tương tự như ví dụ trên, ở đây ta chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$, như vậy ta cần có các đánh giá sao cho đảm bảo có đẳng thức xảy ra. Nhận thấy $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $b^2 + 1 \geq 2b$ nên $a^2 + 2b^2 + 3 \geq 2(ab + b + 1)$.

Khi đó ta có đánh giá $\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ab + b + 1}$. Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ac + a + 1} \right)$$

Vấn đề còn lại là chứng minh được $\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} = 1$. Đây là một đẳng thức quen thuộc và nhiều hướng để xử lý nó.

Lời giải

Ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $b^2 + 1 \geq 2b \Rightarrow a^2 + 2b^2 + 3 \geq 2(ab + b + 1)$

Do đó ta được
$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ab + b + 1}$$

Chứng minh tương tự ta có

$$\frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{bc + c + 1}; \quad \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ca + a + 1}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} \right)$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} = 1$$

Đến đây ta có hai cách chứng minh đẳng thức trên như sau

Cách 1: Do $abc = 1$, nên tồn tại các số dương x, y, z để $a = \frac{x}{y}$; $b = \frac{y}{z}$; $c = \frac{z}{x}$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} &= \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + 1} + \frac{1}{\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + 1} + \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{z}{y} + 1} \\ &= \frac{z}{x + y + z} + \frac{x}{x + y + z} + \frac{y}{x + y + z} = 1 \end{aligned}$$

Cách 2: Do $abc = 1$, nên ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} &= \frac{abc}{ab + b + abc} + \frac{a}{abc + ac + a} + \frac{1}{ca + a + 1} \\ &= \frac{ac}{a + 1 + ac} + \frac{a}{1 + ac + a} + \frac{1}{ca + a + 1} = 1 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 10. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} + \frac{2}{(b+1)^2 + c^2 + 1} + \frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} \leq 1$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$(a+1)^2 + b^2 + 1 = a^2 + b^2 + 2a + 2 \geq 2ab + 2a + 2$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned} \frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} + \frac{2}{(b+1)^2 + c^2 + 1} + \frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} \\ \leq \frac{1}{ab + a + 1} + \frac{1}{bc + b + 1} + \frac{1}{ca + c + 1} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{1}{ab + a + 1} + \frac{1}{bc + b + 1} + \frac{1}{ca + c + 1} = 1$$

Đến đây ta có hai cách chứng minh đẳng thức trên như sau

Cách 1: Do $abc = 1$, nên tồn tại các số dương x, y, z để $a = \frac{x}{y}$; $b = \frac{y}{z}$; $c = \frac{z}{x}$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} &= \frac{1}{\frac{x}{z} + \frac{x}{y} + 1} + \frac{1}{\frac{y}{x} + \frac{y}{z} + 1} + \frac{1}{\frac{z}{y} + \frac{z}{x} + 1} \\ &= \frac{yz}{xy+yz+zx} + \frac{xz}{xy+yz+zx} + \frac{yy}{xy+yz+zx} = 1\end{aligned}$$

Cách 2: Do $abc = 1$, nên ta được

$$\begin{aligned}\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} &= \frac{abc}{ab+a+abc} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{b}{cab+bc+b} \\ &= \frac{bc}{bc+b+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{b}{1+bc+b} = 1\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét: Các bất đẳng thức trong ví dụ 8, 9 và 10 cho thấy kỹ thuật đánh giá ở mẫu được sử dụng như thế nào trong chứng minh bất đẳng thức, thực chất của việc đánh giá này là thay thế các mẫu bởi các đại lượng khác sao cho các đánh giá cùng chiều và đảm bảo dấu đẳng thức xảy ra. Điều quan trọng là biết cách chọn các đánh giá phù hợp sao cho càng chặt càng tốt.

Ví dụ 11. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+b+ab} + \frac{bc}{b+c+bc} + \frac{ca}{c+a+ca} \leq 1$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta có nhận xét là tử của các phân thức là các đại lượng ab, bc, ca . Chú ý đến giả thiết $abc = 1$ ta có thể viết lại phân

thức bên vế trái theo các ý tưởng như $\frac{ab}{a+b+ab} = \frac{1}{ac+bc+1}$ hoặc là $\frac{ab}{a+b+ab} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1}$.

Đến đây ta viết được vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh thành các biểu thức $\frac{1}{ac+bc+1} + \frac{1}{ab+bc+1} + \frac{1}{bc+ca+1}$ hoặc $\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + 1}$ và để đơn giản ta có

thể đặt $x^3 = ab; y^3 = bc; z^3 = ca$ hoặc $x^3 = \frac{1}{a}; y^3 = \frac{1}{b}; z^3 = \frac{1}{c}$ và chú ý đến giả thiết $abc = 1$ dẫn đến được $xyz = 1$, lúc này ta được bất đẳng thức như ví dụ 9.

Lời giải

Để ý với điều kiện $abc = 1$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + 1} \leq 1$$

Đặt $x^3 = \frac{1}{a}; y^3 = \frac{1}{b}; z^3 = \frac{1}{c}$, khi đó ta được $xyz = 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{x^3 + y^3 + 1} + \frac{1}{y^3 + z^3 + 1} + \frac{1}{z^3 + x^3 + 1} \leq 1$$

Ta chứng minh được $x^3 + y^3 + 1 \geq xy(x+y) + xyz = xy(x+y+z)$ và áp dụng tương tự ta được

$$\frac{1}{x^3 + y^3 + 1} + \frac{1}{y^3 + z^3 + 1} + \frac{1}{z^3 + x^3 + 1} \leq \frac{1}{x+y+z} \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Nhận xét: Bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức khó, khi tôi phân tích để tìm lời giải thì các câu hỏi được đặt ra như biến đổi các biểu thức như thế nào để bài toán đơn giản hơn, sử dụng giả thiết như thế nào đây, thay vì đánh giá cả tử và mẫu ta có quy về đánh giá mẫu được không. Sau các bước biến đổi như trên thì bài toán nhìn có vẻ dễ hơn đôi chút và nếu tận dụng tốt các lợi thế này thì công việc còn lại sẽ không gây được khó khăn nữa.

Ví dụ 12. Cho các số thực $a; b; c \in [0; 1]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{ac + b + 1} + \frac{b}{ab + c + 1} + \frac{c}{bc + a + 1} \leq 1$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy không thể trực tiếp đánh giá tử của các phân thức, do vậy ta tìm cách đánh giá mẫu của mỗi phân thức. Chú ý đến chiều của bất đẳng thức trên, ta cần một đánh giá kiểu $ab + c + 1 \geq ?$. Giả thiết có gọi cho ta điều gì? Nên nhớ là khi $a; b; c \in [0; 1]$ ta thường thu được các bất đẳng thức dạng $(1 - a)(1 - b) \geq 0$ hay $1 + ab \geq a + b$, đến đây ta cộng vào hai vế với c thì được $ab + c + 1 \geq a + b + c$. Lúc này ta có đánh giá tốt cho việc chứng minh bất đẳng thức là $\frac{a}{ab + c + 1} \leq \frac{a}{a + b + c}$. Chỉ cần áp dụng tương tự cho các trường hợp còn lại là ta hoàn thành chứng minh bài toán.

Lời giải

Vì $a; b \in [0; 1]$ nên ta có $(1 - a)(1 - b) \geq 0$ suy ra $1 + ab \geq a + b$

Do đó ta được $ab + c + 1 \geq a + b + c$ suy ra $\frac{a}{ab + c + 1} \leq \frac{a}{a + b + c}$.

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{b}{ab + c + 1} \leq \frac{b}{a + b + c}; \quad \frac{c}{bc + a + 1} \leq \frac{c}{a + b + c}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{ac + b + 1} + \frac{b}{ab + c + 1} + \frac{c}{bc + a + 1} \leq 1$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 13. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1 + a^2}{1 + b^2} + \frac{1 + b^2}{1 + c^2} + \frac{1 + c^2}{1 + a^2} \leq \frac{7}{2}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy đẳng thức không xảy ra tại $a = b = c$ mà xảy ra tại $a = 1; b = c = 0$ và các hoán vị. Trong trường hợp này để dễ có những đánh giá hợp lý ta có thể sắp thứ tự các biến. Vì đẳng thức xảy ra tại $a = 1; b = c = 0$ nên không mất tính tổng quát ta sắp thứ tự các biến bằng cách chọn a là số lớn nhất. Khi đó ta mạnh dạn có các đánh giá kiểu như $1 + b^2 \geq 1; 1 + c^2 \geq 1$ mà vẫn bảo toàn được dấu đẳng thức xảy ra, các đánh giá này dẫn tới $\frac{1 + a^2}{1 + b^2} \leq 1 + a^2; \frac{1 + b^2}{1 + c^2} \leq 1 + b^2$. Còn lại $\frac{1 + c^2}{1 + a^2}$ cần phải đánh giá như thế nào để cùng chiều với hai đánh giá trước đó. Để ý là sau khi đánh giá hai phân thức đầu ta thu được $a^2 + b^2$ như vậy ta cần làm xuất hiện c^2 trong đánh giá $\frac{1 + c^2}{1 + a^2}$. Để ý đến a

là số lớn nhất nên ta có $\frac{1+c^2}{1+a^2} \leq c^2 + \frac{1}{1+a^2}$. Kết quả là sau một số bước đánh giá như trên ta thu được đại lượng $2+a^2+b^2+c^2 + \frac{1}{1+a^2}$, bây giờ nếu biến đổi được thành biểu thức chỉ chứa biến a thì càng dễ chứng minh hơn. Từ giả thiết $a+b+c=1$ và chú ý đến $b=c=0$ ta có một đánh giá rất tự nhiên là $b^2+c^2 \leq (b+c)^2 = (1-a)^2$. Bây giờ việc chứng minh bất đẳng thức hoàn toàn đơn giản.

Lời giải

Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử a là số lớn nhất trong ba số a, b, c. Khi đó ta có $1+b^2 \geq 1$; $1+c^2 \geq 1$.

$$\text{Do đó } \frac{1+a^2}{1+b^2} \leq 1+a^2; \frac{1+b^2}{1+c^2} \leq 1+b^2; \frac{1+c^2}{1+a^2} \leq c^2 + \frac{1}{1+a^2}$$

Từ đó ta được bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \frac{1+a^2}{1+b^2} + \frac{1+b^2}{1+c^2} + \frac{1+c^2}{1+a^2} &\leq 2+a^2+b^2+c^2 + \frac{1}{1+a^2} \\ &\leq 2+a^2+(b+c)^2 + \frac{1}{1+a^2} = 2+a^2+(1-a)^2 + \frac{1}{1+a^2} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$2+a^2+(1-a)^2 + \frac{1}{1+a^2} \leq \frac{7}{2} \Leftrightarrow (a-1)(4a^3+3a-1) \leq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1$; $b=c=0$ và các hoán vị.

Nhận xét: Điểm mấu chốt để tìm ra cách chứng minh bất đẳng thức trên chính là các đánh giá

$\frac{1+a^2}{1+b^2} \leq 1+a^2$; $\frac{1+b^2}{1+c^2} \leq 1+b^2$; $\frac{1+c^2}{1+a^2} \leq c^2 + \frac{1}{1+a^2}$, việc phát hiện ra các đánh giá đó đòi hỏi phải có sự suy luận một cách logic.

Ví dụ 14. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} = 3$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+a+bc} + \frac{b}{1+b+ca} + \frac{c}{1+c+ab} \geq \frac{3}{4}$

Lời giải

Đặt $x = \frac{a}{1+bc}$; $y = \frac{b}{1+ca}$; $z = \frac{c}{1+ab}$, suy ra ta có $x+y+z=3$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \geq \frac{3}{4}$$

$$\text{Mà ta có } \frac{x}{1+x} \geq \frac{x}{1+x+y+z}; \frac{y}{1+y} \geq \frac{y}{1+x+y+z}; \frac{z}{1+z} \geq \frac{z}{1+x+y+z}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \geq \frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=3$; $b=c=0$ và các hoán vị.

2. Sử dụng tính chất giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 15. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{c} - \frac{c}{a} - \frac{a}{c} \right| < 1$$

Phân tích: Để ý ta có $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{c} - \frac{c}{a} - \frac{a}{c} = \frac{a^2c + b^2a + c^2b - a^2b - c^2a - b^2c}{abc}$, phân tích thành nhân tử $a^2c + b^2a + c^2b - a^2b - c^2a - b^2c = (a-b)(b-c)(c-a)$, mà a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên $|a-b| < c; |b-c| < a; |c-a| < b$. Đến đây ta chứng minh được bất đẳng thức.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} \left| \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{c} - \frac{c}{a} - \frac{a}{c} \right| &= \left| \frac{a^2c + b^2a + c^2b - a^2b - c^2a - b^2c}{abc} \right| \\ &= \frac{|(a-b)(b-c)(c-a)|}{abc} \end{aligned}$$

Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên ta có

$$|a-b| < c; |b-c| < a; |c-a| < b$$

Do đó ta suy ra

$$|(a-b)(b-c)(c-a)| < abc$$

Hay

$$\frac{|(a-b)(b-c)(c-a)|}{abc} < 1$$

Suy ra

$$\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{c} - \frac{c}{a} - \frac{a}{c} \right| < 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 16. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} + \sqrt{c^2 - ca + a^2} \geq 3$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát kĩ bất đẳng thức ta có nhận định là cần phải có một đánh giá kiểu $a^2 - ab + b^2 \geq k(a+b)^2$ để khi khử căn ta thu được $a+b$. Vấn đề là cần xác định giá trị của k để đánh giá trên là đúng, nhớ là đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$ nên ta xác định được $k = \frac{1}{4}$, tức là ta có $a^2 - ab + b^2 \geq \frac{1}{4}(a+b)^2$. Một điều nữa cần chú ý là các biến a, b, c là các số thực bất kì nên khi khử căn ta cần lấy giá trị tuyệt đối và để ý đến $|a+b| \geq a+b$.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh $a^2 - ab + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{4}$.

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$4(a^2 + b^2 - ab) \geq a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow 3(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow 3(a-b)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên bất đẳng thức trên được chứng minh.

Từ bất đẳng thức trên ta có

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} \geq \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}} = \frac{|a+b|}{2} \geq \frac{a+b}{2}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \frac{b+c}{2}; \sqrt{c^2 - ca + a^2} \geq \frac{c+a}{2}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} + \sqrt{c^2 - ca + a^2} \geq \frac{2(a+b+c)}{2} = 3$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Ví dụ 17. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$|a| + |b| + |c| + |a+b+c| \geq |a+b| + |b+c| + |c+a|$$

Phân tích: Theo bất đẳng thức giá trị tuyệt đối ta luôn có $|a| + |b| \geq |a+b|$, bây giờ ta tìm cách chứng minh $|c| + |a+b+c| \geq |b+c| + |c+a|$. Để là mất các giá trị tuyệt đối ta thường sử dụng cách xét dấu các số hoặc là bình phương hai vế, trong trường hợp này ta chọn cách bình phương hai vế vì việc xét dấu rất khó khăn. Khi bình phương hai vế ta thu được kết quả là:

$$ab + |c(a+b+c)| \geq |(a+c)(b+c)| \Leftrightarrow ab + |c(a+b+c)| \geq |ab + c(a+b+c)|$$

Bất đẳng thức sẽ được giải quyết nếu như ta khẳng định được $ab \geq 0$. Chú ý đến vai trò của a, b, c trong bất đẳng thức thì việc giả sử $ab \geq 0$ là hoàn toàn thực hiện được. Bây giờ ta cần trình bày lại lời giải nữa là xong.

Lời giải

Trong ba số a, b, c có ít nhất hai số cùng dấu, không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là a, b .

Khi đó ta được $|a| + |b| = |a+b|$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh $|c| + |a+b+c| \geq |b+c| + |c+a|$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} c^2 + (a+b+c)^2 + 2|c(a+b+c)| &\geq (a+c)^2 + (b+c)^2 + 2|(a+c)(b+c)| \\ \Leftrightarrow ab + |c(a+b+c)| &\geq |(a+c)(b+c)| \Leftrightarrow ab + |c(a+b+c)| \geq |ab + c(a+b+c)| \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo bất đẳng thức giá trị tuyệt đối.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi a, b, c cùng dấu.

Ví dụ 18. Cho a, b là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\left| \frac{(a-b)(1-ab)}{(1+a)(1+b)^2} \right| \leq \frac{1}{4}$$

Phân tích: Ta có một đẳng thức quen thuộc là $(1+a)^2(1+b)^2 = (1+a+b+ab)^2$ và như vậy nếu ta đánh giá được $|(a-b)(1-ab)| \leq \frac{1}{4}(1+a+b+ab)^2$ thì bài toán xem như được giải quyết. Để ý đến

đánh giá theo bất đẳng thức Cauchy là $(a+b)(1+ab) \leq \frac{1}{4}(1+a+b+ab)^2$ và ta cần chỉ ra được $|(a-b)(1-ab)| \leq |(a+b)(1+ab)|$, đánh giá này là hoàn toàn đúng dẫn theo bất đẳng thức giá trị tuyệt đối.

Lời giải

Theo bất đẳng thức giá trị tuyệt đối ta được

$$|a - b| \leq |a + b|; |1 - ab| \leq |1 + ab|$$

Do đó ta được

$$\left| \frac{(a - b)(1 - ab)}{(1 + a)^2 (1 + b)^2} \right| \leq \left| \frac{(a + b)(1 + ab)}{(1 + a)^2 (1 + b)^2} \right| \leq \frac{(ab + a + b + 1)^2}{4(1 + a)^2 (1 + b)^2} = \frac{1}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = 0$; $b = 1$ hoặc $a = 1$; $b = 0$.

Ví dụ 19. Cho a, b, c là các số thực đôi một không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$$-1 < \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} < 1$$

Phân tích: Ta viết lại bất đẳng thức là $\left| \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} \right| < 1$, như vậy nếu đánh giá được

$|a^2 - b^2| \leq |a^2 + b^2|$ thì bài toán được chứng minh.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left| \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} \right| < 1$$

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $|a^2 - b^2| \leq |a^2 + b^2|$.

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$(a^2 - b^2)^2 \leq (a^2 + b^2)^2 \Leftrightarrow 4a^2b^2 \geq 0, \text{ Đúng với mọi } a, b.$$

Chứng minh tương tự như trên ta được

$$|b^2 - c^2| \leq |b^2 + c^2|; |c^2 - a^2| \leq |c^2 + a^2|$$

Nhân theo về các kết quả trên ta được

$$\left| \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} \right| \leq 1$$

Vì đẳng thức không xảy ra nên ta được

$$\left| \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} \right| < 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 20. Cho a, b, c là các số thực không âm bất kì. Chứng minh rằng:

$$3\sqrt[3]{abc} + |a - b| + |b - c| + |c - a| \geq a + b + c$$

Phân tích: Nhận định đầu tiên khi tìm hiểu bất đẳng thức trên là tìm cách phá giá trị tuyệt đối. Quan sát kĩ ta thấy không thể bình phương cũng không thể xét dấu các đại lượng để phá giá trị tuyệt đối được. Trong trường hợp này ta thử nghĩ đến cách sắp thứ tự các biến để phá giá trị tuyệt đối xem có thể chứng minh được hay không. Chẳng hạn ta chọn $a \geq b \geq c$, khi đó ta phá được các giá trị tuyệt đối và bất đẳng

thức được viết lại thành $3\sqrt[3]{abc} + a - b - 3c \geq 0$, nhận thấy $a - b \geq 0$; $3\sqrt[3]{abc} - 3c \geq 0$ nên bất đẳng thức thu được hoàn toàn đúng.

Lời giải

Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} & 3\sqrt[3]{abc} + (a - b) + (b - c) + (a - c) \geq a + b + c \\ \Leftrightarrow & 3\sqrt[3]{abc} + a - b - 3c \geq 0 \Leftrightarrow a - b + 3\sqrt[3]{c}(\sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{c^2}) \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $a \geq b \geq c$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 21. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$|a - b| + |b - c| + |c - a| \geq 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}$$

Lời giải

Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} & a - b + b - c + a - c \geq 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} \\ \Leftrightarrow & 2(a - c) \geq 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} \\ \Leftrightarrow & 4(a - c)^2 \geq 2\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right] \\ \Leftrightarrow & (a - c)^2 \geq (b - c)^2 + (c - a)^2 \Leftrightarrow [(a - b) + (b - c)]^2 \geq (b - c)^2 + (c - a)^2 \\ \Leftrightarrow & 2(a - b)(b - c) \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $a \geq b \geq c$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 22. Cho a, b, c là các số thực không âm bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq abc + \frac{3|(a - b)(b - c)(c - a)|}{4}$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy về phải xuất hiện các đại lượng $a - b$; $b - c$; $c - a$ nên suy nghĩ đầu tiên khi biến đổi bất đẳng thức là cần phải làm thế nào để xuất hiện ở về trái các đại lượng $a - b$; $b - c$; $c - a$, chính yêu cầu này làm ta liên tưởng đến một hằng đẳng thức bậc ba hết sức quen thuộc đó là $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right]$. Như vậy sau khi áp dụng thì về trái của bất đẳng chứa đại lượng $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ mà bên về phải lại là tích các đại lượng $a - b$; $b - c$; $c - a$, từ chiều của bất đẳng thức cần chứng minh ta nghĩ đến đánh giá $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 3\sqrt{[(a - b)(b - c)(c - a)]^2}$. Bây giờ ta cần một đánh giá kiểu $2(a + b + c) \geq 3\sqrt{(a - b)(b - c)(c - a)}$ là hoàn thành chứng minh bất đẳng thức. Chú ý đến dấu giá trị tuyệt đối và các biến không âm ta có được các đánh giá đúng là $a + b \geq |a - b|$; $b + c \geq |b - c|$; $c + a \geq |c - a|$, đến đây thì các yêu cầu để chứng minh bài toán đã được xử lý, việc trình bày lời giải hoàn toàn đơn giản.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]}{6} \geq \frac{3|(a-b)(b-c)(c-a)|}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geq 9|(a-b)(b-c)(c-a)|$$

Theo tính chất của bất đẳng thức giá trị tuyệt đối ta có

$$a+b \geq |a-b|; b+c \geq |b-c|; c+a \geq |c-a|$$

Do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$2(a+b+c) = (a+b) + (b+c) + (c+a) \geq |a-b| + |b-c| + |c-a|$$

$$\geq 3\sqrt[3]{|(a-b)(b-c)(c-a)|}$$

Và $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 3\sqrt[3]{[(a-b)(b-c)(c-a)]^2}$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$2(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geq 9|(a-b)(b-c)(c-a)|$$

Vậy Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 23. Cho n số thực $x_1; x_2; \dots; x_n$ (với $n \geq 3$). Chứng minh rằng:

$$\text{Max}\{x_1; x_2; \dots; x_n\} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_{n-1} - x_n|}{2n}$$

Trong đó $\text{Max}\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ là số lớn nhất trong các số thực $x_1; x_2; \dots; x_n$

Lời giải

Đề ý là trong hai số thực x, y bất kì ta luôn có

$$\text{Min}\{x, y\} \leq x, y \leq \text{Max}\{x, y\} \text{ và } \text{Max}\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

Sử dụng đẳng thức $\text{Max}\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}$, ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_n - x_1|}{2n} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|}{2n} + \frac{x_2 + x_3 + |x_2 - x_3|}{2n} + \dots + \frac{x_n + x_1 + |x_n - x_1|}{2n} \\ &\leq \frac{\text{Max}\{x_1, x_2\} + \text{Max}\{x_2, x_3\} + \dots + \text{Max}\{x_n, x_1\}}{n} \leq \text{Max}\{x_1; x_2; \dots; x_n\} \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

3. Sử dụng tính chất của tam thức bậc hai.

Ví dụ 24. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 - a + 2b + 4b^2 - 4ab \leq 0$

Chứng minh rằng: $0 \leq a - 2b \leq 1$

Phân tích: Để ý rằng bất phương trình bậc hai $At^2 + Bt + C \leq 0 \Leftrightarrow t_1 < t < t_2$ với $A > 0$, trong đó $t_1; t_2$ là các nghiệm của tam thức $At^2 + Bt + C$. Phân tích bất đẳng thức giả thiết ta thu được $(a - 2b)^2 - (a - 2b) \leq 0$, ta xem vế trái là đa thức biến $a - 2b$, khi đó ta có lời giải sau.

Lời giải

Bất đẳng thức giả thiết tương đương với

$$a^2 - 4ab + 4b^2 - (a - 2b) \leq 0 \Leftrightarrow (a - 2b)^2 - (a - 2b) \leq 0$$

Đặt $t = a - 2b \Rightarrow t^2 - t \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq a - 2b \leq 1$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 25. Cho a, b là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$a^2b^4 + 2(a^2 + 2)b^2 + 4ab + a^2 \geq 4ab^3$$

Phân tích: Bất đẳng thức có hai biến và biến a có bậc cao nhất là 2, do đó ta biến đổi bất đẳng thức theo hướng xuất hiện một tam thức bậc hai có biến là a như sau

$$(b^2 + 1)^2 a^2 + 4b(1 - b^2)a + 4b^2 \geq 0$$

Ta xem vế trái của bất đẳng thức là tam thức bậc hai, để ý đến $(b^2 + 1)^2 > 0$, ta cần chứng minh được biệt thức Δ của tam thức có giá trị âm.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(b^2 + 1)^2 a^2 + 4b(1 - b^2)a + 4b^2 \geq 0$$

Xét đa thức $f(a) = (b^2 + 1)^2 a^2 + 4b(1 - b^2)a + 4b^2$

Khi đó ta có $\Delta = [4b(1 - b^2)]^2 - 4(b^2 + 1)^2 \cdot 4b^2 = -16b^2 \leq 0$

Do đó ta có $(b^2 + 1)^2 f(a) \geq 0$ mà $(b^2 + 1)^2 > 0$ nên ta được

$$f(a) = (b^2 + 1)^2 a^2 + 4b(1 - b^2)a + 4b^2 \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 26. Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn $b < c < d$. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c + d)^2 > 8(ac + bd)$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2 - 2(b - 3c + d)a + (b + c + d)^2 - 8bd > 0$$

Xét tam thức $f(a) = a^2 - 2(b - 3c + d)a + (b + c + d)^2 - 8bd$

Khi đó ta có $\Delta' = (b - 3c + d)^2 - (b + c + d)^2 + 8bd = 8(c - b)(c - d)$

Do $b < c < d$ nên ta được $\Delta' < 0$ suy ra $f(a) > 0$

Hay $a^2 - 2(b - 3c + d)a + (b + c + d)^2 - 8bd > 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 27. Cho a, b, c, d, e là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$$

Phân tích: Bất đẳng thức này đã được chứng minh bằng kỹ thuật biến đổi tương đương. Ở đây ta sử dụng tư tưởng của tam thức bậc hai để chứng minh. Để ý ta viết lại được bất đẳng thức như sau $f(a) = a^2 - (b + c + d + e)a + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$, đến đây ta cần phải chứng minh được $\Delta = (b + c + d + e)^2 - 4(b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \leq 0$. Việc này hoàn toàn thực hiện được nhờ phép biến đổi tương đương hoặc bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b + c + d + e) \geq 0$$

Xét $f(a) = a^2 - (b + c + d + e)a + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$

Khi đó ta có $\Delta = (b + c + d + e)^2 - 4(b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} 4(b^2 + c^2 + d^2 + e^2) &= (1 + 1 + 1 + 1)(b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \\ &\geq (b + c + d + e)^2 \end{aligned}$$

Suy ra $\Delta = (b + c + d + e)^2 - 4(b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \leq 0$

Do đó ta được $f(a) = a^2 - (b + c + d + e)a + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq 0$

Hay bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 28. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $-1 \leq a, b, c \leq 2$ và $a + b + c = 0$.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 6$

Phân tích: Từ giả thiết $-1 \leq a \leq 2$, ta có thể thiết lập được bất đẳng thức bậc hai dạng $(a - 2)(a + 1) \leq 0$, áp dụng tương tự và chú ý đến giả thiết $a + b + c = 0$.

Giải

Theo tính chất về dấu của tam thức bậc hai ta có

$$\begin{aligned} -1 \leq a \leq 2 &\Rightarrow (a - 2)(a + 1) \leq 0 \\ -1 \leq b \leq 2 &\Rightarrow (b - 2)(b + 1) \leq 0 \\ -1 \leq c \leq 2 &\Rightarrow (c - 2)(c + 1) \leq 0 \end{aligned}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$(a^2 - a - 2) + (b^2 - b - 2) + (c^2 - c - 2) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - (a + b + c) \leq 6$$

Vì $a + b + c = 0$ nên $a^2 + b^2 + c^2 \leq 6$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 29. Chứng minh bất đẳng thức Bunhiacopxki.

a) Cho các số thực bất kỳ $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ khác 0. Chứng minh rằng:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

b) Cho các số thực bất kỳ $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ khác 0. Chứng minh rằng:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

Lời giải

a) Xét đa thức

$$\begin{aligned} f(x) &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)x^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)x + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\ &= (a_1^2 x^2 - 2a_1 b_1 x + b_1^2) + (a_2^2 x^2 - 2a_2 b_2 x + b_2^2) + (a_3^2 x^2 - 2a_3 b_3 x + b_3^2) \\ &= (a_1 x - b_1)^2 + (a_2 x - b_2)^2 + (a_3 x - b_3)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Vì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có

$$\Delta' = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \leq 0$$

Hay
$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a_1 x - b_1 = a_2 x - b_2 = a_3 x - b_3 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

b) Xét đa thức

$$\begin{aligned} f(x) &= (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \\ &= (a_1^2 x^2 - 2a_1 b_1 x + b_1^2) + (a_2^2 x^2 - 2a_2 b_2 x + b_2^2) + \dots + (a_n^2 x^2 - 2a_n b_n x + b_n^2) \\ &= (a_1 x - b_1)^2 + (a_2 x - b_2)^2 + \dots + (a_n x - b_n)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Vì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có

$$\Delta' = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \leq 0$$

Hay
$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a_1 x - b_1 = a_2 x - b_2 = \dots = a_n x - b_n \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 30. Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn $a + d = b + c$. Chứng minh rằng: Nếu tồn tại số thực m sao cho $2m > |ad - bc|$ thì với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có:

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) + m^2 \geq 0$$

Phân tích: Quan sát biểu thức bên vế trái ta nhận thấy ngay đây là đa thức bậc 4, với phép đặt biến phụ $y = x^2 - (a + d)x = x^2 - (b + c)x$, khi đó vế trái trở thành đa thức bậc hai, bây giờ ta cần chứng minh được

biệt thức Δ âm, cần chú ý đến giả thiết $2m > |ad - bc|$ vì chắc chắn phải cần đến nó mới có thể chứng minh được.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left[x^2 - (a + d)x + ad \right] \left[x^2 - (b + c)x + bc \right] + m^2 \geq 0$$

Do $a + d = b + c$ nên ta đặt $y = x^2 - (a + d)x = x^2 - (b + c)x$, khi đó ta được bất đẳng thức

$$(y + ad)(y + bc) + m^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + (ad + bc)y + abcd + m^2 \geq 0$$

Xét $f(y) = y^2 + (ad + bc)y + abcd + m^2$

Ta có $\Delta_y = (ad + bc)^2 - 4.1.(abcd + m^2) = (ad - bc)^2 - 4m^2$

Vì $2m > |ad - bc|$ nên $4m^2 > (ad - bc)^2 \Leftrightarrow \Delta_y < 0$ do đó ta có $f(y) \geq 0$

$$\text{Hay } (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) + m^2 \geq 0$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 31. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$(3a + 4b + 5c)^2 \geq 44(ab + bc + ca)$$

Phân tích: Bất đẳng thức có bậc hai đối với mỗi biến, nên ta nghĩ đến việc đưa về tam thức bậc hai. Bất đẳng thức có ba biến nhưng có thêm điều kiện $a + b + c = 1$ cho nên ta có thể chuyển bất đẳng thức thành bất đẳng thức chỉ có hai biến. Đến đây ta chọn một biến làm biến chính, còn lại ta xem như là tham số và sử dụng tính chất tam thức bậc hai là một ý tưởng không tồi chút nào.

Lời giải

Từ giả thiết $a + b + c = 1$ suy ra $c = 1 - a - b$, thay vào bất đẳng thức ta được

$$\begin{aligned} (3a + 4b + 5 - 5a - 5b)^2 &\geq 44ab + 44(a + b)(1 - a - b) \\ \Leftrightarrow 48a^2 + 16(3b - 4)a + 45b^2 - 54b + 25 &\geq 0 \end{aligned}$$

Xét $f(a) = 48a^2 + 16(3b - 4)a + 45b^2 - 54b + 25$, khi đó ta được

$$\Delta' = 64(3b - 4)^2 - 48(45b^2 - 54b + 25) = -176(3b - 1)^2 \leq 0$$

Do đó suy ra $f(a) \geq 0$ hay $48a^2 + 16(3b - 4)a + 45b^2 - 54b + 25 \geq 0$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{3}; c = \frac{1}{6}$.

Ví dụ 32. Cho a, b là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$3(1 - a + a^2)(1 - b + b^2) \geq 2(1 - ab + a^2b^2)$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy, bất đẳng thức có tính đối xứng với hai biến a, b và là có bậc hai đối với mỗi biến do đó một cách tự nhiên ta nghĩ đến sử dụng tính chất tam thức bậc hai để chứng minh. Trước hết ta viết lại bất đẳng thức

$$(b^2 - 3b + 3)a^2 + (3b^2 - 5b + 3)a + 3b^2 - 3b + 1 \geq 0$$

Xem về trái là một tam thức bậc hai biến a khi đó, để ý đến $b^2 - 3b + 3 > 0$ ta cần chứng minh được biệt thức $\Delta \leq 0$.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(b^2 - 3b + 3)a^2 + (3b^2 - 5b + 3)a + 3b^2 - 3b + 1 \geq 0$$

Xét tam thức bậc hai

$$f(a) = (b^2 - 3b + 3)a^2 + (3b^2 - 5b + 3)a + 3b^2 - 3b + 1$$

Khi đó ta được

$$\Delta = (3b^2 - 5b + 3)^2 - 4(b^2 - 3b + 3)(3b^2 - 3b + 1) = -(a^2 - 3a + 1) \leq 0$$

Để ý ta thấy $b^2 - 3b + 3 = \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, do đó ta được $f(a) \geq 0$

Hay $(b^2 - 3b + 3)a^2 + (3b^2 - 5b + 3)a + 3b^2 - 3b + 1 \geq 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} b^2 - 3b + 1 = 0 \\ a = \frac{3b^2 - 5b + 3}{2(b^2 - 3b + 3)} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Ví dụ 33. Cho a, b, c là các số thực không âm bất kì. Chứng minh rằng:

$$3(1 - a + a^2)(1 - b + b^2)(1 - c + c^2) \geq 1 + abc + a^2b^2c^2$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy bất đẳng thức có tính đối xứng và có bậc hai đối với mỗi biến, do đó một cách tự nhiên ta nghĩ đến tam thức bậc hai. Như vậy ta cần chọn một biến chính, là c chẳng hạn, khi đó các biến a, b đóng vai trò tham số. Để ý thấy vế trái của bất đẳng thức có đại lượng $(1 - a + a^2)(1 - b + b^2)$ rất cồng kềnh khi biến đổi, do đó ta cần thay đại lượng đó bằng một đại lượng bé hơn, chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta có hai ý tưởng là

$$(1 - a + a^2)(1 - b + b^2) \geq (2a - a)(2b - b) = ab$$

$$\text{Hoặc } (1 - a + a^2)(1 - b + b^2) = \frac{1 + a^2b^2 + (a - b)^2 + (1 - a)^2(1 - b)^2}{2} \geq \frac{1 + a^2b^2}{2}$$

Nhận thấy ngay ý tưởng đầu không thực hiện được vì chẳng hạn $ab = 0$ thì bất đẳng thức $3ab(1 - c + c^2) \geq (1 + abc + a^2b^2c^2)$ không đúng. Do đó ta chỉ có thể theo ý tưởng thứ hai. Lúc ta được bất đẳng thức

$$2(1 - a + a^2)(1 - b + b^2)(1 - c + c^2) \geq (1 + a^2b^2)(1 - c + c^2)$$

Bây giờ ta cần chứng minh $3(1 + a^2b^2)(1 - c + c^2) \geq 2(1 + abc + a^2b^2c^2)$, viết thành $f(c) = (3 + a^2b^2)c^2 - (3 + 2ab + 3a^2b^2)c + 1 + 3a^2b^2 \geq 0$. Công việc cuối cùng là chứng minh

$\Delta = (3 + 2ab + 3a^2b^2)^2 - 4(3 + a^2b^2)(1 + 3a^2b^2) \leq 0$ thì bài toán xem như được chứng minh. Ở đây nếu như ta không chứng minh được biệt thức $\Delta \leq 0$ thì ý tưởng trên hoàn toàn phá sản. Cũng may trong bài toán này ta thu được $\Delta = -3(1 - ab)^4 \leq 0$. Đến đây chỉ cần trình bày lại lời giải nữa là xong.

Lời giải

Ta có $2(1-a+a^2)(1-b+b^2) = 1+a^2b^2+(a-b)^2+(1-a)^2(1-b)^2 \geq 1+a^2b^2$

Do đó ta được bất đẳng thức

$$2(1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2) \geq (1+a^2b^2)(1-c+c^2)$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} 3(1+a^2b^2)(1-c+c^2) &\geq 2(1+abc+a^2b^2c^2) \\ \Leftrightarrow (3+a^2b^2)c^2 - (3+2ab+3a^2b^2)c + 1 + 3a^2b^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Xét tam thức bậc hai $f(c) = (3+a^2b^2)c^2 - (3+2ab+3a^2b^2)c + 1 + 3a^2b^2$

Khi đó ta được

$$\Delta = (3+2ab+3a^2b^2)^2 - 4(3+a^2b^2)(1+3a^2b^2) = -3(1-ab)^4 \leq 0$$

Dễ thấy $3+a^2b^2 > 0$ nên ta được $f(c) \geq 0$

Hay
$$(3+a^2b^2)c^2 - (3+2ab+3a^2b^2)c + 1 + 3a^2b^2 \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Nhận xét: Đây là một bài toán khó, ban đầu nếu xem c là biến và a, b là tham số mà chứng minh biệt thức $\Delta \leq 0$ thực sự rất khó khăn, cho nên ý tưởng làm đơn giản hóa về trái là hoàn toàn tự nhiên. Nhưng để có một đánh giá hợp lý cần phải xem xét bài toán một cách tổng thể và luôn để ý đến các tình huống có thể xảy ra.

Ví dụ 34. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $abc + ab + bc + ca = 4$. Chứng minh rằng: $a + b + c \geq ab + bc + ca$

Phân tích: Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = 2; c = 0$. Quá trình đánh giá bất đẳng thức cần chú ý đến đẳng thức xảy ra. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy bất đẳng thức có tính đối xứng đối với ba biến và có điều kiện nên ta có thể đưa về dạng tam thức bậc hai. Chẳng hạn từ giả

thiết ta rút được $a = \frac{4-bc}{b+c+bc}$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành:

$$\frac{4-bc}{b+c+bc} + b + c \geq \frac{4-bc}{b+c+bc}(b+c) + bc$$

Và nếu xem b là biến và c là tham số thì ta thu được bất đẳng thức có bậc hai đối với một biến $f(b) = (1+c-c^2)b^2 + (c^2+c-4)b + c^2-4c+4 \geq 0$.

Lúc này ta có $\Delta = (c^2+c-4)^2 - 4(1+c-c^2)(c^2-4c+4) = c(c-1)^2(5c-8)$. Bây giờ ta cần phải chỉ ra được $\Delta \leq 0$ và $1+c-c^2 \geq 0$. Chú ý trong trường hợp này đẳng thức xảy ra tại $c = 1$ hoặc $c = 0$, ta nhận thấy khi $c \leq 1$ thì hai yêu cầu trên được đáp ứng ngay. Nhận thấy từ giả thiết $abc + a + b + c = 4$ nếu chọn c nhỏ nhất thì ta có ngay $c \leq 1$, do đó ta có thể giả sử c là số bé nhất trong ba số a, b, c . Việc giả sử này là hoàn toàn có thể vì vai trò của các biến như nhau. Đến đây ta trình bày lại lời giải như sau.

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử c là số bé nhất trong ba số a, b, c . Khi đó ta có

$$4 = abc + ab + bc + ca \geq c^3 + 3c^2 \Rightarrow c \leq 1$$

Từ $abc + ab + bc + ca = 4$ suy ra $a = \frac{4-bc}{b+c+bc}$. Như vậy ta cần chứng minh

$$\frac{4-bc}{b+c+bc} + b + c \geq \frac{4-bc}{b+c+bc}(b+c) + bc$$

Hay $(1 + c - c^2)b^2 + (c^2 + c - 4)b + c^2 - 4c + 4 \geq 0$

Xét $f(b) = (1 + c - c^2)b^2 + (c^2 + c - 4)b + c^2 - 4c + 4$

Khi đó ta có $\Delta = (c^2 + c - 4) - 4(1 + c - c^2)(c^2 - 4c + 4) = c(c - 1)^2(5c - 8)$

Vì $c \leq 1$ nên ta có $\Delta = c(c - 1)^2(5c - 8) \leq c(c - 1)^2(5 - 8) = -3c(c - 1)^2 \leq 0$

Lại thấy khi $c \leq 1$ thì $1 + c - c^2 \geq 0$ nên $f(b) \geq 0$

Hay $(1 + c - c^2)b^2 + (c^2 + c - 4)b + c^2 - 4c + 4 \geq 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = 2; c = 0$ và các hoán vị.

Nhận xét: Sử dụng nguyên lý Dirichlet cũng có thể chứng minh được bất đẳng thức trên, tuy nhiên để sử dụng được nguyên lý Dirichlet không hề đơn giản. Qua đó ta nhận thấy với các bất đẳng thức bậc hai thì nghĩ đến sử dụng các tính chất của tam thức bậc hai là điều hết sức tự nhiên và thực tế các tính chất của tam thức bậc hai cũng đã cho thấy hiệu quả trong chứng minh bất đẳng thức.

Ví dụ 35. Cho a, b, c là các số thực bất kì thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = 2$ và $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 2$. Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c . Chứng minh rằng:

$$M - m \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta thấy được vai trò như nhau của ba biến a, b, c nên để đơn giản ta có thể sắp thứ tự các biến để quy định M và m cho bất đẳng thức. Chẳng hạn ta chọn $M = a; m = c$, khi đó

ta cần chứng minh $a - c \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Chú ý đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$, kết hợp với

$a + b + c = 2$, ta viết lại được $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2$, vì ta cần phải chứng minh $a - c \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

nên ta có thể xem đẳng thức bên là phương trình bậc hai ẩn $X = a - c$ và viết lại ta được $X^2 - (b - c)X + (b - c)^2 - 1 = 0$. Đến đây ta thấy được hai ý tưởng để chứng minh $X \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. Một là ta

cần giải ra các nghiệm X theo $b - c$ sau đó chứng minh $X \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. Hai là đổi vai trò trong phương trình

và xem X là tham số, khi đó từ điều kiện có nghiệm của phương trình ta suy ra được $X \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử a là số lớn nhất và c là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c .

Khi đó ta cần chứng minh $a - c \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

Ta có $2 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

Hay $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2$. Đặt $X = a - c$, khi đó ta được

$$\begin{aligned}
X^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 = 2 &\Leftrightarrow X^2 + (a-c-b+c)^2 + (b-c)^2 = 2 \\
&\Leftrightarrow X^2 + (a-c)^2 + 2(b-c)^2 - 2(a-c)(b-c) = 2 \\
&\Leftrightarrow 2X^2 - 2(b-c)X + 2(b-c)^2 = 2 \Leftrightarrow X^2 - (b-c)X + (b-c)^2 - 1 = 0
\end{aligned}$$

Xem phương trình trên có ẩn là $b-c$, khi đó để phương trình có nghiệm thì

$$\Delta = X^2 - 4(X^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow X^2 \leq \frac{4}{2} \Rightarrow X \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Suy ra $a-c \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$; $b = \frac{2}{3}$; $c = \frac{2-\sqrt{3}}{3}$ và các hoán vị.

Chủ đề 2

SỬ DỤNG CÁC TÍNH CHẤT CỦA TỈ SỐ, TÍNH CHẤT GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI VÀ TÍNH CHẤT CỦA TAM THỨC BẬC HAI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Một số tính chất của tỉ số

+ Với các số thực dương a, b bất kì, ta luôn có $a \geq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$

+ Với các số thực dương a, b, c, d bất kì, ta có:

- Nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

- Nếu $\frac{a}{b} > 1$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$

- Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

2. Một số tính chất của giá trị tuyệt đối trong bất đẳng thức

+ $|a| \geq a; |a| \geq 0$

+ $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$

+ $|a| \geq b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq b \\ a \leq -b \end{cases}$

+ $|a+b| \leq |a|+|b|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a, b cùng dấu.

+ $|a-b| \leq |a|+|b|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a, b cùng dấu.

+ $|a|-|b| \leq |a-b|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a \geq b \geq 0$ hoặc $a \leq b \leq 0$.

+ Cho các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$, thế thì hiển nhiên ta có

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

+ Cho các số thực khác không bất kì a, b , thế thì hiển nhiên ta có

$$\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| \geq 2. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } a = \pm b.$$

3. Một số tính chất của tam thức bậc hai thường dùng trong bất đẳng thức.

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$. Khi đó ta viết được

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(ax - \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac$$

Từ đó ta có một số tính chất sau:

Tính chất 1: Đa thức có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$

Tính chất 2: Nếu $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$ thì $af(x) \geq 0$.

Tính chất 3: Nếu $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ và đa thức có hai nghiệm $x_1; x_2$ ($x_1 < x_2$) thì

+ $af(x) \leq 0$ với mọi giá trị $x_1 \leq x \leq x_2$.

+ $af(x) > 0$ với mọi giá trị $x \leq x_1$ hoặc $x \geq x_2$.

B. Một số ví dụ minh họa.

1. Sử dụng tính chất của tỉ số.

Ví dụ 1. Cho a, b là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{a+2b} < 1$$

Phân tích: Để ý ta thấy $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$, như vậy để chứng minh bất đẳng thức ta cần đánh giá được

$$\frac{a}{2a+b} < \frac{a}{a+b}; \quad \frac{b}{2b+a} < \frac{b}{a+b}.$$

Lời giải

Do a, b là các số dương nên ta có $2a+b > a+b$; $a+2b > a+b$

Từ đó suy ra
$$\frac{a}{2a+b} < \frac{a}{a+b}; \quad \frac{b}{2b+a} < \frac{b}{a+b}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+a} < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức kép trên ta nhận thấy khó có thể biến đổi tương đương để chứng minh bài toán, ở đây ta cũng không cần phải dự đoán dấu đẳng thức xảy ra. Để ý một chút ta có

$1 = \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c}$, như vậy cần đánh giá được $\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b}$. Dễ nhận thấy

đánh giá đó hiển nhiên đúng, do đó chỉ cần áp dụng tương tự thì bất đẳng thức bên trái được chứng minh.

Để chứng minh được bất đẳng thức bên phải thì ta cần phải đánh giá được $\frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$, việc này hoàn toàn có thể thực hiện được nhờ tính chất của tỉ số.

Lời giải

Do a, b, c là các số dương nên ta có $\frac{a}{a+b} < 1$. Vì vậy theo tính chất của tỉ số ta được

$$\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$$

Áp dụng tương tự ta có

$$\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c} < \frac{a+b}{a+b+c}, \quad \frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a} < \frac{b+c}{a+b+c}$$

Cộng về theo về của ba bất đẳng thức kép trên ta được

$$1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 3. Cho a, b, c, d là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

Lời giải

Theo tính chất của tỉ số ta có

$$\frac{a}{a+b+c} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d}$$

Mặt khác ta lại có

$$\frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d}$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d}$$

Tương tự ta có

$$\begin{aligned} \frac{b}{a+b+c+d} &< \frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{a+b+c+d} \\ \frac{c}{a+b+c+d} &< \frac{c}{c+d+a} < \frac{c+b}{a+b+c+d} \\ \frac{d}{a+b+c+d} &< \frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d} \end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được.

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

Nhận xét: Để chứng minh các bất đẳng thức ta cần tinh ý sử dụng các tính chất của tỉ số. Ngoài ra các bất đẳng thức trong ở hai ví dụ trên có thể được phát biểu lại như sau: Cho các biểu thức với a, b, c là các số thực dương.

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \\ B &= \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} \end{aligned}$$

Chứng minh A, B không thể nhận các giá trị nguyên.

Ví dụ 4. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$$

Phân tích: Để ý ta nhận thấy $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ab}{b^2} < \frac{cd}{d^2}$, đến đây ta áp dụng tính chất của tỉ số để chứng minh bất đẳng thức.

Lời giải

Từ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ suy ra $\frac{ab}{b^2} < \frac{cd}{d^2}$, theo tính chất tỉ số ta được

$$\frac{ab}{b^2} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{cd}{d^2} = \frac{c}{d}$$

Do đó ta có $\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 5. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$$

Phân tích: Bất đẳng thức cần chứng minh có chứa căn, nhìn chiều bất đẳng thức ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Cauchy. Tuy nhiên để đánh giá được bất đẳng thức theo Cauchy không hề đơn giản tí nào với những ai mới học bất đẳng thức.

Chú ý đến giả thiết a, b, c là ba cạnh của một tam giác, nó có mối liên hệ như thế nào với $\frac{a}{b+c}$,

do $b+c > a$ nên ta thấy được $0 < \frac{a}{b+c} < 1$, với kết quả đó ta có thể khử căn bằng đánh giá

$\sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{b+c}$. Đến đây thì bài toán được giải quyết triệt để tương tự như ví dụ thứ nhất.

Lời giải

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có

$$0 < \frac{a}{b+c} < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{b+c}$$

Vì a là số dương nên theo tính chất của tỉ số ta được $\frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c}$

Do đó ta có $\sqrt{\frac{a}{b+c}} > \frac{a}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự ta được $\sqrt{\frac{b}{c+a}} > \frac{b}{a+b+c}$; $\sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{c}{a+b+c}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 6. Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right) < \frac{a+b}{a+b+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$$

Phân tích: Để ý ta thấy $\frac{a}{a+1} < 1$ nên có $\frac{a}{a+b+1} < \frac{a}{a+1}$ và $\frac{a}{a+1} < \frac{a+b}{a+b+1}$, áp dụng tương tự ta chứng minh được bất đẳng thức.

Lời giải

+ Trước hết ta chứng minh $\frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right) < \frac{a+b}{a+b+1}$

Do a là số thực dương nên ta có $\frac{a}{a+1} < 1$ suy ra $\frac{a}{a+1} < \frac{a+b}{a+b+1}$

Chứng minh tương tự ta có $\frac{b}{b+1} < \frac{a+b}{a+b+1}$

Cộng vế với vế của hai bất đẳng thức cuối ta được

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right) < \frac{a+b}{a+b+1}$$

+ Ta chứng minh $\frac{a+b}{a+b+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$

Do a, b dương ta có $\frac{a}{a+1} > \frac{a}{a+b+1}$ và $\frac{b}{b+1} > \frac{b}{a+b+1}$

Cộng vế với vế của hai bất đẳng thức này ta được $\frac{a+b}{a+b+1} < \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1}$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta được bài toán cần chứng minh.

Ví dụ 7. Cho $a_1; a_2; \dots; a_n; b_1; b_2; \dots; b_n$ là các số thực dương. Kí hiệu

$$M = \max\left(\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; \dots; \frac{a_n}{b_n}\right); m = \min\left(\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; \dots; \frac{a_n}{b_n}\right)$$

Chứng minh rằng: $m \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \leq M$

Phân tích: Nhận thấy $M = \max\left(\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; \dots; \frac{a_n}{b_n}\right); m = \min\left(\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; \dots; \frac{a_n}{b_n}\right)$ nên ta có $m \leq \frac{a_i}{b_i} \leq M$

với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Do đó ta được $mb_i \leq a_i \leq Mb_i$, đến đây ta áp dụng cho $i = 1, 2, \dots, n$ thì ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Lời giải

Vì $M = \max\left(\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; \dots; \frac{a_n}{b_n}\right); m = \min\left(\frac{a_1}{b_1}; \frac{a_2}{b_2}; \dots; \frac{a_n}{b_n}\right)$ nên ta được

$$m \leq \frac{a_i}{b_i} \leq M \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n.$$

Suy ra $mb_i \leq a_i \leq Mb_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Lần lượt cho i bằng các giá trị $1, 2, \dots, n$ rồi cộng các theo vế lại với nhau ta được

$$(b_1 + b_2 + \dots + b_n)m \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq M(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

Hay $m \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \leq M$. Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 8. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy cần phải thay đại lượng ở các mẫu bên vế trái bởi các đại lượng nhỏ hơn sao cho khi biểu thức thu được vẫn nhỏ hơn hoặc bằng vế phải. Điều đó có nghĩa là cần tìm vế phải cho bất đẳng thức $a^3 + b^3 + abc \geq ?$, để ý trong vế trái của bất đẳng thức ta không đánh giá được gì từ tích abc , cho nên ta tập trung đánh giá $a^3 + b^3$. Trong vế phải của bất đẳng thức cần chứng minh có chứa tích abc ở mẫu nên khi đánh giá mẫu vế trái ta cũng cần làm xuất hiện tích abc ở các phân thức, như vậy khi đánh giá $a^3 + b^3$ cần làm xuất hiện tích ab , điều này gợi ý cho ta đánh giá rất đẹp $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$. Nếu chứng minh được bất đẳng thức đó thì ta thu được kết quả là $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$ khi đó ta suy ra được đánh giá $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b + c)$. Đến đây ta có các đánh giá tiếp theo

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{ab(a + b + c)} = \frac{c}{abc(a + b + c)}$$

Như vậy ta cần tập trung chứng minh $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$, bất đẳng thức này được biến đổi tương đương thành $(a + b)(a - b)^2 \geq 0$ là một đánh giá đúng.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 - ab(a + b) &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b) \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2 - ab) = (a + b)(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= (a + b)(a - b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 \geq ab(a + b) &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b) + abc \\ &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b + c) \end{aligned}$$

Từ đó ta được

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{ab(a + b + c)} = \frac{c}{abc(a + b + c)}$$

Chứng minh tương tự ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} &\leq \frac{1}{bc(a + b + c)} = \frac{a}{abc(a + b + c)} \\ \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} &\leq \frac{1}{ac(a + b + c)} = \frac{b}{abc(a + b + c)} \end{aligned}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét: Bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức hay. Để chứng minh được nó ta cần chứng minh $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$. Nhưng vấn đề là làm sao tìm ra được bất đẳng thức phụ đó. Đầu tiên là do yêu cầu làm xuất hiện tích ab , kể đến là cần phải làm cho hai vế đồng bậc 3 và cuối cùng là chú ý khi $a = b$ thì hai vế của bất đẳng thức đó bằng nhau. Khi phân tích bài toán ta cần chú ý đến các yếu tố như đẳng thức xảy ra ở đâu, tính đồng bậc của bất đẳng thức, chọn chiều đánh giá như thế nào cho hợp lý,... Tuy nhiên khi tiến hành các bước phân tích mà giả thiết càng gần với kết luận thì cơ hội càng lớn.

Ví dụ 9. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2}$$

Phân tích: Ý tưởng tương tự như ví dụ trên, ở đây ta chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$, như vậy ta cần có các đánh giá sao cho đảm bảo có đẳng thức xảy ra. Nhận thấy $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $b^2 + 1 \geq 2b$ nên $a^2 + 2b^2 + 3 \geq 2(ab + b + 1)$.

Khi đó ta có đánh giá $\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ab + b + 1}$. Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ac + a + 1} \right)$$

Vấn đề còn lại là chứng minh được $\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} = 1$. Đây là một đẳng thức quen thuộc và nhiều hướng để xử lý nó.

Lời giải

Ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $b^2 + 1 \geq 2b \Rightarrow a^2 + 2b^2 + 3 \geq 2(ab + b + 1)$

Do đó ta được
$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ab + b + 1}$$

Chứng minh tương tự ta có

$$\frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{bc + c + 1}; \quad \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ca + a + 1}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} \right)$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} = 1$$

Đến đây ta có hai cách chứng minh đẳng thức trên như sau

Cách 1: Do $abc = 1$, nên tồn tại các số dương x, y, z để $a = \frac{x}{y}$; $b = \frac{y}{z}$; $c = \frac{z}{x}$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} &= \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + 1} + \frac{1}{\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + 1} + \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{z}{y} + 1} \\ &= \frac{z}{x + y + z} + \frac{x}{x + y + z} + \frac{y}{x + y + z} = 1 \end{aligned}$$

Cách 2: Do $abc = 1$, nên ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} &= \frac{abc}{ab + b + abc} + \frac{a}{abc + ac + a} + \frac{1}{ca + a + 1} \\ &= \frac{ac}{a + 1 + ac} + \frac{a}{1 + ac + a} + \frac{1}{ca + a + 1} = 1 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 10. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} + \frac{2}{(b+1)^2 + c^2 + 1} + \frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} \leq 1$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$(a+1)^2 + b^2 + 1 = a^2 + b^2 + 2a + 2 \geq 2ab + 2a + 2$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned} \frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} + \frac{2}{(b+1)^2 + c^2 + 1} + \frac{2}{(a+1)^2 + b^2 + 1} \\ \leq \frac{1}{ab + a + 1} + \frac{1}{bc + b + 1} + \frac{1}{ca + c + 1} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{1}{ab + a + 1} + \frac{1}{bc + b + 1} + \frac{1}{ca + c + 1} = 1$$

Đến đây ta có hai cách chứng minh đẳng thức trên như sau

Cách 1: Do $abc = 1$, nên tồn tại các số dương x, y, z để $a = \frac{x}{y}$; $b = \frac{y}{z}$; $c = \frac{z}{x}$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} &= \frac{1}{\frac{x}{z} + \frac{x}{y} + 1} + \frac{1}{\frac{y}{x} + \frac{y}{z} + 1} + \frac{1}{\frac{z}{y} + \frac{z}{x} + 1} \\ &= \frac{yz}{xy+yz+zx} + \frac{xz}{xy+yz+zx} + \frac{yy}{xy+yz+zx} = 1\end{aligned}$$

Cách 2: Do $abc = 1$, nên ta được

$$\begin{aligned}\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} &= \frac{abc}{ab+a+abc} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{b}{cab+bc+b} \\ &= \frac{bc}{bc+b+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{b}{1+bc+b} = 1\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét: Các bất đẳng thức trong ví dụ 8, 9 và 10 cho thấy kỹ thuật đánh giá ở mẫu được sử dụng như thế nào trong chứng minh bất đẳng thức, thực chất của việc đánh giá này là thay thế các mẫu bởi các đại lượng khác sao cho các đánh giá cùng chiều và đảm bảo dấu đẳng thức xảy ra. Điều quan trọng là biết cách chọn các đánh giá phù hợp sao cho càng chặt càng tốt.

Ví dụ 11. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+b+ab} + \frac{bc}{b+c+bc} + \frac{ca}{c+a+ca} \leq 1$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta có nhận xét là tử của các phân thức là các đại lượng ab, bc, ca . Chú ý đến giả thiết $abc = 1$ ta có thể viết lại phân

thức bên vế trái theo các ý tưởng như $\frac{ab}{a+b+ab} = \frac{1}{ac+bc+1}$ hoặc là $\frac{ab}{a+b+ab} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1}$.

Đến đây ta viết được vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh thành các biểu thức $\frac{1}{ac+bc+1} + \frac{1}{ab+bc+1} + \frac{1}{bc+ca+1}$ hoặc $\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + 1}$ và để đơn giản ta có

thể đặt $x^3 = ab; y^3 = bc; z^3 = ca$ hoặc $x^3 = \frac{1}{a}; y^3 = \frac{1}{b}; z^3 = \frac{1}{c}$ và chú ý đến giả thiết $abc = 1$ dẫn đến được $xyz = 1$, lúc này ta được bất đẳng thức như ví dụ 9.

Lời giải

Để ý với điều kiện $abc = 1$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + 1} \leq 1$$

Đặt $x^3 = \frac{1}{a}; y^3 = \frac{1}{b}; z^3 = \frac{1}{c}$, khi đó ta được $xyz = 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{x^3 + y^3 + 1} + \frac{1}{y^3 + z^3 + 1} + \frac{1}{z^3 + x^3 + 1} \leq 1$$

Ta chứng minh được $x^3 + y^3 + 1 \geq xy(x+y) + xyz = xy(x+y+z)$ và áp dụng tương tự ta được

$$\frac{1}{x^3 + y^3 + 1} + \frac{1}{y^3 + z^3 + 1} + \frac{1}{z^3 + x^3 + 1} \leq \frac{1}{x+y+z} \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Nhận xét: Bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức khó, khi tôi phân tích để tìm lời giải thì các câu hỏi được đặt ra như biến đổi các biểu thức như thế nào để bài toán đơn giản hơn, sử dụng giả thiết như thế nào đây, thay vì đánh giá cả tử và mẫu ta có quy về đánh giá mẫu được không. Sau các bước biến đổi như trên thì bài toán nhìn có vẻ dễ hơn đôi chút và nếu tận dụng tốt các lợi thế này thì công việc còn lại sẽ không gây được khó khăn nữa.

Ví dụ 12. Cho các số thực $a; b; c \in [0; 1]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{ac + b + 1} + \frac{b}{ab + c + 1} + \frac{c}{bc + a + 1} \leq 1$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy không thể trực tiếp đánh giá tử của các phân thức, do vậy ta tìm cách đánh giá mẫu của mỗi phân thức. Chú ý đến chiều của bất đẳng thức trên, ta cần một đánh giá kiểu $ab + c + 1 \geq ?$. Giả thiết có gọi cho ta điều gì? Nên nhớ là khi $a; b; c \in [0; 1]$ ta thường thu được các bất đẳng thức dạng $(1 - a)(1 - b) \geq 0$ hay $1 + ab \geq a + b$, đến đây ta cộng vào hai vế với c thì được $ab + c + 1 \geq a + b + c$. Lúc này ta có đánh giá tốt cho việc chứng minh bất đẳng thức là $\frac{a}{ab + c + 1} \leq \frac{a}{a + b + c}$. Chỉ cần áp dụng tương tự cho các trường hợp còn lại là ta hoàn thành chứng minh bài toán.

Lời giải

Vì $a; b \in [0; 1]$ nên ta có $(1 - a)(1 - b) \geq 0$ suy ra $1 + ab \geq a + b$

Do đó ta được $ab + c + 1 \geq a + b + c$ suy ra $\frac{a}{ab + c + 1} \leq \frac{a}{a + b + c}$.

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{b}{ab + c + 1} \leq \frac{b}{a + b + c}; \quad \frac{c}{bc + a + 1} \leq \frac{c}{a + b + c}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{ac + b + 1} + \frac{b}{ab + c + 1} + \frac{c}{bc + a + 1} \leq 1$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 13. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1 + a^2}{1 + b^2} + \frac{1 + b^2}{1 + c^2} + \frac{1 + c^2}{1 + a^2} \leq \frac{7}{2}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy đẳng thức không xảy ra tại $a = b = c$ mà xảy ra tại $a = 1; b = c = 0$ và các hoán vị. Trong trường hợp này để dễ có những đánh giá hợp lý ta có thể sắp thứ tự các biến. Vì đẳng thức xảy ra tại $a = 1; b = c = 0$ nên không mất tính tổng quát ta sắp thứ tự các biến bằng cách chọn a là số lớn nhất. Khi đó ta mạnh dạn có các đánh giá kiểu như $1 + b^2 \geq 1; 1 + c^2 \geq 1$ mà vẫn bảo toàn được dấu đẳng thức xảy ra, các đánh giá này dẫn tới $\frac{1 + a^2}{1 + b^2} \leq 1 + a^2; \frac{1 + b^2}{1 + c^2} \leq 1 + b^2$. Còn lại $\frac{1 + c^2}{1 + a^2}$ cần phải đánh giá như thế nào để cùng chiều với hai đánh giá trước đó. Để ý là sau khi đánh giá hai phân thức đầu ta thu được $a^2 + b^2$ như vậy ta cần làm xuất hiện c^2 trong đánh giá $\frac{1 + c^2}{1 + a^2}$. Để ý đến a

là số lớn nhất nên ta có $\frac{1+c^2}{1+a^2} \leq c^2 + \frac{1}{1+a^2}$. Kết quả là sau một số bước đánh giá như trên ta thu được đại lượng $2+a^2+b^2+c^2 + \frac{1}{1+a^2}$, bây giờ nếu biến đổi được thành biểu thức chỉ chứa biến a thì càng dễ chứng minh hơn. Từ giả thiết $a+b+c=1$ và chú ý đến $b=c=0$ ta có một đánh giá rất tự nhiên là $b^2+c^2 \leq (b+c)^2 = (1-a)^2$. Bây giờ việc chứng minh bất đẳng thức hoàn toàn đơn giản.

Lời giải

Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử a là số lớn nhất trong ba số a, b, c. Khi đó ta có $1+b^2 \geq 1$; $1+c^2 \geq 1$.

$$\text{Do đó } \frac{1+a^2}{1+b^2} \leq 1+a^2; \frac{1+b^2}{1+c^2} \leq 1+b^2; \frac{1+c^2}{1+a^2} \leq c^2 + \frac{1}{1+a^2}$$

Từ đó ta được bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \frac{1+a^2}{1+b^2} + \frac{1+b^2}{1+c^2} + \frac{1+c^2}{1+a^2} &\leq 2+a^2+b^2+c^2 + \frac{1}{1+a^2} \\ &\leq 2+a^2+(b+c)^2 + \frac{1}{1+a^2} = 2+a^2+(1-a)^2 + \frac{1}{1+a^2} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$2+a^2+(1-a)^2 + \frac{1}{1+a^2} \leq \frac{7}{2} \Leftrightarrow (a-1)(4a^3+3a-1) \leq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1$; $b=c=0$ và các hoán vị.

Nhận xét: Điểm mấu chốt để tìm ra cách chứng minh bất đẳng thức trên chính là các đánh giá

$\frac{1+a^2}{1+b^2} \leq 1+a^2$; $\frac{1+b^2}{1+c^2} \leq 1+b^2$; $\frac{1+c^2}{1+a^2} \leq c^2 + \frac{1}{1+a^2}$, việc phát hiện ra các đánh giá đó đòi hỏi phải có sự suy luận một cách logic.

Ví dụ 14. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} = 3$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+a+bc} + \frac{b}{1+b+ca} + \frac{c}{1+c+ab} \geq \frac{3}{4}$

Lời giải

Đặt $x = \frac{a}{1+bc}$; $y = \frac{b}{1+ca}$; $z = \frac{c}{1+ab}$, suy ra ta có $x+y+z=3$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \geq \frac{3}{4}$$

Mà ta có $\frac{x}{1+x} \geq \frac{x}{1+x+y+z}$; $\frac{y}{1+y} \geq \frac{y}{1+x+y+z}$; $\frac{z}{1+z} \geq \frac{z}{1+x+y+z}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \geq \frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=3$; $b=c=0$ và các hoán vị.

2. Sử dụng tính chất giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 15. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{c} - \frac{c}{a} - \frac{a}{c} \right| < 1$$

Phân tích: Để ý ta có $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{c} - \frac{c}{a} - \frac{a}{c} = \frac{a^2c + b^2a + c^2b - a^2b - c^2a - b^2c}{abc}$, phân tích thành nhân tử $a^2c + b^2a + c^2b - a^2b - c^2a - b^2c = (a-b)(b-c)(c-a)$, mà a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên $|a-b| < c; |b-c| < a; |c-a| < b$. Đến đây ta chứng minh được bất đẳng thức.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} \left| \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{c} - \frac{c}{a} - \frac{a}{c} \right| &= \left| \frac{a^2c + b^2a + c^2b - a^2b - c^2a - b^2c}{abc} \right| \\ &= \frac{|(a-b)(b-c)(c-a)|}{abc} \end{aligned}$$

Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên ta có

$$|a-b| < c; |b-c| < a; |c-a| < b$$

Do đó ta suy ra

$$|(a-b)(b-c)(c-a)| < abc$$

Hay

$$\frac{|(a-b)(b-c)(c-a)|}{abc} < 1$$

Suy ra

$$\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{c} - \frac{c}{a} - \frac{a}{c} \right| < 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 16. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} + \sqrt{c^2 - ca + a^2} \geq 3$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát kĩ bất đẳng thức ta có nhận định là cần phải có một đánh giá kiểu $a^2 - ab + b^2 \geq k(a+b)^2$ để khi khử căn ta thu được $a+b$. Vấn đề là cần xác định giá trị của k để đánh giá trên là đúng, nhớ là đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$ nên ta xác định được $k = \frac{1}{4}$, tức là ta có $a^2 - ab + b^2 \geq \frac{1}{4}(a+b)^2$. Một điều nữa cần chú ý là các biến a, b, c là các số thực bất kì nên khi khử căn ta cần lấy giá trị tuyệt đối và để ý đến $|a+b| \geq a+b$.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh $a^2 - ab + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{4}$.

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$4(a^2 + b^2 - ab) \geq a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow 3(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow 3(a-b)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên bất đẳng thức trên được chứng minh.

Từ bất đẳng thức trên ta có

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} \geq \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}} = \frac{|a+b|}{2} \geq \frac{a+b}{2}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \frac{b+c}{2}; \sqrt{c^2 - ca + a^2} \geq \frac{c+a}{2}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} + \sqrt{c^2 - ca + a^2} \geq \frac{2(a+b+c)}{2} = 3$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Ví dụ 17. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$|a| + |b| + |c| + |a+b+c| \geq |a+b| + |b+c| + |c+a|$$

Phân tích: Theo bất đẳng thức giá trị tuyệt đối ta luôn có $|a| + |b| \geq |a+b|$, bây giờ ta tìm cách chứng minh $|c| + |a+b+c| \geq |b+c| + |c+a|$. Để là mất các giá trị tuyệt đối ta thường sử dụng cách xét dấu các số hoặc là bình phương hai vế, trong trường hợp này ta chọn cách bình phương hai vế vì việc xét dấu rất khó khăn. Khi bình phương hai vế ta thu được kết quả là:

$$ab + |c(a+b+c)| \geq |(a+c)(b+c)| \Leftrightarrow ab + |c(a+b+c)| \geq |ab + c(a+b+c)|$$

Bất đẳng thức sẽ được giải quyết nếu như ta khẳng định được $ab \geq 0$. Chú ý đến vai trò của a, b, c trong bất đẳng thức thì việc giả sử $ab \geq 0$ là hoàn toàn thực hiện được. Bây giờ ta cần trình bày lại lời giải nữa là xong.

Lời giải

Trong ba số a, b, c có ít nhất hai số cùng dấu, không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là a, b .

Khi đó ta được $|a| + |b| = |a+b|$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh $|c| + |a+b+c| \geq |b+c| + |c+a|$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} c^2 + (a+b+c)^2 + 2|c(a+b+c)| &\geq (a+c)^2 + (b+c)^2 + 2|(a+c)(b+c)| \\ \Leftrightarrow ab + |c(a+b+c)| &\geq |(a+c)(b+c)| \Leftrightarrow ab + |c(a+b+c)| \geq |ab + c(a+b+c)| \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo bất đẳng thức giá trị tuyệt đối.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi a, b, c cùng dấu.

Ví dụ 18. Cho a, b là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$\left| \frac{(a-b)(1-ab)}{(1+a)(1+b)^2} \right| \leq \frac{1}{4}$$

Phân tích: Ta có một đẳng thức quen thuộc là $(1+a)^2(1+b)^2 = (1+a+b+ab)^2$ và như vậy nếu ta đánh giá được $|(a-b)(1-ab)| \leq \frac{1}{4}(1+a+b+ab)^2$ thì bài toán xem như được giải quyết. Để ý đến

đánh giá theo bất đẳng thức Cauchy là $(a+b)(1+ab) \leq \frac{1}{4}(1+a+b+ab)^2$ và ta cần chỉ ra được $|(a-b)(1-ab)| \leq |(a+b)(1+ab)|$, đánh giá này là hoàn toàn đúng dẫn theo bất đẳng thức giá trị tuyệt đối.

Lời giải

Theo bất đẳng thức giá trị tuyệt đối ta được

$$|a - b| \leq |a + b|; |1 - ab| \leq |1 + ab|$$

Do đó ta được

$$\left| \frac{(a - b)(1 - ab)}{(1 + a)^2 (1 + b)^2} \right| \leq \left| \frac{(a + b)(1 + ab)}{(1 + a)^2 (1 + b)^2} \right| \leq \frac{(ab + a + b + 1)^2}{4(1 + a)^2 (1 + b)^2} = \frac{1}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = 0$; $b = 1$ hoặc $a = 1$; $b = 0$.

Ví dụ 19. Cho a, b, c là các số thực đôi một không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng:

$$-1 < \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} < 1$$

Phân tích: Ta viết lại bất đẳng thức là $\left| \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} \right| < 1$, như vậy nếu đánh giá được

$|a^2 - b^2| \leq |a^2 + b^2|$ thì bài toán được chứng minh.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left| \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} \right| < 1$$

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $|a^2 - b^2| \leq |a^2 + b^2|$.

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$(a^2 - b^2)^2 \leq (a^2 + b^2)^2 \Leftrightarrow 4a^2b^2 \geq 0, \text{ Đúng với mọi } a, b.$$

Chứng minh tương tự như trên ta được

$$|b^2 - c^2| \leq |b^2 + c^2|; |c^2 - a^2| \leq |c^2 + a^2|$$

Nhân theo về các kết quả trên ta được

$$\left| \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} \right| \leq 1$$

Vì đẳng thức không xảy ra nên ta được

$$\left| \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} \right| < 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 20. Cho a, b, c là các số thực không âm bất kì. Chứng minh rằng:

$$3\sqrt[3]{abc} + |a - b| + |b - c| + |c - a| \geq a + b + c$$

Phân tích: Nhận định đầu tiên khi tìm hiểu bất đẳng thức trên là tìm cách phá giá trị tuyệt đối. Quan sát kĩ ta thấy không thể bình phương cũng không thể xét dấu các đại lượng để phá giá trị tuyệt đối được. Trong trường hợp này ta thử nghĩ đến cách sắp thứ tự các biến để phá giá trị tuyệt đối xem có thể chứng minh được hay không. Chẳng hạn ta chọn $a \geq b \geq c$, khi đó ta phá được các giá trị tuyệt đối và bất đẳng

thức được viết lại thành $3\sqrt[3]{abc} + a - b - 3c \geq 0$, nhận thấy $a - b \geq 0$; $3\sqrt[3]{abc} - 3c \geq 0$ nên bất đẳng thức thu được hoàn toàn đúng.

Lời giải

Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} & 3\sqrt[3]{abc} + (a - b) + (b - c) + (a - c) \geq a + b + c \\ \Leftrightarrow & 3\sqrt[3]{abc} + a - b - 3c \geq 0 \Leftrightarrow a - b + 3\sqrt[3]{c}(\sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{c^2}) \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $a \geq b \geq c$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 21. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$|a - b| + |b - c| + |c - a| \geq 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}$$

Lời giải

Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} & a - b + b - c + a - c \geq 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} \\ \Leftrightarrow & 2(a - c) \geq 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} \\ \Leftrightarrow & 4(a - c)^2 \geq 2\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right] \\ \Leftrightarrow & (a - c)^2 \geq (b - c)^2 + (c - a)^2 \Leftrightarrow [(a - b) + (b - c)]^2 \geq (b - c)^2 + (c - a)^2 \\ \Leftrightarrow & 2(a - b)(b - c) \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $a \geq b \geq c$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 22. Cho a, b, c là các số thực không âm bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq abc + \frac{3|(a - b)(b - c)(c - a)|}{4}$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy về phải xuất hiện các đại lượng $a - b$; $b - c$; $c - a$ nên suy nghĩ đầu tiên khi biến đổi bất đẳng thức là cần phải làm thế nào để xuất hiện ở vế trái các đại lượng $a - b$; $b - c$; $c - a$, chính yêu cầu này làm ta liên tưởng đến một hằng đẳng thức bậc ba hết sức quen thuộc đó là $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right]$. Như vậy sau khi áp dụng thì vế trái của bất đẳng chứa đại lượng $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ mà bên vế phải lại là tích các đại lượng $a - b$; $b - c$; $c - a$, từ chiều của bất đẳng thức cần chứng minh ta nghĩ đến đánh giá $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 3\sqrt{[(a - b)(b - c)(c - a)]^2}$. Bây giờ ta cần một đánh giá kiểu $2(a + b + c) \geq 3\sqrt{(a - b)(b - c)(c - a)}$ là hoàn thành chứng minh bất đẳng thức. Chú ý đến dấu giá trị tuyệt đối và các biến không âm ta có được các đánh giá đúng là $a + b \geq |a - b|$; $b + c \geq |b - c|$; $c + a \geq |c - a|$, đến đây thì các yêu cầu để chứng minh bài toán đã được xử lý, việc trình bày lời giải hoàn toàn đơn giản.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]}{6} \geq \frac{3|(a-b)(b-c)(c-a)|}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geq 9|(a-b)(b-c)(c-a)|$$

Theo tính chất của bất đẳng thức giá trị tuyệt đối ta có

$$a+b \geq |a-b|; b+c \geq |b-c|; c+a \geq |c-a|$$

Do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$2(a+b+c) = (a+b) + (b+c) + (c+a) \geq |a-b| + |b-c| + |c-a|$$

$$\geq 3\sqrt[3]{|(a-b)(b-c)(c-a)|}$$

Và $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 3\sqrt[3]{[(a-b)(b-c)(c-a)]^2}$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$2(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geq 9|(a-b)(b-c)(c-a)|$$

Vậy Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 23. Cho n số thực $x_1; x_2; \dots; x_n$ (với $n \geq 3$). Chứng minh rằng:

$$\text{Max}\{x_1; x_2; \dots; x_n\} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_{n-1} - x_n|}{2n}$$

Trong đó $\text{Max}\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ là số lớn nhất trong các số thực $x_1; x_2; \dots; x_n$

Lời giải

Đề ý là trong hai số thực x, y bất kì ta luôn có

$$\text{Min}\{x, y\} \leq x, y \leq \text{Max}\{x, y\} \text{ và } \text{Max}\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

Sử dụng đẳng thức $\text{Max}\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}$, ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_n - x_1|}{2n} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|}{2n} + \frac{x_2 + x_3 + |x_2 - x_3|}{2n} + \dots + \frac{x_n + x_1 + |x_n - x_1|}{2n} \\ &\leq \frac{\text{Max}\{x_1, x_2\} + \text{Max}\{x_2, x_3\} + \dots + \text{Max}\{x_n, x_1\}}{n} \leq \text{Max}\{x_1; x_2; \dots; x_n\} \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

3. Sử dụng tính chất của tam thức bậc hai.

Ví dụ 24. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 - a + 2b + 4b^2 - 4ab \leq 0$

Chứng minh rằng: $0 \leq a - 2b \leq 1$

Phân tích: Để ý rằng bất phương trình bậc hai $At^2 + Bt + C \leq 0 \Leftrightarrow t_1 < t < t_2$ với $A > 0$, trong đó $t_1; t_2$ là các nghiệm của tam thức $At^2 + Bt + C$. Phân tích bất đẳng thức giả thiết ta thu được $(a - 2b)^2 - (a - 2b) \leq 0$, ta xem vế trái là đa thức biến $a - 2b$, khi đó ta có lời giải sau.

Lời giải

Bất đẳng thức giả thiết tương đương với

$$a^2 - 4ab + 4b^2 - (a - 2b) \leq 0 \Leftrightarrow (a - 2b)^2 - (a - 2b) \leq 0$$

Đặt $t = a - 2b \Rightarrow t^2 - t \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq a - 2b \leq 1$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 25. Cho a, b là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$a^2b^4 + 2(a^2 + 2)b^2 + 4ab + a^2 \geq 4ab^3$$

Phân tích: Bất đẳng thức có hai biến và biến a có bậc cao nhất là 2, do đó ta biến đổi bất đẳng thức theo hướng xuất hiện một tam thức bậc hai có biến là a như sau

$$(b^2 + 1)^2 a^2 + 4b(1 - b^2)a + 4b^2 \geq 0$$

Ta xem vế trái của bất đẳng thức là tam thức bậc hai, để ý đến $(b^2 + 1)^2 > 0$, ta cần chứng minh được biệt thức Δ của tam thức có giá trị âm.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(b^2 + 1)^2 a^2 + 4b(1 - b^2)a + 4b^2 \geq 0$$

Xét đa thức $f(a) = (b^2 + 1)^2 a^2 + 4b(1 - b^2)a + 4b^2$

Khi đó ta có $\Delta = [4b(1 - b^2)]^2 - 4(b^2 + 1)^2 \cdot 4b^2 = -16b^2 \leq 0$

Do đó ta có $(b^2 + 1)^2 f(a) \geq 0$ mà $(b^2 + 1)^2 > 0$ nên ta được

$$f(a) = (b^2 + 1)^2 a^2 + 4b(1 - b^2)a + 4b^2 \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 26. Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn $b < c < d$. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c + d)^2 > 8(ac + bd)$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2 - 2(b - 3c + d)a + (b + c + d)^2 - 8bd > 0$$

Xét tam thức $f(a) = a^2 - 2(b - 3c + d)a + (b + c + d)^2 - 8bd$

Khi đó ta có $\Delta' = (b - 3c + d)^2 - (b + c + d)^2 + 8bd = 8(c - b)(c - d)$

Do $b < c < d$ nên ta được $\Delta' < 0$ suy ra $f(a) > 0$

Hay $a^2 - 2(b - 3c + d)a + (b + c + d)^2 - 8bd > 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 27. Cho a, b, c, d, e là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$$

Phân tích: Bất đẳng thức này đã được chứng minh bằng kỹ thuật biến đổi tương đương. Ở đây ta sử dụng tư tưởng của tam thức bậc hai để chứng minh. Để ý ta viết lại được bất đẳng thức như sau $f(a) = a^2 - (b + c + d + e)a + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$, đến đây ta cần phải chứng minh được $\Delta = (b + c + d + e)^2 - 4(b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \leq 0$. Việc này hoàn toàn thực hiện được nhờ phép biến đổi tương đương hoặc bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b + c + d + e) \geq 0$$

Xét $f(a) = a^2 - (b + c + d + e)a + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$

Khi đó ta có $\Delta = (b + c + d + e)^2 - 4(b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} 4(b^2 + c^2 + d^2 + e^2) &= (1 + 1 + 1 + 1)(b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \\ &\geq (b + c + d + e)^2 \end{aligned}$$

Suy ra $\Delta = (b + c + d + e)^2 - 4(b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \leq 0$

Do đó ta được $f(a) = a^2 - (b + c + d + e)a + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq 0$

Hay bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 28. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $-1 \leq a, b, c \leq 2$ và $a + b + c = 0$.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 6$

Phân tích: Từ giả thiết $-1 \leq a \leq 2$, ta có thể thiết lập được bất đẳng thức bậc hai dạng $(a - 2)(a + 1) \leq 0$, áp dụng tương tự và chú ý đến giả thiết $a + b + c = 0$.

Giải

Theo tính chất về dấu của tam thức bậc hai ta có

$$\begin{aligned} -1 \leq a \leq 2 &\Rightarrow (a - 2)(a + 1) \leq 0 \\ -1 \leq b \leq 2 &\Rightarrow (b - 2)(b + 1) \leq 0 \\ -1 \leq c \leq 2 &\Rightarrow (c - 2)(c + 1) \leq 0 \end{aligned}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$(a^2 - a - 2) + (b^2 - b - 2) + (c^2 - c - 2) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - (a + b + c) \leq 6$$

Vì $a + b + c = 0$ nên $a^2 + b^2 + c^2 \leq 6$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 29. Chứng minh bất đẳng thức Bunhiacopxki.

a) Cho các số thực bất kỳ $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ khác 0. Chứng minh rằng:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

b) Cho các số thực bất kỳ $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ khác 0. Chứng minh rằng:

$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n\right)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

Lời giải

a) Xét đa thức

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)x^2 - 2\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\right)x + \left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) \\ &= \left(a_1^2 x^2 - 2a_1 b_1 x + b_1^2\right) + \left(a_2^2 x^2 - 2a_2 b_2 x + b_2^2\right) + \left(a_3^2 x^2 - 2a_3 b_3 x + b_3^2\right) \\ &= \left(a_1 x - b_1\right)^2 + \left(a_2 x - b_2\right)^2 + \left(a_3 x - b_3\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Vì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có

$$\Delta' = \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\right)^2 - \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) \leq 0$$

Hay
$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\right)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a_1 x - b_1 = a_2 x - b_2 = a_3 x - b_3 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

b) Xét đa thức

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\right)x^2 - 2\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n\right)x + \left(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2\right) \\ &= \left(a_1^2 x^2 - 2a_1 b_1 x + b_1^2\right) + \left(a_2^2 x^2 - 2a_2 b_2 x + b_2^2\right) + \dots + \left(a_n^2 x^2 - 2a_n b_n x + b_n^2\right) \\ &= \left(a_1 x - b_1\right)^2 + \left(a_2 x - b_2\right)^2 + \dots + \left(a_n x - b_n\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Vì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có

$$\Delta' = \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n\right)^2 - \left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2\right) \leq 0$$

Hay
$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n\right)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a_1 x - b_1 = a_2 x - b_2 = \dots = a_n x - b_n \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 30. Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn $a + d = b + c$. Chứng minh rằng: Nếu tồn tại số thực m sao cho $2m > |ad - bc|$ thì với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có:

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) + m^2 \geq 0$$

Phân tích: Quan sát biểu thức bên vế trái ta nhận thấy ngay đây là đa thức bậc 4, với phép đặt biến phụ $y = x^2 - (a + d)x = x^2 - (b + c)x$, khi đó vế trái trở thành đa thức bậc hai, bây giờ ta cần chứng minh được

biệt thức Δ âm, cần chú ý đến giả thiết $2m > |ad - bc|$ vì chắc chắn phải cần đến nó mới có thể chứng minh được.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left[x^2 - (a + d)x + ad \right] \left[x^2 - (b + c)x + bc \right] + m^2 \geq 0$$

Do $a + d = b + c$ nên ta đặt $y = x^2 - (a + d)x = x^2 - (b + c)x$, khi đó ta được bất đẳng thức

$$(y + ad)(y + bc) + m^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + (ad + bc)y + abcd + m^2 \geq 0$$

Xét $f(y) = y^2 + (ad + bc)y + abcd + m^2$

Ta có $\Delta_y = (ad + bc)^2 - 4.1.(abcd + m^2) = (ad - bc)^2 - 4m^2$

Vì $2m > |ad - bc|$ nên $4m^2 > (ad - bc)^2 \Leftrightarrow \Delta_y < 0$ do đó ta có $f(y) \geq 0$

$$\text{Hay } (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) + m^2 \geq 0$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 31. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$(3a + 4b + 5c)^2 \geq 44(ab + bc + ca)$$

Phân tích: Bất đẳng thức có bậc hai đối với mỗi biến, nên ta nghĩ đến việc đưa về tam thức bậc hai. Bất đẳng thức có ba biến nhưng có thêm điều kiện $a + b + c = 1$ cho nên ta có thể chuyển bất đẳng thức thành bất đẳng thức chỉ có hai biến. Đến đây ta chọn một biến làm biến chính, còn lại ta xem như là tham số và sử dụng tính chất tam thức bậc hai là một ý tưởng không tồi chút nào.

Lời giải

Từ giả thiết $a + b + c = 1$ suy ra $c = 1 - a - b$, thay vào bất đẳng thức ta được

$$\begin{aligned} (3a + 4b + 5 - 5a - 5b)^2 &\geq 44ab + 44(a + b)(1 - a - b) \\ \Leftrightarrow 48a^2 + 16(3b - 4)a + 45b^2 - 54b + 25 &\geq 0 \end{aligned}$$

Xét $f(a) = 48a^2 + 16(3b - 4)a + 45b^2 - 54b + 25$, khi đó ta được

$$\Delta' = 64(3b - 4)^2 - 48(45b^2 - 54b + 25) = -176(3b - 1)^2 \leq 0$$

Do đó suy ra $f(a) \geq 0$ hay $48a^2 + 16(3b - 4)a + 45b^2 - 54b + 25 \geq 0$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{3}$; $c = \frac{1}{6}$.

Ví dụ 32. Cho a, b là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$3(1 - a + a^2)(1 - b + b^2) \geq 2(1 - ab + a^2b^2)$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy, bất đẳng thức có tính đối xứng với hai biến a, b và là có bậc hai đối với mỗi biến do đó một cách tự nhiên ta nghĩ đến sử dụng tính chất tam thức bậc hai để chứng minh. Trước hết ta viết lại bất đẳng thức

$$(b^2 - 3b + 3)a^2 + (3b^2 - 5b + 3)a + 3b^2 - 3b + 1 \geq 0$$

Xem vế trái là một tam thức bậc hai biến a khi đó, để ý đến $b^2 - 3b + 3 > 0$ ta cần chứng minh được biệt thức $\Delta \leq 0$.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(b^2 - 3b + 3)a^2 + (3b^2 - 5b + 3)a + 3b^2 - 3b + 1 \geq 0$$

Xét tam thức bậc hai

$$f(a) = (b^2 - 3b + 3)a^2 + (3b^2 - 5b + 3)a + 3b^2 - 3b + 1$$

Khi đó ta được

$$\Delta = (3b^2 - 5b + 3)^2 - 4(b^2 - 3b + 3)(3b^2 - 3b + 1) = -(a^2 - 3a + 1) \leq 0$$

Để ý ta thấy $b^2 - 3b + 3 = \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, do đó ta được $f(a) \geq 0$

Hay $(b^2 - 3b + 3)a^2 + (3b^2 - 5b + 3)a + 3b^2 - 3b + 1 \geq 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} b^2 - 3b + 1 = 0 \\ a = \frac{3b^2 - 5b + 3}{2(b^2 - 3b + 3)} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Ví dụ 33. Cho a, b, c là các số thực không âm bất kì. Chứng minh rằng:

$$3(1 - a + a^2)(1 - b + b^2)(1 - c + c^2) \geq 1 + abc + a^2b^2c^2$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy bất đẳng thức có tính đối xứng và có bậc hai đối với mỗi biến, do đó một cách tự nhiên ta nghĩ đến tam thức bậc hai. Như vậy ta cần chọn một biến chính, là c chẳng hạn, khi đó các biến a, b đóng vai trò tham số. Để ý thấy vế trái của bất đẳng thức có đại lượng $(1 - a + a^2)(1 - b + b^2)$ rất cồng kềnh khi biến đổi, do đó ta cần thay đại lượng đó bằng một đại lượng bé hơn, chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta có hai ý tưởng là

$$(1 - a + a^2)(1 - b + b^2) \geq (2a - a)(2b - b) = ab$$

$$\text{Hoặc } (1 - a + a^2)(1 - b + b^2) = \frac{1 + a^2b^2 + (a - b)^2 + (1 - a)^2(1 - b)^2}{2} \geq \frac{1 + a^2b^2}{2}$$

Nhận thấy ngay ý tưởng đầu không thực hiện được vì chẳng hạn $ab = 0$ thì bất đẳng thức $3ab(1 - c + c^2) \geq (1 + abc + a^2b^2c^2)$ không đúng. Do đó ta chỉ có thể theo ý tưởng thứ hai. Lúc ta được bất đẳng thức

$$2(1 - a + a^2)(1 - b + b^2)(1 - c + c^2) \geq (1 + a^2b^2)(1 - c + c^2)$$

Bây giờ ta cần chứng minh $3(1 + a^2b^2)(1 - c + c^2) \geq 2(1 + abc + a^2b^2c^2)$, viết thành $f(c) = (3 + a^2b^2)c^2 - (3 + 2ab + 3a^2b^2)c + 1 + 3a^2b^2 \geq 0$. Công việc cuối cùng là chứng minh

$\Delta = (3 + 2ab + 3a^2b^2)^2 - 4(3 + a^2b^2)(1 + 3a^2b^2) \leq 0$ thì bài toán xem như được chứng minh. Ở đây nếu như ta không chứng minh được biệt thức $\Delta \leq 0$ thì ý tưởng trên hoàn toàn phá sản. Cũng may trong bài toán này ta thu được $\Delta = -3(1 - ab)^4 \leq 0$. Đến đây chỉ cần trình bày lại lời giải nữa là xong.

Lời giải

Ta có $2(1-a+a^2)(1-b+b^2) = 1+a^2b^2+(a-b)^2+(1-a)^2(1-b)^2 \geq 1+a^2b^2$

Do đó ta được bất đẳng thức

$$2(1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2) \geq (1+a^2b^2)(1-c+c^2)$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} 3(1+a^2b^2)(1-c+c^2) &\geq 2(1+abc+a^2b^2c^2) \\ \Leftrightarrow (3+a^2b^2)c^2 - (3+2ab+3a^2b^2)c + 1 + 3a^2b^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Xét tam thức bậc hai $f(c) = (3+a^2b^2)c^2 - (3+2ab+3a^2b^2)c + 1 + 3a^2b^2$

Khi đó ta được

$$\Delta = (3+2ab+3a^2b^2)^2 - 4(3+a^2b^2)(1+3a^2b^2) = -3(1-ab)^4 \leq 0$$

Dễ thấy $3+a^2b^2 > 0$ nên ta được $f(c) \geq 0$

Hay
$$(3+a^2b^2)c^2 - (3+2ab+3a^2b^2)c + 1 + 3a^2b^2 \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Nhận xét: Đây là một bài toán khó, ban đầu nếu xem c là biến và a, b là tham số mà chứng minh biệt thức $\Delta \leq 0$ thực sự rất khó khăn, cho nên ý tưởng làm đơn giản hóa về trái là hoàn toàn tự nhiên. Nhưng để có một đánh giá hợp lý cần phải xem xét bài toán một cách tổng thể và luôn để ý đến các tình huống có thể xảy ra.

Ví dụ 34. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $abc + ab + bc + ca = 4$. Chứng minh rằng: $a + b + c \geq ab + bc + ca$

Phân tích: Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = 2; c = 0$. Quá trình đánh giá bất đẳng thức cần chú ý đến đẳng thức xảy ra. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy bất đẳng thức có tính đối xứng đối với ba biến và có điều kiện nên ta có thể đưa về dạng tam thức bậc hai. Chẳng hạn từ giả

thiết ta rút được $a = \frac{4-bc}{b+c+bc}$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành:

$$\frac{4-bc}{b+c+bc} + b + c \geq \frac{4-bc}{b+c+bc}(b+c) + bc$$

Và nếu xem b là biến và c là tham số thì ta thu được bất đẳng thức có bậc hai đối với một biến $f(b) = (1+c-c^2)b^2 + (c^2+c-4)b + c^2-4c+4 \geq 0$.

Lúc này ta có $\Delta = (c^2+c-4)^2 - 4(1+c-c^2)(c^2-4c+4) = c(c-1)^2(5c-8)$. Bây giờ ta cần phải chỉ ra được $\Delta \leq 0$ và $1+c-c^2 \geq 0$. Chú ý trong trường hợp này đẳng thức xảy ra tại $c = 1$ hoặc $c = 0$, ta nhận thấy khi $c \leq 1$ thì hai yêu cầu trên được đáp ứng ngay. Nhận thấy từ giả thiết $abc + a + b + c = 4$ nếu chọn c nhỏ nhất thì ta có ngay $c \leq 1$, do đó ta có thể giả sử c là số bé nhất trong ba số a, b, c . Việc giả sử này là hoàn toàn có thể vì vai trò của các biến như nhau. Đến đây ta trình bày lại lời giải như sau.

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử c là số bé nhất trong ba số a, b, c . Khi đó ta có

$$4 = abc + ab + bc + ca \geq c^3 + 3c^2 \Rightarrow c \leq 1$$

Từ $abc + ab + bc + ca = 4$ suy ra $a = \frac{4-bc}{b+c+bc}$. Như vậy ta cần chứng minh

$$\frac{4-bc}{b+c+bc} + b + c \geq \frac{4-bc}{b+c+bc}(b+c) + bc$$

Hay $(1 + c - c^2)b^2 + (c^2 + c - 4)b + c^2 - 4c + 4 \geq 0$

Xét $f(b) = (1 + c - c^2)b^2 + (c^2 + c - 4)b + c^2 - 4c + 4$

Khi đó ta có $\Delta = (c^2 + c - 4) - 4(1 + c - c^2)(c^2 - 4c + 4) = c(c - 1)^2(5c - 8)$

Vì $c \leq 1$ nên ta có $\Delta = c(c - 1)^2(5c - 8) \leq c(c - 1)^2(5 - 8) = -3c(c - 1)^2 \leq 0$

Lại thấy khi $c \leq 1$ thì $1 + c - c^2 \geq 0$ nên $f(b) \geq 0$

Hay $(1 + c - c^2)b^2 + (c^2 + c - 4)b + c^2 - 4c + 4 \geq 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = 2; c = 0$ và các hoán vị.

Nhận xét: Sử dụng nguyên lý Dirichlet cũng có thể chứng minh được bất đẳng thức trên, tuy nhiên để sử dụng được nguyên lý Dirichlet không hề đơn giản. Qua đó ta nhận thấy với các bất đẳng thức bậc hai thì nghĩ đến sử dụng các tính chất của tam thức bậc hai là điều hết sức tự nhiên và thực tế các tính chất của tam thức bậc hai cũng đã cho thấy hiệu quả trong chứng minh bất đẳng thức.

Ví dụ 35. Cho a, b, c là các số thực bất kì thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = 2$ và $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 2$. Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c . Chứng minh rằng:

$$M - m \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta thấy được vai trò như nhau của ba biến a, b, c nên để đơn giản ta có thể sắp thứ tự các biến để quy định M và m cho bất đẳng thức. Chẳng hạn ta chọn $M = a; m = c$, khi đó

ta cần chứng minh $a - c \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Chú ý đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$, kết hợp với

$a + b + c = 2$, ta viết lại được $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2$, vì ta cần phải chứng minh $a - c \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

nên ta có thể xem đẳng thức bên là phương trình bậc hai ẩn $X = a - c$ và viết lại ta được $X^2 - (b - c)X + (b - c)^2 - 1 = 0$. Đến đây ta thấy được hai ý tưởng để chứng minh $X \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. Một là ta

cần giải ra các nghiệm X theo $b - c$ sau đó chứng minh $X \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. Hai là đổi vai trò trong phương trình

và xem X là tham số, khi đó từ điều kiện có nghiệm của phương trình ta suy ra được $X \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử a là số lớn nhất và c là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c .

Khi đó ta cần chứng minh $a - c \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

Ta có $2 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

Hay $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2$. Đặt $X = a - c$, khi đó ta được

$$\begin{aligned}
X^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 = 2 &\Leftrightarrow X^2 + (a-c-b+c)^2 + (b-c)^2 = 2 \\
&\Leftrightarrow X^2 + (a-c)^2 + 2(b-c)^2 - 2(a-c)(b-c) = 2 \\
&\Leftrightarrow 2X^2 - 2(b-c)X + 2(b-c)^2 = 2 \Leftrightarrow X^2 - (b-c)X + (b-c)^2 - 1 = 0
\end{aligned}$$

Xem phương trình trên có ẩn là $b-c$, khi đó để phương trình có nghiệm thì

$$\Delta = X^2 - 4(X^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow X^2 \leq \frac{4}{2} \Rightarrow X \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Suy ra $a-c \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$; $b = \frac{2}{3}$; $c = \frac{2-\sqrt{3}}{3}$ và các hoán vị.

Chủ đề 3

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG

1. Kiến thức cần nhớ

a. Nội dung phương pháp

Giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$. Tư tưởng của phương pháp là ta hãy giả sử bất đẳng thức đó sai, sau đó vận dụng các kiến thức đã biết và giả thiết của đề bài để suy ra điều vô lý. Điều vô lý có thể là trái với giả thiết, hoặc là những mệnh đề mâu thuẫn nhau, từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh là đúng.

Các bước suy luận phản chứng

Bước 1: Giả sử điều cần chứng minh là sai (phủ định lại mệnh đề cần chứng minh).

Bước 2: Từ điều giả sử ta suy ra một số tính chất hoặc quan hệ mới, mà những tính chất này mâu thuẫn với điều đã cho hoặc trái với tính chất ta đã biết.

Bước 3: Ta kết luận điều giả sử ban đầu là sai. Vậy bài toán được chứng minh.

Chú ý: Trong các bước suy luận phản chứng nêu trên, bước 1 rất quan trọng vì cần tạo ra mệnh đề phủ định điều cần chứng minh thực sự chính xác.

b. Một số hình thức chứng minh bất đẳng thức

- + Dùng mệnh đề đảo.
- + Phủ định rồi suy ra điều trái với giả thiết.
- + Phủ định rồi suy ra trái với điều đúng.
- + Phủ định rồi suy ra hai mệnh đề trái ngược nhau.
- + Phủ định rồi suy ra kết luận.

c. Một số đẳng thức và bất đẳng thức cần nhớ.

$$\begin{aligned} &+ a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2} \geq 0 \\ &+ (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0 \\ &+ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

2. Một số ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau đây là đúng: $a^2 + b^2 \geq 2bc$ $b^2 + c^2 \geq 2ca$ $c^2 + a^2 \geq 2ab$

Phân tích: Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh có ít nhất một bất đẳng thức đúng, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp cả ba bất đẳng thức trên cùng sai. Như vậy ta chỉ cần chứng minh cả ba bất đẳng thức trên cùng sai không thể xảy ra là được.

Lời giải

Giả sử cả ba bất đẳng thức trên cùng sai, tức là ta có ba bất đẳng thức sau

$$a^2 + b^2 < 2bc \quad b^2 + c^2 < 2ca \quad c^2 + a^2 < 2ab$$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta được

$$(a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + a^2 - 2ca) < 0$$

Hay
$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 < 0.$$

Điều này mâu thuẫn với bất đẳng thức $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2. Cho các số thực $a, b, c \in (0, 2)$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau đây là sai: $a(2 - b) > 1$ $b(2 - c) > 1$ $c(2 - a) > 1$

Phân tích: Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh có ít nhất một bất đẳng thức sai, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp cả ba bất đẳng thức trên cùng đúng. Như vậy ta chỉ cần chứng minh cả ba bất đẳng thức trên cùng đúng không thể xảy ra là được. Chú ý ở đây ta có giả thiết $a, b, c \in (0, 2)$ nên có thể sử dụng đến các hiệu $2 - a, 2 - b, 2 - c$ là các số dương.

Lời giải

Giả sử cả ba bất đẳng thức đã cho đều đúng, nhân chúng với nhau theo vế với vế ta có

$$a(2 - b).b(2 - c).c(2 - a) > 1 \Leftrightarrow a(2 - a).b(2 - b).c(2 - c) > 1$$

Mặt khác do $a \in (0, 2)$ nên ta có $2 - a > 0$. Do đó ta được

$$0 < a(2 - a) = 2a - a^2 = 1 - (1 - 2a + a^2) = 1 - (a - 1)^2 \leq 1$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có $0 < b(2 - b) \leq 1$; $0 < c(2 - c) \leq 1$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$a(2 - a).b(2 - b).c(2 - c) \leq 1$$

Bất đẳng thức này mâu thuẫn với bất đẳng thức $a(2 - a).b(2 - b).c(2 - c) > 1$.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 3. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn thỏa mãn các điều kiện sau

$$a + b + c > 0; ab + bc + ac > 0; abc > 0$$

Chứng minh rằng cả ba số a, b, c đều là số dương.

Phân tích: Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh cả ba số a, b, c đều là số dương, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp một số nào đó không dương. Như vậy ta chỉ cần chứng minh một số bất kì không dương không thể xảy ra là được.

Lời giải

Giả sử rằng trong ba số a, b, c có một số không dương, không mất đi tính tổng quát ta chọn số đó là a , tức là ta có $a \leq 0$.

Vì $abc > 0$ nên $a \neq 0$, do đó suy ra $a < 0$.

Lại có $a + b + c > 0$ nên $b + c > 0$, từ đây suy ra $a(b + c) < 0$

Theo giả thiết thứ hai $ab + bc + ca > 0$ hay $a(b + c) + bc > 0$ dẫn đến $bc > 0$

Như vậy ta được $a < 0$; $bc > 0$ vì thế ta có $abc < 0$. Bất đẳng thức này mâu thuẫn với giả thiết thứ ba của bài toán.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng không có 3 số dương a, b, c nào thỏa mãn cả 3 bất đẳng thức:

$$a + \frac{1}{b} < 2 \quad b + \frac{1}{c} < 2 \quad c + \frac{1}{a} < 2$$

Phân tích: Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh không tồn tại ba số dương a, b, c để cả ba bất đẳng thức trên đều đúng, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp cả ba bất đẳng thức trên cùng đúng. Như vậy ta chỉ cần chứng minh trường hợp cả ba bất đẳng thức trên cùng đúng không thể xảy ra là được.

Chú ý các bất đẳng thức trên làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức Cauchy dạng $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Lời giải

Giả sử tồn tại ba số dương a, b, c thỏa mãn cả 3 bất đẳng thức:

$$a + \frac{1}{b} < 2; \quad b + \frac{1}{c} < 2; \quad c + \frac{1}{a} < 2$$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$a + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{c} + c + \frac{1}{a} < 6 \Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right) < 6 \quad (1)$$

Vì a, b, c là các số dương nên theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a + \frac{1}{a} \geq 2; \quad b + \frac{1}{b} \geq 2; \quad c + \frac{1}{c} \geq 2$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right) \geq 6 \quad (2)$$

Ta thấy hai bất đẳng thức (1) và (2) mâu thuẫn với nhau.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 5: Cho ba số thực a, b, c đôi một khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một trong các số $9ab$, $9bc$, $9ac$ nhỏ hơn $(a + b + c)^2$.

Phân tích: Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh tồn tại ít nhất một trong ba số $9ab$, $9bc$, $9ca$ nhỏ hơn $(a + b + c)^2$, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp cả ba số $9ab$, $9bc$, $9ca$ cùng lớn hơn $(a + b + c)^2$. Như vậy ta chỉ cần chứng minh ba số $9ab$, $9bc$, $9ca$ cùng lớn hơn $(a + b + c)^2$ không xảy ra là được. Chú ý các đại lượng $9ab$, $9bc$, $9ca$, $(a + b + c)^2$ làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Lời giải

Giả sử điều cần chứng minh là sai, tức là ta có các bất đẳng thức sau

$$9ab \geq (a+b+c)^2; \quad 9bc \geq (a+b+c)^2; \quad 9ca \geq (a+b+c)^2$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức ta được

$$\begin{aligned} 3(a+b+c)^2 &\leq 9(ab+bc+ca) \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \leq 3(ab+bc+ca) \\ \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 &\leq ab+bc+ca \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Theo bài ra a, b, c đôi một khác nhau nên ta lại có

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > 0 \quad (2)$$

Ta thấy hai bất đẳng thức (1) và (2) mâu thuẫn với nhau.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 6: Cho a, b, c, d là bốn số thực dương bất kì. Chứng minh rằng ba bất đẳng thức sau không thể cùng xảy ra:

$$\begin{aligned} a+b &< c+d & (1) \\ (a+b)(c+d) &< ab+cd & (2) \\ (a+b)cd &< (c+d)ab & (3) \end{aligned}$$

Phân tích: Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh cả ba bất đẳng thức trên không cùng xảy ra tức là có ít nhất một bất đẳng thức sai, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp cả ba bất đẳng thức trên cùng đúng. Như vậy ta chỉ cần chứng minh cả ba bất đẳng thức trên cùng đúng không thể xảy ra là được.

Lời giải

Giả sử tồn tại bốn số dương a, b, c, d thỏa mãn cả ba bất đẳng thức.

Từ bất đẳng thức (1) và bất đẳng thức (2) ta có

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &< (a+b)(c+d) < ab+cd \\ \Leftrightarrow cd &> (a+b)^2 - ab = (a-b)^2 + 3ab \geq 3ab \\ \Rightarrow cd &> 3ab & (4) \end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned} (a+b)cd &< (c+d)ab \\ \Rightarrow (a+b)^2 cd &< (c+d)(a+b)ab < (ab+cd)ab \\ \Rightarrow ab(ab+cd) &> (a+b)^2 cd \geq 4ab.cd \\ \Rightarrow ab(ab+cd) &> 4ab.cd \\ \Rightarrow ab &> 3cd & (5) \end{aligned}$$

Ta thấy hai bất đẳng thức (4) và (5) mâu thuẫn với nhau.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 7: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + ab + bc + ca < 0$.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 < c^2$

Phân tích: Đại lượng $a^2 + b^2 + ab + bc + ca$ làm ta liên tưởng đến hằng đẳng thức $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$. Như vậy từ giả thiết của bài toán đã cho ta suy ra được giả thiết mới $2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) < 0$. Vậy nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$, thì ta được bất đẳng thức mới $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) < 0 \Leftrightarrow (a + b + c)^2 < 0$. Rõ ràng bất đẳng thức thu được là sai, do đó ta nghĩ đến sử dụng phương pháp phản chứng để chứng minh bài toán.

Ngoài ra, để ý bất đẳng thức $2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) < 0$ và $(a + b + c)^2 \geq 0$ ta được bất đẳng thức $(a + b + c)^2 > 2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca)$. Khai triển và thu gọn ta cũng được $a^2 + b^2 < c^2$.

Lời giải

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là ta có bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq c^2$, khi đó ta được

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + a^2 + b^2 + 2(ab + bc + ca) &\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) &\geq (a + b + c)^2 \end{aligned}$$

Kết hợp với giả thiết ta có

$$0 > 2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) \geq (a + b + c)^2 \Rightarrow (a + b + c)^2 < 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng là sai. Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Bất đẳng thức trên cũng có thể chứng minh theo cách sau đây:

Giả thiết của bài toán tương đương với $2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) < 0$

Mà ta luôn có $(a + b + c)^2 \geq 0$, do đó ta được bất đẳng thức

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &> 2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) &< 2(a^2 + b^2) + 2(ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow c^2 &> a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 8. Cho hai số dương a, b thỏa mãn điều kiện $a^3 + b^3 = a - b$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 < 1$$

Phân tích: Quan sát giả thiết ta nhận thấy $a > b > 0$ và hai đại lượng $a^3 + b^3$; $a - b$ không đồng bậc.

Do đó ta có thể đồng bậc hai vế bằng cách nhân thêm $a^2 + b^2$. Vì yêu cầu chứng minh $a^2 + b^2 < 1$ nên kết hợp với giả thiết ta quy bài toán về chứng minh bất đẳng thức $a^3 + b^3 > (a - b)(a^2 + b^2)$. Đến đây ta có thể sử dụng phương pháp phản chứng hoặc biến đổi tương đương để chứng minh bài toán.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $a > b > 0$. Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là ta có bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 1$. Khi đó kết hợp với giả thiết ta được

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &\leq (a - b)(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a^3 + b^3 \leq a^3 + ab^2 - a^2b - b^3 \\ \Leftrightarrow ab^2 - a^2b - 2b^3 &\geq 0 \Leftrightarrow b(ab - a^2 - 2b^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Vì $a > b > 0$ nên ta có $a(b - a) < 0 \Rightarrow a(b - a) - 2b^3 < 0$. Do đó bất đẳng thức trên không thể xảy ra.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Bất đẳng thức trên cũng có thể chứng minh theo cách sau đây:

Từ giả thiết ta có $a > b > 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &> (a - b)(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a^3 + b^3 > a^3 + ab^2 - a^2b - b^3 \\ \Leftrightarrow a^2b - ab^2 + 2b^3 &> 0 \Leftrightarrow a^2 - ab + 2b^2 > 0 \end{aligned}$$

Mà ta có $a > b > 0$ nên $a^2 - ab > 0$ nên ta được $a^2 - ab + 2b^2 > 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 9. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 90$

Chứng minh rằng: $a + b + c \geq 16$

Phân tích: Từ điều kiện của biến $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$, để quy về một điều kiện ta có thể sử dụng cách đặt biến phụ $a = x + 4; b = y + 5; z = c + 6$, khi đó điều kiện của biến mới là $x, y, z \geq 0$.

Giả thiết lúc này được viết lại là $x^2 + y^2 + z^2 + 12(x + y + z) - 4x - 2z = 13$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $x + y + z \geq 1$. Từ những kết quả thu được ở trên ta nếu ta giả sử $x + y + z < 1$ thì ta thu được điều kiện $0 \leq x, y, z < 1$. Khi đó ta có

$x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$ suy ra $x^2 + y^2 + z^2 + 12(x + y + z) - 4x - 2z < 13$. Đến đây xem như bài toán được giải quyết xong.

Lời giải

Đặt $a = x + 4; b = y + 5; z = c + 6$, khi đó ta có $x, y, z \geq 0$.

Giả thiết lúc này được viết lại là

$$(x + 4)^2 + (y + 5)^2 + (z + 6)^2 = 90 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 12(x + y + z) - 4x - 2z = 13$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $x + y + z \geq 1$

Giả sử tồn tại $x, y, z \geq 0$, thỏa mãn điều kiện

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12(x + y + z) - 4x - 2z = 13$$

Nhưng bất đẳng thức $x + y + z \geq 1$ không đúng. Tức là ta có $x + y + z < 1$.

Khi đó hiển nhiên có $0 \leq x, y, z < 1$ nên $x^2 \leq x; y^2 \leq y; z^2 \leq z$.

Suy ra $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$. Từ đó ta có

$$13 = x^2 + y^2 + z^2 + 12(x + y + z) - 4x - 2z \leq 13(x + y + z) - 4x - 2z \\ \leq 13(x + y + z) < 13$$

Hay $13 < 13$, đây là một mâu thuẫn. Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 10. Cho a, b, c là ba số thực bất kì thỏa mãn các điều kiện sau:

$$abc = 2015^3 \text{ và } ab + bc + ca < 2015(a + b + c)$$

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c đó có đúng một số lớn hơn 2015.

Phân tích: Từ bài toán ta nhận thấy không thể có trường hợp cả ba số a, b, c cùng lớn hơn 2015. Bài toán yêu cầu chứng minh rằng trong ba số a, b, c đó có đúng một số lớn hơn 2015. Điều này có nghĩa là không thể có hai số lớn hơn 2015 cũng không thể có cả ba số cùng không lớn hơn 2015. Như vậy để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh hai trường hợp này không xảy ra là được. Để ý là khi so sánh các số a, b, c với 2015 ta thường so sánh $a - 2015; b - 2015; c - 2015$ với 0.

Lại thấy từ giả thiết ta được $2015(a + b + c) - (ab + bc + ca) > 0$ nên ta được

$$P = (a - 2015)(b - 2015)(c - 2015) = 2015[2015(a + b + c) - (ab + bc + ca)] > 0.$$

Lời giải

Xét biểu thức

$$P = (a - 2015)(b - 2015)(c - 2015) \\ = abc - 2015(ab + bc + ca) + 2015^2(a + b + c) - 2015^3 \\ = 2015[2015(a + b + c) - (ab + bc + ca)] > 0$$

Giả sử khẳng định của bài toán là sai, khi đó sẽ có hai trường hợp

+ Trường hợp thứ nhất cả ba số a, b, c đều không lớn hơn 2015, khi đó ta có

$$a - 2015 \leq 0; b - 2015 \leq 0; c - 2015 \leq 0$$

Suy ra $P \leq 0$, điều này mâu thuẫn với bất đẳng thức trên.

+ Trường hợp thứ hai là có ít nhất hai số lớn hơn 2015, chẳng hạn là a, b . Khi đó ta được

$$a > 2015; b > 2015 \text{ suy ra } a - 2015 > 0; b - 2015 > 0.$$

$$\text{Do đó ta có } (a - 2015)(b - 2015) > 0 \Rightarrow c - 2015 = \frac{P}{(a - 2015)(b - 2015)} > 0$$

Suy ra $c > 2015$, dẫn đến $abc > 2015^3$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $abc = 2015^3$.

Vậy điều giả sử không thể xảy ra. Do đó bài toán được chứng minh.

Ví dụ 11. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + 2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2 + 3a^2b^2c^2 = 9$

Chứng minh rằng: $|abc| \leq 1$

Phân tích: Trước hết ta nhận thấy, nếu một trong ba số a, b, c bằng 0 thì bài toán được chứng minh. Như vậy ta cần phải chứng minh cho trường hợp cả ba số a, b, c khác 0. Để ý từ giả thiết ta thu được

$$a^2 + 2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2 + 3a^2b^2c^2 = a^2 + \frac{a^2b^2c^2}{a^2} + 2\left(b^2 + \frac{a^2b^2c^2}{b^2}\right) + 3a^2b^2c^2$$

Mà ta lại có $a^2 + \frac{a^2b^2c^2}{a^2} + 2\left(b^2 + \frac{a^2b^2c^2}{b^2}\right) + 3a^2b^2c^2 \geq 2|abc| + 4|abc| + 3a^2b^2c^2$

Đến đây ta có thể sử dụng phép phản chứng hoặc phân tích thành nhân tử để chứng minh bài toán.

Lời giải

Nếu một trong ba số a, b, c bằng 0 thì bài toán được chứng minh.

Như vậy ta cần phải chứng minh cho trường hợp cả ba số a, b, c khác 0. Từ giả thiết ta thu được

$$a^2 + 2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2 + 3a^2b^2c^2 = a^2 + \frac{a^2b^2c^2}{a^2} + 2\left(b^2 + \frac{a^2b^2c^2}{b^2}\right) + 3a^2b^2c^2$$

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là ta có bất đẳng thức $|abc| > 1$

Đặt $x = |abc| > 1 \Rightarrow x^2 > 1$. Khi theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} 9 &= a^2 + 2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2 + 3a^2b^2c^2 = a^2 + \frac{x^2}{a^2} + 2\left(b^2 + \frac{x^2}{b^2}\right) + 3x^2 \\ &> a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right) + 3 \geq 9 \end{aligned}$$

Hay $9 > 9$, điều này là vô lý. Vậy điều ta giả sử là không xảy ra hay bài toán được chứng minh.

Ngoài ra ta cũng có thể trình bày như sau: Biến đổi tương tự như trên ta được

$$9 = a^2 + \frac{a^2b^2c^2}{a^2} + 2\left(b^2 + \frac{a^2b^2c^2}{b^2}\right) + 3a^2b^2c^2 \geq 2|abc| + 4|abc| + 3a^2b^2c^2$$

Đặt $x = |abc| \geq 0$ khi đó ta được

$$9 \geq 6x + 3x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Ví dụ 12. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + b = 2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \leq 2$$

Phân tích: Để bài toán đơn giản hơn ta có thể thực hiện làm mất căn bậc ba bằng cách đặt $x = \sqrt[3]{a}$; $y = \sqrt[3]{b}$, khi đó giả thiết của bài toán trở thành $x^3 + y^3 = 2$ và ta cần chứng minh $x + y \leq 2$.

Để ý ta thấy $x + y \leq 2$ tương đương với $(x + y)^3 \leq 8$, khai triển ta và sử dụng giả thiết ta được được $xy(x + y) \leq x^3 + y^3$. Như vậy bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng nên ta có được bất đẳng thức cần chứng minh. Tuy nhiên nếu $x + y > 2$, với cách biến đổi như trên ta thu được $xy(x + y) > x^3 + y^3$ là một bất đẳng thức sai. Do đó ta có thể sử dụng phép biến đổi tương đương hoặc phép phản chứng để giải quyết bài toán.

Lời giải

Đặt $x = \sqrt[3]{a}$; $y = \sqrt[3]{b}$, khi đó giả thiết của bài toán trở thành $x^3 + y^3 = 2$ và ta cần chứng minh

$$x + y \leq 2.$$

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là ta có bất đẳng thức $x + y > 2$.

Biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được

$$\begin{aligned}(x + y)^3 > 8 &\Leftrightarrow x^3 + y^3 + 3(x + y) > 8 \Leftrightarrow 2 + 3xy(x + y) > 8 \\ &\Leftrightarrow xy(x + y) > 2 \Leftrightarrow xy(x + y) > x^3 + y^3\end{aligned}$$

Chia 2 vế cho số dương $x + y$ khi đó ta được bất đẳng thức

$$xy > x^2 - xy + y^2 \Leftrightarrow 0 > (x - y)^2$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức sai. Vậy điều ta giả sử là không xảy ra hay bài toán được chứng minh.

Ví dụ 13. Cho 25 số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_{25}$ khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} = 9$$

Chứng minh rằng trong 25 số tự nhiên đó luôn tồn tại hai số bằng nhau.

Phân tích: Để chứng minh trong hai 25 số tự nhiên trên luôn tồn tại hai số bằng nhau ta có thể giả sử 25 số đó khác nhau từng đôi một, để dễ biến đổi ta nên sắp thứ tự cho 25 số đó, chẳng hạn $a_1 < a_2 < \dots < a_{25}$. Với cách sắp thứ tự như vậy ta sẽ nhận được kết quả là $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \dots, a_{25} \geq 25$. Khi đó ta có

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{25}}$$

Đến đây ta chỉ cần chỉ ra $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{25}} \leq 9$ là bài toán được giải quyết

Lời giải

Giả sử trong 25 số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_{25}$ không có hai số nào bằng nhau. Không mất tính tổng quát ta có thể chọn $a_1 < a_2 < \dots < a_{25}$. Khi đó ta có

$$a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \dots, a_{25} \geq 25$$

Suy ra ta được $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{25}}$

Mặt khác ta chứng minh được

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{25}} &= 1 + \frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{3}} + \dots + \frac{2}{2\sqrt{25}} \\
&< 1 + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{25} + \sqrt{24}} \right) \\
&= 1 + 2 \left(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{25} - \sqrt{24} \right) \\
&= 1 + 2 \left(\sqrt{25} - 1 \right) = 9
\end{aligned}$$

Điều này dẫn tới $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} < 9$

Bất đẳng thức thu được mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Vậy điều ta giả sử là không xảy ra hay bài toán được chứng minh.

Ví dụ 14. Cho 25 số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2015}}} \geq 89$$

Chứng minh rằng trong 2015 số tự nhiên đó luôn tồn tại hai số bằng nhau.

Lời giải

Giả sử trong 2015 số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ không có hai số nào bằng nhau. Không mất tính tổng quát

ta có thể chọn $a_1 < a_2 < \dots < a_{2015}$. Khi đó ta có

$$a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, a_3 \geq 3, \dots, a_{2015} \geq 2015$$

Suy ra ta được $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2015}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015}}$

Mặt khác ta chứng minh được

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015}} &= 1 + \frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{3}} + \dots + \frac{2}{2\sqrt{2015}} \\
&< 1 + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015} + \sqrt{2014}} \right) \\
&= 1 + 2 \left(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{2015} - \sqrt{2014} \right) \\
&= 1 + 2 \left(\sqrt{2015} - 1 \right) < 89
\end{aligned}$$

Điều này dẫn tới $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2015}}} < 89$

Bất đẳng thức thu được mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Vậy điều ta giả sử là không xảy ra hay bài toán được chứng minh.

Ví dụ 15. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^4 + b^4 < a^3 + b^3$. Chứng minh rằng:

$$a + b < 2$$

Lời giải

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh sai, khi đó ta có bất đẳng thức $a + b \geq 2$.

Đặt $a = x + 1$; $b = y + 1$ khi đó ta được $x + y \geq 0$

Xét hiệu hai vế của giả thiết ta được

$$\begin{aligned}a^4 + b^4 - a^3 - b^3 &= (1+x)^4 + (1+y)^4 - (1+x)^3 - (1+y)^3 \\&= (x+y) + 3(x^2 + y^2) + 3(x^3 + y^3) \\&= (x+y) + 3(x^2 + y^2) + 3(x+y)(x^2 - xy + y^2) \geq 0\end{aligned}$$

Hay $a^4 + b^4 - a^3 - b^3 \geq 0$

Mà ta lại có $a + b \geq 2$ do đó suy ra $a^4 + b^4 \geq a^3 + b^3$. Bất đẳng thức thu được trái với giả thiết của bài toán.

Vậy điều ta giả sử là không xảy ra hay bài toán được chứng minh.

Ví dụ 16. Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2(1 + ab)$.

Chứng minh rằng: $a \geq c$ và $b \geq c$

Phân tích: Quan sát bài toán ta nhận thấy vai trò của a, b là như nhau, do đó ta chỉ cần chứng minh $a \geq c$, trường hợp còn lại hoàn toàn tương tự. Để tìm mối liên hệ của a và c ta viết lại giả thiết là $a^2 - c^2 = b(ac^2 - b)$. Do đó nếu như $a < c$ thì ta được bất đẳng thức $a^2 - c^2 = b(ac^2 - b) < 0 \Leftrightarrow b > ac^2$. Mặt khác ta lại thấy $b(b - ac^2) \geq b > ac^2$. Như vậy ta được $c^2 - a^2 - ac^2 > 0$, nhưng do a, c là các số nguyên dương nên ta lại thu được $c^2 - a^2 - ac^2 = c^2(1 - a) - a^2 < 0$, hai bất đẳng thức này mâu thuẫn với nhau, bài toán được giải quyết xong.

Lời giải

+ Trước hết ta chứng minh $a \geq c$. T viết lại giả thiết là $a^2 - c^2 = b(ac^2 - b)$.

Giả sử $a < c$ khi đó ta được $a^2 - c^2 = b(ac^2 - b) < 0 \Leftrightarrow b > ac^2$.

Mà ta lại thấy $b(b - ac^2) \geq b > ac^2$.

Như vậy ta được $c^2 - a^2 - ac^2 > 0$.

Mà do a, c là các số nguyên dương nên ta được $c^2 - a^2 - ac^2 = c^2(1 - a) - a^2 < 0$.

Hai bất đẳng thức này mâu thuẫn với nhau. Do đó không thể xảy ra $a < c$, tức là ta có bất đẳng thức $a \geq c$.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $b \geq c$.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 17. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c \geq abc$. Chứng minh rằng 2 trong 3 bất đẳng thức sau là bất đẳng thức đúng

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{6}{c} \geq 6; \quad \frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{6}{a} \geq 6; \quad \frac{2}{c} + \frac{3}{a} + \frac{6}{b} \geq 6$$

Phân tích: Từ cách phát biểu bài toán ta ưu tiên lựa chọn phương pháp phản chứng để chứng minh. Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh có ít nhất hai trong ba bất đẳng thức là đúng, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp có ít nhất hai bất đẳng thức trên cùng sai. Như vậy ta chỉ cần chứng minh trường hợp có ít nhất hai bất đẳng thức trên cùng sai không thể xảy ra là được. Chú ý giả thiết và các bất đẳng thức ta có thể đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$. Khi đó giả thiết trở thành $xy + yz + zx \geq 1$ và các bất đẳng thức là $2x + 3y + 6z \geq 6$; $2y + 3z + 6x \geq 6$; $2z + 3x + 6y \geq 6$.

Lời giải

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$. Khi đó giả thiết trở thành $xy + yz + zx \geq 1$ và các bất đẳng thức là $2x + 3y + 6z \geq 6$; $2y + 3z + 6x \geq 6$; $2z + 3x + 6y \geq 6$.

Ta cần chứng minh có ít nhất hai trong ba bất đẳng thức trên là đúng.

Giả sử điều cần phải chứng minh là sai, tức là có ít nhất hai bất đẳng thức trên không đúng. Không mất tính tổng quát ta chọn $2x + 3y + 6z \geq 6$; $2y + 3z + 6x \geq 6$ là hai bất đẳng thức bị sai, khi đó ta được $2x + 3y + 6z < 6$; $2y + 3z + 6x < 6$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $8x + 5y + 9z < 12$

Từ $xy + yz + zx \geq 1$ ta được $x \geq \frac{1 - yz}{y + z}$, khi đó ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \frac{8(1 - yz)}{y + z} + 5y + 9z < 12 &\Leftrightarrow 8(1 - yz) + (y + z)(5y + 9z) < 12(y + z) \\ &\Leftrightarrow 5y^2 + 9z^2 + 6yz - 12y - 12z + 8 < 0 \\ &\Leftrightarrow (y + 3z - 2)^2 + 4(y - 1)^2 < 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức sai.

Vậy điều giả sử không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 18. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 8a}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 8b}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 8c}} \geq 1$$

Phân tích: Để ý ta thấy $x = \frac{1}{\sqrt{1 + 8a}} \Leftrightarrow a = \frac{1 - x^2}{8x^2}$ và vì a là số thực dương nên ta có điều kiện

$0 < x < 1$. Như vậy để đơn giản hóa bất đẳng thức cần chứng minh ta có thể đổi biến

$x = \frac{1}{\sqrt{1 + 8a}}$; $y = \frac{1}{\sqrt{1 + 8b}}$; $z = \frac{1}{\sqrt{1 + 8c}}$, khi đó ta được $0 < x; y; z < 1$.

Giả thiết được viết lại là $8^3 x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = (1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2)$ và bất đẳng thức cần chứng minh là $x + y + z \geq 1$. Nhìn giả thiết ta liên tưởng đến một bất đẳng thức quen thuộc $8xyz \leq (x + y)(y + z)(z + x)$, như vậy ta cần cách tìm biến đổi làm xuất hiện các đại lượng $x + y, y + z, z + x$. Nhận thấy theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(x + y + z)^2 - x^2 = (y + z)\left[(x + y) + (x + z)\right] \geq 2(y + z)\sqrt{(x + y)(x + z)}$$

Như vậy nếu $x + y + z \geq 1$ thì $1 - x^2 \leq (x + y + z)^2 - x^2$, lúc này ta được các bất đẳng thức ngược chiều nhau. Đến đây một cách tự nhiên ta nghĩ đến phép phản chứng.

Lời giải

Đặt $x = \frac{1}{\sqrt{1 + 8a}}$; $y = \frac{1}{\sqrt{1 + 8b}}$; $z = \frac{1}{\sqrt{1 + 8c}}$.

Suy ra $a = \frac{1 - x^2}{8x^2}$; $b = \frac{1 - y^2}{8y^2}$; $c = \frac{1 - z^2}{8z^2}$, khi đó ta được $0 < x; y; z < 1$.

Vì $abc = 1$ nên giả thiết được viết lại là $8^3 x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = (1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2)$ và bất đẳng thức cần chứng minh là $x + y + z \geq 1$.

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là ta có bất đẳng thức $x + y + z < 1$.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$1 - x^2 > (x + y + z)^2 - x^2 = (y + z)\left[(x + y) + (x + z)\right] \geq 2(y + z)\sqrt{(x + y)(x + z)} > 0$$

Áp dụng tương tự ta có

$$1 - y^2 > 2(x + z)\sqrt{(x + y)(y + z)} > 0; \quad 1 - z^2 > 2(x + y)\sqrt{(x + z)(y + z)} > 0$$

Nhân theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$8^3 x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = (1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2) > (x + y)^2 (y + z)^2 (z + x)^2$$

Hay $8xyz > (x + y)(y + z)(z + x)$, rõ ràng bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức sai. Vậy điều giả sử không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Một số ví dụ khác

Ví dụ 19. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a + b} + \sqrt{b + c} + \sqrt{c + a} \geq 3\sqrt{2}$$

Lời giải

Đặt $x = \sqrt{a + b}$; $y = \sqrt{b + c}$; $z = \sqrt{c + a}$, khi đó ta được

$$2a = x^2 + z^2 - y^2; \quad 2b = x^2 + y^2 - z^2; \quad 2c = z^2 + y^2 - x^2$$

Giả thiết được viết lại thành $\frac{1}{x^2 + z^2 - y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} + \frac{1}{z^2 + y^2 - x^2} = \frac{3}{2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh là $x + y + z \geq 3\sqrt{2}$

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là ta có $x + y + z < 3\sqrt{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} &= \frac{1}{x^2 + z^2 - y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} + \frac{1}{z^2 + y^2 - x^2} \\ &\geq \frac{3}{\sqrt[3]{(x^2 + z^2 - y^2)(x^2 + y^2 - z^2)(z^2 + y^2 - x^2)}}\end{aligned}$$

Mặt khác theo một bất đẳng thức quen thuộc ta lại có

$$(x^2 + z^2 - y^2)(x^2 + y^2 - z^2)(z^2 + y^2 - x^2) \leq x^2 y^2 z^2 \leq \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^6 < 8$$

Do đó ta được
$$\frac{3}{\sqrt[3]{(x^2 + z^2 - y^2)(x^2 + y^2 - z^2)(z^2 + y^2 - x^2)}} > \frac{3}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$$

Hay ta được $\frac{3}{2} > \frac{3}{2}$, bất đẳng thức thu được là một bất đẳng thức sai.

Vậy điều giả sử không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 20. Cho a, b là các số thực thỏa mãn các điều kiện sau:

$$-1 \leq a + b \leq 1; \quad -1 \leq a + b + ab \leq 1$$

Chứng minh rằng: $-2 \leq a, b \leq 2$

Lời giải

Vì vai trò của a, b như nhau nên ta chỉ cần chứng minh $-2 \leq a \leq 2$. Việc chứng minh $-2 \leq b \leq 2$ hoàn toàn tương tự.

Giả sử bất đẳng thức $-2 \leq a \leq 2$ là sai, khi đó ta có $a > 2$ hoặc $a < -2$.

+ Xét trường hợp $a > 2$, khi đó từ $-1 \leq a + b \leq 1$ suy ra $b \leq 1 - a < 1 - 2 = -1$, do đó ta được $ab < -2$ mà $a + b \leq 1$ nên $a + b + ab < -1$ điều này mâu thuẫn với giả thiết thứ hai của bài toán. Như vậy trường hợp này không xảy ra.

+ Xét trường hợp $a < -2$, khi đó từ $-1 \leq a + b \leq 1$ suy ra $b \geq -1 - a > -1 + 2 = 1$, do đó ta được $ab < -2$ mà $a + b \leq 1$ nên $a + b + ab < -1$ điều này mâu thuẫn với giả thiết thứ hai của bài toán. Như vậy trường hợp này cũng không xảy ra.

Các kết quả trên chứng tỏ điều giả sử không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 21. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c \geq abc$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq abc$$

Lời giải

Nếu $abc = 0$, thì bất đẳng thức được chứng minh.

Xét $abc \neq 0$, khi đó ta được $a, b, c > 0$. Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là

$a^2 + b^2 + c^2 < abc$. Khi đó ta có $abc > a^2 + b^2 + c^2 > a^2$ nên $bc > a$.

Chúng minh tương tự ta được $b < ac$, $c < ab$

Từ đó suy ra $a + b + c < ab + bc + ca$.

Mặt khác ta lại có $abc > a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Rightarrow abc > ab + bc + ca$

Kết hợp hai bất đẳng thức ta được $abc > a + b + c$, bất đẳng thức này mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Vậy điều giả sử không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 22. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Chúng minh rằng: $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq 1$

Lời giải

Bất đẳng thức có tính đối xứng giữa các biến, do đó không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$, Khi đó $a + b - c \geq 0$ và $a + c - b \geq 0$.

+ Nếu $b + c - a < 0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

+ Nếu $b + c - a \geq 0$. Khi này ta đặt $x = b + c - a$; $y = c + a - b$; $z = a + b - c$.

Khi đó ta viết lại giả thiết là $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $xyz \geq 1$.

Ta chứng minh bất đẳng thức trên bằng phương pháp phản chứng

Thật vậy, giả sử $xyz < 1$. Khi đó theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$x + y + z = \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}$$

Hay $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq \sqrt{xyz}(x + y + z)$, vì $xyz < 1$ nên

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} > x + y + z$$

Tuy nhiên cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$, thiết lập các đánh giá tương tự ta có

$$\frac{x+y+z+3}{2} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} > x + y + z \Rightarrow x + y + z < 3$$

Mặt khác $x + y + z = \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z} \Rightarrow x + y + z \geq 3$

Mâu thuẫn này chứng tỏ điều giả sử trên là sai, do vậy $xyz \geq 1$. Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét: Ta có thể sử dụng phương pháp phản chứng theo hướng như sau

Giả sử $xyz < 1$, khi đó từ giả thiết của bài toán suy ra

$$(x + y + z)^2 (xy + yz + zx) = 2(x + y + z) + 2(xy + yz + zx) + xyz(x + y + z)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy và kết hợp với giả sử ta lại có

$$xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} > 3; x + y + z > 3$$

Do đó

$$\frac{2(x+y+z)^2(xy+yz+zx)}{3} > 2(x+y+z)^2$$

$$\frac{2(x+y+z)^2(xy+yz+zx)}{9} > 2(xy+yz+zx)$$

$$\frac{2(x+y+z)^2(xy+yz+zx)}{9} > xyz(x+y+z)$$

Cộng theo vế a bất đẳng thức trên ta được

$$(x+y+z)^2(xy+yz+zx) > 2(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) + xyz(x+y+z)$$

Điều này mâu thuẫn với đẳng thức trên, do đó điều giả sử là sai. Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh.

Ví dụ 23. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$a < b < c; a + b + c = 6; ab + bc + ca = 9$$

Chứng minh rằng: $0 < a < 1; 1 < b < 3; 3 < c < 4$

Lời giải

Từ giả thiết của bài toán, ta suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 18$$

Mặt khác, vì a, b, c là các số dương cho nên

$$9 = ab + bc + ca < a(b+c) + \frac{(b+c)^2}{4} = a(6-a) + \frac{(6-a)^2}{2}$$

Hay $\frac{3a^3}{4} - 3a < 0$, từ đó suy ra $0 < a < 4$, do vậy $0 < a < b < c$

Khi đó $18 = a^2 + b^2 + c^2 < ac + bc + c^2 = c(a+b+c) = 6c$. Suy ra $c > 3$.

Bây giờ ta chứng minh $c < 4$. Thật vậy, giả sử $c \geq 4$ khi đó ta được $c^2 \geq 4c$, từ đây ta suy ra

$$18 = a^2 + b^2 + c^2 > \frac{(a+b)^2}{2} + c^2 > \frac{(6-c)^2}{2} + 4c$$

Hay $\frac{c^2}{2} - 2c < 0 \Leftrightarrow 0 < c < 4$. Mâu thuẫn với $c \geq 4$, do vậy $c < 4$

Từ đó ta có $3 < c < 4$

Cũng từ đây ta suy ra $a < b < c < 4$. Ta chứng minh $a < 1$. Thật vậy, giả sử $a \geq 1$

Khi đó ta được $1 \leq a < b < c < 4$, suy ra

$$(a-1)(a-4) \leq 0; (b-1)(b-4) < 0; (c-1)(c-4) < 0$$

Hay $a^2 \leq 5a - 4; b^2 < 5b - 4; c^2 < 5c - 4$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được $a^2 + b^2 + c^2 < 5(a+b+c) - 12 = 18$

Điều này mâu thuẫn với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 18$. Do đó $a < 1$. Vậy $0 < a < 1$.

Cuối cùng ta chứng minh $1 < b < 3$

Thật vậy, vì $a < 1$ và $c < 4$, do đó $b = 6 - a - c > 6 - 1 - 4 = 1$ hay $b > 1$

Ta cần chứng minh $b < 3$.

Giả sử $b \geq 3$, khi đó ta có $(b-3)(c-3) \geq 0$

$$\text{Hay} \quad bc \geq 3(b+c) - 9 = 3(6-a) - 9 = 9 - 3a$$

Từ đó suy ra $9 = ab + bc + ca = a(b+c) + bc \geq a(b+c) + 9 - 3a$

$$\text{Hay} \quad a(b+c-3) \leq 0$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá sai do $3 < c < 4$. Vì vậy giả sử $b \geq 3$ là sai.

Do đó $b < 3$. Vậy ta được $1 < b < 3$.

Như vậy bài toán được chứng minh xong.

Chủ đề 3

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG

1. Kiến thức cần nhớ

a. Nội dung phương pháp

Giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$. Tư tưởng của phương pháp là ta hãy giả sử bất đẳng thức đó sai, sau đó vận dụng các kiến thức đã biết và giả thiết của đề bài để suy ra điều vô lý. Điều vô lý có thể là trái với giả thiết, hoặc là những mệnh đề mâu thuẫn nhau, từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh là đúng.

Các bước suy luận phản chứng

Bước 1: Giả sử điều cần chứng minh là sai (phủ định lại mệnh đề cần chứng minh).

Bước 2: Từ điều giả sử ta suy ra một số tính chất hoặc quan hệ mới, mà những tính chất này mâu thuẫn với điều đã cho hoặc trái với tính chất ta đã biết.

Bước 3: Ta kết luận điều giả sử ban đầu là sai. Vậy bài toán được chứng minh.

Chú ý: Trong các bước suy luận phản chứng nêu trên, bước 1 rất quan trọng vì cần tạo ra mệnh đề phủ định điều cần chứng minh thực sự chính xác.

b. Một số hình thức chứng minh bất đẳng thức

- + Dùng mệnh đề đảo.
- + Phủ định rồi suy ra điều trái với giả thiết.
- + Phủ định rồi suy ra trái với điều đúng.
- + Phủ định rồi suy ra hai mệnh đề trái ngược nhau.
- + Phủ định rồi suy ra kết luận.

c. Một số đẳng thức và bất đẳng thức cần nhớ.

$$\begin{aligned} &+ a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2} \geq 0 \\ &+ (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0 \\ &+ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

2. Một số ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau đây là đúng: $a^2 + b^2 \geq 2bc$ $b^2 + c^2 \geq 2ca$ $c^2 + a^2 \geq 2ab$

Phân tích: Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh có ít nhất một bất đẳng thức đúng, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp cả ba bất đẳng thức trên cùng sai. Như vậy ta chỉ cần chứng minh cả ba bất đẳng thức trên cùng sai không thể xảy ra là được.

Lời giải

Giả sử cả ba bất đẳng thức trên cùng sai, tức là ta có ba bất đẳng thức sau

$$a^2 + b^2 < 2bc \quad b^2 + c^2 < 2ca \quad c^2 + a^2 < 2ab$$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta được

$$(a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + a^2 - 2ca) < 0$$

Hay
$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 < 0.$$

Điều này mâu thuẫn với bất đẳng thức $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2. Cho các số thực $a, b, c \in (0, 2)$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau đây là sai: $a(2 - b) > 1$ $b(2 - c) > 1$ $c(2 - a) > 1$

Phân tích: Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh có ít nhất một bất đẳng thức sai, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp cả ba bất đẳng thức trên cùng đúng. Như vậy ta chỉ cần chứng minh cả ba bất đẳng thức trên cùng đúng không thể xảy ra là được. Chú ý ở đây ta có giả thiết $a, b, c \in (0, 2)$ nên có thể sử dụng đến các hiệu $2 - a, 2 - b, 2 - c$ là các số dương.

Lời giải

Giả sử cả ba bất đẳng thức đã cho đều đúng, nhân chúng với nhau theo vế với vế ta có

$$a(2 - b).b(2 - c).c(2 - a) > 1 \Leftrightarrow a(2 - a).b(2 - b).c(2 - c) > 1$$

Mặt khác do $a \in (0, 2)$ nên ta có $2 - a > 0$. Do đó ta được

$$0 < a(2 - a) = 2a - a^2 = 1 - (1 - 2a + a^2) = 1 - (a - 1)^2 \leq 1$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có $0 < b(2 - b) \leq 1$; $0 < c(2 - c) \leq 1$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$a(2 - a).b(2 - b).c(2 - c) \leq 1$$

Bất đẳng thức này mâu thuẫn với bất đẳng thức $a(2 - a).b(2 - b).c(2 - c) > 1$.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 3. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn thỏa mãn các điều kiện sau

$$a + b + c > 0; ab + bc + ac > 0; abc > 0$$

Chứng minh rằng cả ba số a, b, c đều là số dương.

Phân tích: Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh cả ba số a, b, c đều là số dương, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp một số nào đó không dương. Như vậy ta chỉ cần chứng minh một số bất kì không dương không thể xảy ra là được.

Lời giải

Giả sử rằng trong ba số a, b, c có một số không dương, không mất đi tính tổng quát ta chọn số đó là a , tức là ta có $a \leq 0$.

Vì $abc > 0$ nên $a \neq 0$, do đó suy ra $a < 0$.

Lại có $a + b + c > 0$ nên $b + c > 0$, từ đây suy ra $a(b + c) < 0$

Theo giả thiết thứ hai $ab + bc + ca > 0$ hay $a(b + c) + bc > 0$ dẫn đến $bc > 0$

Như vậy ta được $a < 0$; $bc > 0$ vì thế ta có $abc < 0$. Bất đẳng thức này mâu thuẫn với giả thiết thứ ba của bài toán.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng không có 3 số dương a, b, c nào thỏa mãn cả 3 bất đẳng thức:

$$a + \frac{1}{b} < 2 \quad b + \frac{1}{c} < 2 \quad c + \frac{1}{a} < 2$$

Phân tích: Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh không tồn tại ba số dương a, b, c để cả ba bất đẳng thức trên đều đúng, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp cả ba bất đẳng thức trên cùng đúng. Như vậy ta chỉ cần chứng minh trường hợp cả ba bất đẳng thức trên cùng đúng không thể xảy ra là được.

Chú ý các bất đẳng thức trên làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức Cauchy dạng $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Lời giải

Giả sử tồn tại ba số dương a, b, c thỏa mãn cả 3 bất đẳng thức:

$$a + \frac{1}{b} < 2; \quad b + \frac{1}{c} < 2; \quad c + \frac{1}{a} < 2$$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$a + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{c} + c + \frac{1}{a} < 6 \Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right) < 6 \quad (1)$$

Vì a, b, c là các số dương nên theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a + \frac{1}{a} \geq 2; \quad b + \frac{1}{b} \geq 2; \quad c + \frac{1}{c} \geq 2$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right) \geq 6 \quad (2)$$

Ta thấy hai bất đẳng thức (1) và (2) mâu thuẫn với nhau.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 5: Cho ba số thực a, b, c đôi một khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một trong các số $9ab$, $9bc$, $9ac$ nhỏ hơn $(a + b + c)^2$.

Phân tích: Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh tồn tại ít nhất một trong ba số $9ab$, $9bc$, $9ca$ nhỏ hơn $(a + b + c)^2$, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp cả ba số $9ab$, $9bc$, $9ca$ cùng lớn hơn $(a + b + c)^2$. Như vậy ta chỉ cần chứng minh ba số $9ab$, $9bc$, $9ca$ cùng lớn hơn $(a + b + c)^2$ không xảy ra là được. Chú ý các đại lượng $9ab$, $9bc$, $9ca$, $(a + b + c)^2$ làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Lời giải

Giả sử điều cần chứng minh là sai, tức là ta có các bất đẳng thức sau

$$9ab \geq (a+b+c)^2; \quad 9bc \geq (a+b+c)^2; \quad 9ca \geq (a+b+c)^2$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức ta được

$$\begin{aligned} 3(a+b+c)^2 &\leq 9(ab+bc+ca) \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \leq 3(ab+bc+ca) \\ \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 &\leq ab+bc+ca \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Theo bài ra a, b, c đôi một khác nhau nên ta lại có

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > 0 \quad (2)$$

Ta thấy hai bất đẳng thức (1) và (2) mâu thuẫn với nhau.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 6: Cho a, b, c, d là bốn số thực dương bất kì. Chứng minh rằng ba bất đẳng thức sau không thể cùng xảy ra:

$$\begin{aligned} a+b &< c+d & (1) \\ (a+b)(c+d) &< ab+cd & (2) \\ (a+b)cd &< (c+d)ab & (3) \end{aligned}$$

Phân tích: Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh cả ba bất đẳng thức trên không cùng xảy ra tức là có ít nhất một bất đẳng thức sai, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp cả ba bất đẳng thức trên cùng đúng. Như vậy ta chỉ cần chứng minh cả ba bất đẳng thức trên cùng đúng không thể xảy ra là được.

Lời giải

Giả sử tồn tại bốn số dương a, b, c, d thỏa mãn cả ba bất đẳng thức.

Từ bất đẳng thức (1) và bất đẳng thức (2) ta có

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &< (a+b)(c+d) < ab+cd \\ \Leftrightarrow cd &> (a+b)^2 - ab = (a-b)^2 + 3ab \geq 3ab \\ \Rightarrow cd &> 3ab & (4) \end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned} (a+b)cd &< (c+d)ab \\ \Rightarrow (a+b)^2 cd &< (c+d)(a+b)ab < (ab+cd)ab \\ \Rightarrow ab(ab+cd) &> (a+b)^2 cd \geq 4ab.cd \\ \Rightarrow ab(ab+cd) &> 4ab.cd \\ \Rightarrow ab &> 3cd & (5) \end{aligned}$$

Ta thấy hai bất đẳng thức (4) và (5) mâu thuẫn với nhau.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 7: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + ab + bc + ca < 0$.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 < c^2$

Phân tích: Đại lượng $a^2 + b^2 + ab + bc + ca$ làm ta liên tưởng đến hằng đẳng thức $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$. Như vậy từ giả thiết của bài toán đã cho ta suy ra được giả thiết mới $2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) < 0$. Vậy nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$, thì ta được bất đẳng thức mới $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) < 0 \Leftrightarrow (a + b + c)^2 < 0$. Rõ ràng bất đẳng thức thu được là sai, do đó ta nghĩ đến sử dụng phương pháp phản chứng để chứng minh bài toán.

Ngoài ra, để ý bất đẳng thức $2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) < 0$ và $(a + b + c)^2 \geq 0$ ta được bất đẳng thức $(a + b + c)^2 > 2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca)$. Khai triển và thu gọn ta cũng được $a^2 + b^2 < c^2$.

Lời giải

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là ta có bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq c^2$, khi đó ta được

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + a^2 + b^2 + 2(ab + bc + ca) &\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) &\geq (a + b + c)^2 \end{aligned}$$

Kết hợp với giả thiết ta có

$$0 > 2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) \geq (a + b + c)^2 \Rightarrow (a + b + c)^2 < 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng là sai. Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Bất đẳng thức trên cũng có thể chứng minh theo cách sau đây:

Giả thiết của bài toán tương đương với $2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) < 0$

Mà ta luôn có $(a + b + c)^2 \geq 0$, do đó ta được bất đẳng thức

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &> 2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) &< 2(a^2 + b^2) + 2(ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow c^2 &> a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 8. Cho hai số dương a, b thỏa mãn điều kiện $a^3 + b^3 = a - b$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 < 1$$

Phân tích: Quan sát giả thiết ta nhận thấy $a > b > 0$ và hai đại lượng $a^3 + b^3$; $a - b$ không đồng bậc.

Do đó ta có thể đồng bậc hai vế bằng cách nhân thêm $a^2 + b^2$. Vì yêu cầu chứng minh $a^2 + b^2 < 1$ nên kết hợp với giả thiết ta quy bài toán về chứng minh bất đẳng thức $a^3 + b^3 > (a - b)(a^2 + b^2)$. Đến đây ta có thể sử dụng phương pháp phản chứng hoặc biến đổi tương đương để chứng minh bài toán.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $a > b > 0$. Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là ta có bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 1$. Khi đó kết hợp với giả thiết ta được

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &\leq (a - b)(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a^3 + b^3 \leq a^3 + ab^2 - a^2b - b^3 \\ \Leftrightarrow ab^2 - a^2b - 2b^3 &\geq 0 \Leftrightarrow b(ab - a^2 - 2b^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Vì $a > b > 0$ nên ta có $a(b - a) < 0 \Rightarrow a(b - a) - 2b^3 < 0$. Do đó bất đẳng thức trên không thể xảy ra.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Bất đẳng thức trên cũng có thể chứng minh theo cách sau đây:

Từ giả thiết ta có $a > b > 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &> (a - b)(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a^3 + b^3 > a^3 + ab^2 - a^2b - b^3 \\ \Leftrightarrow a^2b - ab^2 + 2b^3 &> 0 \Leftrightarrow a^2 - ab + 2b^2 > 0 \end{aligned}$$

Mà ta có $a > b > 0$ nên $a^2 - ab > 0$ nên ta được $a^2 - ab + 2b^2 > 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 9. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 90$

Chứng minh rằng: $a + b + c \geq 16$

Phân tích: Từ điều kiện của biến $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$, để quy về một điều kiện ta có thể sử dụng cách đặt biến phụ $a = x + 4; b = y + 5; z = c + 6$, khi đó điều kiện của biến mới là $x, y, z \geq 0$.

Giả thiết lúc này được viết lại là $x^2 + y^2 + z^2 + 12(x + y + z) - 4x - 2z = 13$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $x + y + z \geq 1$. Từ những kết quả thu được ở trên ta nếu ta giả sử $x + y + z < 1$ thì ta thu được điều kiện $0 \leq x, y, z < 1$. Khi đó ta có

$x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$ suy ra $x^2 + y^2 + z^2 + 12(x + y + z) - 4x - 2z < 13$. Đến đây xem như bài toán được giải quyết xong.

Lời giải

Đặt $a = x + 4; b = y + 5; z = c + 6$, khi đó ta có $x, y, z \geq 0$.

Giả thiết lúc này được viết lại là

$$(x + 4)^2 + (y + 5)^2 + (z + 6)^2 = 90 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 12(x + y + z) - 4x - 2z = 13$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $x + y + z \geq 1$

Giả sử tồn tại $x, y, z \geq 0$, thỏa mãn điều kiện

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12(x + y + z) - 4x - 2z = 13$$

Nhưng bất đẳng thức $x + y + z \geq 1$ không đúng. Tức là ta có $x + y + z < 1$.

Khi đó hiển nhiên có $0 \leq x, y, z < 1$ nên $x^2 \leq x; y^2 \leq y; z^2 \leq z$.

Suy ra $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$. Từ đó ta có

$$13 = x^2 + y^2 + z^2 + 12(x + y + z) - 4x - 2z \leq 13(x + y + z) - 4x - 2z \\ \leq 13(x + y + z) < 13$$

Hay $13 < 13$, đây là một mâu thuẫn. Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 10. Cho a, b, c là ba số thực bất kì thỏa mãn các điều kiện sau:

$$abc = 2015^3 \text{ và } ab + bc + ca < 2015(a + b + c)$$

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c đó có đúng một số lớn hơn 2015.

Phân tích: Từ bài toán ta nhận thấy không thể có trường hợp cả ba số a, b, c cùng lớn hơn 2015. Bài toán yêu cầu chứng minh rằng trong ba số a, b, c đó có đúng một số lớn hơn 2015. Điều này có nghĩa là không thể có hai số lớn hơn 2015 cũng không thể có cả ba số cùng không lớn hơn 2015. Như vậy để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh hai trường hợp này không xảy ra là được. Để ý là khi so sánh các số a, b, c với 2015 ta thường so sánh $a - 2015; b - 2015; c - 2015$ với 0.

Lại thấy từ giả thiết ta được $2015(a + b + c) - (ab + bc + ca) > 0$ nên ta được

$$P = (a - 2015)(b - 2015)(c - 2015) = 2015[2015(a + b + c) - (ab + bc + ca)] > 0.$$

Lời giải

Xét biểu thức

$$P = (a - 2015)(b - 2015)(c - 2015) \\ = abc - 2015(ab + bc + ca) + 2015^2(a + b + c) - 2015^3 \\ = 2015[2015(a + b + c) - (ab + bc + ca)] > 0$$

Giả sử khẳng định của bài toán là sai, khi đó sẽ có hai trường hợp

+ Trường hợp thứ nhất cả ba số a, b, c đều không lớn hơn 2015, khi đó ta có

$$a - 2015 \leq 0; b - 2015 \leq 0; c - 2015 \leq 0$$

Suy ra $P \leq 0$, điều này mâu thuẫn với bất đẳng thức trên.

+ Trường hợp thứ hai là có ít nhất hai số lớn hơn 2015, chẳng hạn là a, b . Khi đó ta được

$$a > 2015; b > 2015 \text{ suy ra } a - 2015 > 0; b - 2015 > 0.$$

$$\text{Do đó ta có } (a - 2015)(b - 2015) > 0 \Rightarrow c - 2015 = \frac{P}{(a - 2015)(b - 2015)} > 0$$

Suy ra $c > 2015$, dẫn đến $abc > 2015^3$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $abc = 2015^3$.

Vậy điều giả sử không thể xảy ra. Do đó bài toán được chứng minh.

Ví dụ 11. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + 2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2 + 3a^2b^2c^2 = 9$

Chứng minh rằng: $|abc| \leq 1$

Phân tích: Trước hết ta nhận thấy, nếu một trong ba số a, b, c bằng 0 thì bài toán được chứng minh. Như vậy ta cần phải chứng minh cho trường hợp cả ba số a, b, c khác 0. Để ý từ giả thiết ta thu được

$$a^2 + 2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2 + 3a^2b^2c^2 = a^2 + \frac{a^2b^2c^2}{a^2} + 2\left(b^2 + \frac{a^2b^2c^2}{b^2}\right) + 3a^2b^2c^2$$

Mà ta lại có $a^2 + \frac{a^2b^2c^2}{a^2} + 2\left(b^2 + \frac{a^2b^2c^2}{b^2}\right) + 3a^2b^2c^2 \geq 2|abc| + 4|abc| + 3a^2b^2c^2$

Đến đây ta có thể sử dụng phép phản chứng hoặc phân tích thành nhân tử để chứng minh bài toán.

Lời giải

Nếu một trong ba số a, b, c bằng 0 thì bài toán được chứng minh.

Như vậy ta cần phải chứng minh cho trường hợp cả ba số a, b, c khác 0. Từ giả thiết ta thu được

$$a^2 + 2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2 + 3a^2b^2c^2 = a^2 + \frac{a^2b^2c^2}{a^2} + 2\left(b^2 + \frac{a^2b^2c^2}{b^2}\right) + 3a^2b^2c^2$$

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là ta có bất đẳng thức $|abc| > 1$

Đặt $x = |abc| > 1 \Rightarrow x^2 > 1$. Khi theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} 9 &= a^2 + 2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2 + 3a^2b^2c^2 = a^2 + \frac{x^2}{a^2} + 2\left(b^2 + \frac{x^2}{b^2}\right) + 3x^2 \\ &> a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right) + 3 \geq 9 \end{aligned}$$

Hay $9 > 9$, điều này là vô lý. Vậy điều ta giả sử là không xảy ra hay bài toán được chứng minh.

Ngoài ra ta cũng có thể trình bày như sau: Biến đổi tương tự như trên ta được

$$9 = a^2 + \frac{a^2b^2c^2}{a^2} + 2\left(b^2 + \frac{a^2b^2c^2}{b^2}\right) + 3a^2b^2c^2 \geq 2|abc| + 4|abc| + 3a^2b^2c^2$$

Đặt $x = |abc| \geq 0$ khi đó ta được

$$9 \geq 6x + 3x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Ví dụ 12. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + b = 2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \leq 2$$

Phân tích: Để bài toán đơn giản hơn ta có thể thực hiện làm mất căn bậc ba bằng cách đặt $x = \sqrt[3]{a}$; $y = \sqrt[3]{b}$, khi đó giả thiết của bài toán trở thành $x^3 + y^3 = 2$ và ta cần chứng minh $x + y \leq 2$.

Để ý ta thấy $x + y \leq 2$ tương đương với $(x + y)^3 \leq 8$, khai triển ta và sử dụng giả thiết ta được được $xy(x + y) \leq x^3 + y^3$. Như vậy bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng nên ta có được bất đẳng thức cần chứng minh. Tuy nhiên nếu $x + y > 2$, với cách biến đổi như trên ta thu được $xy(x + y) > x^3 + y^3$ là một bất đẳng thức sai. Do đó ta có thể sử dụng phép biến đổi tương đương hoặc phép phản chứng để giải quyết bài toán.

Lời giải

Đặt $x = \sqrt[3]{a}$; $y = \sqrt[3]{b}$, khi đó giả thiết của bài toán trở thành $x^3 + y^3 = 2$ và ta cần chứng minh

$$x + y \leq 2.$$

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là ta có bất đẳng thức $x + y > 2$.

Biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được

$$\begin{aligned}(x + y)^3 > 8 &\Leftrightarrow x^3 + y^3 + 3(x + y) > 8 \Leftrightarrow 2 + 3xy(x + y) > 8 \\ &\Leftrightarrow xy(x + y) > 2 \Leftrightarrow xy(x + y) > x^3 + y^3\end{aligned}$$

Chia 2 vế cho số dương $x + y$ khi đó ta được bất đẳng thức

$$xy > x^2 - xy + y^2 \Leftrightarrow 0 > (x - y)^2$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức sai. Vậy điều ta giả sử là không xảy ra hay bài toán được chứng minh.

Ví dụ 13. Cho 25 số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_{25}$ khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} = 9$$

Chứng minh rằng trong 25 số tự nhiên đó luôn tồn tại hai số bằng nhau.

Phân tích: Để chứng minh trong hai 25 số tự nhiên trên luôn tồn tại hai số bằng nhau ta có thể giả sử 25 số đó khác nhau từng đôi một, để dễ biến đổi ta nên sắp thứ tự cho 25 số đó, chẳng hạn $a_1 < a_2 < \dots < a_{25}$. Với cách sắp thứ tự như vậy ta sẽ nhận được kết quả là $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \dots, a_{25} \geq 25$. Khi đó ta có

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{25}}$$

Đến đây ta chỉ cần chỉ ra $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{25}} \leq 9$ là bài toán được giải quyết

Lời giải

Giả sử trong 25 số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_{25}$ không có hai số nào bằng nhau. Không mất tính tổng quát ta có thể chọn $a_1 < a_2 < \dots < a_{25}$. Khi đó ta có

$$a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \dots, a_{25} \geq 25$$

Suy ra ta được $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{25}}$

Mặt khác ta chứng minh được

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{25}} &= 1 + \frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{3}} + \dots + \frac{2}{2\sqrt{25}} \\
&< 1 + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{25} + \sqrt{24}} \right) \\
&= 1 + 2 \left(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{25} - \sqrt{24} \right) \\
&= 1 + 2 \left(\sqrt{25} - 1 \right) = 9
\end{aligned}$$

Điều này dẫn tới $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} < 9$

Bất đẳng thức thu được mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Vậy điều ta giả sử là không xảy ra hay bài toán được chứng minh.

Ví dụ 14. Cho 25 số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2015}}} \geq 89$$

Chứng minh rằng trong 2015 số tự nhiên đó luôn tồn tại hai số bằng nhau.

Lời giải

Giả sử trong 2015 số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ không có hai số nào bằng nhau. Không mất tính tổng quát

ta có thể chọn $a_1 < a_2 < \dots < a_{2015}$. Khi đó ta có

$$a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, a_3 \geq 3, \dots, a_{2015} \geq 2015$$

Suy ra ta được $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2015}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015}}$

Mặt khác ta chứng minh được

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015}} &= 1 + \frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{3}} + \dots + \frac{2}{2\sqrt{2015}} \\
&< 1 + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015} + \sqrt{2014}} \right) \\
&= 1 + 2 \left(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{2015} - \sqrt{2014} \right) \\
&= 1 + 2 \left(\sqrt{2015} - 1 \right) < 89
\end{aligned}$$

Điều này dẫn tới $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2015}}} < 89$

Bất đẳng thức thu được mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Vậy điều ta giả sử là không xảy ra hay bài toán được chứng minh.

Ví dụ 15. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^4 + b^4 < a^3 + b^3$. Chứng minh rằng:

$$a + b < 2$$

Lời giải

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh sai, khi đó ta có bất đẳng thức $a + b \geq 2$.

Đặt $a = x + 1$; $b = y + 1$ khi đó ta được $x + y \geq 0$

Xét hiệu hai vế của giả thiết ta được

$$\begin{aligned}a^4 + b^4 - a^3 - b^3 &= (1+x)^4 + (1+y)^4 - (1+x)^3 - (1+y)^3 \\&= (x+y) + 3(x^2 + y^2) + 3(x^3 + y^3) \\&= (x+y) + 3(x^2 + y^2) + 3(x+y)(x^2 - xy + y^2) \geq 0\end{aligned}$$

Hay $a^4 + b^4 - a^3 - b^3 \geq 0$

Mà ta lại có $a + b \geq 2$ do đó suy ra $a^4 + b^4 \geq a^3 + b^3$. Bất đẳng thức thu được trái với giả thiết của bài toán.

Vậy điều ta giả sử là không xảy ra hay bài toán được chứng minh.

Ví dụ 16. Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2(1 + ab)$.

Chứng minh rằng: $a \geq c$ và $b \geq c$

Phân tích: Quan sát bài toán ta nhận thấy vai trò của a, b là như nhau, do đó ta chỉ cần chứng minh $a \geq c$, trường hợp còn lại hoàn toàn tương tự. Để tìm mối liên hệ của a và c ta viết lại giả thiết là $a^2 - c^2 = b(ac^2 - b)$. Do đó nếu như $a < c$ thì ta được bất đẳng thức $a^2 - c^2 = b(ac^2 - b) < 0 \Leftrightarrow b > ac^2$. Mặt khác ta lại thấy $b(b - ac^2) \geq b > ac^2$. Như vậy ta được $c^2 - a^2 - ac^2 > 0$, nhưng do a, c là các số nguyên dương nên ta lại thu được $c^2 - a^2 - ac^2 = c^2(1 - a) - a^2 < 0$, hai bất đẳng thức này mâu thuẫn với nhau, bài toán được giải quyết xong.

Lời giải

+ Trước hết ta chứng minh $a \geq c$. T viết lại giả thiết là $a^2 - c^2 = b(ac^2 - b)$.

Giả sử $a < c$ khi đó ta được $a^2 - c^2 = b(ac^2 - b) < 0 \Leftrightarrow b > ac^2$.

Mà ta lại thấy $b(b - ac^2) \geq b > ac^2$.

Như vậy ta được $c^2 - a^2 - ac^2 > 0$.

Mà do a, c là các số nguyên dương nên ta được $c^2 - a^2 - ac^2 = c^2(1 - a) - a^2 < 0$.

Hai bất đẳng thức này mâu thuẫn với nhau. Do đó không thể xảy ra $a < c$, tức là ta có bất đẳng thức $a \geq c$.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $b \geq c$.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 17. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c \geq abc$. Chứng minh rằng 2 trong 3 bất đẳng thức sau là bất đẳng thức đúng

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{6}{c} \geq 6; \quad \frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{6}{a} \geq 6; \quad \frac{2}{c} + \frac{3}{a} + \frac{6}{b} \geq 6$$

Phân tích: Từ cách phát biểu bài toán ta ưu tiên lựa chọn phương pháp phản chứng để chứng minh. Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh có ít nhất hai trong ba bất đẳng thức là đúng, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp có ít nhất hai bất đẳng thức trên cùng sai. Như vậy ta chỉ cần chứng minh trường hợp có ít nhất hai bất đẳng thức trên cùng sai không thể xảy ra là được. Chú ý giả thiết và các bất đẳng thức ta có thể đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$. Khi đó giả thiết trở thành $xy + yz + zx \geq 1$ và các bất đẳng thức là $2x + 3y + 6z \geq 6$; $2y + 3z + 6x \geq 6$; $2z + 3x + 6y \geq 6$.

Lời giải

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$. Khi đó giả thiết trở thành $xy + yz + zx \geq 1$ và các bất đẳng thức là $2x + 3y + 6z \geq 6$; $2y + 3z + 6x \geq 6$; $2z + 3x + 6y \geq 6$.

Ta cần chứng minh có ít nhất hai trong ba bất đẳng thức trên là đúng.

Giả sử điều cần phải chứng minh là sai, tức là có ít nhất hai bất đẳng thức trên không đúng. Không mất tính tổng quát ta chọn $2x + 3y + 6z \geq 6$; $2y + 3z + 6x \geq 6$ là hai bất đẳng thức bị sai, khi đó ta được $2x + 3y + 6z < 6$; $2y + 3z + 6x < 6$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $8x + 5y + 9z < 12$

Từ $xy + yz + zx \geq 1$ ta được $x \geq \frac{1 - yz}{y + z}$, khi đó ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \frac{8(1 - yz)}{y + z} + 5y + 9z < 12 &\Leftrightarrow 8(1 - yz) + (y + z)(5y + 9z) < 12(y + z) \\ &\Leftrightarrow 5y^2 + 9z^2 + 6yz - 12y - 12z + 8 < 0 \\ &\Leftrightarrow (y + 3z - 2)^2 + 4(y - 1)^2 < 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức sai.

Vậy điều giả sử không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 18. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 8a}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 8b}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 8c}} \geq 1$$

Phân tích: Để ý ta thấy $x = \frac{1}{\sqrt{1 + 8a}} \Leftrightarrow a = \frac{1 - x^2}{8x^2}$ và vì a là số thực dương nên ta có điều kiện

$0 < x < 1$. Như vậy để đơn giản hóa bất đẳng thức cần chứng minh ta có thể đổi biến

$x = \frac{1}{\sqrt{1 + 8a}}$; $y = \frac{1}{\sqrt{1 + 8b}}$; $z = \frac{1}{\sqrt{1 + 8c}}$, khi đó ta được $0 < x; y; z < 1$.

Giả thiết được viết lại là $8^3 x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = (1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2)$ và bất đẳng thức cần chứng minh là $x + y + z \geq 1$. Nhìn giả thiết ta liên tưởng đến một bất đẳng thức quen thuộc $8xyz \leq (x + y)(y + z)(z + x)$, như vậy ta cần cách tìm biến đổi làm xuất hiện các đại lượng $x + y, y + z, z + x$. Nhận thấy theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(x + y + z)^2 - x^2 = (y + z)\left[(x + y) + (x + z)\right] \geq 2(y + z)\sqrt{(x + y)(x + z)}$$

Như vậy nếu $x + y + z \geq 1$ thì $1 - x^2 \leq (x + y + z)^2 - x^2$, lúc này ta được các bất đẳng thức ngược chiều nhau. Đến đây một cách tự nhiên ta nghĩ đến phép phản chứng.

Lời giải

Đặt $x = \frac{1}{\sqrt{1 + 8a}}$; $y = \frac{1}{\sqrt{1 + 8b}}$; $z = \frac{1}{\sqrt{1 + 8c}}$.

Suy ra $a = \frac{1 - x^2}{8x^2}$; $b = \frac{1 - y^2}{8y^2}$; $c = \frac{1 - z^2}{8z^2}$, khi đó ta được $0 < x; y; z < 1$.

Vì $abc = 1$ nên giả thiết được viết lại là $8^3 x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = (1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2)$ và bất đẳng thức cần chứng minh là $x + y + z \geq 1$.

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là ta có bất đẳng thức $x + y + z < 1$.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$1 - x^2 > (x + y + z)^2 - x^2 = (y + z)\left[(x + y) + (x + z)\right] \geq 2(y + z)\sqrt{(x + y)(x + z)} > 0$$

Áp dụng tương tự ta có

$$1 - y^2 > 2(x + z)\sqrt{(x + y)(y + z)} > 0; \quad 1 - z^2 > 2(x + y)\sqrt{(x + z)(y + z)} > 0$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$8^3 x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = (1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2) > (x + y)^2 (y + z)^2 (z + x)^2$$

Hay $8xyz > (x + y)(y + z)(z + x)$, rõ ràng bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức sai. Vậy điều giả sử không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Một số ví dụ khác

Ví dụ 19. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a + b} + \sqrt{b + c} + \sqrt{c + a} \geq 3\sqrt{2}$$

Lời giải

Đặt $x = \sqrt{a + b}$; $y = \sqrt{b + c}$; $z = \sqrt{c + a}$, khi đó ta được

$$2a = x^2 + z^2 - y^2; \quad 2b = x^2 + y^2 - z^2; \quad 2c = z^2 + y^2 - x^2$$

Giả thiết được viết lại thành $\frac{1}{x^2 + z^2 - y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} + \frac{1}{z^2 + y^2 - x^2} = \frac{3}{2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh là $x + y + z \geq 3\sqrt{2}$

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là ta có $x + y + z < 3\sqrt{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= \frac{1}{x^2 + z^2 - y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} + \frac{1}{z^2 + y^2 - x^2} \\ &\geq \frac{3}{\sqrt[3]{(x^2 + z^2 - y^2)(x^2 + y^2 - z^2)(z^2 + y^2 - x^2)}} \end{aligned}$$

Mặt khác theo một bất đẳng thức quen thuộc ta lại có

$$(x^2 + z^2 - y^2)(x^2 + y^2 - z^2)(z^2 + y^2 - x^2) \leq x^2 y^2 z^2 \leq \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^6 < 8$$

Do đó ta được
$$\frac{3}{\sqrt[3]{(x^2 + z^2 - y^2)(x^2 + y^2 - z^2)(z^2 + y^2 - x^2)}} > \frac{3}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$$

Hay ta được $\frac{3}{2} > \frac{3}{2}$, bất đẳng thức thu được là một bất đẳng thức sai.

Vậy điều giả sử không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 20. Cho a, b là các số thực thỏa mãn các điều kiện sau:

$$-1 \leq a + b \leq 1; \quad -1 \leq a + b + ab \leq 1$$

Chứng minh rằng: $-2 \leq a, b \leq 2$

Lời giải

Vì vai trò của a, b như nhau nên ta chỉ cần chứng minh $-2 \leq a \leq 2$. Việc chứng minh $-2 \leq b \leq 2$ hoàn toàn tương tự.

Giả sử bất đẳng thức $-2 \leq a \leq 2$ là sai, khi đó ta có $a > 2$ hoặc $a < -2$.

+ Xét trường hợp $a > 2$, khi đó từ $-1 \leq a + b \leq 1$ suy ra $b \leq 1 - a < 1 - 2 = -1$, do đó ta được $ab < -2$ mà $a + b \leq 1$ nên $a + b + ab < -1$ điều này mâu thuẫn với giả thiết thứ hai của bài toán. Như vậy trường hợp này không xảy ra.

+ Xét trường hợp $a < -2$, khi đó từ $-1 \leq a + b \leq 1$ suy ra $b \geq -1 - a > -1 + 2 = 1$, do đó ta được $ab < -2$ mà $a + b \leq 1$ nên $a + b + ab < -1$ điều này mâu thuẫn với giả thiết thứ hai của bài toán. Như vậy trường hợp này cũng không xảy ra.

Các kết quả trên chứng tỏ điều giả sử không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 21. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c \geq abc$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq abc$$

Lời giải

Nếu $abc = 0$, thì bất đẳng thức được chứng minh.

Xét $abc \neq 0$, khi đó ta được $a, b, c > 0$. Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là

$a^2 + b^2 + c^2 < abc$. Khi đó ta có $abc > a^2 + b^2 + c^2 > a^2$ nên $bc > a$.

Chúng minh tương tự ta được $b < ac$, $c < ab$

Từ đó suy ra $a + b + c < ab + bc + ca$.

Mặt khác ta lại có $abc > a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Rightarrow abc > ab + bc + ca$

Kết hợp hai bất đẳng thức ta được $abc > a + b + c$, bất đẳng thức này mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Vậy điều giả sử không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 22. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Chúng minh rằng: $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq 1$

Lời giải

Bất đẳng thức có tính đối xứng giữa các biến, do đó không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$, Khi đó $a + b - c \geq 0$ và $a + c - b \geq 0$.

+ Nếu $b + c - a < 0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

+ Nếu $b + c - a \geq 0$. Khi này ta đặt $x = b + c - a$; $y = c + a - b$; $z = a + b - c$.

Khi đó ta viết lại giả thiết là $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $xyz \geq 1$.

Ta chứng minh bất đẳng thức trên bằng phương pháp phản chứng

Thật vậy, giả sử $xyz < 1$. Khi đó theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$x + y + z = \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}$$

Hay $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq \sqrt{xyz}(x + y + z)$, vì $xyz < 1$ nên

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} > x + y + z$$

Tuy nhiên cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$, thiết lập các đánh giá tương tự ta có

$$\frac{x+y+z+3}{2} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} > x + y + z \Rightarrow x + y + z < 3$$

Mặt khác $x + y + z = \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z} \Rightarrow x + y + z \geq 3$

Mâu thuẫn này chứng tỏ điều giả sử trên là sai, do vậy $xyz \geq 1$. Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét: Ta có thể sử dụng phương pháp phản chứng theo hướng như sau

Giả sử $xyz < 1$, khi đó từ giả thiết của bài toán suy ra

$$(x + y + z)^2 (xy + yz + zx) = 2(x + y + z) + 2(xy + yz + zx) + xyz(x + y + z)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy và kết hợp với giả sử ta lại có

$$xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} > 3; x + y + z > 3$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{2(x+y+z)^2(xy+yz+zx)}{3} &> 2(x+y+z)^2 \\ \frac{2(x+y+z)^2(xy+yz+zx)}{9} &> 2(xy+yz+zx) \\ \frac{2(x+y+z)^2(xy+yz+zx)}{9} &> xyz(x+y+z) \end{aligned}$$

Cộng theo vế a bất đẳng thức trên ta được

$$(x+y+z)^2(xy+yz+zx) > 2(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) + xyz(x+y+z)$$

Điều này mâu thuẫn với đẳng thức trên, do đó điều giả sử là sai. Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh.

Ví dụ 23. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$a < b < c; a + b + c = 6; ab + bc + ca = 9$$

Chứng minh rằng: $0 < a < 1; 1 < b < 3; 3 < c < 4$

Lời giải

Từ giả thiết của bài toán, ta suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 18$$

Mặt khác, vì a, b, c là các số dương cho nên

$$9 = ab + bc + ca < a(b+c) + \frac{(b+c)^2}{4} = a(6-a) + \frac{(6-a)^2}{2}$$

Hay $\frac{3a^3}{4} - 3a < 0$, từ đó suy ra $0 < a < 4$, do vậy $0 < a < b < c$

Khi đó $18 = a^2 + b^2 + c^2 < ac + bc + c^2 = c(a+b+c) = 6c$. Suy ra $c > 3$.

Bây giờ ta chứng minh $c < 4$. Thật vậy, giả sử $c \geq 4$ khi đó ta được $c^2 \geq 4c$, từ đây ta suy ra

$$18 = a^2 + b^2 + c^2 > \frac{(a+b)^2}{2} + c^2 > \frac{(6-c)^2}{2} + 4c$$

Hay $\frac{c^2}{2} - 2c < 0 \Leftrightarrow 0 < c < 4$. Mâu thuẫn với $c \geq 4$, do vậy $c < 4$

Từ đó ta có $3 < c < 4$

Cũng từ đây ta suy ra $a < b < c < 4$. Ta chứng minh $a < 1$. Thật vậy, giả sử $a \geq 1$

Khi đó ta được $1 \leq a < b < c < 4$, suy ra

$$(a-1)(a-4) \leq 0; (b-1)(b-4) < 0; (c-1)(c-4) < 0$$

Hay $a^2 \leq 5a - 4; b^2 < 5b - 4; c^2 < 5c - 4$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được $a^2 + b^2 + c^2 < 5(a+b+c) - 12 = 18$

Điều này mâu thuẫn với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 18$. Do đó $a < 1$. Vậy $0 < a < 1$.

Cuối cùng ta chứng minh $1 < b < 3$

Thật vậy, vì $a < 1$ và $c < 4$, do đó $b = 6 - a - c > 6 - 1 - 4 = 1$ hay $b > 1$

Ta cần chứng minh $b < 3$.

Giả sử $b \geq 3$, khi đó ta có $(b-3)(c-3) \geq 0$

$$\text{Hay} \quad bc \geq 3(b+c) - 9 = 3(6-a) - 9 = 9 - 3a$$

Từ đó suy ra $9 = ab + bc + ca = a(b+c) + bc \geq a(b+c) + 9 - 3a$

$$\text{Hay} \quad a(b+c-3) \leq 0$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá sai do $3 < c < 4$. Vì vậy giả sử $b \geq 3$ là sai.

Do đó $b < 3$. Vậy ta được $1 < b < 3$.

Như vậy bài toán được chứng minh xong.

Chủ đề 4

CHỨNG MINH CÁC BẤT ĐẲNG THỨC VỀ TỔNG, TÍCH CỦA DÃY SỐ - PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

1. Một số kiến thức cần nhớ

a) Phương pháp làm trội, làm giảm

Giả sử cần chứng minh $A \leq B$, khi đó ta cần làm trội biểu thức A thành $A \leq M$ rồi chứng minh $M \leq B$. Cũng có thể làm giảm B thành $M \leq B$ rồi chứng minh $A \leq M$.

Phương pháp làm trội, làm giảm thường được áp dụng cho bất đẳng thức về tổng hoặc tích của một dãy số. Khi đó dùng các tính chất bất đẳng thức để đưa một vế của bất đẳng thức về dạng tính được tổng hữu hạn hoặc tích hữu hạn.

+ Ý tưởng chung cho bất đẳng thức dạng tổng của dãy số là:

Giả sử ta cần chứng minh $A(x_1) + A(x_2) + A(x_3) + \dots + A(x_n) \leq M$, khi đó ta thực hiện làm trội $A(x_i) \leq B(y_{i+1}) - B(y_i)$ để thu được

$$A(x_1) + A(x_2) + A(x_3) + \dots + A(x_n) \leq B(y_n) - B(y_1)$$

Sau đó ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức $B(y_n) - B(y_1) \leq M$.

+ Ý tưởng chung cho bất đẳng thức dạng tích của dãy số là:

Giả sử ta cần chứng minh $A(x_1) \cdot A(x_2) \cdot A(x_3) \dots A(x_n) \leq M$, khi đó ta thực hiện làm trội $A(x_i) \leq \frac{B(y_{i+1})}{B(y_i)}$ để thu được $A(x_1) \cdot A(x_2) \cdot A(x_3) \dots A(x_n) \leq \frac{B(y_n)}{B(y_1)}$

Sau đó ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức $\frac{B(y_n)}{B(y_1)} \leq M$.

+ Một số tổng sai phân hay dùng

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}; \quad \frac{a}{n(n+a)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+a}$$

$$\frac{2a}{n(n+a)(n+2a)} = \frac{1}{n(n+a)} - \frac{1}{(n+a)(n+2a)}$$

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n(n+a)} + \frac{1}{(n+a)(n+2a)} + \dots + \frac{1}{[n+(k-1)a](n+ka)} = \frac{k}{n(n+ka)}$$

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right]$$

Chú ý:

- Ta cần áp dụng làm trội, làm giảm sao cho bất đẳng thức cuối cùng cần chứng minh phải càng đơn giản càng tốt.

- Thông thường ta tìm quy luật viết các số hạng của dãy rồi đưa ra cách viết tổng quát, từ đó ta mới làm trội cho số hạng tổng quát và áp dụng cho các số hạng cụ thể.

b) Phương pháp quy nạp toán học

+ Nội dung của phương pháp quy nạp

Một bất đẳng thức phụ thuộc vào số nguyên dương n được xem là đúng nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

- Bất đẳng thức đúng với giá trị đầu tiên của n
- Từ giả thiết bất đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \in \mathbb{N}$) suy ra được bất đẳng thức đúng với

$$n = k + 1$$

+ Các bước chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp quy nạp

Giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức $A(n) \geq B(n)$ với $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$, ta tiến hành các bước như sau:

- **Bước 1:** Kiểm tra bất đẳng thức đúng với $n = n_0$
- **Bước 2:** Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \geq n_0$, $k \in \mathbb{N}$)
- **Bước 3:** Chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$ và kết luận bất đẳng thức đúng với

$$n \geq n_0.$$

Chú ý:

- Thông thường khi chứng minh bất đẳng thức có sự phụ thuộc vào số nguyên dương n , thì ta nên chú ý sử dụng phương pháp quy nạp toán học.

- Trong phương pháp quy nạp toán học thì bất đẳng thức có được từ bước thứ hai chính là một giả thiết mới được dùng để chứng minh bất đẳng thức trong bước thứ ba. Do đó cần phải khai thác thật hiệu quả giả thiết quy nạp.

2. Một số ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Với mọi số tự nhiên $n > 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$

Phân tích và lời giải

Nhận thấy tổng trên có n số hạng, do đó ta làm trội bằng cách thay mẫu $n+k$ với $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ bằng $n+n$. Tức là ta có:

$$\frac{1}{n+k} > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}, \text{ với } k = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

$$\text{Khi đó ta được: } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 2. Với mọi số tự nhiên $n \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n+1} < 2$$

Phân tích và lời giải

+ Trước hết ta chứng minh: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \dots + \frac{1}{3n+1} < 2$

Tổng trên có $2n+1$ số hạng và lại thấy $\frac{2n+1}{n+1} < \frac{2n+2}{n+1} = 2$, do đó áp dụng tư tưởng như ví dụ trên ta làm trội bằng cách thay mỗi số hạng bằng số hạng lớn nhất. Tức là ta được

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \dots + \frac{1}{3n+1} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \dots + \frac{1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} < 2$$

+ Bây giờ ta chứng minh: $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \dots + \frac{1}{3n+1}$

Tổng trên có $2n+1$ số hạng và số hạng chính giữa là $\frac{1}{2n+1}$, ta chuyển bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{2n+1}{2n+1} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n+1}$$

Ở đây ta lại nhận thấy $\frac{2n+1}{2n+1} = n \cdot \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}$ có chứa số hạng chính giữa, do đó ý tưởng ở đây là ghép các cặp dạng $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+1}$; $\frac{1}{n+2} + \frac{1}{3n}$; ...; $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2}$ thì được n tổng, rồi chứng minh mỗi tổng đó đều lớn hơn $\frac{2}{2n+1}$. Để chứng minh các tổng trên đều lớn hơn $\frac{2}{2n+1}$ ta chỉ cần

chứng minh được $\frac{1}{2n+1-k} + \frac{1}{2n+1+k}$, trong đó k nhận các giá trị từ 1; 2; ...; n . Thật vậy:

$$\frac{1}{2n+1-k} + \frac{1}{2n+1+k} = \frac{4n+2}{(2n+1)^2 - k^2} > \frac{4n+2}{(2n+1)^2} = \frac{2}{2n+1}$$

Đến đây ta có lời giải như sau:

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} \dots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} \\ &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{3n} \right) + \dots + \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{4n+2}{(n+1)(3n+1)} + \frac{4n+2}{(n+1)3n} + \dots + \frac{1}{2n+1} \geq \frac{2}{2n+1} \cdot n + \frac{1}{2n+1} = 1 \end{aligned}$$

Vậy ta được $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \dots + \frac{1}{3n+1}$

Vậy bài toán được chứng minh

Nhận xét: Bất đẳng thức bên trái là một bất đẳng thức khó, sử dụng cách làm như bất đẳng thức bên phải không đem lại hiệu quả, cho nên ta phải tìm một phương án khác. Điểm quan trọng để tìm ra lời giải cho bài toán này chính là phát hiện các tổng bằng nhau

$(n+1) + (3n+1) = (n+2) + 3n = \dots 2n + (2n+2) = 2(2n+1)$ và ý tưởng ghép các cặp

$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+1}; \frac{1}{n+2} + \frac{1}{3n}; \dots; \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2}$ sao cho khi quy đồng có cùng một tử số là $2(2n+1)$

và bước tiếp theo chính là đánh giá mẫu về cùng $2n+1$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$ ta có:

$$\frac{2n+1}{3n+2} < \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+4} + \dots + \frac{1}{4n+2} < \frac{3n+2}{4(n+1)}$$

Phân tích và lời giải

Đặt $P = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+4} + \dots + \frac{1}{4n+2}$

+ Chứng minh $P > \frac{2n+1}{3n+2}$. Tổng P có $2n+1$ số hạng, ta ghép thành n cặp cách đều hai đầu, còn lại

một số hạng đứng giữa là $\frac{1}{3n+2}$, mỗi cặp có dạng:

$$\frac{1}{3n+2-k} + \frac{1}{3n+2+k} = \frac{2(3n+2)}{(3n+2)^2 - k^2} > \frac{2(3n+2)}{(3n+2)^2} = \frac{2}{3n+2} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1, n)$$

Do đó ta được: $P > \frac{2n}{3n+2} + \frac{1}{3n+2} = \frac{2n+1}{3n+2}$

+ Chứng minh $P < \frac{3n+2}{4(n+1)}$.

Để chứng minh bất đẳng thức này, chúng ta cần có bổ đề sau:

Bổ đề: Với mọi $0 < k < m-2$ ($k, m \in \mathbb{Z}$), ta có:

$$\frac{1}{m+k} + \frac{1}{2m-2-k} < \frac{1}{m} + \frac{1}{2m-2} \quad (*)$$

Chứng minh: Từ giả thiết $0 < k < m-2$ ($k, m \in \mathbb{Z}$), ta thấy các mẫu số đều dương và $3m-2 > 0$.

Quy đồng mẫu số hai vế ta có

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{3m-2}{(m+k)(2m-2-k)} < \frac{3m-2}{m(2m-2)} \Leftrightarrow m(2m-2) < (m+k)(2m-2-k) \\ &\Leftrightarrow 2m^2 - 2m < 2m^2 - 2m - km + 2km - 2k - k^2 \Leftrightarrow k^2 < km - 2k \Leftrightarrow k < m-2 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo giả thiết, nên bổ đề được chứng minh

Viết lại biểu thức P và áp dụng bổ đề ta có

$$\begin{aligned} 2P &= \left(\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{4n+2} \right) + \left(\frac{1}{2n+3} + \frac{1}{4n+1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{4n+2} + \frac{1}{2n+2} \right) \\ &< \left(\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{4n+2} \right) (2n+1) \end{aligned}$$

Hay $P < \frac{1}{2} \cdot \frac{3n+2}{2(n+1)(n+1)} \cdot (2n+1) = \frac{3n+2}{4(n+1)}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét: Ý tưởng của bài toán trên cũng là ghép theo cặp, với bất đẳng thức bên trái ta thấy không có vấn đề gì lớn cả. Tuy nhiên với bất đẳng thức bên phải, sẽ thực sự gây ra nhiều khó khăn nếu không phát hiện ra bổ đề: Với $0 < k < m - 2$ ($k, m \in \mathbb{Z}$), ta có:

$$\frac{1}{m+k} + \frac{1}{2m-2-k} < \frac{1}{m} + \frac{1}{2m-2}$$

Ví dụ 4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$ ta có

$$\frac{n+1}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < n$$

Phân tích và lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh là một bất đẳng thức kép nên ta chia thành hai bất đẳng thức để chứng minh. Nhận thấy tổng trên có $2^n - 1$ phân số nên nếu chia theo nhóm tương tự như ví dụ trên không đem lại hiệu quả vì khi quy đồng theo nhóm thì các tử số không bằng nhau. Để tiện cho việc tìm lời giải ta đặt:

$$P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n - 1}$$

Tức là ta cần chứng minh $\frac{n+1}{2} < P < n$

Quan sát yêu cầu bài toán, ta thấy có thể làm trội bằng cách chia biểu thức thành nhiều nhóm, rồi làm trội từng nhóm.

+ Trước hết ta chứng minh $P < n$.

Để ý ta thấy $n = 1 + 1 + \dots + 1$ (có n số 1), nên ta có thể chia P thành n nhóm sao cho mỗi nhóm đều có thể bé hơn hoặc bằng 1. Ta có thể làm như sau:

$$1 = 1; \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 2 \cdot \frac{1}{2} = 1; \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{7} < 4 \cdot \frac{1}{4} = 1; \dots; \frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = 1$$

Như vậy P được chia thành các nhóm có số phân số lần lượt là: 1; 2; 4; 8; ...; 2^{n-1} , ta cần kiểm tra xem tổng các phân số có phải là $2^n - 1$ không?

Ta có $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, điều này có nghĩa là ta nhóm vừa đủ, và có tất cả n nhóm như vậy, khi này ta có thể giải được như sau:

Ta có:

$$P = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^3 - 1} \right) + \left(\frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^4 - 1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} \right)$$

Làm trội biểu thức bằng cách thay các phân số trong mỗi ngoặc bằng phân số lớn nhất trong mỗi nhóm ta được

$$P < 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2^2} \cdot 4 + \frac{1}{2^3} \cdot 8 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot 2^{n-1} = 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

+ Để chứng minh $P > \frac{n+1}{2}$ ta cũng làm tương tự.

$$\text{Ta có } P = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2+1} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2^3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) - \frac{1}{2^n}$$

Làm trội biểu thức bằng cách thay phân số trong mỗi ngoặc bằng phân số nhỏ nhất trong mỗi nhóm ta được.

$$P > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot 2 + \frac{1}{2^3} \cdot 4 + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow P > 1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2^n} = \frac{n+1}{2} + \frac{2^{n-1} - 1}{2^n} \geq \frac{n+1}{2}$$

Kết hợp hai bất đẳng thức ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng với n là số nguyên dương, ta luôn có:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$$

Phân tích và lời giải

Để chứng minh bất đẳng thức trên ta cần làm trội mỗi phân số bằng các thay mẫu số bằng một số nhỏ hơn. Để ý đến đánh giá $k^2 > k(k-1)$, khi đó ta thu được các đánh giá có dạng

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \quad \text{cho } k=2, 3, \dots, n \text{ ta thì ta được một bất đẳng thức}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Bây giờ ta cần kiểm tra xem $1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} < 2$ có đúng không. Dễ thấy bất đẳng thức trên đúng, do đó ta trình bày lại lời giải như sau:

$$\text{Ta có: } \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \quad \forall k \text{ là số nguyên dương.}$$

Cho $k=2, 3, \dots, n$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2} &< 1 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3^2} &< \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &\dots \\ \frac{1}{n^2} &< \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\text{Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được: } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$$

$$\text{Suy ra } 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2. \text{ Vậy bất đẳng thức được chứng minh.}$$

Ví dụ 6. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , ta luôn có:

$$\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{4}$$

Lời giải

Ta có

$$\frac{1}{(2.2)^2} + \frac{1}{(2.3)^2} + \frac{1}{(2.4)^2} + \dots + \frac{1}{(2.n)^2} = \frac{1}{4.2^2} + \frac{1}{4.3^2} + \frac{1}{4.4^2} + \dots + \frac{1}{4.n^2}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét: Bất đẳng thức tổng quát của ví dụ trên là:

$$\frac{1}{(k.2)^2} + \frac{1}{(k.3)^2} + \frac{1}{(k.4)^2} + \dots + \frac{1}{(k.n)^2} < \frac{1}{k^2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Ta thay k bởi một số tự nhiên khác 0 tùy ý sẽ được các bài toán mới, chẳng hạn với $k = 5$ ta

$$\text{có } \frac{1}{10^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2} + \dots + \frac{1}{(5n)^2} < \frac{1}{25}$$

Ví dụ 6. Chứng minh rằng: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2015^2} < \frac{2014}{2015}$

Lời giải

Ta có với mọi $k \geq 1$ thì $k^2 > k(k-1) > 0$ nên $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

Cho $k = 2, 3, 4, \dots, 2015$, ta có:

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{2015^2} < \frac{1}{2014.2015} = \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức cùng chiều, ta được

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2015^2} < 1 - \frac{1}{2015} = \frac{2014}{2015}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có:

$$1 \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{5}{3}$$

Phân tích và lời giải

Dễ thấy vì n là số nguyên dương nên ta có: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{1^2} = 1 \quad (1)$

Bây giờ ta chứng minh $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{5}{3}$.

Thực hiện ý tưởng làm trội như các ví dụ trên với đánh giá $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Tức là ta sẽ thu được

một bất đẳng thức $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$, tuy nhiên ở đây ta không thể khẳng

định được $2 - \frac{1}{n} < \frac{5}{3}$ là đúng. Do đó trong bất đẳng thức trên ta không thể làm trội theo các đánh giá như trên được. Tất nhiên là với bài toán này ta vẫn thực hiện ý tưởng làm trội nhưng với một đánh giá tốt hơn, khi đó ta cần một đánh giá theo kiểu $\frac{1}{k^2} = \frac{a^2}{(ak)^2} < \frac{a^2}{(ak)^2 - b^2} = \frac{a^2}{2b} \left(\frac{1}{ak - b} - \frac{1}{ak + b} \right)$. Để ý ta

viết lại được bất đẳng thức cần chứng minh là $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}$ nên với $k = 2$ khi đó ta chọn các giá trị a, b nguyên dương sao cho $\frac{a^2}{2b(2a - b)} = \frac{2}{3}$, thử một vài trường hợp ta chọn được $a = 2, b = 1$.

Tức là ta được $\frac{1}{k^2} = \frac{4}{4k^2} < \frac{4}{4k^2 - 1} = 2 \left(\frac{1}{2k - 1} - \frac{1}{2k + 1} \right)$. Vấn đề bây giờ ta cần kiểm tra xem đánh giá được chọn có đủ tốt hay không:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \dots + \frac{2}{2n - 1} - \frac{2}{2n + 1} < \frac{2}{3} - \frac{2}{2n + 1} < \frac{2}{3}$$

Như vậy đánh giá ta chọn là một đánh giá đủ tốt nên ta chỉ cần trình bày lại lời giải cho bài toán như sau:

$$\text{Ta có, với mọi } k \geq 1, \text{ ta có: } \frac{1}{k^2} = \frac{4}{4k^2} < \frac{4}{4k^2 - 1} = 2 \left(\frac{1}{2k - 1} - \frac{1}{2k + 1} \right)$$

Cho $k = 2, 3, 4, \dots, n$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2} &= \frac{4}{4 \cdot 2^2} < \frac{4}{4 \cdot 2^2 - 1} = \frac{2}{2 \cdot 2 - 1} - \frac{2}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3^2} &= \frac{4}{4 \cdot 3^2} < \frac{4}{4 \cdot 3^2 - 1} = \frac{2}{2 \cdot 3 - 1} - \frac{2}{2 \cdot 3 + 1} = \frac{2}{5} - \frac{2}{7} \\ &\vdots \\ \frac{1}{n^2} &= \frac{4}{4n^2} < \frac{4}{4n^2 - 1} = \frac{2}{2n - 1} - \frac{2}{2n + 1} = \frac{2}{2n - 1} - \frac{2}{2n + 1} \end{aligned}$$

Cộng vế với vế các đánh giá trên ta được:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{2}{3} - \frac{2}{2n + 1} < 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) được bất đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , ta luôn có:

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}$$

Phân tích: Để ý ta thấy với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có $k > k^3 - k = k(k - 1)(k + 1)$, khi đó ta có đánh

giá $\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{(k - 1) \cdot k \cdot (k + 1)}$, bây giờ ta làm trội theo đánh giá đó bằng cách cho

$k = 2, 3, 4, \dots, n$.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{k(k^2 - 1)} = \frac{1}{(k-1).k.(k+1)}, \forall k \geq 2$

Cho $k = 2, 3, 4, \dots, n$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^3} &< \frac{1}{1.2.3} \\ \frac{1}{3^3} &< \frac{1}{2.3.4} \\ &\dots \\ \frac{1}{n^3} &< \frac{1}{(n-1).n.(n+1)} \end{aligned}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n.(n+1)}$$

Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{(n-1).n.(n+1)} &< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét: Bài toán tổng quát là với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)}$$

Ta có thể đặc biệt hóa bằng cách

- Chọn n là một số tự nhiên bất kì, chẳng hạn với $n = 100$ ta có bài toán:

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{100^3} < \frac{1}{4} - \frac{1}{101.200}$$

- Chọn giá trị n là năm thi, chẳng hạn với $n = 2015$ ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{2015^3} < \frac{1}{4}$$

Ví dụ 9. Chứng minh rằng: $\frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \dots + \frac{1}{2014^3} < \frac{1}{40}$

Phân tích: Bất đẳng thức cần chứng minh là bất đẳng thức kép nên ta cần một đánh giá kép là

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} < \frac{1}{k^3} < \frac{1}{(k-1)k(k+1)}, \text{ bây giờ ta làm trội và làm giảm theo đánh giá đó bằng cách}$$

cho $k = 5, 6, 7, \dots, 2014$.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{k(k^2 - 1)} = \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$

$$\frac{1}{k^3} > \frac{1}{k^3 + 3k^2 + 2k} = \frac{1}{k(k^2 + 3k + 2)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta được: $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} < \frac{1}{k^3} < \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$

Cho $k = 5, 6, 7, \dots, 2014$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5.6.7} &< \frac{1}{5^3} < \frac{1}{4.5.6} \\ \frac{1}{6.7.8} &< \frac{1}{6^3} < \frac{1}{5.6.7} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2014.2015.2016} < \frac{1}{2014^3} < \frac{1}{2013.2014.2015}$$

Đặt $A = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \dots + \frac{1}{2014^3}$, cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2014.2015.2016} < A < \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \dots + \frac{1}{2013.2014.2015}$$

Ta cần chứng minh: $\frac{1}{65} < \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2014.2015.2016}$

Và $\frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \dots + \frac{1}{2013.2014.2015} < \frac{1}{40}$

+ Chứng minh: $\frac{1}{65} < \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2014.2015.2016}$

Ta có:

$$\frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2014.2015.2016} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5.6} - \frac{1}{2015.2016} \right) > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{390} \right) = \frac{1}{65}$$

+ Chứng minh: $\frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \dots + \frac{1}{2013.2014.2015} < \frac{1}{40}$

Ta có: $\frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \dots + \frac{1}{2013.2014.2015} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{2014.2015} \right) < \frac{1}{40}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 10. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$, ta luôn có:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{n^2 + (n+1)^2} < \frac{9}{20}$$

Phân tích và lời giải

Để ý ta thấy các mẫu số được viết dưới dạng $k^2 + (k+1)^2$, ta cần một đánh giá kiểu $k^2 + (k+1)^2 > ?$. Trước hết ta thử với bất đẳng thức Cauchy, khi đó ta được $k^2 + (k+1)^2 > 2k(k+1)$. Do đó ta có $\frac{1}{k^2 + (k+1)^2} < \frac{1}{2k(k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$.

Bây giờ ta cho $k = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ thì ta thu được

$$\frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{2^2+3^2} + \dots + \frac{1}{n^2+(n+1)^2} < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)}$$

Bất đẳng thức được chứng minh nếu ta chỉ ra được $\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} < \frac{9}{20}$, tuy nhiên đánh giá đó

không đúng với giá trị n lớn. Có phải ta đang làm trệ với một đánh giá sai.

Đến đây hoặc ta vẫn sử dụng các đánh giá đó nhưng với k nhận giá trị lớn hơn 1 hoặc ta tìm một đánh giá khác. Chú ý một tí ta nhận thấy $\frac{9}{20} = \frac{1}{5} + \frac{1}{4}$, do đó ta cần làm trệ từ $k = 2, 3, 4, \dots, n$ và khi đó ta thu được kết quả là

$$\frac{1}{2^2+3^2} + \frac{1}{3^2+4^2} + \dots + \frac{1}{n^2+(n+1)^2} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} < \frac{1}{4}$$

Đến đây, chỉ cần trình bày lại lời giải mà không cần phải tìm đánh giá khác nữa.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{k^2 + (k+1)^2} < \frac{1}{2k(k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$

Cho $k = 2, 3, 4, \dots, n$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^2+3^2} &< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ \frac{1}{3^2+4^2} &< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \\ &\dots \\ \frac{1}{n^2+(n+1)^2} &< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{2^2+3^2} + \frac{1}{3^2+4^2} + \dots + \frac{1}{n^2+(n+1)^2} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} < \frac{1}{4}$$

Hay
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2^2 + 3^2} + \frac{1}{3^2 + 4^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + (n+1)^2} < \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$$

Ví dụ 11. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n > 3$, ta có:

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{65}{54}$$

Lời giải

Đặt $P = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$, thực hiện làm trội mỗi phân số ở vế trái bằng cách làm giảm mẫu, ta

có
$$\frac{2}{k^3} < \frac{2}{k^3 - k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{(k+1)k}, \forall k > 1$$

Cho $k = 4, 5, \dots, n$, ta có:

$$\begin{aligned} 2P &< 2\left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \left(\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5}\right) + \left(\frac{1}{4 \cdot 5} - \frac{1}{5 \cdot 6}\right) + \dots + \left[\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right] \\ &= \frac{251}{108} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{n(n+1)} < \frac{251}{108} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{65}{27} \end{aligned}$$

Do đó ta được $P < \frac{65}{54}$ hay bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 12. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \dots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} < \frac{1}{3\sqrt{n+1}}$$

Phân tích và lời giải

Gọi vế trái của bất đẳng thức là P , ta cần làm trội P thành Q với điều kiện là Q phải dễ thu gọn hơn, điều này có nghĩa là Q phải có các tử và mẫu giống nhau. Để ý rằng các phân số có tử, mẫu hơn kém nhau hai đơn vị, nên ta nghĩ đến bất đẳng thức

$$\frac{n}{n+2} < \frac{n-1}{n} \Leftrightarrow n^2 < n^2 + n - 2 \Leftrightarrow n > 2.$$

Đặt $P = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \dots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3}$, lúc này ta có

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \dots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} < \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{10} \dots \frac{3n-3}{3n-2} \cdot \frac{3n}{3n+1} = Q$$

Nhận thấy Q không thể thu gọn được hết nên rất khó để có đánh giá tiếp theo. Để ý tiếp ta thấy các tử của biểu thức Q và các mẫu của biểu thức P là $3, 6, 9, \dots$ và các mẫu của biểu thức Q và các tử của biểu thức P là $4, 7, 10, \dots$ do đó thì tích PQ có thể thu gọn được. Chú ý là $P^2 < PQ$, do đó ta có thể trình bày lời giải như sau:

$$\begin{aligned}
P^2 &= \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \dots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} \right) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \dots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} \right) \\
&< \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{10} \dots \frac{3n-3}{3n-2} \cdot \frac{3n}{3n+1} \right) \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{10}{12} \dots \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} \right) \\
&< \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{9} \dots \frac{3n-3}{3n-2} \cdot \frac{3n-2}{3n} \cdot \frac{3n}{3n+1} \cdot \frac{3n+1}{3n+3} = \frac{1}{3(3n+3)} = \frac{1}{9(n+1)}
\end{aligned}$$

Từ đây suy ra $P < \frac{1}{3\sqrt{n+1}}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 13. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$ ta có

$$\frac{1}{2!} + \frac{5}{3!} + \frac{11}{4!} + \dots + \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)!} < 2$$

Phân tích: Để ý ta biến đổi được số hạng tổng quát của các số hạng trên như sau:

$$\frac{k^2 + k - 1}{(k+1)!} = \frac{k(k+1)}{(k+1)!} - \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{(k+1)!}, \quad \forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}$$

Bây giờ ta làm trội bất đẳng thức trên bằng cách cho $k = 2, 3, \dots, n$.

Lời giải

Ta có:
$$\frac{k^2 + k - 1}{(k+1)!} = \frac{k(k+1)}{(k+1)!} - \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{(k+1)!}, \quad \forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}$$

Cho k nhận được giá trị $2, 3, \dots, n$ rồi cộng lại ta được:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2!} + \frac{5}{3!} + \dots + \frac{n^2 + n - 1}{(n+1)!} &= \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!} \\
&= \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 2 - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} < 2
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 14. Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)^2} < \frac{1}{8}$$

Phân tích và lời giải

Để nhận ra các phân số có dạng tổng quát là $\frac{1}{k(k+1)^2}$, cho nên trước khi đánh giá ta cần biến

đổi $\frac{1}{k(k+1)^2} = \frac{k+1-k}{k(k+1)^2} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)^2}$ Quan sát chiều bất đẳng thức ta nhận thấy để đánh

giá làm trội thì ta có hai cách

- Thay phân số $\frac{1}{(k+1)^2}$ bởi số nhỏ hơn.

- Thay phân số $\frac{1}{k(k+1)}$ bởi số lớn hơn.

Trong hai cách trên dù thực hiện theo cách nào thì kết quả thu được càng đơn giản càng tốt và có thể liên tiếp được.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \right]$, với cách đánh giá này ta thu

$$\text{được kết quả } \frac{1}{k(k+1)^2} < \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \right] - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right].$$

Rõ ràng với kết quả đó ta có thể khử được liên tiếp. Bây giờ kiểm tra xem với đánh giá như vậy ta có chứng minh được bài toán không?

Cho $k = 2, 3, \dots, n$ rồi cộng lại ta được:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)^2} &< \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] < \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Đây là kết quả đúng, ta có thể trình bày lại lời giải như sau:

Sử dụng bất đẳng thức $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, ta có $\forall k \geq 2$ thì:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(k+1)^2} &= \frac{k+1-k}{k(k+1)^2} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)^2} \\ &< \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \right] - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right] \end{aligned}$$

Cho $k = 2, 3, \dots, n$ rồi cộng lại ta được:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)^2} &< \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] < \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 15. Chứng minh rằng với n là số nguyên dương, ta luôn có:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

Phân tích và lời giải

Để chứng minh bất đẳng thức có chứa căn thức ở mẫu thì điều đầu tiên là tìm cách trục căn thức mẫu, trong bài toán này khi trục căn thức ở mẫu trực tiếp thì ta thu được kết quả $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}}{k}$, để ý thấy trong căn là các số tự nhiên liên tiếp nên ta cần viết được $\sqrt{k}$ về dạng $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ hoặc $\sqrt{k} - \sqrt{k-1}$, tuy nhiên các phân số còn phụ thuộc vào k ở mẫu nên không thể khử liên tiếp được, do đó cách làm này không đem lại kết quả. Cũng thực hiện theo ý tưởng này, nhưng ta cần tìm cách cố định mẫu số, do đó ta cần biến đổi chút ít trước khi trục căn thức.

Để ý ta thấy $2\sqrt{k} \leq \sqrt{k+1} + \sqrt{k}$, do đó ta làm trội được $\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$, đến đây ta mới

trục căn thức thì thu được kết quả $\frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$. Lúc này chỉ cần cho

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ là có thể khử được các căn thức ở giữa và kết quả thu được là $2(\sqrt{n+1} - 1)$ chính là vế phải của bất đẳng thức. Bây giờ ta trình bày lại lời giải như sau:

Ta có: $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$, $\forall k$ là số nguyên dương.

Cho $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ta có:

$$\begin{aligned} 1 &> 2(\sqrt{2} - 1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} &> 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \\ &\dots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} &> 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \end{aligned}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 16. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2$$

Phân tích và lời giải

Để ý cách viết các số hạng của tổng trên có dạng $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}$, ta cần làm trội sao cho có thể khử

được liên tiếp. Nhận nháy ở mẫu có chứa k và k+1 nên ta cần viết 1 thành $1 = k+1 - k = (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})$, quan sát chiều của bất đẳng thức ta làm trội được $(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < 2\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$, đến đây ta có kết quả là:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < \frac{2\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{(k+1)\sqrt{k}} = \frac{2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{\sqrt{k+1}\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}} - \frac{2}{\sqrt{k+1}}$$

Bây giờ ta có thể trình bày lời giải như sau:

Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} &= \frac{k+1-k}{(k+1)\sqrt{k}} = \frac{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{(k+1)\sqrt{k}} \\ &< \frac{2\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{(k+1)\sqrt{k}} = \frac{2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{\sqrt{k+1}\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k}} - \frac{2}{\sqrt{k+1}}\end{aligned}$$

Cho $k = 1, 2, 3, \dots, n$ rồi cộng vế với vế ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} &< \left(\frac{2}{\sqrt{1}} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \dots + \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}}\right) \\ &= 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} < 2\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét: Bài toán tổng quát là với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}$$

Ta có thể đặc biệt hóa bằng cách

- Chọn n để $n+1$ là một số chính phương, chẳng hạn với $n = 99$ ta có bài toán:

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99}} < \frac{9}{5}$$

- Chọn giá trị n là năm thi, chẳng hạn với $n = 2009$ ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2010\sqrt{2009}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{2010}} < \frac{88}{45}$$

Đây là đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Thái Bình năm 2009 – 2010

Ví dụ 17. Với số tự nhiên $n \geq 3$.

$$\text{Đặt } S_n = \frac{1}{3(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$

$$\text{Chứng minh rằng: } S_n < \frac{1}{2}$$

Phân tích: Để ý ta biến đổi được số hạng tổng quát của các số hạng trên như sau:

$$\frac{1}{(2k+1)(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{2k+1} < \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{2\sqrt{k(k+1)}} = \frac{1}{2\sqrt{k}} - \frac{1}{2\sqrt{k+1}}$$

Bây giờ ta làm trội bất đẳng thức trên bằng cách cho $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Lời giải

$$\text{Vì } (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 > 4k^2 + 4k \text{ nên } 2k+1 > 2\sqrt{k(k+1)}.$$

Do đó ta được:

$$\frac{1}{(2k+1)(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{2k+1} < \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{2\sqrt{k(k+1)}} = \frac{1}{2\sqrt{k}} - \frac{1}{2\sqrt{k+1}}$$

Cho $k = 1, 2, 3, \dots, n$ rồi cộng vế với vế ta có

$$S_n < \frac{1}{2\sqrt{1}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét: Bài toán tổng quát là với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$\frac{1}{3(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

Ta có thể đặc biệt hóa bằng cách

- Chọn n để $n+1$ là một số chính phương, chẳng hạn với $n = 99$ ta có bài toán:

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{199(\sqrt{99}+\sqrt{100})} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 10} = \frac{9}{20}$$

- Chọn giá trị n là năm thi, chẳng hạn với $n = 2001$ ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{3(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{4003(\sqrt{2001}+\sqrt{2002})} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2002}} < \frac{2001}{2003}$$

Đây là đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Lam Sơn Thanh Hóa năm 2001 – 2002

Hoặc $n = 2007$ ta có bất đẳng thức:

$$\frac{1}{3(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{4015(\sqrt{2007}+\sqrt{2008})} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2008}} < \frac{2007}{2009}$$

Đây là đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Ninh Bình năm 2007 – 2008

Ví dụ 18. Chứng minh rằng:

$$\frac{43}{44} < \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2016\sqrt{2015}+2015\sqrt{2016}} < \frac{44}{45}$$

Phân tích: Để ý ta biến đổi được số hạng tổng quát của các số hạng trên như sau:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2 k - k^2(k+1)} = \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Bây giờ ta làm trội bất đẳng thức trên bằng cách cho $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Lời giải

$$\text{Đặt } S_n = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$$

Để ý rằng với $k \geq 1$, ta có:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2 k - k^2(k+1)} = \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Cho $k = 1, 2, 3, \dots, n$ rồi cộng vế với vế ta có:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Do đó ta được $S_{2015} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2016}}$. Như vậy, ta phải chứng minh:

$$\frac{43}{44} < 1 - \frac{1}{\sqrt{2016}} < \frac{44}{45} \Leftrightarrow 44 < \sqrt{2016} < 45 \Leftrightarrow 1936 < 2016 < 2025.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng nên có điều phải chứng minh.

Nhận xét: Thực chất đây là bài toán tính tổng:

$$S_n = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Đến đây ta có thể chọn n là một giá trị nào đó rồi có thể làm trội, làm giảm để tự sáng tạo ra các bất đẳng thức tương ứng.

Ví dụ 19. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có:

$$\frac{1}{2\sqrt{2} + 1\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}} < 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Phân tích và lời giải

Nhận thấy số hạng tổng quát được viết được dạng $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1} + k\sqrt{k}}$. Quan sát chiều bất

đẳng thức cần chứng minh ta thấy cần phải chứng minh được bất đẳng thức kiểu $(k+1)\sqrt{k+1} + k\sqrt{k} > A$ với điều kiện biểu thức A phải chứa k và $k+1$ đồng thời phải phân tích được thành tích, do đó biểu thức A có thể là $k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}$. Bây giờ ta cần chứng minh $(k+1)\sqrt{k+1} + k\sqrt{k} > k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}$. Để đơn giản hơn ta có thể đặt $x = k$; $y = k+1$ rồi chứng minh $x\sqrt{y} + y\sqrt{x} \leq x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$, bất đẳng thức này được chứng minh bằng phép biến đổi tương đương. Đến đây ta thu được bất đẳng thức:

$$\frac{1}{2\sqrt{2} + 1\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}.$$

Bây giờ ta cần chứng minh được:

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Rõ ràng đây là kết quả của bài toán trong ví dụ trên. Ta có thể trình bày lời giải như sau:

Bổ đề: Với mọi số thực dương x, y ta có: $x\sqrt{y} + y\sqrt{x} \leq x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$

Chứng minh: Sử dụng phương pháp biến đổi tương đương, ta được:

$$\begin{aligned} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} &\leq x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \Leftrightarrow x\sqrt{x} + y\sqrt{y} - x\sqrt{y} - y\sqrt{x} \geq 0 \\ \Leftrightarrow x(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + y(\sqrt{y} - \sqrt{x}) &> 0 \Leftrightarrow (x - y)(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \geq 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Vậy bổ đề được chứng minh.

Áp dụng bổ đề ta có:

$$\begin{aligned} (n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n} &> n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n} \\ \Rightarrow \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}} &< \frac{1}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Vì thế ta được:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{2} + 1\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}} \\ < \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

Mà theo kết quả của ví dụ trên thì

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Nhận xét: Quan sát kỹ hai ví dụ 14 và 15 ta nhận thấy, để chứng minh được bất đẳng thức trong ví dụ 15 thì ta chỉ cần chứng minh được:

$$\frac{1}{2\sqrt{2} + 1\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$$

Điều này tương đương với chứng minh $(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n} > n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}$.

Tuy nhiên trong tình huống không có ví dụ 14 thì bất đẳng thức trong ví dụ 15 thực sự là khó, để tìm ra được đánh giá $(n+1)\sqrt{n+1} + n\sqrt{n} > n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}$ cần phải phân tích thật kỹ mối quan hệ giữa các con số trong bài toán.

Ví dụ 20. Chứng minh bất đẳng thức sau đúng mọi $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} < 2\sqrt{2}$$

Lời giải

Bổ đề: Với mọi $x, y > 0$, ta có $(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{2xy}(x + y)$

Chứng minh: sử dụng phương pháp biến đổi tương đương ta được

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} &\geq \sqrt{2xy}(x + y) \\ \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy)\sqrt{x^2 + y^2} + xy[2\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{2}(x + y)] &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)^2\sqrt{x^2 + y^2} + xy \frac{4(x^2 + y^2) - 2(x + y)^2}{2\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2}(x + y)} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)^2\sqrt{x^2 + y^2} + xy \frac{2(x - y)^2}{2\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2}(x + y)} &\geq 0 \end{aligned}$$

Do $x, y > 0$ nên bất đẳng thức cuối cùng đúng, bổ đề được chứng minh.

Áp dụng bổ đề với $x = \sqrt{k + \frac{1}{2}}$; $y = \sqrt{k - \frac{1}{2}}$, ta được:

$$\begin{aligned} & \left(k + \frac{1}{2} + k - \frac{1}{2}\right) \sqrt{k + \frac{1}{2} + k - \frac{1}{2}} > \sqrt{2 \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{1}{2}\right)} \left(\sqrt{k + \frac{1}{2}} + \sqrt{k - \frac{1}{2}}\right) \\ \Leftrightarrow & 2k\sqrt{k} > \sqrt{\left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{1}{2}\right)} \left(\sqrt{k + \frac{1}{2}} + \sqrt{k - \frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

Từ đây suy ra:

$$\frac{1}{k\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{\left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{1}{2}\right)} \left(\sqrt{k + \frac{1}{2}} + \sqrt{k - \frac{1}{2}}\right)} = \frac{2}{\sqrt{k - \frac{1}{2}}} - \frac{2}{\sqrt{k + \frac{1}{2}}}, \forall k \geq 1$$

Cho $k = 1, 2, \dots, n$ rồi cộng về với về ta được:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} & < \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{\sqrt{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{\sqrt{\frac{5}{2}}} + \dots + \frac{2}{\sqrt{n - \frac{1}{2}}} - \frac{2}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}} \\ & = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}} < \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 21. Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n+1} < 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} < \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n}$$

Lời giải

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{2}{3} \left[k\sqrt{k+1} - (k-1)\sqrt{k} \right] < \sqrt{k} < \frac{2}{3} \left[(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k-1} \right], \forall k \geq 1 \quad (*)$$

Thật vậy, bất đẳng thức bên trái tương đương với

$$\begin{aligned} & 2k\sqrt{k+1} - 2(k-1)\sqrt{k} < 3\sqrt{k} \Leftrightarrow 2k\sqrt{k+1} < (2k+1)\sqrt{k} \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{k(k+1)} < 2k+1 \Leftrightarrow 4k^2 + 4k < (2k+1)^2 \Leftrightarrow 0 < 1 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức bên phải tương đương với

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{k} < 2(k+1)\sqrt{k} - 2k\sqrt{k-1} \Leftrightarrow 2k\sqrt{k-1} < (2k-1)\sqrt{k} \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{k(k-1)} < 2k-1 \Leftrightarrow 4k^2 - 4k < (2k-1)^2 \Leftrightarrow 0 < 1 \end{aligned}$$

Cả hai đánh giá cuối cùng đều đúng, do đó bất đẳng thức (*) được chứng minh.

Bây giờ ta áp dụng bất đẳng thức trên cho $k = 1, 2, \dots, n$, khi đó ta được:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}(\sqrt{2}-0) &< \sqrt{1} < \frac{2}{3}(2\sqrt{1}-\sqrt{0}) \\ \frac{2}{3}(2\sqrt{3}-\sqrt{2}) &< \sqrt{2} < \frac{2}{3}(3\sqrt{2}-2\sqrt{1}) \\ \frac{2}{3}(3\sqrt{4}-2\sqrt{3}) &< \sqrt{3} < \frac{2}{3}(4\sqrt{3}-3\sqrt{2}) \\ &\dots\end{aligned}$$

$$\frac{2}{3}[n\sqrt{n+1}-(n-1)\sqrt{n}] < \sqrt{n} < \frac{2}{3}[(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n-1}]$$

Cộng các bất đẳng thức này lại về theo về, ta thu ngay được kết quả cần chứng minh.

Ví dụ 22. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 5$, ta có: $2^n > n^2$

Phân tích: Với bất đẳng thức dạng như bài toán này ta thường dùng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh. Do đó ta thực hiện theo trình tự các bước quy nạp, vấn đề là khi thực hiện quy nạp ta sử dụng giả thiết quy nạp như thế nào mà thôi. Trong bài toán này ta có giả thiết quy nạp là $2^k > k^2$ và cần phải chứng minh $2^{k+1} > (k+1)^2$. Để ý là $k \geq 5$ nên ta được

$2k^2 = (k+1)^2 + k(k-5) + 3k-1 > (k+1)^2$. Do đó để hoàn tất chứng minh ta cần chỉ ra được $2^{k+1} > 2k^2$, đây là kết quả đúng theo giả thiết quy nạp. Đến đây ta trình bày lời giải như sau:

Lời giải

+ Với $n = 5$, bất đẳng thức trở thành: $2^5 > 5^2 \Leftrightarrow 32 > 25$ (đúng)

Suy ra bất đẳng thức đúng với $n = 5$

+ Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n = k$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 5$), tức là ta được $2^k > k^2$

+ Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, hay $2^{k+1} > (k+1)^2$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2$ (1)

Vì $k \geq 5$ nên $2k^2 = k^2 + 2k + 1 + k^2 - 2k - 1 = (k+1)^2 + k(k-5) + 3k-1 > (k+1)^2$

Suy ra ta được $2k^2 > (k+1)^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, nên theo nguyên lý quy nạp thì bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 23. Cho $x \geq -1$ là một số thực cho trước. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có: $(1+x)^n \geq 1+nx$

Phân tích: Ta sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh bài toán này. Ở đây giả thiết quy nạp là $(1+x)^k \geq 1+kx$ và ta cần chứng minh $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$. Nhận thấy từ giả thiết quy nạp ta có $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+x)(1+kx)$, ta cần chỉ ra được $(1+x)(1+kx) \geq 1+(k+1)x$, nhưng đây rõ ràng là một kết quả đúng. Do đó ta trình bày lại lời giải như sau:

Lời giải

+ Với $n = 1$, bất đẳng thức trở thành $1+x \geq 1+x$ (đúng).

Suy ra bất đẳng thức đúng với $n = 1$.

+ Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n = k$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$), tức là ta được $(1+x)^k \geq 1+kx$

+ Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, hay $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$

Thật vậy, vì $x \geq -1 \Rightarrow x+1 \geq 0$ nên theo giả thiết quy nạp, ta có

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k (1+x) \geq (1+x)(1+kx)$$

Mà $(1+x)(1+kx) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$ nên

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+x)(1+kx) \geq 1 + (k+1)x$$

Hay bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, nên theo nguyên lý quy nạp suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 24. Chứng minh với mọi số thực a, b thỏa mãn $a+b \geq 0$, ta có:

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^n$$

Phân tích: Ta chứng minh bất đẳng thức trên bằng phương pháp quy nạp, tuy nhiên để chứng minh được

$\frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^{k+1}$, ta cần chứng minh được bất đẳng thức

$$\frac{a^k + b^k}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2}.$$

Lời giải

+ Với $n = 1$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

+ Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n = k$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$), tức là ta có: $\frac{a^k + b^k}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^k$

+ Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, hay $\frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^{k+1}$

Thật vậy, vì $a+b \geq 0$, nên theo giả thiết quy nạp ta có:

$$\left(\frac{a+b}{2} \right)^{k+1} = \left(\frac{a+b}{2} \right)^k \cdot \frac{a+b}{2} \leq \frac{a^k + b^k}{2} \cdot \frac{a+b}{2}$$

Bất đẳng thức đúng với $n = k+1$ nếu ta chứng minh được

$$\frac{a^k + b^k}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \leq \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \quad (*)$$

Mà (*) tương đương với

$$\begin{aligned} (a^k + b^k)(a+b) &\leq 2(a^{k+1} + b^{k+1}) \Leftrightarrow a^{k+1} + b^{k+1} - a^k b - b^k a \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)(a^k - b^k) \geq 0 \quad (**) \end{aligned}$$

Vì vai trò của a, b như nhau nên ta có thể giả sử $a \geq b$, khi đó $a-b \geq 0$ (1)

Mặt khác, từ $a+b \geq 0 \Rightarrow a \geq -b$ nên $a \geq |b| \geq 0 \Rightarrow a^k \geq |b|^k \geq b^k \Rightarrow a^k - b^k \geq 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra bất đẳng thức (**) luôn đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 25. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

Phân tích: Bất đẳng thức trên có thể chứng minh được theo cách làm trội như ví dụ 12. Tuy nhiên ở đây ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Theo bài toán ta có giả thiết quy nạp là $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$ và cần chứng minh được

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}}, \text{ như vậy để hoàn thành bài toán ta cần chỉ ra được}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}}. \text{ Đây là bất đẳng thức đúng có thể chứng minh bằng phép biến đổi tương đương.}$$

Lời giải

+ Kí hiệu bất đẳng thức đã cho là (*), với $n = 1$, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 1 + 1}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \text{ (đúng)}$$

Bất đẳng thức đúng với $n = 1$.

+ Giả sử (*) đúng đến $n = k$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 1$), tức là ta được $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$

+ Ta cần chứng minh (*) đúng với $n = k + 1$, hay

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

Theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2}$$

Bất đẳng thức (*) đúng với $n = k + 1$ khi

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}} \Leftrightarrow (2k+1)\sqrt{3k+4} < (2k+2)\sqrt{3k+1}$$

$$\Leftrightarrow (2k+1)^2(3k+4) < (2k+2)^2(3k+1) \Leftrightarrow k > 0 \text{ (đúng)}$$

Do đó (*) đúng với $n = k + 1$, nên theo nguyên lý quy nạp bất đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n .

Ví dụ 26. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+2n+1} > 1$$

Lời giải

+ Với $n = 1$ bất đẳng thức có dạng: $\frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+3} > 1 \Leftrightarrow \frac{13}{12} > 1$ (đúng)

Nên bất đẳng thức đúng với $n = 1$

+ Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n = k$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 1$), tức là

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{3k+1} > 1$$

+ Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, hay

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \dots + \frac{1}{3k+4} > 1$$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp ta có

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1} = S_k + \frac{2}{3(k+1)(3k+2)(3k+4)}$$

Hay $S_{k+1} > S_k > 1$. Do đó bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, nên theo nguyên lý quy nạp ta có bất đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n .

Ví dụ 27. Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn bất đẳng thức: $3^n > 2^n + 7n$

Lời giải

Thử trực tiếp với $n = 1, 2, 3, 4$ ta thấy $n = 4$ thì bất đẳng thức đúng.

Ta sẽ chứng minh mọi giá trị cần tìm của n là $n \geq 4, n \in \mathbb{N}$. Tức là chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi $n \geq 4, n \in \mathbb{N}$: $3^n > 2^n + 7n$

+ Với $n = 4$ thì bất đẳng thức trở thành có dạng $3^4 > 2^4 + 7 \cdot 4 \Leftrightarrow 81 > 44$ (đúng)

Nên bất đẳng thức đúng với $n = 4$

+ Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n = k$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 4$) tức là: $3^k > 2^k + 7k$

+ Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, hay $3^{k+1} > 2^{k+1} + 7(k+1)$

Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3(2^k + 7)$

Nhưng với mọi $k \geq 4$ thì

$$3(2^k + 7k) = 2^{k+1} + 2^k + 21k = 2^{k+1} + 7(k+1) + 2^k + 7(2k-1) > 2^{k+1} + 7(k+1)$$

Suy ra bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, nên theo nguyên lý quy nạp ta có bất đẳng thức đúng. Vậy bài toán được hoàn thành.

Ví dụ 28. Cho n số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$$

Lời giải

+ Với $n = 1$, thì $x_1 = 1 \geq 1$ (đúng) nên bất đẳng thức đúng với $n = 1$.

+ Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n = k$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 1$), tức là với mọi $x_1, x_2, \dots, x_k > 0$ thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k = 1$ thì $x_1 + x_2 + \dots + x_k \geq k$

+ Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, nghĩa là với mọi

$x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} > 0$ thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1$ thì

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} \geq k + 1$$

Do $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = 1$ và vai trò các biến số như nhau nên có thể coi

$$x_k \leq 1 \leq x_{k+1} \Rightarrow (1 - x_k)(1 - x_{k+1}) \leq 0 \text{ hay } x_k + x_{k+1} \geq 1 + x_k x_{k+1} \quad (1)$$

Đặt $x'_k = x_k x_{k+1}$ thế thì $x_1, x_2, \dots, x'_k$ là k số dương thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x'_k = 1$, do vậy theo giả thiết quy nạp ta có: $x_1 + x_2 + \dots + x'_k \geq k$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra $x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} \geq (x_1 + x_2 + \dots + x'_k) + 1 \geq k + 1$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} \geq (x_1 + x_2 + x'_k) + 1 \geq k + 1$$

Điều này chứng tỏ bất đẳng thức cũng đúng với $n = k + 1$, theo nguyên lý quy nạp ta có bất đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương n .

Ví dụ 29. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ ta có: $n^n > (n + 1)^{n-1}$

Lời giải

+ Với $n = 2$, thì bất đẳng thức có dạng: $2^2 > (2 + 1)^{2-1} \Leftrightarrow 4 > 3$ (đúng),

Nên bất đẳng thức đúng với $n = 2$

+ Giả sử bất đẳng thức đúng đến $n = k$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$), tức là $k^k > (k + 1)^{k-1}$

+ Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, hay $(k + 1)^{k+1} > (k + 2)^k$

Sử dụng giả thiết quy nạp ta được: $k^k (k + 1)^{k+1} > (k + 1)^{k-1} (k + 1)^{k+1}$

Vì $(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 > k^2 + 2k$ nên $(k + 1)^{k-1} (k + 1)^{k+1} = (k + 1)^{2k} > (k^2 + 2k)^k$

Do đó ta được

$$k^k (k + 1)^{k+1} > (k^2 + 2k)^k \Rightarrow k^k (k + 1)^{k+1} > k^k (k + 2)^k \Rightarrow (k + 1)^{k+1} > (k + 2)^k$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$ nên theo nguyên lý quy nạp ta có bất đẳng thức đúng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$.

Ví dụ 30. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, ta có

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{7}{10}$$

Phân tích tìm lời giải

Khác với bài toán trước, ở bài này các bạn sẽ gặp “một chút rắc rối” ở bước chuyển quy nạp, tức là ở đây ta gặp trường hợp “giả sử bất đẳng thức đúng với k nhưng không chứng minh được sẽ đúng cho $k + 1$ ”, thật vậy nếu bất đẳng thức đúng cho $n = k$, tức ta có :

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} < \frac{7}{10}$$

Khi đó nếu sử dụng giả thiết quy nạp này cho $n = k + 1$, ta sẽ có :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k+2} = S_k + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} \\ &= S_k + \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} < \frac{7}{10} + \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} \end{aligned}$$

Nhưng $\frac{7}{10} + \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} > \frac{7}{10}$ nên ta chẳng thu được điều gì ở đây!

Như vậy, ta nên làm gì để vượt qua chướng ngại này?

Nếu để nguyên dạng như ban đầu thì khó mà giải quyết thành công bài toán bằng quy nạp, do đó ta cần biến đổi bất đẳng thức đã cho một chút, ở đây ta chọn một biểu thức trung gian kiểu

$\frac{7}{10} - \frac{m}{n}$, $m > 0$ thích hợp sao cho bất đẳng thức sau đúng:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{7}{10} - \frac{m}{n}$$

Số m này phải thỏa mãn hai điều kiện sau:

+ Bước chuyển quy nạp từ k sang $k+1$ có thể thực hiện được.

+ Bất đẳng thức trên đúng với một “giá trị đầu” của n (lưu ý “giá trị đầu” ở đây có thể khác với giá trị đầu của bất đẳng thức cho ở đề bài). Đây sẽ là khởi điểm phép quy nạp của ta.

Xét điều kiện đầu tiên ta có: $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} < \frac{7}{10} - \frac{m}{n} + \frac{1}{2(k+1)(2k+1)}$

Do đó m phải thỏa mãn

$$\begin{aligned} -\frac{m}{n} + \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} &< -\frac{m}{k+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} < m \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} &< \frac{m}{k(k+1)} \Leftrightarrow 2m(2k+1) > k \Leftrightarrow (4m-1)k + 2m > 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng này đúng với mọi k khi và chỉ khi $4m-1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4}$

Xét điều kiện thứ hai:

+ Với $n=1$ bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{1}{2} < \frac{7}{10} - m \Leftrightarrow m < \frac{1}{5} \text{ (không được vì } m \geq \frac{1}{4} \text{)}$$

+ Với $n=2$ bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} < \frac{7}{10} - \frac{m}{2} \Leftrightarrow m < \frac{7}{30} \text{ (không được vì } m \geq \frac{1}{4} \text{)}$$

+ Với $n=3$ bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{1}{3+1} + \frac{1}{3+2} + \frac{1}{3+3} < \frac{7}{10} - \frac{m}{3} \Leftrightarrow m < \frac{1}{4} \text{ (không được vì } m \geq \frac{1}{4} \text{)}$$

+ Với $n=4$ bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{1}{4+1} + \frac{1}{4+2} + \frac{1}{4+3} + \frac{1}{4+4} < \frac{7}{10} - \frac{m}{4} \Leftrightarrow m < \frac{11}{42}$$

Bất đẳng thức này đúng với $m \geq \frac{1}{4}$. Như vậy ta sẽ chọn $m = \frac{1}{4}$ và điểm xuất phát quy nạp là $n=4$, ta đi

đến lời giải cho cả bài toán như sau

Lời giải

Kiểm tra trực tiếp ta thấy bất đẳng thức đã cho đúng với $n=1, 2, 3$

Xét trường hợp $n \geq 4$. khi đó ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{7}{10} - \frac{1}{4n}$$

+ Với $n=4$ bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{4+1} + \frac{1}{4+2} + \frac{1}{4+3} + \frac{1}{4+4} < \frac{7}{10} - \frac{1}{4.4} \Leftrightarrow \frac{533}{840} < \frac{51}{80} \Leftrightarrow 1066 < 1071 \text{ (đúng)}$$

Nên bất đẳng thức đúng với $n = 4$.

+ Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$), tức là

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} < \frac{7}{10} - \frac{1}{4k}$$

+ Ta phải chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, hay

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k+2} < \frac{7}{10} - \frac{1}{4(k+1)}$$

Sử dụng giả thiết quy nạp ta được

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k+2} = S_k - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2k+2} \\ &= S_k + \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} < \frac{7}{10} - \frac{1}{4k} + \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} \end{aligned}$$

Do vậy chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4k} + \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} &< -\frac{1}{4(k+1)} \Leftrightarrow \frac{2}{(k+1)(2k+1)} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{(k+1)(2k+1)} &< \frac{1}{k(k+1)} \Leftrightarrow 2k+1 > 2k \Leftrightarrow 1 > 0 \end{aligned}$$

Đánh giá cuối cùng hiển nhiên đúng. Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, nên theo nguyên lý quy nạp ta có bất đẳng thức đúng với mọi $n \geq 4$.

Bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 31: Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{79}{48}$$

Lời giải

Kiểm tra trực tiếp, ta dễ thấy bất đẳng thức đúng với $n = 1, 2, 3, 4$.

Xét trường hợp $n \geq 5$, khi đó ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{79}{48} - \frac{2}{2n+1}, \quad \forall n \geq 5, n \in \mathbb{N}$$

+ Với $n = 5$ bất đẳng thức trở thành

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} < \frac{79}{48} - \frac{2}{2.5+1} \Leftrightarrow \frac{205}{144} + \frac{1}{25} < \frac{79}{48} - \frac{2}{11} \Leftrightarrow 99 < 100 \text{ (đúng)}$$

Nên bất đẳng thức đúng với $n = 5$

+ Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \geq 5$, $k \in \mathbb{N}$), tức là

$$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < \frac{79}{48} - \frac{2}{2k+1}$$

+ Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, hay

$$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{79}{48} - \frac{2}{2k+3}$$

Sử dụng giả thiết quy nạp ta được

$$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{79}{48} - \frac{2}{2k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} -\frac{2}{2k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} &< -\frac{2}{2k+3} \Leftrightarrow \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{2}{2k+1} - \frac{2}{2k+3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(k+1)^2} &< \frac{4}{(2k+1)(2k+3)} \Leftrightarrow (2k+1)(2k+3) < 4(k+1)^2 \\ \Leftrightarrow 4k^2 + 8k + 3 &< 4k^2 + 8k + 4 \Leftrightarrow 0 < 1 \end{aligned}$$

Đánh giá cuối cùng hiển nhiên đúng.

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, nên theo nguyên lý quy nạp ta có bất đẳng thức đúng với mọi $n \geq 5$.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 32: Cho các số thực dương $a_1; a_2; \dots; a_n$ thỏa mãn điều kiện $a_1 \cdot a_2 \dots a_n = x$. Chứng minh rằng:

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3 \leq x^3 + n - 1$$

Lời giải

+ Với $n = 1$ ta có $a_1^3 = k^3$ là một đẳng thức đúng.

+ Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), tức là ta có

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_k^3 \leq x^3 + k - 1 = a_1^3 \cdot a_2^3 \cdot a_3^3 \dots a_k^3 + k - 1$$

+ Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_{k+1}^3 \leq x^3 + k = a_1^3 \cdot a_2^3 \cdot a_3^3 \dots a_k^3 \cdot a_{k+1}^3 + k$$

Thật vậy theo giả thiết quy nạp ta được

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_{k+1}^3 \leq (a_1^3 \cdot a_2^3 \cdot a_3^3 \dots a_k^3) + a_{k+1}^3 + k - 1$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} (a_1^3 \cdot a_2^3 \dots a_k^3) + a_{k+1}^3 + k - 1 &\leq a_1^3 \cdot a_2^3 \dots a_k^3 \cdot a_{k+1}^3 + k \\ \Leftrightarrow (a_1 \cdot a_2 \dots a_k)^3 + a_{k+1}^3 &\leq 1 + (a_1 \cdot a_2 \dots a_k \cdot a_{k+1})^3 \Leftrightarrow \left[(a_{k+1})^3 - 1 \right] \left[(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_k)^3 - 1 \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Rõ ràng bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Theo nguyên lý quy nạp ta suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 33: Cho các số thực $a_1; a_2; \dots; a_n \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n}}$$

Lời giải

+ Với $n = 1$ bất đẳng thức trở thành $\frac{1}{1+a_1} \geq \frac{1}{1+a_1}$ (đúng)

+ Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), tức là

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_k} \geq \frac{k}{1+\sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \dots a_k}}$$

+ Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_k} + \frac{1}{1+a_{k+1}} \geq \frac{k+1}{1+\sqrt[k+1]{a_1 \cdot a_2 \dots a_{k+1}}}$$

Theo giả thiết quy nạp ta được

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_k} + \frac{1}{1+a_{k+1}} \geq \frac{k}{1+\sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \dots a_k}} + \frac{1}{1+a_{k+1}}$$

Như vậy ta cần chứng minh được

$$\frac{k}{1+\sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \dots a_k}} + \frac{1}{1+a_{k+1}} \geq \frac{k+1}{1+\sqrt[k+1]{a_1 \cdot a_2 \dots a_{k+1}}}$$

Rõ ràng bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Theo nguyên lý quy nạp ta suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 33: Cho x là số thực dương bất kì. Chứng minh rằng với n là số nguyên dương ta luôn có:

$$\frac{x^n (x^{n+1} + 1)}{x^n + 1} \leq \left(\frac{x+1}{2} \right)^{2n+1}$$

Lời giải

+ Với $n = 1$ bất đẳng thức trở thành

$$\frac{x(x^2 + 1)}{x + 1} \leq \left(\frac{x+1}{2} \right)^3 \Leftrightarrow (x+1)^4 - 8x(x^2 + 1) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^4 \geq 0$$

Như vậy bất đẳng thức trên đúng với $n = 1$

+ Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), tức là ta có

$$\frac{x^k (x^{k+1} + 1)}{x^k + 1} \leq \left(\frac{x+1}{2} \right)^{2k+1}$$

+ Ta cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k+1$, tức là

$$\frac{x^{k+1} (x^{k+2} + 1)}{x^{k+1} + 1} \leq \left(\frac{x+1}{2} \right)^{2k+3}$$

Theo giả thiết quy nạp ta được $\frac{x^k (x^{k+1} + 1)}{x^k + 1} \cdot \left(\frac{x+1}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{x+1}{2} \right)^{2k+3}$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{x^{k+1}(x^{k+2} + 1)}{x^{k+1} + 1} &\leq \frac{x^k(x^{k+1} + 1)}{x^k + 1} \cdot \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 \cdot x^k \cdot (x^{k+1} + 1)^2 - 4(x^k + 1) \cdot x^{k+1} \cdot (x^{k+2} + 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 (x^{k+1} - 1)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Rõ ràng bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Theo nguyên lí quy nạp ta suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Chủ đề 5
MỘT SỐ KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY

A. Kiến thức cần nhớ

1. Giới thiệu bất đẳng thức Cauchy(Côsi)

Bất đẳng thức có tên gọi chính xác là bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân. Ở nhiều nước trên thế giới, người ta gọi bất đẳng thức này theo kiểu viết tắt là bất đẳng thức AM – GM (AM là viết tắt của **Arithmetic mean** và GM là viết tắt của **Geometric mean**)

Ở nước ta, bất đẳng thức AM – GM được gọi theo tên của nhà Toán học người Pháp Augustin – Louis Cauchy (1789 – 1857), tức là bất đẳng thức **Cauchy**. Thật ra đây là một cách gọi tên không chính xác vì Cauchy không phải là người đề xuất ra bất đẳng thức này mà chỉ là người đưa ra một phép chứng minh đặc sắc cho nó. Tuy nhiên, để cho phù hợp với chương trình sách giáo khoa, trong tài liệu này chúng ta cũng sẽ gọi nó là Bất đẳng thức Cauchy(Côsi).

Đây là một bất đẳng thức cổ điển nổi tiếng và quen thuộc đối với phần lớn học sinh nước ta. Nó ứng dụng rất nhiều trong các bài Toán về bất đẳng thức và cực trị. Trong phạm vi chương trình Toán THCS, chúng ta quan tâm đến các trường hợp riêng của bất đẳng thức Cauchy.

2. Các dạng biểu diễn của bất đẳng thức Cauchy

a. Dạng tổng quát

+ Cho $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ là các số thực không âm ta có:

Dạng 1:
$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Dạng 2:
$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Dạng 3:
$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^n \geq x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

+ Cho $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ là các số thực dương ta có:

Dạng 1:
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

Dạng 2:
$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

b. Một số dạng đặc biệt

n	n = 2	n = 3
Điều kiện	$x, y \geq 0$	$x, y, z \geq 0$
Dạng 1	$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$	$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$
Dạng 2	$\left(\frac{x + y}{2} \right)^2 \geq xy$	$\left(\frac{x + y + z}{3} \right)^3 \geq xyz$

Dạng 3	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ $(x, y > 0)$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$ $(x, y, z > 0)$
Dạng 4	$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$ $(x, y > 0)$	$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$ $(x, y, z > 0)$
Đẳng thức xảy ra	$x = y$	$x = y = z$

3. Một số bất đẳng thức được suy ra từ bất đẳng thức Cauchy

$$+ x^2 + y^2 \geq 2xy; \quad 2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2; \quad \sqrt{2(x+y)} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$+ x^2 + y^2 - xy \geq \frac{3(x+y)^2}{4}$$

$$+ x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

$$+ 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x+y+z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$$

$$+ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x+y+z)$$

$$+ 3(x^4 + y^4 + z^4) \geq (xy + yz + zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z)$$

B. Một số kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Cauchy

1. Kỹ thuật chọn điểm rơi trong đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân

Đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân thực chất đánh giá bất đẳng thức Cauchy theo chiều từ phía trái sang phía phải. Trong chuỗi đánh giá, cái ta hay quên đó là cần phải được bảo toàn dấu đẳng thức xảy ra mà ta hay gọi là bảo toàn “Điểm rơi”. Một thực tế cho thấy việc xác định điểm rơi cho một bất đẳng thức quyết định đến hơn nửa thành công cho công việc tìm lời giải. Ý tưởng chính của chọn điểm rơi chính là việc xác định được dấu đẳng thức xảy ra khi nào để có thể sử dụng những đánh giá hợp lý. Trong quá trình chứng minh các bất đẳng thức ta thường gặp sai lầm là áp dụng ngay bất đẳng thức Cauchy mà quên mất dấu đẳng thức xảy ra tại đâu. Trước khi tìm hiểu về kỹ thuật đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân ta hãy xét một số ví dụ về chọn “Điểm rơi” dưới đây ta sẽ hiểu hơn vấn đề dạng được đề cập.

Bài toán 1. Cho số thực $a \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A = a + \frac{1}{a}$

Sai lầm thường gặp là: $A = a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2.

Nguyên nhân sai lầm: giá trị nhỏ nhất của A là 2 $\Leftrightarrow a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = 1$, điều này không xảy ra vì theo giả thiết thì $a \geq 2$.

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức trên ta nhận thấy giá trị của a càng tăng thì A càng tăng, do đó ta dự đoán A đạt giá trị nhỏ nhất khi $a = 2$. Khi đó ta nói A đạt giá trị nhỏ nhất tại “**Điểm rơi** $a = 2$ ”. Ta không thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số a và $\frac{1}{a}$ vì không thỏa mãn dấu đẳng thức xảy ra. Vì

vậy ta phải tách a hoặc $\frac{1}{a}$ để khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy thì thỏa mãn dấu đẳng thức xảy ra. Giả sử ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho cặp số $\left(\frac{a}{k}, \frac{1}{a}\right)$ sao cho tại “**Điểm rơi** $a = 2$ ” thì $\frac{a}{k} = \frac{1}{a}$, ta có sơ đồ sau:

$$a = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{k} = \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{k} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = 4$$

Khi đó ta được $A = a + \frac{1}{a} = \frac{a}{4} + \frac{3a}{4} + \frac{1}{a}$ và ta có lời giải như trên.

Lời giải đúng: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$A = a + \frac{1}{a} = \frac{a}{4} + \frac{1}{a} + \frac{3a}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a}{4} \cdot \frac{1}{a}} + \frac{3a}{4} \geq 1 + \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{5}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{5}{2}$.

Chú ý: Ngoài cách chọn cặp số $\left(\frac{a}{k}, \frac{1}{a}\right)$ ta có thể chọn các cặp số sau: $\left(ka, \frac{1}{a}\right)$ hoặc $\left(a, \frac{k}{a}\right)$ hoặc $\left(a, \frac{1}{ka}\right)$.

Bài toán 2. Cho số thực $a \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = a + \frac{1}{a^2}$

Sơ đồ điểm rơi: $a = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{k} = \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{k} = \frac{1}{4} \Rightarrow k = 8$

Sai lầm thường gặp là:

$$A = \frac{a}{8} + \frac{1}{a^2} + \frac{7a}{8} \geq 2\sqrt{\frac{a}{8} \cdot \frac{1}{a^2}} + \frac{7a}{8} = \sqrt{\frac{1}{2a}} + \frac{7a}{8} \geq \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 2}} + \frac{7 \cdot 2}{8} = \frac{9}{4}.$$

Nguyên nhân sai lầm: Mặc dù giá trị nhỏ nhất của A bằng $\frac{9}{4}$ là đáp số đúng nhưng cách giải trên mắc

sai lầm trong đánh giá mẫu số: $a \geq 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2a}} \geq \sqrt{\frac{1}{2 \cdot 2}}$ là sai.

Lời giải đúng: $A = \frac{a}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{a^2} + \frac{6a}{8} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{8} \cdot \frac{a}{8} \cdot \frac{1}{a^2}} + \frac{6a}{8} \geq \frac{3}{4} + \frac{6 \cdot 2}{8} = \frac{9}{4}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{9}{4}$.

Bài toán 3. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a + b \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = ab + \frac{1}{ab}$$

Phân tích: Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = \frac{1}{2}$. Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4}. \text{ Khi đó ta có điểm rơi như sau:}$$

$$ab = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{ab}{k} = \frac{1}{ab} \\ \frac{1}{ab} = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4k} = 4 \Rightarrow k = \frac{1}{16}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow -ab \geq -\frac{1}{4}$$

$$\text{Do đó ta được } A = 16ab + \frac{1}{ab} - 15ab \geq 2\sqrt{16ab \cdot \frac{1}{ab}} - 15ab \geq 8 - 15 \cdot \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{17}{4}$

Bài toán 4. Cho số thực $a \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = a^2 + \frac{18}{a}$

Phân tích: Ta có $A = a^2 + \frac{18}{a} = a^2 + \frac{9}{a} + \frac{9}{a}$

Dễ thấy a càng tăng thì A càng tăng. Ta dự đoán A đạt giá trị nhỏ nhất khi $a = 6$. Ta có sơ đồ điểm rơi:

$$a = 6 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{k} = \frac{9}{a} \\ \frac{9}{a} = \frac{9}{6} \end{cases} \Rightarrow \frac{36}{k} = \frac{3}{2} \Rightarrow k = 24$$

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \frac{a^2}{24} + \frac{9}{a} + \frac{9}{a} + \frac{23a^2}{24} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{24} \cdot \frac{9}{a} \cdot \frac{9}{a} + \frac{23a^2}{24}} \geq \frac{9}{2} + \frac{23 \cdot 36}{24} = 39$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 6$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 39

Bài toán 5. Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa $a + 2b + 3c \geq 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c}$$

Phân tích: Dự đoán giá trị nhỏ nhất của A đạt được khi $a + 2b + 3c = 20$ và tại điểm rơi $a = 2, b = 3, c = 4$.

Sơ đồ điểm rơi:

$$a = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{k} = \frac{3}{a} \\ \frac{3}{a} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{k} = \frac{3}{2} \Rightarrow k = \frac{4}{3}$$

$$b = 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{m} = \frac{9}{2b} \\ \frac{9}{2b} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{m} = \frac{3}{2} \Rightarrow m = 2$$

$$c = 4 \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{n} = \frac{4}{n} \\ \frac{4}{c} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{n} = 1 \Rightarrow n = 4$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{3a}{4} + \frac{3}{a} \right) + \left(\frac{b}{2} + \frac{9}{2b} \right) + \left(\frac{c}{4} + \frac{4}{c} \right) + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + \frac{3c}{4} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{3a}{4} \cdot \frac{3}{a}} + 2\sqrt{\frac{b}{2} \cdot \frac{9}{2b}} + 2\sqrt{\frac{c}{4} \cdot \frac{4}{c}} + \frac{a+2b+3c}{4} \geq 3+3+2+5=13 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2, b = 3, c = 4$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 13.

Bài toán 6. Cho a, b, c là số thực dương thỏa mãn $ab \geq 12; bc \geq 8$. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c) + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{8}{abc} \geq \frac{121}{12}$$

Phân tích: Dự đoán giá trị nhỏ nhất của A đạt được khi $ab = 12; bc = 8$, tại điểm rơi

$a = 3; b = 4; c = 2$. Khi đó ta được ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho từng nhóm sau:

$$\left(\frac{a}{18}; \frac{b}{24}; \frac{2}{ab}\right), \left(\frac{a}{9}; \frac{c}{6}; \frac{2}{ca}\right), \left(\frac{b}{16}; \frac{c}{8}; \frac{2}{bc}\right), \left(\frac{a}{9}; \frac{c}{6}; \frac{b}{12}; \frac{8}{abc}\right).$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{18} + \frac{b}{24} + \frac{2}{ab} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{18} \cdot \frac{b}{24} \cdot \frac{2}{ab}} = \frac{1}{2} \\ \frac{a}{9} + \frac{c}{6} + \frac{2}{ca} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{9} \cdot \frac{c}{6} \cdot \frac{2}{ca}} = 1 \\ \frac{b}{16} + \frac{c}{8} + \frac{2}{bc} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{16} \cdot \frac{c}{8} \cdot \frac{2}{bc}} = \frac{3}{4} \\ \frac{a}{9} + \frac{c}{6} + \frac{b}{12} + \frac{8}{abc} &\geq 4\sqrt[4]{\frac{a}{9} \cdot \frac{c}{6} \cdot \frac{b}{12} \cdot \frac{8}{abc}} = \frac{4}{3} \\ \frac{13a}{18} + \frac{13b}{24} &\geq 2\sqrt{\frac{13a}{18} \cdot \frac{13b}{24}} \geq 2\sqrt{\frac{13}{18} \cdot \frac{13}{24} \cdot 12} = \frac{13}{3} \\ \frac{13b}{48} + \frac{13c}{24} &\geq 2\sqrt{\frac{13b}{48} \cdot \frac{13c}{24}} \geq 2\sqrt{\frac{13}{48} \cdot \frac{13}{24} \cdot 8} = \frac{13}{4} \end{aligned}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$(a+b+c) + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{8}{abc} \geq \frac{121}{12}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 3; b = 4; c = 2$.

Bài toán 7. Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$$

Phân tích: Do A là biểu thức đối xứng với a và b nên ta dự đoán giá trị nhỏ nhất của A đạt tại $a = b$.

Khi đó ta có sơ đồ điểm rơi:

$$a = b \Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{k\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \\ \frac{\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{k} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = 4$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$A = \left(\frac{a+b}{4\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \right) + \frac{3(a+b)}{4\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{4\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{a+b}} + \frac{3 \cdot 2\sqrt{ab}}{4\sqrt{ab}} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{5}{2}$.

Bài toán 8. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$$

Phân tích: Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán giá trị nhỏ nhất của A đạt tại

$a = b = c$. Khi đó ta có sơ đồ điểm rơi:

$$a = b = c \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2} \\ \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{k} \Rightarrow k = 4$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{b+c}{4a} + \frac{c+a}{4b} + \frac{a+b}{4c} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \right) \\ &\geq 2\sqrt{\frac{a}{b+c} \cdot \frac{b+c}{4a}} + 2\sqrt{\frac{b}{c+a} \cdot \frac{c+a}{4b}} + 2\sqrt{\frac{c}{a+b} \cdot \frac{a+b}{4c}} + \frac{3}{4} \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right) \\ &\geq 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{3}{4} \cdot (2+2+2) = 3 + \frac{9}{2} = \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{15}{2}$.

Bài toán 9. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + b \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab}$$

Phân tích: Do A là biểu thức đối xứng với a, b nên ta dự đoán giá trị nhỏ nhất của A đạt tại

$a = b = \frac{1}{2}$. Khi đó ta có sơ đồ điểm rơi:

$$a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2 + b^2} = \frac{k}{2ab} = 2 \\ \frac{1}{2ab} = 2 \end{cases} \Rightarrow 2k = 2 \Rightarrow k = 1$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} \geq \frac{4}{a^2 + b^2 + 2ab} \geq \frac{4}{(a + b)^2} \geq 4$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a^2 + b^2 = 2ab \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 4.

Bài toán 10. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + b \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{1}{1 + a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab}$$

Phân tích: Dự đoán giá trị nhỏ nhất của A đạt tại $a = b = \frac{1}{2}$. Khi đó ta có sơ đồ điểm rơi:

$$a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1 + a^2 + b^2} = \frac{1}{2kab} = \frac{2}{3} \Rightarrow k = 3$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1 + a^2 + b^2} + \frac{1}{6ab} + \frac{1}{3ab} \geq 2\sqrt{\frac{1}{(1 + a^2 + b^2)6ab}} + \frac{1}{3ab} \\ &\geq \frac{2}{\frac{1 + a^2 + b^2 + 6ab}{2}} + \frac{1}{3ab} = \frac{4}{(a + b)^2 + 1 + 4ab} + \frac{1}{3ab} \\ &\geq \frac{4}{(a + b)^2 + 1 + 4\left(\frac{a + b}{2}\right)^2} + \frac{1}{3\left(\frac{a + b}{2}\right)^2} \geq \frac{4}{2 \cdot 1 + 1} + \frac{4}{3 \cdot 1} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 1 + a^2 + b^2 = 6ab \\ a = b \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{8}{3}$.

Bình luận: Qua các bài toán trên ta thấy, khi giải các bài toán chứng minh bất đẳng thức thì các đánh giá trung gian phải được bảo toàn dấu đẳng thức. Cho nên việc xác định đúng vị trí điểm rơi xảy ra sẽ tránh cho ta sử dụng các đánh giá trung gian sai lầm.

Trong đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân, việc xác định điểm rơi đúng sẽ chỉ cho ta cách chọn các đánh giá hợp lý trong chuỗi các đánh giá mà ta cần phải sử dụng. Bây giờ ta đi tìm hiểu kỹ thuật đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân thông qua một số ví dụ sau.

Ví dụ 1.1: Cho các số thực a, b, c bất kì. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geq 8a^2b^2c^2$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Trong bất đẳng thức trên thì vế trái có các đại lượng $a^2 + b^2$; $b^2 + c^2$; $c^2 + a^2$ và vế phải chứa đại lượng $8a^2b^2c^2$. Để ý ta nhận thấy $8a^2b^2c^2 = 2ab \cdot 2bc \cdot 2ca$, do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến các đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $c^2 + a^2 \geq 2ca$.

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2} = 2|xy|$, ta có:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2|ab| \geq 0 \\ b^2 + c^2 \geq 2|bc| \geq 0 \\ c^2 + a^2 \geq 2|ca| \geq 0 \end{cases}$$

Nhân vế theo vế của ba bất đẳng thức trên ta được:

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geq 8|a^2b^2c^2| = 8a^2b^2c^2$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét:

- Chỉ được nhân các vế của bất đẳng thức cùng chiều (kết quả được bất đẳng thức cùng chiều) khi và chỉ khi các vế cùng không âm.

- Để ý rằng ta sử dụng cách đánh giá $x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2} = 2|xy|$ khi chưa xác định được x, y âm hay dương.

- Nói chung ta ít gặp bài toán sử dụng ngay bất đẳng thức Cauchy như bài toán nói trên mà phải qua một vài phép biến đổi đến tình huống thích hợp rồi mới sử dụng bất đẳng thức Cauchy.

Ví dụ 1.2: Cho a, b là các số thực dương không âm tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^8 \geq 64ab(a + b)^2$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b$. Trong bất đẳng thức trên, vế trái có đại lượng $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^8 = (a + b + 2\sqrt{ab})^4$ và vế phải có đại lượng $64ab(a + b)^2$. Để ý ta nhận thấy khi $a = b$ thì $a + b = 2\sqrt{ab}$ và $(a + b)^2 = 4ab$, do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến các đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân cho hai số $a + b$ và $2\sqrt{ab}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2} = 2xy$, ta được:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^8 = (a + b + 2\sqrt{ab})^4 \geq \left[2\sqrt{2(a + b)\sqrt{ab}} \right]^4 = 64ab(a + b)^2$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 1.3: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + b \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{ab} + 4ab \geq 7$$

Phân tích: Do biểu thức vế trái có tính đối xứng với a, b nên ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = \frac{1}{2}$. Khi đó ta có $a^2 + b^2 = 2ab$ và $4ab = \frac{1}{4ab}$. Để ý đại lượng $a^2 + b^2$ nằm ở mẫu nên ta cần

tìm cách thêm vào $2ab$ để tạo thành $(a + b)^2$, do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến đánh giá

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} \geq \frac{4}{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{4}{(a + b)^2} \geq 4. \text{ Như vậy lúc này bên vế trái còn lại } \frac{1}{2ab} + 4ab, \text{ đến}$$

đây ta sử dụng cách ghép hai đại lượng nghịch đảo $4ab + \frac{1}{4ab} \geq 2$. Như vậy lúc này ta thấy vế trái còn

lại $\frac{1}{4ab}$ và ta cần chỉ ra được $\frac{1}{4ab} \geq 1$. Điều này không thể làm khó ta được vì dễ nhận ra được $4ab \leq (a+b)^2 \leq 1$. Đến đây ta trình bày lại lời giải như sau

Lời giải

Ta viết lại biểu thức về trái thành

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{ab} + 4ab = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} + \left(4ab + \frac{1}{4ab}\right) + \frac{1}{4ab}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta có các đánh giá sau:

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} \geq \frac{4}{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{4}{(a+b)^2} \geq 4$$

$$4ab + \frac{1}{4ab} \geq 2; \quad 4ab \leq (a+b)^2 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{4ab} \geq 1$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} + \left(4ab + \frac{1}{4ab}\right) + \frac{1}{4ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} + 2\sqrt{4ab \cdot \frac{1}{4ab}} + \frac{1}{(a+b)^2} \geq 7$$

Hay
$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{ab} + 4ab \geq 7$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Ta tiếp tục vận dụng đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân cho các ví dụ sau đây.

Ví dụ 1.4: Cho số thực a bất kì. Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2$

Phân tích: Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh là $a^2 + 2 \geq 2\sqrt{a^2 + 1}$. Để ý ta nhận thấy $a^2 + 2 = a^2 + 1 + 1$; $2\sqrt{a^2 + 1} = 2\sqrt{a^2 + 1} \cdot 1$, do đó ta sử dụng đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân để chứng minh bất đẳng thức.

Ngoài ra, Để ý ta cũng có thể viết $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{a^2 + 1 + 1}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{a^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$, đến đây ghép cặp nghịch đảo để chứng minh bất đẳng thức.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, ta có

$$a^2 + 2 = a^2 + 1 + 1 \geq 2\sqrt{a^2 + 1} \cdot 1 = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

Hay $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow a = 0$.

Ta cũng có thể trình bày lời giải như sau: Biến đổi về trái và áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số ta có

$$\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{a^2 + 1 + 1}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{a^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{a^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \Leftrightarrow a^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow a = 0$$

Ví dụ 1.5: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a > b$. Chứng minh rằng:

$$a + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy vế phải không chứa biến, nên khi áp dụng áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho vế trái ta cần phải khử hết các biến, như vậy ta cần phải có các đại lượng $a - b$; b , ngoài ra chiều bất đẳng thức gợi ý cho ta sử dụng đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân.

Để ý là $a = b + a - b$ khi đó ta áp dụng đánh giá cho 3 số dương $a - b$; b ; $\frac{1}{b(a-b)}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta được

$$a + \frac{1}{b(a-b)} = b + a - b + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{b \cdot (a-b) \cdot \frac{1}{b(a-b)}} = 3$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a - b = b = \frac{1}{b(a-b)} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Ví dụ 1.6: Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Phân tích: Đây là bất đẳng thức Neibizt đã được chứng minh bằng phép biến đổi tương đương. Tuy nhiên ở đây ta thử dùng bất đẳng thức Cauchy để chứng minh xem sao.

+ Hướng 1: Để ý đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ nên khi đó có $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a} = \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2}$. Sử dụng

bất đẳng thức Cauchy cho hai số $\frac{a}{b+c}$; $\frac{b+c}{4a}$ khi đó ta được $\frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{4a} \geq 1$, áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 3 - \left(\frac{b+c}{4a} + \frac{c+a}{4b} + \frac{a+b}{4c} \right)$$

Như vậy ta cần chứng minh được

$$\frac{b+c}{4a} + \frac{c+a}{4b} + \frac{a+b}{4c} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \leq 6.$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá sai. Do đó ta không thể thực hiện chứng minh theo hướng thứ nhất được.

+ Hướng 2: Để ý là $\frac{a}{b+c} + 1 = \frac{a+b+c}{b+c}$, khi đó áp dụng tương tự được bất đẳng thức

$$\frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{9}{2} \text{ hay } 2(a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 9. \text{ Dễ dàng chỉ}$$

ra được $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}}$ và chú ý ta lại thấy

$2(a + b + c) = (a + b) + (b + c) + (c + a) \geq 3\sqrt[3]{(a + b)(b + c)(c + a)}$. Đến đây ta có lời giải như sau

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a + b + c}{b + c} + \frac{a + b + c}{c + a} + \frac{a + b + c}{a + b} \geq \frac{9}{2}$$

Hay
$$2(a + b + c) \left(\frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} + \frac{1}{a + b} \right) \geq 9$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$2(a + b + c) = (a + b) + (b + c) + (c + a) \geq 3\sqrt[3]{(a + b)(b + c)(c + a)}$$

$$\frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} + \frac{1}{a + b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(a + b)(b + c)(c + a)}}$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được
$$2(a + b + c) \left(\frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} + \frac{1}{a + b} \right) \geq 9$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 1.7: Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng :

$$\sqrt[3]{(1 + a)(1 + b)(1 + c)} \geq 1 + \sqrt[3]{abc}$$

Phân tích: Dự đoán đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, để đơn giản hóa bất đẳng thức ta có thể

lũy thừa bậc 3 hai vế, khi đó ta được $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq \left(1 + \sqrt[3]{abc}\right)^3$ hay

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + abc. \text{ Quan sát bất đẳng thức ta chú ý đến đẳng thức } (1 + a)(1 + b)(1 + c) = 1 + (a + b + c) + (ab + bc + ca) + abc.$$

Như vậy bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ và $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, rõ ràng hai đánh giá trên đúng theo bất đẳng thức Cauchy.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với
$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq \left(1 + \sqrt[3]{abc}\right)^3$$

Hay
$$1 + (a + b + c) + (ab + bc + ca) + abc \geq 1 + 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + abc$$

Hay
$$(a + b + c) + (ab + bc + ca) \geq 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \text{ và } ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 1.8: Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a + b)(a + b + c)(a + b + c + d)^2}{abcd} \geq 64$$

Phân tích: Bất đẳng thức được viết lại thành $(a + b)(a + b + c)(a + b + c + d)^2 \geq 64abcd$. Dễ thấy đẳng thức không xảy ra tại $a = b = c = d$, do đó để dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại đâu ta cần quan sát thật kỹ vai trò các biến trong bất đẳng thức. Nhận thấy trong bất đẳng thức a và b , $a + b$ và c , $a + b + c$ và d có vai trò như nhau, do đó ta dự đoán đẳng thức xảy ra khi

$a = b$; $a + b = c$; $a + b + c = d$ hay $4a = 4b = 2c = d$, kiểm tra lại ta thấy kết quả đúng vậy. Như vậy khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta cần chú ý bảo toàn dấu đẳng thức. Trước hết ta có các đánh giá như sau:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}; a + b + c \geq 2\sqrt{(a+b)c}; (a + b + c + d)^2 \geq 4(a + b + c)d$$

Nhân theo về các bất đẳng thức ta được

$$(a + b)(a + b + c)(a + b + c + d)^2 \geq 16\sqrt{ab} \cdot \sqrt{(a+b)c} \cdot (a + b + c)d$$

Tiếp tục áp dụng các đánh giá như trên ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} \cdot \sqrt{(a+b)c} \cdot (a + b + c)d &\geq \sqrt{ab} \cdot \sqrt{2c\sqrt{ab}} \cdot 2\sqrt{(a+b)c} \cdot d \\ &\geq \sqrt{ab} \cdot \sqrt{2c\sqrt{ab}} \cdot 2\sqrt{2c\sqrt{ab}} \cdot d = 4abcd \end{aligned}$$

Đến đây ta thu được $(a + b)(a + b + c)(a + b + c + d)^2 \geq 64abcd$ chính là bất đẳng thức cần chứng minh.

Ngoài ra, để đơn giản hơn ta có thể thực hiện các đánh giá như

$$(a + b)^2 \geq 4ab; (a + b + c)^2 \geq 4c(a + b); (a + b + c + d)^2 \geq 4(a + b + c)d$$

Đến đây ta nhân theo về và thu gọn thì được

$$(a + b)(a + b + c)(a + b + c + d)^2 \geq 64abcd$$

Bây giờ ta trình bày lại lời giải như sau

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(a + b)(a + b + c)(a + b + c + d)^2 \geq 64abcd$$

Sử dụng liên tiếp bất đẳng thức Cauchy dạng $(x + y)^2 \geq 4xy$, ta có

$$\begin{aligned} (a + b + c + d)^2 &\geq 4d(a + b + c) \geq 0 \\ (a + b + c)^2 &\geq 4c(a + b) \geq 0; (a + b)^2 \geq 4ab \geq 0 \end{aligned}$$

Nhân ba bất đẳng thức trên lại theo về, ta suy ra

$$(a + b)^2 (a + b + c)^2 (a + b + c + d)^2 \geq 64abcd(a + b)(a + b + c)$$

Hay
$$(a + b)(a + b + c)(a + b + c + d)^2 \geq 64abcd$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $d = 2c = 4b = 4a > 0$

Ngoài ra, ta cũng có thể trình bày lời giải như sau:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}; a + b + c \geq 2\sqrt{(a+b)c}; (a + b + c + d)^2 \geq 4(a + b + c)d$$

Nhân theo về các bất đẳng thức ta được

$$(a + b)(a + b + c)(a + b + c + d)^2 \geq 16\sqrt{ab} \cdot \sqrt{(a+b)c} \cdot (a + b + c)d$$

Tiếp tục áp dụng các đánh giá như trên ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} \cdot \sqrt{(a+b)c} \cdot (a + b + c)d &\geq \sqrt{ab} \cdot \sqrt{2c\sqrt{ab}} \cdot 2\sqrt{(a+b)c} \cdot d \\ &\geq \sqrt{ab} \cdot \sqrt{2c\sqrt{ab}} \cdot 2\sqrt{2c\sqrt{ab}} \cdot d = 4abcd \end{aligned}$$

Đến đây ta thu được
$$(a + b)(a + b + c)(a + b + c + d)^2 \geq 64abcd$$

Hay bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 1.9: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

Phân tích: Bất đẳng thức trên đã được chứng minh bằng cách đánh giá mẫu, ở đó ta chứng minh bất đẳng thức phụ $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$ bằng phép biến đổi tương đương. Trong ví dụ này ta sẽ chứng minh bất đẳng thức phụ trên bằng đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân.

Ta viết lại bất đẳng thức phụ trên thành $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$, khi đó ta có các đánh giá là $a^3 + a^3 + b^3 \geq 3a^2b$; $a^3 + b^3 + b^3 \geq 3ab^2$. Đến đây cộng theo vế ta thu được bất đẳng thức trên. Đến đây ta trình bày lời giải như sau

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^3 + a^3 + b^3 \geq 3a^2b; a^3 + b^3 + b^3 \geq 3ab^2$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$

Suy ra $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b + c)$

Từ đó ta được $\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{ab(a + b + c)} = \frac{c}{abc(a + b + c)}$

Chứng minh tương tự ta có

$$\frac{1}{b^3 + c^3 + abc} \leq \frac{1}{bc(a + b + c)} = \frac{a}{abc(a + b + c)}$$

$$\frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{ac(a + b + c)} = \frac{b}{abc(a + b + c)}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

Nhận xét: Khi đi tìm lời giải cho bất đẳng thức trên, cái làm khó ta chính là phải phát hiện ra bất đẳng thức phụ $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$. Trong quá trình đó đòi hỏi ta phải có sự phân tích kĩ càng và có những định hướng rõ ràng, còn trình bày chứng minh bất đẳng thức thì cách nào cũng được miễn là càng gọn càng tốt.

Ví dụ 1.10: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a}{a^6 + b^4} + \frac{2b}{b^6 + c^4} + \frac{2c}{c^6 + a^4} \leq \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4}$$

Phân tích: Vì vai trò các biến như nhau trong bất đẳng thức nên ta được dự đoán đẳng thức xảy ra tại

$a = b = c$, khi đó ta được $\frac{2a}{a^6 + a^4} = \frac{1}{a^4} \Leftrightarrow 2a = a^2 + 1$, do đó đẳng thức sẽ xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy vế trái của bất đẳng thức phức tạp hơn nên ta chọn đánh giá bên vế trái trước. Từ chiều bất đẳng thức ta cần phải thay các mẫu bởi các đại lượng bé hơn, tức là ta cần có đánh giá $a^6 + b^4 \geq ?$, cho nên một cách tự nhiên ta nghĩ đến bất đẳng thức Cauchy, khi đó ta có $a^6 + b^4 \geq 2a^3b^2$, đánh giá này vẫn được bảo toàn dấu đẳng thức. Lúc này ta được

$\frac{2a}{a^6 + a^4} \leq \frac{2a}{2a^3b^2} = \frac{1}{a^2b^2}$ và áp dụng tương tự thì ta sẽ thu được

$\frac{2a}{a^6 + b^4} + \frac{2b}{b^6 + c^4} + \frac{2c}{c^6 + a^4} \leq \frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^2 c^2} + \frac{1}{c^2 a^2}$. Việc chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^2 c^2} + \frac{1}{c^2 a^2} \leq \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4}$, nhưng đây là một đánh giá đúng theo bất đẳng thức Cauchy. Do đó bài toán được chứng minh.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các mẫu số ta được

$$\frac{2a}{a^6 + b^4} + \frac{2b}{b^6 + c^4} + \frac{2c}{c^6 + a^4} \leq \frac{2a}{2a^3 b^2} + \frac{2b}{2b^3 c^2} + \frac{2c}{2c^3 a^2} = \frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^2 c^2} + \frac{1}{c^2 a^2}$$

Ta cần chứng minh được $\frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^2 c^2} + \frac{1}{c^2 a^2} \leq \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4}$

Thật vậy, cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \geq \frac{2}{a^2 b^2}; \quad \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} \geq \frac{2}{b^2 c^2}; \quad \frac{1}{c^4} + \frac{1}{a^4} \geq \frac{2}{c^2 a^2}$$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta thu được $\frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^2 c^2} + \frac{1}{c^2 a^2} \leq \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Ví dụ 1.11: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$a \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{bc} \right) + b \left(\frac{b}{2} + \frac{1}{ca} \right) + c \left(\frac{c}{2} + \frac{1}{ab} \right) \geq \frac{9}{2}$$

Phân tích: Vì vai trò các biến như nhau trong bất đẳng thức nên ta được dự đoán đẳng thức xảy ra tại

$a = b = c$, khi đó ta được $a \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a^2} \right) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = 1$, do đó đẳng thức sẽ xảy ra tại $a = b = c = 1$. Ta

viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} \geq \frac{9}{2}$$

Để ý đến đánh giá $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ khi đó ta được

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Ta cần chứng minh được $\frac{a^2}{2} + \frac{1}{a} \geq \frac{3}{2}; \frac{b^2}{2} + \frac{1}{b} \geq \frac{3}{2}; \frac{c^2}{2} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{2}$. Chú ý đến $a = b = c = 1$, ta có

$\frac{a^2}{2} + \frac{1}{a} = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} \geq \frac{3}{2}$, do vậy đến đây bài toán được chứng minh.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} \geq \frac{9}{2}$$

Mặt khác ta có $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} \geq \frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Do đó ta được $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Ta cần chứng minh được $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{2}$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{a^2}{2} + \frac{1}{a} = \frac{a^2}{2} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} \geq \frac{3}{2}$

Áp dụng tương tự ta được $\frac{b^2}{2} + \frac{1}{b} \geq \frac{3}{2}$; $\frac{c^2}{2} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{2}$.

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta được $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 1.12: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a^3 + b^3 + 1}}{ab} + \frac{\sqrt{b^3 + c^3 + 1}}{bc} + \frac{\sqrt{c^3 + a^3 + 1}}{ca} \geq 3\sqrt{3}$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta có các ý tưởng tiếp cận như sau:

+ Hướng thứ nhất: Chú ý đến chiều bất đẳng thức ta liên tưởng đến đánh giá tương tự như trong ví dụ 1.9 là $a^3 + b^3 + 1 = a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b + c)$, khi đó ta được bất đẳng thức là

$$\frac{\sqrt{a^3 + b^3 + 1}}{ab} \geq \frac{\sqrt{ab(a + b + c)}}{ab} = \frac{\sqrt{a + b + c}}{\sqrt{ab}}$$

và áp dụng hoàn toàn tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{\sqrt{a^3 + b^3 + 1}}{ab} + \frac{\sqrt{b^3 + c^3 + 1}}{bc} + \frac{\sqrt{c^3 + a^3 + 1}}{ca} \geq \sqrt{a + b + c} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \right).$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\sqrt{a + b + c} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \right) \geq 3\sqrt{3}$. Tuy nhiên bất đẳng thức đó là đúng nhờ hai đánh giá sau:

$$\sqrt{a + b + c} \geq \sqrt{3\sqrt[3]{abc}} = \sqrt{3} \quad \text{và} \quad \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{1}{\sqrt{bc}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ca}}} = 3$$

+ Hướng thứ hai: Áp dụng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy ta có $a^3 + b^3 + 1 \geq 3\sqrt[3]{a^3 b^3} = 3ab$ nên ta

được $\frac{\sqrt{a^3 + b^3 + 1}}{ab} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{ab}}$, áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{\sqrt{a^3 + b^3 + 1}}{ab} + \frac{\sqrt{b^3 + c^3 + 1}}{bc} + \frac{\sqrt{c^3 + a^3 + 1}}{ca} \geq \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \right)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \geq 3$, tuy nhiên đánh giá này đã được khẳng định trong hướng thứ nhất. Bây giờ ta trình bày lại lời giải như sau

Lời giải

Cách 1: Dễ dàng chứng minh được $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$, khi đó ta có

$$\frac{\sqrt{a^3 + b^3 + 1}}{ab} \geq \frac{\sqrt{ab(a + b + c)}}{ab} = \frac{\sqrt{a + b + c}}{\sqrt{ab}}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{\sqrt{a^3 + b^3 + 1}}{ab} + \frac{\sqrt{b^3 + c^3 + 1}}{bc} + \frac{\sqrt{c^3 + a^3 + 1}}{ca} \geq \sqrt{a + b + c} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \right)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{3\sqrt[3]{abc}} = \sqrt{3} \text{ và } \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{1}{\sqrt{bc}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ca}}} = 3$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $\sqrt{a+b+c} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \right) \geq 3\sqrt{3}$

Suy ra
$$\frac{\sqrt{a^3+b^3+1}}{ab} + \frac{\sqrt{b^3+c^3+1}}{bc} + \frac{\sqrt{c^3+a^3+1}}{ca} \geq 3\sqrt{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta được

$$a^3 + b^3 + 1 \geq 3\sqrt[3]{a^3b^3} = 3ab$$

Suy ra $\frac{\sqrt{a^3+b^3+1}}{ab} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{ab}}$, áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{\sqrt{a^3+b^3+1}}{ab} + \frac{\sqrt{b^3+c^3+1}}{bc} + \frac{\sqrt{c^3+a^3+1}}{ca} \geq \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \right)$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{a^2b^2c^2}}} = 3$.

Do đó ta được
$$\frac{\sqrt{a^3+b^3+1}}{ab} + \frac{\sqrt{b^3+c^3+1}}{bc} + \frac{\sqrt{c^3+a^3+1}}{ca} \geq 3\sqrt{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 1.13: Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$-\frac{1}{8} \leq \frac{(a+b)(b+c)(c+a)(1-ab)(1-bc)(1-ca)}{(1+a^2)^2(1+b^2)^2(1+c^2)^2} \leq \frac{1}{8}$$

Phân tích: Với bất đẳng thức trên việc dự đoán dấu đẳng thức xảy ra hơi khó. Để dễ quan sát hơn ta có thể viết lại bất đẳng thức như sau:

$$\frac{|(a+b)(b+c)(c+a)(1-ab)(1-bc)(1-ca)|}{(1+a^2)^2(1+b^2)^2(1+c^2)^2} \leq \frac{1}{8}$$

Hay ta cần chứng minh

$$8|(a+b)(b+c)(c+a)(1-ab)(1-bc)(1-ca)| \leq (1+a^2)^2(1+b^2)^2(1+c^2)^2$$

Quan sát thật kĩ bất đẳng thức trên ta thấy cần phải chứng minh được

$$(1+a^2)(1+b^2) \geq 2|(a+b)(1-ab)|$$

Với bất đẳng thức trên, ta sử dụng phép biến đổi tương đương hoặc bất đẳng thức Cauchy. Ở đây ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy, chú ý bên vế phải của bất đẳng thức có chứa đại lượng $2|(a+b)(1-ab)|$, như vậy ta cần biến đổi vế trái thành $(a+b)^2 + (1-ab)^2$. Để kiểm tra nhận định trên ta chỉ cần nhân tung hai biểu thức rồi so sánh là được và rất may là nhận định trên là đúng. Bây giờ ta trình bày lại lời giải như sau

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại như sau:

$$\frac{|(a+b)(b+c)(c+a)(1-ab)(1-bc)(1-ca)|}{(1+a^2)^2(1+b^2)^2(1+c^2)^2} \leq \frac{1}{8}$$

Hay ta cần chứng minh

$$8 \left| (a+b)(b+c)(c+a)(1-ab)(1-bc)(1-ca) \right| \leq (1+a^2)^2 (1+b^2)^2 (1+c^2)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(1+a^2)(1+b^2) = 1+a^2+b^2+a^2b^2 = (a+b)^2 + (1-ab)^2 \geq 2 \left| (a+b)(1-ab) \right|$$

Áp dụng tương tự

$$(1+b^2)(1+c^2) \geq 2 \left| (b+c)(1-bc) \right|; (1+c^2)(1+a^2) \geq 2 \left| (c+a)(1-ca) \right|$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$8 \left| (a+b)(b+c)(c+a)(1-ab)(1-bc)(1-ca) \right| \leq (1+a^2)^2 (1+b^2)^2 (1+c^2)^2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 1.14: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+1)^2(1+b)^2}{1+c^2} + \frac{(1+b)^2(1+c)^2}{1+a^2} + \frac{(1+c)^2(1+a)^2}{1+b^2} \geq 24$$

Phân tích: Đầu tiên ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức thì ý tưởng đầu tiên đó là sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, tức là ta cần phải chứng minh được

$$\frac{\left[(1+a)(1+b) + (1+b)(1+c) + (1+c)(1+a) \right]^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 3} \geq 24$$

Tuy nhiên bất đẳng thức trên không đúng, muốn kiểm tra ta chỉ cần chọn một bộ số, chẳng hạn

$a = 2; b = c = \frac{1}{2}$ để thử thì thấy bất đẳng thức trên không đúng. Do đó đánh theo bất đẳng thức

Bunhiacopxki không thực hiện được. Trong tình huống này ta nghĩ đến đánh giá bằng bất đẳng thức Cauchy.

Trước hết ta thử đánh giá trực tiếp bằng bất đẳng thức Cauchy xem sao, ta có

$$\frac{(1+a)^2(1+b)^2}{1+c^2} + \frac{(1+b)^2(1+c)^2}{1+a^2} + \frac{(1+c)^2(1+a)^2}{1+b^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{(a+1)^4(1+b)^3(1+c)^4}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}}$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$(a+1)^4(1+b)^3(1+c)^4 \geq 8^3(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$$

Tuy nhiên đánh giá trên lại không đúng.

Như vậy để đánh giá được theo bất đẳng thức Cauchy hay Bunhiacopxki ta cần biến đổi các biểu thức trước. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy cần biến đổi $(1+a)^2(1+b)^2$ thành đại lượng có chứa $(1+a^2); (1+b^2)$ và ta có thể biến đổi như sau:

$$(1+a)^2(1+b)^2 = (ab+1+a+b)^2 \geq 4(ab+1)(a+b) = 4a(1+b^2) + 4b(1+a^2)$$

Đến đây ta được $\frac{(1+a)^2(1+b)^2}{1+c^2} \geq 4b \cdot \frac{1+a^2}{1+c^2} + 4a \cdot \frac{1+b^2}{1+c^2}$, áp dụng tương tự ta thu được

$$\frac{(1+b)^2(1+c)^2}{1+a^2} \geq 4b \cdot \frac{1+c^2}{1+a^2} + 4c \cdot \frac{1+b^2}{1+a^2}; \frac{(1+c)^2(1+a)^2}{1+b^2} \geq 4a \cdot \frac{1+c^2}{1+b^2} + 4c \cdot \frac{1+a^2}{1+b^2}.$$

Để ý ta thấy trong các đánh giá trên xuất hiện các cặp nghịch đảo nên ta ghép chúng lại

$$4b \cdot \frac{1+a^2}{1+c^2} + 4b \cdot \frac{1+c^2}{1+a^2} \geq 8b; 4a \cdot \frac{1+b^2}{1+c^2} + 4a \cdot \frac{1+c^2}{1+b^2} \geq 8a; 4c \cdot \frac{1+b^2}{1+a^2} + 4c \cdot \frac{1+a^2}{1+b^2} \geq 8c$$

Chú ý đến giả thiết $a + b + c = 3$ ta có được điều cần chứng minh và lúc này ta trình bày lại lời giải như sau

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(1+a)^2(1+b)^2 = (ab+1+a+b)^2 \geq 4(ab+1)(a+b) = 4a(1+b^2) + 4b(1+a^2)$$

Suy ra
$$\frac{(1+a)^2(1+b)^2}{1+c^2} \geq 4b \cdot \frac{1+a^2}{1+c^2} + 4a \cdot \frac{1+b^2}{1+c^2}$$

Áp dụng tương tự ta thu được

$$\frac{(1+b)^2(1+c)^2}{1+a^2} \geq 4b \cdot \frac{1+c^2}{1+a^2} + 4c \cdot \frac{1+b^2}{1+a^2}; \quad \frac{(1+c)^2(1+a)^2}{1+b^2} \geq 4a \cdot \frac{1+c^2}{1+b^2} + 4c \cdot \frac{1+a^2}{1+b^2}$$

Khi đó ta được bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \frac{(1+a)^2(1+b)^2}{1+c^2} + \frac{(1+b)^2(1+c)^2}{1+a^2} + \frac{(1+c)^2(1+a)^2}{1+b^2} \\ \geq 4b \cdot \frac{1+a^2}{1+c^2} + 4a \cdot \frac{1+b^2}{1+c^2} + b \cdot \frac{1+c^2}{1+a^2} + 4c \cdot \frac{1+b^2}{1+a^2} + 4a \cdot \frac{1+c^2}{1+b^2} + 4c \cdot \frac{1+a^2}{1+b^2} \end{aligned}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$4b \cdot \frac{1+a^2}{1+c^2} + 4b \cdot \frac{1+c^2}{1+a^2} \geq 8b; \quad 4a \cdot \frac{1+b^2}{1+c^2} + 4a \cdot \frac{1+c^2}{1+b^2} \geq 8a; \quad 4c \cdot \frac{1+b^2}{1+a^2} + 4c \cdot \frac{1+a^2}{1+b^2} \geq 8c$$

Suy ra

$$4b \cdot \frac{1+a^2}{1+c^2} + 4b \cdot \frac{1+c^2}{1+a^2} + 4a \cdot \frac{1+b^2}{1+c^2} + 4a \cdot \frac{1+c^2}{1+b^2} + 4c \cdot \frac{1+b^2}{1+a^2} + 4c \cdot \frac{1+a^2}{1+b^2} \geq 8(a+b+c) = 24$$
 Do đó

ta được
$$\frac{(a+1)^2(1+b)^2}{1+c^2} + \frac{(1+b)^2(1+c)^2}{1+a^2} + \frac{(1+c)^2(1+a)^2}{1+b^2} \geq 24$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 1.15: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} = 2$.

Chứng minh rằng: $ab + bc + ca \geq 12$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy giả thiết ta có

$$\frac{a}{a+1} = 1 - \frac{b}{b+1} + 1 - \frac{c}{c+1} = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \geq \frac{2}{\sqrt{(b+1)(c+1)}}$$

Tương tự ta có
$$\frac{b}{b+1} \geq \frac{2}{\sqrt{(c+1)(a+1)}}; \quad \frac{c}{c+1} \geq \frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}$$

Khi đó ta được
$$\frac{ab}{(a+1)(b+1)} \geq \frac{4}{(c+1)\sqrt{(a+1)(b+1)}} \Rightarrow ab \geq \frac{4 \cdot \sqrt{(a+1)(b+1)}}{c+1}$$

Áp dụng tương tự ta được
$$bc \geq \frac{4 \cdot \sqrt{(b+1)(c+1)}}{a+1}; \quad ca \geq \frac{4 \cdot \sqrt{(c+1)(a+1)}}{b+1}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$ab + bc + ca \geq \frac{4 \cdot \sqrt{(a+1)(b+1)}}{c+1} + \frac{4 \cdot \sqrt{(b+1)(c+1)}}{a+1} + \frac{4 \cdot \sqrt{(c+1)(a+1)}}{b+1}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\frac{\sqrt{(a+1)(b+1)}}{c+1} + \frac{\sqrt{(b+1)(c+1)}}{a+1} + \frac{\sqrt{(c+1)(a+1)}}{b+1} \geq 3$$

Suy ra $ab + bc + ca \geq 12$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Ví dụ 1.16: Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{8(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} + \frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \geq 16$$

Lời giải

Đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$, khi đó $\frac{8(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} = \frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} = 8$

Do đó ta áp dụng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương

$$\frac{8(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} + \frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \geq 2 \sqrt{\frac{8(a^2 + b^2 + c^2) \cdot 27(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab + bc + ca)(a+b+c)^3}}$$
 Ta cần

chứng minh được

$$27(a^2 + b^2 + c^2)(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(ab + bc + ca)(a+b+c)^3$$

$$\text{Dễ thấy } (a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab + bc + ca) - abc$$

$$\text{Mà theo bất đẳng thức Cauchy ta có } a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}; \quad ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{(a+b+c)(cb + bc + ca)}{9} \geq abc$$

$$\text{Do đó ta được } (a+b)(b+c)(c+a) \geq \frac{8}{9}(a+b+c)(cb + bc + ca)$$

$$\text{Suy ra } 27(a^2 + b^2 + c^2)(a+b)(b+c)(c+a) \geq 24(a^2 + b^2 + c^2)(a+b+c)(cb + bc + ca)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$24(a^2 + b^2 + c^2)(a+b+c)(ab + bc + ca) \geq 8(ab + bc + ca)(a+b+c)^3$$

$$\text{Hay } 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2$$

Rõ ràng đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 1.17: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Đặt $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; $y = \sqrt{b^2 + c^2}$; $z = \sqrt{c^2 + a^2}$, khi đó ta được $x, y, z > 0$ và từ giả thiết ta được

$$x + y + z = 3\sqrt{2}$$

Từ đó ta có $x^2 + y^2 + z^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$. Do đó ta được

$$a^2 = \frac{x^2 - y^2 + z^2}{2}; \quad b^2 = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2}; \quad c^2 = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $(b + c)^2 \leq 2(b^2 + c^2) = 2y^2$

Do đó ta được
$$\frac{a^2}{b + c} \geq \frac{x^2 - y^2 + z^2}{2y\sqrt{2}}$$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{b^2}{c + a} \geq \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2z\sqrt{2}}, \frac{c^2}{a + b} \geq \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{2x\sqrt{2}}$

Suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{b + c} + \frac{b^2}{c + a} + \frac{c^2}{a + b} \\ & \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2y\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2z\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2x\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} \\ & = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{x + y + z}{\sqrt{2}} \\ & \geq \frac{1}{6\sqrt{2}}(x + y + z)^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ & = \frac{1}{6\sqrt{2}}(x + y + z)(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 3 \geq \frac{9 \cdot 3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} - 3 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 1.18: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4(b^2 + c^2)}{b^3 + 2c^3} + \frac{b^4(c^2 + a^2)}{c^3 + 2a^3} + \frac{c^4(a^2 + b^2)}{a^3 + 2b^3} \geq 2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và kết hợp với giả thiết ta có

$$a^4(b^2 + c^2) = a^2(a^2b^2 + c^2a^2) \geq a^2 \cdot 2\sqrt{a^4 \cdot b^2c^2} = 2a^3$$

Hoàn toàn tương tự ta được $b^4(c^2 + a^2) \geq 2b^3; c^4(a^2 + b^2) \geq 2c^3$

Khi đó ta được

$$\frac{a^4(b^2 + c^2)}{b^3 + 2c^3} + \frac{b^4(c^2 + a^2)}{c^3 + 2a^3} + \frac{c^4(a^2 + b^2)}{a^3 + 2b^3} \geq \frac{2a^3}{b^3 + 2c^3} + \frac{2b^3}{c^3 + 2a^3} + \frac{2c^3}{a^3 + 2b^3}$$

Ta cần chứng minh được $\frac{2a^3}{b^3 + 2c^3} + \frac{2b^3}{c^3 + 2a^3} + \frac{2c^3}{a^3 + 2b^3} \geq 2$

Thật vậy, đặt $x = b^3 + 2c^3; y = c^3 + 2a^3; z = a^3 + 2b^3$

Khi đó ta được $b^3 = \frac{x - 2y + 4z}{9}; c^3 = \frac{y - 2z + 4x}{9}; a^3 = \frac{z - 2x + 4y}{9}$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{2(z - 2x + 4y)}{9x} + \frac{2(x - 2y + 4z)}{9y} + \frac{2(y - 2z + 4x)}{9z} \geq 2$$

Hay ta cần chứng minh
$$\frac{2}{9} \left[\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \right) + 4 \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \right) - 6 \right] \geq 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với 3 số dương ta có

$$\frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{z}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z}} = 3; \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z}} = 3$$

Khi đó ta được

$$\frac{2}{9} \left[\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \right) + 4 \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \right) - 6 \right] \geq 2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Ví dụ 1.19: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{(a + b + c)^3}{abc} \geq 28$$

Lời giải

Gọi vế trái của bất đẳng thức trên là P , khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} + (a + b + c)^2 \frac{(a + b + c)}{abc} \\ &= \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} + (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) \frac{(a + b + c)}{abc} \\ &= \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} + (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) + 2(ab + bc + ca) \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab + bc + ca}; (ab + bc + ca) \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \geq 9$$

Đề ý là $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + cb + ca$. Khi đó ta được

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} + (a^2 + b^2 + c^2) \frac{9}{ab + bc + ca} + 2 \cdot 9 \\ &= \left(\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \right) + \frac{8(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} + 18 \\ &\geq 2 + 8 + 18 = 28 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 1.20: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + c\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right) = 6$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a(2b + c)} + \frac{ca}{b(2a + c)} + \frac{4ab}{c(a + b)} \geq \frac{8}{3}$$

Lời giải

Từ giả thiết

$$2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + c\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2}\right) = 6 \Rightarrow 6 = \frac{c(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2b^2} + \frac{2(a^2 + b^2)}{ab}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cacy ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow 6 &= \frac{c(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2b^2} + \frac{2(a^2 + b^2)}{ab} \geq \frac{c(a + b)}{ab} + 4 \\ \Rightarrow 0 &< \frac{c(a + b)}{ab} \leq 2 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned}\frac{bc}{a(2b+c)} + \frac{ac}{b(2a+c)} &= \frac{(bc)^2}{abc(2b+c)} + \frac{(ac)^2}{abc(2a+c)} \\ &\geq \frac{(bc+ac)^2}{2abc(a+b+c)} = \frac{[c(a+b)]^2}{2abc(a+b+c)}\end{aligned}$$

$$\text{Và } abc(a+b+c) = ab.bc + bc.ca + ab.ca \leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{3}$$

$$\text{Suy ra ta có } \frac{bc}{a(2b+c)} + \frac{ac}{b(2a+c)} \geq \frac{3}{2} \left(\frac{c(a+b)}{ab+bc+ca} \right)^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{\frac{c(a+b)}{ab}}{1 + \frac{c(a+b)}{ab}} \right)^2$$

Gọi P là vế trái của bất đẳng thức

$$\text{Đặt } t = \frac{c(a+b)}{ab} \Rightarrow P \geq \frac{3t^2}{2(1+t)^2} + \frac{4}{t} \text{ (với } 0 < t \leq 2). \text{ Ta có}$$

$$\begin{aligned}\frac{3t^2}{2(1+t)^2} + \frac{4}{t} &= \left(\frac{3t^2}{2(1+t)^2} + \frac{4}{t} - \frac{8}{3} \right) + \frac{8}{3} = \frac{-7t^3 - 8t^2 + 32t + 24}{6t(1+t)^2} + \frac{8}{3} \\ &= \frac{(t-2)(-7t^2 - 22t - 12)}{6t(1+t)^2} + \frac{8}{3} \geq \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

2. Kỹ thuật chọn điểm rơi trong đánh giá từ trung bình nhân sang trung bình cộng.

Đánh giá từ trung bình nhân sang trung bình cộng chính là đánh giá bất đẳng thức Cauchy theo chiều từ phải sang trái. Trong chuỗi đánh giá đó ta cũng cần phải bảo toàn dấu đẳng thức xảy ra. Dưới đây là một số ví dụ sử dụng kỹ thuật đánh giá từ trung bình nhân sang trung bình cộng.

Ví dụ 2.1: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:
 $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}$

Sai lầm thường gặp:

$$\begin{cases} \sqrt{a+b} = \frac{2 \cdot \sqrt{a+b} \cdot 1}{2} \leq \frac{a+b+1}{2} \\ \sqrt{b+c} = \frac{2 \cdot \sqrt{b+c} \cdot 1}{2} \leq \frac{b+c+1}{2} \\ \sqrt{c+a} = \frac{2 \cdot \sqrt{c+a} \cdot 1}{2} \leq \frac{c+a+1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \frac{2(a+b+c) + 3}{2} = \frac{5}{2} \leq \sqrt{6}.$$

Cách chứng minh trên hoàn toàn sai. Vậy nguyên nhân sai lầm ở đây là gì?

Nguyên nhân sai lầm: Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a+b = b+c = c+a = 1 \Rightarrow a+b+c = 2$. Điều này trái với giả thiết.

Phân tích tìm lời giải: Để tìm lời giải cho bất đẳng thức trên, ta cần trả lời các câu hỏi sau

- Đẳng thức xảy ra tại đâu?
- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho mấy số, đó là những số nào?

Do vai trò của a, b, c trong các biểu thức là như nhau nên ta dự đoán điểm rơi của bất đẳng thức sẽ là $a = b = c = \frac{1}{3}$, từ đó ta có $a + b = b + c = c + a = \frac{2}{3}$. Vì bất đẳng thức chứa các căn bậc hai nên để phá căn ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số là a và $\frac{2}{3}$, ... Đến đây ta có lời giải đúng như sau:

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ cho hai số không âm ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{a+b} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{(a+b) \cdot \frac{2}{3}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{a+b+\frac{2}{3}}{2} \\ \sqrt{b+c} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{(b+c) \cdot \frac{2}{3}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{b+c+\frac{2}{3}}{2} \\ \sqrt{c+a} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{(c+a) \cdot \frac{2}{3}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{c+a+\frac{2}{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2(a+b+c) + 3 \cdot \frac{2}{3}}{2} = \sqrt{6}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 2.2: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:
 $\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \sqrt[3]{18}$

Sai lầm thường gặp

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{(a+b) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{a+b+1+1}{3} \\ \sqrt[3]{b+c} = \sqrt[3]{(b+c) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{b+c+1+1}{3} \\ \sqrt[3]{c+a} = \sqrt[3]{(c+a) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{c+a+1+1}{3} \end{cases}$$

$$\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \frac{2(a+b+c) + 6}{3} = \frac{8}{3} > \sqrt[3]{18}$$

Cách chứng minh trên hoàn toàn sai. Vậy nguyên nhân sai lầm ở đây là gì?

Nguyên nhân sai lầm: Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a+b = b+c = c+a = 1 \Rightarrow a+b+c = 2$. Điều này trái với giả thiết.

Phân tích tìm lời giải: Để tìm lời giải cho bất đẳng thức trên, ta cần trả lời các câu hỏi sau

- Đẳng thức xảy ra tại đâu?
- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho mấy số, đó là những số?

Do vai trò của a, b, c trong các biểu thức là như nhau nên ta dự đoán điểm rơi của bất đẳng thức sẽ là $a = b = c = \frac{1}{3}$, từ đó ta có $a + b = b + c = c + a = \frac{2}{3}$. Vì bất đẳng thức chứa các căn bậc ba nên để phá căn ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số là $a, \frac{2}{3}$ và $\frac{2}{3}$, ... Đến đây ta có lời giải đúng như sau:

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$ cho các số thực dương ta được

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{(a+b) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \cdot \frac{a+b+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3} \\ \sqrt[3]{b+c} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{(b+c) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \cdot \frac{b+c+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3} \\ \sqrt[3]{c+a} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{(c+a) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \cdot \frac{c+a+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}{3} \end{cases}$$

Suy ra
$$\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \cdot \frac{2(a+b+c)+4}{3} = \sqrt[3]{18}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 2.3: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{a(b+2c)} + \sqrt[3]{b(c+2a)} + \sqrt[3]{c(a+2b)} \leq 3\sqrt[3]{3}$$

Phân tích: Do vai trò của các biến a, b, c trong các biểu thức là như nhau nên ta dự đoán điểm rơi của bất đẳng thức sẽ là $a = b = c = 1$, từ đó ta có $a + 2b = b + 2c = c + 2a = 3$ và $3a = 3b = 3c = 3$. Vì bất đẳng thức chứa các căn bậc ba nên để phá căn ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số là $3a, b + 2c$ và $3, \dots$. Đến đây ta có lời giải như sau:

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$ cho các số thực dương ta được

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a(b+2c)} = \sqrt[3]{\frac{1}{9} \cdot 3a \cdot (b+2c) \cdot 3} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \cdot \frac{3a + b + 2c + 3}{3} \\ \sqrt[3]{b(c+2a)} = \sqrt[3]{\frac{1}{9} \cdot 3b \cdot (c+2a) \cdot 3} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \cdot \frac{3b + c + 2a + 3}{3} \\ \sqrt[3]{c(a+2b)} = \sqrt[3]{\frac{1}{9} \cdot 3c \cdot (a+2b) \cdot 3} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \cdot \frac{3c + a + 2b + 3}{3} \end{cases}$$

Suy ra
$$\sqrt[3]{a(b+2c)} + \sqrt[3]{b(c+2a)} + \sqrt[3]{c(a+2b)} \leq \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \cdot \frac{6(a+b+c)+9}{3} = 3\sqrt[3]{3}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 2.4: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \leq 1$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nghĩ đến đánh giá $\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Đầu tiên ta dự đoán dấu đẳng

thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{3}{4}$, khi đó ta có $2a = b + c$ và $b = c$ nên ta có đánh giá như sau

$$\frac{1}{2a+b+c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{b+c} \right) \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2a} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right] = \frac{1}{16} \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ cho hai số dương. Ta có:

$$\frac{1}{2a+b+c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{b+c} \right) \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2a} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right] = \frac{1}{16} \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Tương tự ta có $\frac{1}{a+2b+c} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \right); \frac{1}{a+b+2c} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} \right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{3}{4}$.

Ví dụ 2.5: Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$$

Phân tích: Trong chủ đề thứ hai ta đã chứng minh bất đẳng thức trên bằng phương pháp sử dụng tính chất của tỉ số, nhưng ở đó điều kiện của bài toán cho a, b, c là các cạnh của một tam giác. Với bài toán này ta không chứng minh được như vậy mà phải sử dụng các đánh giá khác. Quan sát bất đẳng thức ta thấy cần phải khử các căn bậc hai bên vế trái.

- Cách thứ nhất là bình phương hai vế, tuy nhiên lúc đó bên vế trái vẫn còn chứa căn bậc hai, do đó ta không nên sử dụng cách này.

- Cách thứ hai là sử dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, để ý đến chiều của bất đẳng thức nên ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho các mẫu số. Từ đó một cách tự nhiên ta nghĩ đến phép biến đổi $\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}$ và vì không cần quan tâm đến dấu đẳng thức xảy ra nên ta có đánh giá

$\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$. Đến đây chỉ cần áp dụng tương tự cho hai căn thức còn lại là bài toán được chứng minh

Lời giải

Vì a là số thực dương nên ta có $\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ ta được $\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$

Chúng minh tương tự ta được $\sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c}$; $\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 0$, điều này trái với giả thiết a, b, c là các số thực dương. Do vậy đẳng thức không xảy ra.

Tức là ta được $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2.6: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2+6c}} + \frac{b+c}{\sqrt{b^2+c^2+6a}} + \frac{c+a}{\sqrt{c^2+a^2+6b}} > 2$$

Phân tích: Để ý đến giả thiết $a + b + c = 3$, ta thu được $c = 3 - (a + b)$, khi đó ta có

$$a^2 + b^2 + 6c = a^2 + b^2 + 6(3 - a - b) = (3 - a)^2 + (3 - b)^2$$

Lại cũng từ giả thiết trên ta có $a + b = 3 - c$. Khi đó

$$\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2+6c}} = \frac{3-c}{\sqrt{(3-a)^2+(3-b)^2}} = \sqrt{\frac{(3-c)^2}{(3-a)^2+(3-b)^2}}$$

Đến đây để đơn giản hóa ta đặt $x = (3 - a)^2 > 0$; $y = (3 - b)^2 > 0$; $z = (3 - c)^2 > 0$, lúc này bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại là $\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} > 2$, đây chính là bất đẳng thức ở ví dụ trên.

Lời giải

Từ giả thiết $a + b + c = 3$, ta có

$$a^2 + b^2 + 6c = a^2 + b^2 + 6(3 - a - b) = (3 - a)^2 + (3 - b)^2$$

Do a, b, c là các số thực dương nên từ $a + b + c = 3$ ta suy ra $0 < a, b, c < 3$.

Do đó ta được
$$\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2+6c}} = \frac{3-c}{\sqrt{(3-a)^2+(3-b)^2}} = \sqrt{\frac{(3-c)^2}{(3-a)^2+(3-b)^2}}$$

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{(3-a)^2}{(3-b)^2+(3-c)^2}} + \sqrt{\frac{(3-b)^2}{(3-c)^2+(3-a)^2}} + \sqrt{\frac{(3-c)^2}{(3-a)^2+(3-b)^2}} > 2$$

Đặt $x = (3 - a)^2 > 0$; $y = (3 - b)^2 > 0$; $z = (3 - c)^2 > 0$, lúc này bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại là $\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} > 2$

Đến đây ta chứng minh tương tự như ví dụ trên.

Ví dụ 2.7: Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{ab}}{c + 2\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{bc}}{a + 2\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{b + 2\sqrt{ca}} \leq 1$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Quan sát bất đẳng thức ta nghĩ đến

sử dụng bất đẳng thức $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, tuy nhiên nếu sử dụng ngay thì ta chỉ đánh giá cho các tử số được,

như vậy dưới mẫu vẫn còn chứa căn thức. Cho nên để sử dụng được bất đẳng thức đó ta cần phải khử được các căn ở dưới mẫu trước, tuy nhiên việc này không thực hiện được. Chú ý đến chiều bất đẳng thức ta thấy, chỉ cần đổi được chiều bất đẳng thức thì ta có thể sử dụng bất đẳng thức trên có các căn thức ở mẫu và việc khử các căn ở tử số cũng đơn giản hơn. Từ sự phân tích đó ta có thể làm như sau

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{ab}}{c + 2\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{bc}}{a + 2\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{b + 2\sqrt{ca}} \leq 1 \\ \Leftrightarrow & 1 - \frac{2\sqrt{ab}}{c + 2\sqrt{ab}} + 1 - \frac{2\sqrt{bc}}{a + 2\sqrt{bc}} + 1 - \frac{2\sqrt{ca}}{b + 2\sqrt{ca}} \geq 3 - 2 = 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{c}{c + 2\sqrt{ab}} + \frac{a}{a + 2\sqrt{bc}} + \frac{b}{b + 2\sqrt{ca}} \geq 1 \end{aligned}$$

Lúc này áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ ta được $\frac{c}{c + 2\sqrt{ab}} \geq \frac{c}{a + b + c}$, thực hiện tương tự ta được bất đẳng thức cần phải chứng minh.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{ab}}{c + 2\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{bc}}{a + 2\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{b + 2\sqrt{ca}} \leq 1 \\ \Leftrightarrow & 1 - \frac{2\sqrt{ab}}{c + 2\sqrt{ab}} + 1 - \frac{2\sqrt{bc}}{a + 2\sqrt{bc}} + 1 - \frac{2\sqrt{ca}}{b + 2\sqrt{ca}} \geq 3 - 2 = 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{c}{c + 2\sqrt{ab}} + \frac{a}{a + 2\sqrt{bc}} + \frac{b}{b + 2\sqrt{ca}} \geq 1 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ ta được

$$\frac{c}{c + 2\sqrt{ab}} \geq \frac{c}{a + b + c}; \quad \frac{a}{a + 2\sqrt{bc}} \geq \frac{a}{a + b + c}; \quad \frac{b}{b + 2\sqrt{ca}} \geq \frac{b}{a + b + c}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{c}{c + 2\sqrt{ab}} + \frac{a}{a + 2\sqrt{bc}} + \frac{b}{b + 2\sqrt{ca}} \geq 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét: Khi đánh giá một bất đẳng thức bằng bất đẳng thức Cauchy nếu bị ngược chiều thì ta có thể đổi chiều bất đẳng thức bằng cách nhân hai vế với -1 rồi cộng thêm hằng số để cả hai vế đều dương. Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Cauchy như trên còn được gọi là kỹ thuật Cauchy ngược dấu, vấn đề này sẽ được bàn cụ thể hơn trong chủ đề “Kỹ thuật Cauchy ngược dấu”

Ví dụ 2.8: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $ab + bc + ca > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \geq 2$$

Phân tích: Đầu tiên ta thử với $a = b = c$ thấy rằng dấu đẳng thức không xảy ra, nên ta dự đoán nó xảy ra tại một biến bằng 0, điều này càng có cơ sở khi bài toán cho a, b, c không âm. Cho c nhận giá trị 0 và $a = b$ thì dấu đẳng thức xảy ra. Như vậy ta chọn được điểm rơi của bất đẳng thức là $a = b; c = 0$ và các hoán vị. Cũng từ điều kiện $ab + bc + ca > 0$ ta thấy trong ba số có nhiều nhất một số bằng 0. Do đó khi đánh giá bất đẳng thức ta cần chú ý đến bảo toàn dấu bằng.

Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy $a^2 + bc + a(b+c) = (a+b)(a+c)$, như vậy nếu dưới mẫu có tích $\sqrt{(a^2+bc)(ab+ac)}$ thì theo chiều bất đẳng thức cần phải chứng minh ta có ngay đánh giá

$\sqrt{(a^2+bc)(ab+ac)} \leq \frac{a^2+ab+bc+ca}{2}$, nhưng để có được điều này ta phải nhân cả tử và mẫu của mỗi phân số trong căn với tử số. Tuy nhiên vì cho các biến a, b, c không âm nên việc nhân thêm không thể thực hiện được. Trong tình huống này chú ý đến điểm rơi và nhận xét trong a, b, c có nhiều nhất một số bằng 0 ta có thể chia trường hợp để đánh giá bất đẳng thức.

- Trường hợp trong ba số a, b, c có một số bằng 0 và ta giả sử là c , khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \geq 2, \text{ bất đẳng thức này hiển nhiên đúng.}$$

- Trường hợp cả ba số a, b, c đều dương, lúc này thì việc nhân thêm không bị ảnh hưởng gì đến các đánh giá cả. Đến đây ta có đánh giá như sau

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} = \frac{a(b+c)}{\sqrt{(a^2+bc)(ab+ac)}} \geq \frac{2a(b+c)}{a^2+ab+bc+ca} = \frac{2a(b+c)}{(a+b)(a+c)}$$

$$\text{Áp dụng tương tự ta được } \sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}} \geq \frac{2b(c+a)}{(a+b)(b+c)}; \sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \geq \frac{2c(a+b)}{(b+c)(c+a)}$$

Lúc này ta được bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \geq \frac{2a(b+c)}{(a+b)(a+c)} + \frac{2b(c+a)}{(a+b)(b+c)} + \frac{2c(a+b)}{(b+c)(c+a)} \text{ Phép}$$

chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a(b+c)}{(a+b)(a+c)} + \frac{b(c+a)}{(a+b)(b+c)} + \frac{c(a+b)}{(b+c)(c+a)} \geq 1$$

$$\text{Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta thu được } \frac{(a+b)(b+c)(c+a) + 4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 1$$

Đánh giá cuối cùng hiển nhiên đúng, ta trình bày lại lời giải như sau

Lời giải

Vì các số a, b, c không âm và $ab + bc + ca > 0$ nên trong ba số a, b, c có nhiều nhất một số bằng 0. Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp trong ba số a, b, c có một số bằng không, khi đó không mất tính tổng quát ta giả sử $c = 0$, lúc này bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}} \geq 0$$

- Trường hợp cả ba số a, b, c đều dương, khi đó ta có

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} = \frac{a(b+c)}{\sqrt{(a^2+bc)(ab+ac)}} \geq \frac{2a(b+c)}{a^2+ab+bc+ca} = \frac{2a(b+c)}{(a+b)(a+c)}$$

Áp dụng tương tự ta được $\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}} \geq \frac{2b(c+a)}{(a+b)(b+c)}$; $\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \geq \frac{2c(a+b)}{(b+c)(c+a)}$

Lúc này ta được bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \geq \frac{2a(b+c)}{(a+b)(a+c)} + \frac{2b(c+a)}{(a+b)(b+c)} + \frac{2c(a+b)}{(b+c)(c+a)}$$

Ta cần chứng minh được $\frac{a(b+c)}{(a+b)(a+c)} + \frac{b(c+a)}{(a+b)(b+c)} + \frac{c(a+b)}{(b+c)(c+a)} \geq 1$

Biến đổi tương đương và thu gọn ta được $1 + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 1$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $4abc > 0$ và đẳng thức không xảy ra trong trường hợp này. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Nhân xét: Trong chứng minh bất đẳng thức việc chia trường hợp để chứng minh gây ra nhiều khó khăn. Do đó nếu tìm được một cách giải mà không cần phải quan tâm đến việc xét các trường hợp thì sẽ tốt hơn nhiều. Với bài toán trên ta thử tìm lời giải khác mà không phải chia trường hợp xem sao?

Cũng xuất phát từ nhận xét như trên nhưng mà khi tích $\sqrt{(a^2+bc)(ab+ac)}$ nằm ở trên tử thì không ảnh hưởng gì cả. Do đó ta có đánh giá như sau

$$\sqrt{(a^2+bc)(ab+ac)} \leq \frac{(a+b)(a+c)}{2} \text{ suy ra } \frac{\sqrt{(a^2+bc)(ab+ac)}}{(a+b)(a+c)} \leq \frac{1}{2}$$

Đến đây ta nhân cả hai vế với $\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} \geq 0$ thì ta được $\frac{a(b+c)}{(a+b)(a+c)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}$.

Hay $\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} \geq \frac{2a(b+c)}{(a+b)(a+c)}$ và công việc còn lại hoàn toàn như trên.

Ví dụ 2.9: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=6$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b^3+1}} + \frac{b}{\sqrt{c^3+1}} + \frac{c}{\sqrt{a^3+1}} \geq 2$$

Phân tích: Đầu tiên ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=2$, chú ý đến hằng đẳng thức $b^3+1=(b+1)(b^2-b+1)$ và khi $b=2$ thì $b+1=b^2-b+1=3$ do đó ta có đánh giá sau

$$\sqrt{b^3+1} = \sqrt{(b+1)(b^2-b+1)} \leq \frac{b+1+b^2-b+1}{2} = \frac{b^2+2}{2}, \text{ từ đây ta suy ra được}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b^3+1}} \geq \frac{2a}{b^2+2}, \text{ áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b^3+1}} + \frac{b}{\sqrt{c^3+1}} + \frac{c}{\sqrt{a^3+1}} \geq \frac{2a}{b^2+2} + \frac{2b}{c^2+2} + \frac{2c}{a^2+2}$$

Ta cần phải chứng minh được $\frac{2a}{b^2+2} + \frac{2b}{c^2+2} + \frac{2c}{a^2+2} \geq 2$, đến đây ta đánh giá trên tử số hay dưới mẫu đều được bất đẳng thức ngược chiều. Do đó một cách tự nhiên ta nghĩ đến tư tưởng Cauchy ngược dấu, tức là ta biến đổi $\frac{2a}{b^2+2} = a - \frac{ab^2}{b^2+2}$, chú ý đến đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 2$ ta lại có

$$\frac{ab^2}{b^2+2} = \frac{2ab^2}{b^2+b^2+4} \leq \frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{b^4 \cdot 4}} = \frac{a\sqrt[3]{2b^2}}{3} = \frac{a\sqrt[3]{2 \cdot b \cdot b}}{3} \leq \frac{a(2+b+b)}{9}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{2a}{b^2+2} + \frac{2b}{c^2+2} + \frac{2c}{a^2+2} \geq a+b+c - \frac{2(a+b+c)}{9} - \frac{2(ab+bc+ca)}{9}$$

Mà theo một đánh giá quen thuộc ta có $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 12$

Đến lúc này ta có $\frac{2a}{b^2+2} + \frac{2b}{c^2+2} + \frac{2c}{a^2+2} \geq 6 - \frac{2 \cdot 6}{9} - \frac{2 \cdot 12}{9} = 2$. Đây chính là điều cần phải chứng minh. Ta trình bày lại lời giải như sau.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $2\sqrt{xy} \leq x+y$ ta được

$$\frac{a}{\sqrt{b^3+1}} = \frac{a}{\sqrt{(b+1)(b^2-b+1)}} \geq \frac{2a}{b+1+b^2-b+1} = \frac{2a}{b^2+2}$$

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt{b^3+1}} + \frac{b}{\sqrt{c^3+1}} + \frac{c}{\sqrt{a^3+1}} \geq \frac{2a}{b^2+2} + \frac{2b}{c^2+2} + \frac{2c}{a^2+2}$$

Ta cần phải chứng minh được $\frac{2a}{b^2+2} + \frac{2b}{c^2+2} + \frac{2c}{a^2+2} \geq 2$

Thật vậy, ta có $\frac{2a}{b^2+2} = a - \frac{ab^2}{b^2+2}$, mà cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{ab^2}{b^2+2} = \frac{2ab^2}{b^2+b^2+4} \leq \frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{b^4 \cdot 4}} = \frac{a\sqrt[3]{2b^2}}{3} = \frac{a\sqrt[3]{2 \cdot b \cdot b}}{3} \leq \frac{a(2+b+b)}{9}$$

Suy ra $\frac{2a}{b^2+2} \geq a - \frac{a(2+b)}{9}$. Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{2a}{b^2+2} + \frac{2b}{c^2+2} + \frac{2c}{a^2+2} \geq a+b+c - \frac{2(a+b+c)}{9} - \frac{2(ab+bc+ca)}{9}$$

Mặt khác theo một đánh giá quen thuộc ta có $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 12$

Do đó ta được $\frac{2a}{b^2+2} + \frac{2b}{c^2+2} + \frac{2c}{a^2+2} \geq 6 - \frac{2 \cdot 6}{9} - \frac{2 \cdot 12}{9} = 2$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Ví dụ 2.10: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{\sqrt{a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{c+ab}} \leq \frac{1}{2}$$

Phân tích: Để ý là $\sqrt{a+bc} = \sqrt{a(a+b+c)+bc} = \sqrt{(a+b)(a+c)}$. Do đó theo bất đẳng thức

Cauchy ta được. Do đó
$$\frac{bc}{\sqrt{a+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c} \right).$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy và kết hợp giả thiết, ta có:

$$\frac{bc}{\sqrt{a+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c} \right)$$

Tương tự ta được
$$\frac{ac}{\sqrt{b+ac}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{ac}{b+a} + \frac{ac}{b+c} \right); \quad \frac{ab}{\sqrt{c+ab}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{c+a} + \frac{ab}{c+b} \right)$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được

$$\begin{aligned} \frac{bc}{\sqrt{a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{c+ab}} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c} + \frac{ca}{b+a} + \frac{ca}{b+c} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{ab+bc}{a+c} + \frac{ab+ac}{b+c} + \frac{bc+ca}{a+b} \right) = \frac{1}{2} (a+b+c) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 2.11: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{3}{2}$$

Phân tích: Để ý là $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ nên $ab+bc+ca \leq 3$, do đó ta được $c^2+3 \geq c^2+ab+bc+ca = (b+c)(c+a)$, suy ra ta được bất đẳng thức sau

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} \leq \frac{ab}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}} = \frac{ab}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có
$$\frac{ab}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{c+a} + \frac{ab}{c+b} \right).$$

Lời giải

Từ bất đẳng thức $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ và $a+b+c=3$.

Suy ra $ab+bc+ca \leq 3$. Như vậy theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} \leq \frac{ab}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}} = \frac{ab}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{c+a} + \frac{ab}{c+b} \right)$$

Tương tự ta được
$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{a+c} + \frac{bc}{a+b} \right); \quad \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{ca}{b+a} + \frac{ca}{b+c} \right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 2.12: Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{a+b+c}{6}$$

Phân tích: Đại lượng $\frac{1}{a+3b+2c}$ và chiều bất đẳng thức làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức dạng

$$\frac{9}{x+y+z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \text{ khi đó ta được}$$

$$\frac{9}{a+3b+2c} = \frac{9}{a+c+b+c+2b} \leq \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b}$$

Suy ra ta có
$$\frac{9ab}{a+3b+2c} = \frac{9ab}{a+c+b+c+2b} \leq \frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{a}{2}$$

Áp dụng tương tự và chú ý đến tổng
$$\frac{ca+ab}{c+b} + \frac{ca+bc}{b+a} + \frac{bc+ab}{c+a} = a+b+c.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{9}{x+y+z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, ta được

$$\frac{9}{a+3b+2c} = \frac{9}{a+c+b+c+2b} \leq \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b}$$

Từ đó suy ra
$$\frac{9ab}{a+3b+2c} = \frac{9ab}{a+c+b+c+2b} \leq \frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{a}{2}.$$
 Tương tự ta chứng minh được

$$\frac{9bc}{b+3c+2a} \leq \frac{bc}{b+a} + \frac{bc}{c+a} + \frac{b}{2}; \quad \frac{9ca}{c+3a+2b} \leq \frac{ca}{c+b} + \frac{ca}{b+a} + \frac{c}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} \frac{9ab}{a+3b+2c} + \frac{9bc}{b+3c+2a} + \frac{9ca}{c+3a+2b} &\leq \frac{ca+ab}{c+b} + \frac{ca+bc}{b+a} + \frac{bc+ab}{c+a} + \frac{a+b+c}{2} \\ &= \frac{3(a+b+c)}{2} \end{aligned}$$

Hay
$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{a+b+c}{6}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 2.13: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a, b \geq 1$; $a+b+3=ab$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a^2-1}}{a} + \frac{\sqrt{b^2-1}}{b} + \frac{1}{a+b} \leq \frac{1+8\sqrt{2}}{6}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta nhận thấy vai trò như nhau trong bất đẳng thức của a, b và dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = 3$. Từ giả thiết $a+b+3=ab$, ta suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{3}{ab} = 1$.

Để đơn giản hóa ta đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$. Khi đó giả thiết trở thành $x+y+3xy=1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} + \frac{xy}{x+y} \leq \frac{1+8\sqrt{2}}{6}$$

Chú ý là các đại lượng xy ; $x^2 + y^2$; $(x + y)^2$ liên hệ với nhau bởi hằng đẳng thức quen thuộc. Do đó ta sẽ có biểu diễn giả thiết cũng như bất đẳng thức qua một đại lượng.

Theo bất đẳng Cauchy ta được $1 = x + y + 3xy \leq x + y + \frac{3(x + y)^2}{4}$. Từ đó suy ra

$x + y \geq \frac{2}{3}$. Cũng theo bất đẳng thức quen thuộc $\sqrt{m} + \sqrt{n} \leq \sqrt{2(m + n)}$ ta được

$$\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} \leq \sqrt{2[2 - (x^2 + y^2)]} \leq \sqrt{2\left[2 - \frac{(x + y)^2}{2}\right]}$$

Và
$$\frac{xy}{x + y} = \frac{1 - (x + y)}{3(x + y)} = \frac{1}{3(x + y)} - \frac{1}{3}$$

Lúc này ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} + \frac{xy}{x + y} &\leq \sqrt{2[2 - (x^2 + y^2)]} + \frac{1 - (x + y)}{3(x + y)} \\ &\leq \sqrt{2\left[2 - \frac{(x + y)^2}{2}\right]} + \frac{1}{3(x + y)} - \frac{1}{3} \leq \sqrt{2\left[2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2\right]} + \frac{1}{\frac{3 \cdot 2}{3}} - \frac{1}{3} = \frac{1 + 8\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = b = 3$.

Ví dụ 2.14: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a + b)(a + b + 2c)}{(3a + 3b + 2c)^2} \leq \frac{1}{8}$$

Phân tích: Ta viết lại bất đẳng thức thành $(a + b)(a + b + 2c) \leq \frac{1}{8}(3a + 3b + 2c)^2$. Cách phát biểu của bất đẳng thức làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức $xy \leq \frac{(x + y)^2}{4}$.

Lời giải

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} (a + b)(a + b + 2c) &= \frac{1}{2}(2a + 2b)(a + b + 2c) \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\frac{(2a + 2b) + (a + b + 2c)}{2}\right]^2 = \frac{1}{8}(3a + 3b + 2c)^2 \end{aligned}$$

Từ đó ta được
$$\frac{(a + b)(a + b + 2c)}{(3a + 3b + 2c)^2} \leq \frac{1}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a + b = 2c$.

Ví dụ 2.15: Cho các số thực $a > b > 0$. Chứng minh rằng: $2a + \frac{32}{(a - b)(2b + 3)^2} \geq 5$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta thấy có các ý tưởng sau:

+ Ý tưởng thứ nhất là sử dụng bất đẳng thức Cauchy với đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân, ở đây để ta cần khử được đại lượng $(a-b)(2b+3)^2$ thì ta cần phân tích được

$$a = k(a-b) + m(2b+3) + m(2b+3) - 6m, \text{ dễ dàng tìm ra được } k=2; m=\frac{1}{2}.$$

+ Ý tưởng thứ hai là đánh giá $(a-b)(2b+3)^2$ theo đánh giá từ trung bình nhân sang trung bình cộng, chú ý đến dấu đẳng xảy ra ta được

$$(4a-4b)(2b+3)(2b+3) \leq \left(\frac{4a-4b+2b+3+2b+3}{3} \right)^3 = \left(\frac{4a+6}{3} \right)^3$$

$$\text{Đến đây ta chỉ cần chứng minh được } 2a + \frac{32}{\frac{8}{27}(2a+3)^3} \geq 5 \text{ bằng đánh giá từ trung bình cộng}$$

sang trung bình nhân là xong.

Lời giải

Cách 1: Biểu thức viết lại như sau

$$P = (2a-2b) + \frac{2b+3}{2} + \frac{2b+3}{2} + \frac{32}{(a-b)(2b+3)^2} - 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} & (2a-2b) + \frac{2b+3}{2} + \frac{2b+3}{2} + \frac{32}{(a-b)(2b+3)^2} \\ & \geq 4 \sqrt[4]{(2a-2b) \left(\frac{2b+3}{2} \right)^2 \frac{32}{(a-b)(2b+3)^2}} = 8 \end{aligned}$$

Do đó $P \geq 5$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$2a-2b = \frac{2b+3}{2} = \frac{32}{(a-b)(2b+3)^2} \text{ hay } a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}.$$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$(4a-4b)(2b+3)(2b+3) \leq \left(\frac{4a-4b+2b+3+2b+3}{3} \right)^3 = \left(\frac{4a+6}{3} \right)^3 = \frac{8}{27}(2a+3)^3$$

Từ đó ta có

$$P \geq 2a + \frac{32}{\frac{8}{27}(2a+3)^3} = \frac{2a+3}{3} + \frac{2a+3}{3} + \frac{2a+3}{3} + \frac{432}{(2a+3)^3} - 3$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{2a+3}{3} + \frac{2a+3}{3} + \frac{2a+3}{3} + \frac{432}{(2a+3)^3} \geq 8$$

Do đó $P \geq 5$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$2a-2b = \frac{2b+3}{2} = \frac{32}{(a-b)(2b+3)^2} \text{ hay } a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 2.16: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{2}$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 3$. Bất đẳng thức chứa đại lượng $\frac{1}{a^2 + bc}$, để ý đến chiều ta liên tưởng đến đánh giá quen thuộc $\frac{4}{x + y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, khi đó ta có

$\frac{a}{a^2 + bc} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{bc} \right)$. Để ý tiếp ta có $\frac{a}{bc} = \frac{a^2}{abc} \leq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$. Như vậy áp dụng tương tự ta thu

được $\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 \right)$. Bài toán sẽ được chứng minh xong nếu ta

chỉ ra được $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 1$. Chú ý tiếp đến giả thiết ta được

$1 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} \geq \frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Đến đây ta trình bày lại lời giải như sau

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc dạng $\frac{4}{x + y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, ta được

$$\frac{a}{a^2 + bc} \leq \frac{a}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{bc} \right)$$

Kết hợp với giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 \leq abc$ ta được $\frac{a}{bc} = \frac{a^2}{abc} \leq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

Do đó $\frac{a}{a^2 + bc} \leq \frac{a}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{bc} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right)$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 \right)$$

Ta cần chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 1$

Thật vậy, Áp dụng một đánh giá quen thuộc và kết hợp với giả thiết, ta được

$$1 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} \geq \frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$

Ví dụ 2.17: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{ab + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{bc + c^2}} + \frac{a}{\sqrt{ca + a^2}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Phân tích: Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$, khi đó để ý đến đánh giá

$\sqrt{2b \cdot (a + b)} \leq \frac{2b + (a + b)}{2} = \frac{a + 3b}{2}$ khi đó ta được $\frac{a}{\sqrt{ab + b^2}} \geq \frac{2\sqrt{2}a}{a + 3b}$. Áp dụng tương tự thì

$\frac{a}{\sqrt{ab + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{bc + c^2}} + \frac{a}{\sqrt{ca + a^2}} \geq \frac{2a\sqrt{2}}{a + 3b} + \frac{2b\sqrt{2}}{b + 3c} + \frac{2c\sqrt{2}}{c + 3a}$, như vậy ta chỉ cần chỉ ra được

$\frac{a}{a+3b} + \frac{b}{b+3c} + \frac{c}{c+3a} \geq \frac{3}{4}$, đây là một bất đẳng thức có thể chứng minh bằng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{2b(a+b)} \leq \frac{2b+(a+b)}{2} = \frac{a+3b}{2}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{bc+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{ca+a^2}} \geq \frac{2a\sqrt{2}}{a+3b} + \frac{2b\sqrt{2}}{b+3c} + \frac{2c\sqrt{2}}{c+3a}.$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{2a\sqrt{2}}{a+3b} + \frac{2b\sqrt{2}}{b+3c} + \frac{2c\sqrt{2}}{c+3a} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Hay

$$\frac{a}{a+3b} + \frac{b}{b+3c} + \frac{c}{c+3a} \geq \frac{3}{4}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{a+3b} + \frac{b}{b+3c} + \frac{c}{c+3a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca}.$$

Mặt khác, từ một đánh giá quen thuộc ta có

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca) &= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca) \\ &\leq (a+b+c)^2 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{4}{3}(a+b+c)^2 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{a}{a+3b} + \frac{b}{b+3c} + \frac{c}{c+3a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\frac{4}{3}(a+b+c)^2} = \frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 2.18: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 6$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{3a+3b+2c} + \frac{1}{3a+2b+3c} + \frac{1}{2a+3b+3c} \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{3a+3b+2c} &= \frac{1}{(2a+b+c)+(a+2b+c)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} \right) \\ &\leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(a+b)+(c+a)} + \frac{1}{(a+b)+(b+c)} \right] \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{2}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \right] \\ &= \frac{1}{16} \left(\frac{2}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{3a+2b+3c} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{a+c} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \right)$$

$$\frac{1}{2a+3b+3c} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{b+c} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+a} \right)$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{3a+3b+2c} + \frac{1}{3a+2b+3c} + \frac{1}{2a+3b+3c} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a} \right) = \frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{1}{4}$

Ví dụ 2.19: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $13a + 5b + 12c = 9$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{2a+b} + \frac{3bc}{2b+c} + \frac{6ca}{2c+a} \leq 1$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\frac{2}{b} + \frac{1}{a}} + \frac{1}{\frac{2}{3c} + \frac{1}{3b}} + \frac{1}{\frac{1}{3a} + \frac{1}{6c}} \leq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức dạng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$, Ta có

$$\begin{cases} \frac{2}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \geq \frac{9}{2b+a} \\ \frac{2}{3c} + \frac{1}{3b} = \frac{1}{3c} + \frac{1}{3c} + \frac{1}{3b} \geq \frac{9}{6c+3b} \\ \frac{1}{3a} + \frac{1}{6c} = \frac{1}{6a} + \frac{1}{6a} + \frac{1}{6c} \geq \frac{9}{12a+6c} \end{cases}$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{2}{b} + \frac{1}{a}} + \frac{1}{\frac{2}{3c} + \frac{1}{3b}} + \frac{1}{\frac{1}{3a} + \frac{1}{6c}} &\leq \frac{1}{\frac{9}{2b+a}} + \frac{1}{\frac{9}{6c+3b}} + \frac{1}{\frac{9}{12a+6c}} \\ &= \frac{2b+a}{9} + \frac{6c+3b}{9} + \frac{12a+6c}{9} = \frac{13a+5b+12c}{9} = 1 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{3}{10}$.

Ví dụ 2.20: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{abc} + \frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)}{3} = 2$$

Từ đó suy ra

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{2}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \Rightarrow \frac{abc}{2} \leq \frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$3 = ab + bc + ca \geq 3\sqrt{a^2b^2c^2} \Leftrightarrow abc \leq 1.$$

Do đó ta được

$$\frac{1}{abc} + \frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{1}{abc} + \frac{abc}{2} \geq \frac{1}{abc} + abc - \frac{abc}{2} \geq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Ví dụ 2.21: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{2\sqrt{3a}}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{6b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} + \frac{6c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} < 5\sqrt{3}$$

Lời giải

Bất đẳng thức được viết lại là

$$\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{2\sqrt{3}b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} + \frac{2\sqrt{3}c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} < 5$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c}$$

$$\frac{2\sqrt{3}b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} \leq \frac{b}{a+b} + \frac{3b}{b+c}$$

$$\frac{2\sqrt{3}c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{c}{a+c} + \frac{3c}{b+c}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{2\sqrt{3}b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} + \frac{2\sqrt{3}c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \\ \leq \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b} + \frac{3b}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{3c}{b+c} = 5 \end{aligned}$$

Do đẳng thức không xảy ra nên ta được

$$\frac{2a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{2\sqrt{3}b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} + \frac{2\sqrt{3}c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} < 5$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 2.22: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{1-c^2} + \frac{bc}{1-a^2} + \frac{ca}{1-b^2} \leq \frac{3}{8}$$

Lời giải

Từ giả thiết $a + b + c = 1$ ta có

$$1 - c^2 = (a + b + c)^2 - c^2 = a^2 + b^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 2(ab + bc) + 2(ab + ca)$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ta được

$$\frac{ab}{2(ab+bc)+2(ab+ca)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{ab}{2(ab+bc)} + \frac{ab}{2(ab+ca)} \right)$$

Do đó ta có

$$\frac{ab}{1-c^2} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{ab}{ab+bc} + \frac{ab}{ab+ca} \right)$$

Áp dụng tương tự

$$\frac{bc}{1-a^2} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{bc}{bc+ca} + \frac{bc}{ab+bc} \right); \quad \frac{ca}{1-b^2} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{ca}{ca+ab} + \frac{ca}{bc+ca} \right)$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} & \frac{ab}{1-c^2} + \frac{bc}{1-a^2} + \frac{ca}{1-b^2} \\ & \leq \frac{1}{8} \left(\frac{ab}{ab+bc} + \frac{ab}{ab+ca} + \frac{bc}{bc+ca} + \frac{bc}{ab+bc} + \frac{ca}{ca+ab} + \frac{ca}{bc+ca} \right) = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 2.23: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = \frac{3}{4}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b+3c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}} \geq 3$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt[3]{a+3b} = \sqrt[3]{(a+3b) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{a+3b+2}{3}$$

Do đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}} \geq \frac{3}{a+3b+2}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{1}{\sqrt[3]{b+3c}} \geq \frac{3}{b+3c+2}; \quad \frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}} \geq \frac{3}{c+3a+2}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b+3c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}} \geq \frac{3}{a+3b+2} + \frac{3}{b+3c+2} + \frac{3}{c+3a+2}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{3}{a+3b+2} + \frac{3}{b+3c+2} + \frac{3}{c+3a+2} \geq \frac{3 \cdot 9}{4(a+b+c)+6} = 3$$

Do đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b+3c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}} \geq 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{4}$.

3. Kỹ thuật ghép cặp trong bất đẳng thức Cauchy

Trong nhiều bài toán mà biểu thức ở hai vế tương đối phức tạp, việc chứng minh trực tiếp trở nên khó khăn thì ta có thể sử dụng kỹ thuật “Ghép cặp” để bài toán trở nên đơn giản.

Ở các bài toán bất đẳng thức, thông thường chúng ta hay gặp phải hai dạng toán sau:

- **Dạng 1:** Chứng minh $X + Y + Z \geq A + B + C$.

Ý tưởng 1: Nếu ta chứng minh được $X + Y \geq 2\sqrt{XY} \geq 2A$.

Sau đó tương tự hóa để chỉ ra $Y + Z \geq 2B$; $Z + X \geq 2C$ (Nhờ tính chất đối xứng của bài toán).

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế rồi rút gọn cho 2, ta có:

$$X + Y + Z \geq A + B + C$$

Ý tưởng 2: Nếu ta chứng minh được $X + A \geq 2\sqrt{XA} \geq 2B$

Sau đó tương tự hóa để chỉ ra $Y + Z \geq 2C$; $Z + X \geq 2A$ (Nhờ tính chất đối xứng của bài toán).

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế rồi rút gọn cho 2, ta có ngay điều phải chứng minh.

- Dạng 2: Chứng minh $XYZ \geq ABC$ với $X, Y, Z \geq 0$

Ý tưởng: Nếu ta chứng minh được $XY \geq A^2$.

Sau đó tương tự hóa để chỉ ra $YZ \geq B^2$; $ZX \geq C^2$ (nhờ tính chất đối xứng của bài toán). Sau đó nhân ba bất đẳng thức trên vế theo vế rồi lấy căn bậc hai, ta có

$$XYZ \geq \sqrt{A^2 B^2 C^2} = |ABC| \geq ABC.$$

Chú ý một số cách ghép đối xứng:

$$\begin{aligned} \text{Phép cộng: } & \begin{cases} 2(x + y + z) = x + y + y + z + z + x \\ x + y + z = \frac{x + y}{2} + \frac{y + z}{2} + \frac{z + x}{2} \end{cases} \\ \text{Phép nhân: } & \begin{cases} x^2 y^2 z^2 = (xy) \cdot (yz) \cdot (zx) \\ xyz = \sqrt{xy} \cdot \sqrt{yz} \cdot \sqrt{zx} \end{cases} \quad (x, y, z \geq 0) \end{aligned}$$

Ví dụ 3.1: Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$$

Phân tích: Bài toán này có dạng $X + Y + Z \geq A + B + C$, trong đó

$$X = \frac{ab}{c}, Y = \frac{bc}{a}, Z = \frac{ca}{b}, A = a, B = b, C = c.$$

Để ý rằng hai biểu thức $\frac{ab}{c}$ và $\frac{bc}{a}$ là đối xứng với b (tức vai trò của a và c như nhau). Do đó sử

dụng kỹ thuật ghép cặp ta sẽ thử chứng minh $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c} \cdot \frac{bc}{a}} = 2b$

Tương tự ta có $\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a$; $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq 2c$

Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên ta được $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.2: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$abc \geq (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$$

Phân tích: Nếu $(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \leq 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Ta xét trường hợp $(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \geq 0$.

Đề ý rằng bất đẳng thức này có dạng $XYZ \geq ABC$, vì vậy sử dụng kỹ thuật ghép đối xứng, ta chỉ cần chứng minh $b^2 \geq (a + b - c)(b + c - a)$.

Lời giải

Bất đẳng thức có tính đối xứng giữa các biến, do đó không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$, Khi đó $a + b - c \geq 0$ và $a + c - b \geq 0$.

+ Nếu $b + c - a < 0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

+ Nếu $b + c - a \geq 0$. Khi này ta có $b + c - a$; $c + a - b$; $a + b - c$ là các số dương.

Sử dụng bất đẳng thức Côsi dạng $(x + y)^2 \geq 4xy$, suy ra

$$(a + b - c)(b + c - a) \leq \frac{[(a + b - c) + (b + c - a)]^2}{4} = b^2$$

$$(b + c - a)(c + a - b) \leq \frac{[(b + c - a) + (c + a - b)]^2}{4} = c^2$$

$$(c + a - b)(a + b - c) \leq \frac{[(c + a - b) + (a + b - c)]^2}{4} = a^2$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được điều cần chứng minh.

Bài toán được giải quyết xong. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét: Khi chưa xác định được các số không âm mà áp dụng ngay bất đẳng thức Cauchy thì sẽ dẫn đến sai lầm. Trong tình huống đó ta có thể chia nhỏ thành các trường hợp riêng để chứng minh bài toán.

Ví dụ 3.3: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$$

Phân tích: Đề ý là $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{c^2}} = 2\left|\frac{a}{c}\right|$, áp dụng tương tự và cộng theo vế các bất đẳng thức thu được.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{c^2}} = 2\left|\frac{a}{c}\right|$

Tương tự ta được $\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2\left|\frac{b}{a}\right|$; $\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \geq 2\left|\frac{c}{b}\right|$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) \geq 2\left(\left|\frac{b}{a}\right| + \left|\frac{c}{b}\right| + \left|\frac{a}{c}\right|\right) \geq 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right)$$

Hay $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$

Bài toán được giải quyết xong. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.4: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3$$

Phân tích: Để ý là theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{b+c}{\sqrt{a}} \geq \frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{\frac{bc}{a}}$ và cũng theo bất đẳng thức

Cauchy ta lại có $\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} \geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{bc}{a}} \cdot \sqrt{\frac{ca}{b}}} = 2\sqrt{c}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{b+c}{\sqrt{a}} \geq \frac{2\sqrt{bc}}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{\frac{bc}{a}}$

Tương tự ta được $\frac{c+a}{\sqrt{b}} \geq 2\sqrt{\frac{ca}{b}}; \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{c}}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2\left(\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}}\right)$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} \geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{bc}{a}} \cdot \sqrt{\frac{ca}{b}}} = 2\sqrt{c}$

Áp dụng tương tự ta được $\sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} \geq 2\sqrt{a}; \sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} \geq 2\sqrt{b}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được $\sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ab}{c}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

Do đó ta suy ra $\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$

Ta cần chứng minh được $2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 3 \Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng theo bất đẳng thức Cauchy và giả thiết $abc = 1$

Bài toán được giải quyết xong. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 3.5: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và p là nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{1}{8}abc$$

Phân tích: Từ giả thiết ta nhận được $(p-a); (p-b); (p-c)$ là các số dương và chú đến

$p-a + p-b = c$. Do đó ta nghĩ đến đánh giá $\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{p-a+p-b}{2} = \frac{c}{2}$. Như vậy ta có thể chứng minh bất đẳng thức như sau:

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} (p-a)(p-b)(p-c) &= \sqrt{(p-a)(p-b)} \sqrt{(p-b)(p-c)} \sqrt{(p-c)(p-a)} \\ &\leq \frac{(p-a) + (p-b)}{2} \cdot \frac{(p-b) + (p-c)}{2} \cdot \frac{(p-c) + (p-a)}{2} \\ &\leq \frac{2p-(a+b)}{2} \cdot \frac{2p-(b+c)}{2} \cdot \frac{2p-(c+a)}{2} = \frac{1}{8}abc \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết xong. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 3.6: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và p là nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{(p-a)(p-b)}} + \frac{1}{\sqrt{(p-b)(p-c)}} + \frac{1}{\sqrt{(p-c)(p-a)}} \\ &\geq \frac{1}{\frac{(p-a) + (p-b)}{2}} + \frac{1}{\frac{(p-b) + (p-c)}{2}} + \frac{1}{\frac{(p-c) + (p-a)}{2}} \\ &\geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 3.7: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$10a^2 + 10b^2 + c^2 \geq 4$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$8a^2 + \frac{c^2}{2} \geq 2\sqrt{8a^2 \cdot \frac{c^2}{2}} = 4ac$$

$$8b^2 + \frac{c^2}{2} \geq 2\sqrt{8b^2 \cdot \frac{c^2}{2}} = 4bc$$

$$2a^2 + 2b^2 \geq 2\sqrt{2a^2 \cdot 2b^2} = 4ab$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có $10a^2 + 10b^2 + c^2 \geq 4(ab + bc + ca) = 4 \cdot 1 = 4$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} ab + bc + ca = 1 \\ 8a^2 = 8b^2 = \frac{c^2}{2} \\ 2a^2 = 2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \frac{1}{3} \\ c = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Nhận xét: Đây là một lời giải ngắn gọn nhưng có vẻ hơi thiếu tự nhiên. Chúng ta sẽ thắc mắc tại sao lại tách được $10 = 8 + 2$. Nếu tách cách khác, chẳng hạn $10 = 6 + 4$ liệu có giải được không? Tất nhiên mọi cách tách khác đều không dẫn đến kết quả, và tách $10 = 8 + 2$ cũng không phải là sự may mắn. Bây giờ ta sẽ tìm lí do việc tách $10 = 8 + 2$ ở bài toán trên.

Từ bất đẳng thức cần chứng minh ta thấy vai trò của a, b như nhau nên ta cần chia đều c ra thành hai phần và cũng lấy ra ka, kb để ghép cặp với $\frac{c}{2}$. Tức là với $0 < k < 10$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$ka^2 + \frac{c^2}{2} \geq 2\sqrt{ka^2 \cdot \frac{c^2}{2}} = \sqrt{2k}ac$$

$$kb^2 + \frac{c^2}{2} \geq 2\sqrt{kb^2 \cdot \frac{c^2}{2}} = \sqrt{2k}bc$$

$$(10-k)a^2 + (10-k)b^2 \geq 2\sqrt{(10-k)a^2(10-k)b^2} = (20-2k)ab$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta có:

$$10a^2 + 10b^2 + c^2 \geq \sqrt{2k}(ac + bc) + (20 - 2k)ab$$

Lúc này ta cân bằng hệ số để làm xuất hiện giả thiết, tức là:

$$\sqrt{2k} = 20 - 2k \Leftrightarrow 2k = 400 - 80k + 4k^2 \Leftrightarrow 2k^2 - 41k + 200 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 8 \\ k = \frac{25}{2} > 10 \end{cases}$$

Ta chọn giá trị $k = 8$. Khi đó ta có lời giải bài toán như trên.

Ví dụ 3.8: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 5$. Chứng minh rằng:

$$3a^2 + 3b^2 + c^2 \geq 10$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$2a^2 + \frac{c^2}{2} \geq 2\sqrt{2a^2 \cdot \frac{c^2}{2}} = 2ac$$

$$2b^2 + \frac{c^2}{2} \geq 2\sqrt{2b^2 \cdot \frac{c^2}{2}} = 2bc$$

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \cdot b^2} = 2ab$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta có:

$$3a^2 + 3b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ca) = 2 \cdot 5 = 10$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1; c = 2$

Ví dụ 3.9: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab \geq 12, bc \geq 8$. Chứng minh rằng:

$$a + b + c + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{8}{abc} \geq \frac{121}{12}$$

Phân tích: Trước hết ta dự đoán được đẳng thức ra tại $a = 3, b = 4, c = 2$, Khi đó ta sẽ tách các đại lượng bên vế trái và áp dụng bất đẳng thức Cauchy, chú ý là quá trình ghép cặp phải đảm bảo dấu đẳng thức xảy ra. Với phân tích đó ta thực hiện ghép cặp như sau

$$\frac{2}{ab} + \frac{a}{18} + \frac{b}{24} \geq \frac{1}{2}; \frac{2}{bc} + \frac{b}{16} + \frac{c}{8} \geq \frac{3}{4}; \frac{2}{ca} + \frac{a}{9} + \frac{c}{6} \geq 1$$

Cộng các kết quả trên ta được $\frac{a}{6} + \frac{5b}{48} + \frac{7c}{24} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ca} \geq \frac{9}{4}$, khi này ta cần phải chứng

minh được $\frac{5a}{6} + \frac{43b}{48} + \frac{17c}{24} + \frac{8}{abc} \geq \frac{47}{6}$. Để ý là nếu bây giờ ta ghép cặp bốn đại lượng trên thì sẽ

không bảo toàn dấu đẳng thức. Cho nên ta sẽ ghép cặp để triệt tiêu đại lượng $\frac{8}{abc}$ trước, do đó ta có

đánh giá $\frac{8}{abc} + \frac{a}{9} + \frac{b}{12} + \frac{c}{6} \geq \frac{4}{3}$. Cuối cùng bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được chỉ ra

$$\text{được } \frac{13a}{18} + \frac{13b}{16} + \frac{13c}{24} \geq \frac{13}{2}.$$

Thực hiện ghép cặp tương tự như các ví dụ trên ta có các đánh giá sau

$$\frac{13a}{18} + \frac{13b}{24} \geq \frac{13}{3}; \frac{13c}{24} + \frac{13b}{48} \geq \frac{13}{6}, \text{ cộng theo vế hai đánh giá đó ta được điều phải chứng minh.}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{2}{ab} + \frac{a}{18} + \frac{b}{24} \geq \frac{1}{2}; \frac{2}{bc} + \frac{b}{16} + \frac{c}{8} \geq \frac{3}{4}; \frac{2}{ca} + \frac{a}{9} + \frac{c}{6} \geq 1$$

$$\frac{8}{abc} + \frac{a}{9} + \frac{b}{12} + \frac{c}{6} \geq \frac{4}{3}; \frac{13a}{18} + \frac{13b}{24} \geq \frac{13}{3}; \frac{13c}{24} + \frac{13b}{48} \geq \frac{13}{6}$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta được

$$a + b + c + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{8}{abc} \geq \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 + \frac{4}{3} + \frac{13}{3} + \frac{13}{6} = \frac{121}{12}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 3, b = 4, c = 2$.

Ví dụ 3.10: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2 + \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$$

Phân tích: Trước hết ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$$

Để ý bên vế phải ta viết được thành $\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} = \frac{a}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{b}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{c}{\sqrt[3]{abc}}$. Do đó ta nghĩ đến bất đẳng thức Cauchy với các nhóm

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{a}{a}\right); \left(\frac{b}{a}, \frac{b}{b}, \frac{b}{c}\right); \left(\frac{c}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{c}\right)$$

Lúc này ta được $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + 3 \geq \frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$. Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu

ta chỉ ra được $\frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} + 3$ hay $\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3$. Rõ ràng đánh giá cuối cùng luôn đúng theo bất đẳng thức Cauchy.

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2 + \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{a}{a} \geq \frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}; \frac{b}{a} + \frac{b}{b} + \frac{b}{c} \geq \frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}; \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{c}{c} \geq \frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + 3 \geq \frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \text{ hay } \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3$$

Suy ra $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + 3 \geq \frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} + 3$

Hay
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 3.11: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \sqrt[3]{abc} \geq \frac{10}{9(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Phân tích: Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{1}{3}$. Theo một đánh giá quen thuộc ta

nhận thấy $\frac{10}{9(a^2 + b^2 + c^2)} \leq \frac{10}{3(a+b+c)^2} = \frac{10}{3}$. Như vậy ta chỉ cần chứng minh

$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \sqrt[3]{abc} \geq \frac{10}{3}$. Để chứng minh được bất đẳng thức đó thì ta cần triệt tiêu được $\sqrt[3]{abc}$, điều

này có nghĩa là ta cần có một đánh giá kiểu $\sqrt[3]{abc} + \frac{k}{\sqrt[3]{abc}} \geq 2\sqrt{k}$, chú ý đến đẳng thức xảy ra ta chọn

được $k = \frac{8}{9}$. Tuy nhiên để làm xuất hiện $\frac{8}{9\sqrt[3]{abc}}$ thì ta cần chứng minh được $\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$.

Để ý rằng $\frac{a}{c} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{3\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{bc}} = \frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$, áp dụng ghép cặp tương tự ta được

$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$. Đến đây ta trình bày lại lời giải như sau

Lời giải

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{a}{c} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{3\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{bc}} = \frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$

Áp dụng tương tự ta được $\frac{b}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq \frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}; \frac{c}{b} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta có $\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} = \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$

Do đó ta được bất đẳng thức $\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \sqrt[3]{abc} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} + \sqrt[3]{abc}$

Ta cần chứng minh $\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} + \sqrt[3]{abc} \geq \frac{10}{9(a^2 + b^2 + c^2)}$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{1}{9\sqrt[3]{abc}} + \sqrt[3]{abc} \geq \frac{2}{3}$

Mà $a + b + c = 1$, suy ra $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{3}$ nên $\frac{8}{9\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{8}{3}$

Do đó $\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} + \sqrt[3]{abc} = \frac{1}{9\sqrt[3]{abc}} + \sqrt[3]{abc} + \frac{8}{9\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$

Mặt khác, theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$\frac{10}{9(a^2 + b^2 + c^2)} \leq \frac{10}{3(a + b + c)^2} = \frac{10}{3}$$

Từ đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} + \sqrt[3]{abc} \geq \frac{10}{9(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 3.12: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $ab + bc + ca > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2 + 1}{b + c}} + \sqrt{\frac{b^2 + 1}{c + a}} + \sqrt{\frac{c^2 + 1}{a + b}} \geq 3$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta để ý đến đánh giá $a^2 + 1 \geq 2a$, khi đó ta được bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a^2 + 1}{b + c}} + \sqrt{\frac{b^2 + 1}{c + a}} + \sqrt{\frac{c^2 + 1}{a + b}} \geq \sqrt{\frac{2a}{b + c}} + \sqrt{\frac{2b}{c + a}} + \sqrt{\frac{2c}{a + b}}$$

Như vậy ta cần phải chứng minh $\sqrt{\frac{2a}{b + c}} + \sqrt{\frac{2b}{c + a}} + \sqrt{\frac{2c}{a + b}} \geq 3$, đây là một bất đẳng thức nhìn hình thức thì đẹp nhưng đáng tiếc nó lại không đúng, ta có thể kiểm tra với $a = b; c = 0$. Như vậy đánh giá trên không hiệu quả.

Để ý ta thấy vế phải là hằng số 3, do đó nếu ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số vế trái thì

khi đó ta được $3\sqrt[3]{\frac{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)}{(b + c)(c + a)(a + b)}}$ và như vậy ta chỉ cần chỉ ra đại lượng dưới dấu căn lớn hơn hoặc bằng 1 là được. Điều này có nghĩa là ta cần chứng minh được

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (b + c)(c + a)(a + b)$$

Chú ý đến tính đối xứng trong bất đẳng thức trên ta nghĩ đến đánh giá

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq (a + b)^2$$

Đây là một đánh giá đúng theo bất đẳng thức Cauchy hoặc Bunhiacopxki.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{\frac{a^2 + 1}{b + c}} + \sqrt{\frac{b^2 + 1}{c + a}} + \sqrt{\frac{c^2 + 1}{a + b}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)}{(b + c)(c + a)(a + b)}}$$

Như vậy ta cần chứng minh được $\frac{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)}{(b + c)(c + a)(a + b)} \geq 1$

Hay $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (b + c)(c + a)(a + b)$

Thật vậy, ta có

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq (a + b)^2 \Leftrightarrow a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \geq a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow a^2b^2 + 1 \geq 2ab$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng theo bất đẳng thức Cauchy

Áp dụng tương tự ta được $(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (b + c)^2$; $(a^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (a + c)^2$

Nhân theo về ba bất đẳng thức trên ta được

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (b + c)(c + a)(a + b)$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 3.13: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+bc}} + \sqrt{\frac{c+a}{b+ca}} \geq 3$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{\frac{a+b}{c+ab}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+bc}} + \sqrt{\frac{c+a}{b+ca}} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(c+ab)(a+bc)(b+ca)}}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(c+ab)(a+bc)(b+ca)} \geq 1$$

Hay
$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq (c+ab)(a+bc)(b+ca)$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$(a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2 \leq \left(\frac{a+b+c+3}{3} \right)^6 = 64$$

Và
$$4(c+ab)(a+bc) \leq (c+ab+a+bc)^2 = (b+1)^2(a+c)^2$$

Tương tự ta được

$$64(c+ab)^2(a+bc)^2(b+ca)^2 \leq (a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \leq 64(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$$

Hay
$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq (a+ab)(a+bc)(b+ca)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 3.14: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{a^2+ab+bc}} + \sqrt{\frac{b^2+2c^2}{b^2+bc+ca}} + \sqrt{\frac{c^2+2a^2}{c^2+ca+ab}} \geq 3$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{a^2+ab+bc}} + \sqrt{\frac{b^2+2c^2}{b^2+bc+ca}} + \sqrt{\frac{c^2+2a^2}{c^2+ca+ab}} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{(a^2+2b^2)(b^2+2c^2)(c^2+2a^2)}{(a^2+ab+bc)(b^2+bc+ca)(c^2+ca+ab)}}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(a^2+2b^2)(b^2+2c^2)(c^2+2a^2)}{(a^2+ab+bc)(b^2+bc+ca)(c^2+ca+ab)} \geq 1$$

Hay
$$(a^2+2b^2)(b^2+2c^2)(c^2+2a^2) \geq (a^2+ab+bc)(b^2+bc+ca)(c^2+ca+ab)$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned}(a^2 + 2b^2)(b^2 + 2c^2) &= (a^2 + b^2 + b^2)(b^2 + c^2 + c^2) \geq (b^2 + bc + ac)^2 \\(b^2 + 2c^2)(c^2 + 2a^2) &= (b^2 + c^2 + c^2)(c^2 + a^2 + a^2) \geq (c^2 + ca + ab)^2 \\(c^2 + 2a^2)(a^2 + 2b^2) &= (c^2 + a^2 + a^2)(a^2 + b^2 + b^2) \geq (a^2 + ab + bc)^2\end{aligned}$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức cần chứng minh

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.15: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)(a + b + c)^2 \geq 8(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2$$

Lời giải

Đặt $x = a^2$; $y = b^2$; $z = c^2$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(x + y)(y + z)(z + x)(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \geq 8(xy + yz + zx)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \geq \frac{4xy}{x + y}$

Áp dụng tương tự được $2\sqrt{xy} + 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{zx} \geq \frac{4xy}{x + y} + \frac{4yz}{y + z} + \frac{4zx}{z + x}$

Do đó ta được $(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \geq (x + y + z) + \frac{4xy}{x + y} + \frac{4yz}{y + z} + \frac{4zx}{z + x}$

Như vậy ta được

$$\begin{aligned}(x + y)(y + z)(z + x)(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \\ \geq (x + y)(y + z)(z + x) \left[(x + y + z) + \frac{4xy}{x + y} + \frac{4yz}{y + z} + \frac{4zx}{z + x} \right]\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$(x + y)(y + z)(z + x) \left[(x + y + z) + \frac{4xy}{x + y} + \frac{4yz}{y + z} + \frac{4zx}{z + x} \right] \geq 8(xy + yz + zx)^2$$

Hay

$$(x + y)(y + z)(z + x) \left[(x + y + z) + \frac{4xy}{x + y} + \frac{4yz}{y + z} + \frac{4zx}{z + x} \right] - 8(xy + yz + zx)^2 \geq 0$$

Hay $xy(x - y)^2 + yz(y - z)^2 + zx(z - x)^2 \geq 0$, bất đẳng thức cuối cùng đúng.

Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Ví dụ 3.16: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(1 + a^3)(1 + b^3)(1 + c^3) \geq (1 + ab^2)(1 + bc^2)(1 + ca^2)$$

Phân tích: Quan sát đại lượng $(1 + a^3)(1 + b^3)(1 + c^3)$ ta liên tưởng đến bất đẳng thức đã được chứng minh $(1 + x^3)(1 + y^3)(1 + z^3) \geq (1 + xyz)^3$, tuy nhiên để ý các đại lượng bên vế phải thì ta áp dụng bất đẳng thức trên kiểu như

$$(1 + a^3)(1 + b^3)(1 + b^3) \geq (1 + ab^2)^3.$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức sau: Với mọi số thực dương x, y, z ta có

$$(1+x^3)(1+y^3)(1+z^3) \geq (1+xyz)^3$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với

$$1+x^3+y^3+z^3+x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+x^3y^3z^3 \geq 1+3xyz+3x^2y^2z^2+x^3y^3z^3$$

Hay $x^3+y^3+z^3+x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3 \geq 3xyz+3x^2y^2z^2$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz; \quad x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3 \geq 3x^2y^2z^2$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$x^3+y^3+z^3+x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3 \geq 3xyz+3x^2y^2z^2$$

Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \geq (1+abc)^3$$

$$(1+b^3)(1+c^3)(1+a^3) \geq (1+bca)^3$$

$$(1+c^3)(1+a^3)(1+b^3) \geq (1+cab)^3$$

Nhân từng vế của ba bất đẳng thức trên ta được

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \geq (1+abc)^3(1+bca)^3(1+cab)^3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 3.17: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 + (c+a-b)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3$$

Phân tích: Để ý ta thấy $(a+b-c) + (b+c-a) = 2b$, như vậy nếu ta chứng minh được đánh giá

$(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 \geq k[(a+b-c) + (b+c-a)]^3$ thì bài toán có cơ hội được chứng minh.

Chú ý đến đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$ ta chọn được $k = \frac{1}{4}$. Để áp dụng cho các trường hợp khác ta quy về chứng minh bổ đề:

$$\text{Với mọi } x, y > 0 \text{ ta có } x^3 + y^3 \geq \frac{(x+y)^3}{4}.$$

Đây là một bất đẳng thức đúng và được chứng minh bằng phép biến đổi tương đương đồng thời sử dụng bất đẳng thức Cauchy.

Lời giải

$$\text{Bổ đề: Với mọi } x, y > 0, \text{ ta có } x^3 + y^3 \geq \frac{(x+y)^3}{4}$$

Chứng minh: Do $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ nên bổ đề trên tương đương với

$$x^2 - xy + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{4}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy hai số dạng $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$, ta được

$$x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 3xy \geq (x+y)^2 - 3 \cdot \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{(x+y)^2}{4}$$

Bổ đề được chứng minh.

Đề ý rằng a, b, c là ba cạnh của tam giác thì hiển nhiên ta có:

$$a + b - c > 0, b + c - a > 0, c + a - b > 0$$

Áp dụng bổ đề, ta có:

$$\begin{aligned}(a + b - c)^3 + (b + c - a)^3 &\geq \frac{\left[(a + b - c) + (b + c - a)\right]^3}{4} = 2b^3 \\(b + c - a)^3 + (c + a - b)^3 &\geq \frac{\left[(b + c - a) + (c + a - b)\right]^3}{4} = 2c^3 \\(c + a - b)^3 + (a + b - c)^3 &\geq \frac{\left[(c + a - b) + (a + b - c)\right]^3}{4} = 2a^3\end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại về theo ta được

$$(a + b - c)^3 + (b + c - a)^3 + (c + a - b)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.18: Cho các số thực $a, b, c > 2$ thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Chứng minh rằng :

$$(a - 2)(b - 2)(c - 2) \leq 1$$

Lời giải

Đặt $a = x + 2, b = y + 2, c = z + 2$ với $x, y, z > 0$. Ta có:

Khi đó giả thiết được viết lại thành $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2} = 1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $xyz \leq 1$.

Biến đổi giả thiết áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+2} &= 1 - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{y+2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{y+2}\right) \\&= \frac{x}{2(x+2)} + \frac{y}{2(y+2)} \geq \sqrt{\frac{xy}{(x+2)(y+2)}}\end{aligned}$$

$$\text{Tương tự ta được } \frac{1}{y+2} \geq \sqrt{\frac{zx}{(z+2)(x+2)}}; \frac{1}{x+2} \geq \sqrt{\frac{yz}{(y+2)(z+2)}}$$

Nhân ba bất đẳng thức trên theo vế, ta được

$$\frac{1}{(x+2)(y+2)(z+2)} \geq \frac{xyz}{(x+2)(y+2)(z+2)} \Rightarrow xyz \leq 1$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$.

Ví dụ 3.19: Cho a, b, c các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{b+2c+a} + \frac{1}{c+2a+b} \leq \frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a}$$

Phân tích: Bất đẳng thức làm ta liên tưởng đến đánh giá quen thuộc $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$. Đề ý là

$(a+3b) + (b+2c+a) = 2(a+2b+c)$ nên rất tự nhiên ta nghĩ đến đánh giá

$$\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+2c+a} \geq \frac{4}{(a+3b)+(b+2c+a)} = \frac{2}{a+2b+c}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ ta có

$$\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+2c+a} \geq \frac{4}{(a+3b)+(b+2c+a)} = \frac{2}{a+2b+c}$$

$$\frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+2a+b} \geq \frac{4}{(b+3c)+(c+2a+b)} = \frac{2}{b+2c+a}$$

$$\frac{1}{c+3a} + \frac{1}{a+2b+c} \geq \frac{4}{(c+3a)+(a+2b+c)} = \frac{2}{c+2a+b}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên và rút gọn ta được

$$\frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{b+2c+a} + \frac{1}{c+2a+b} \leq \frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} a+3b = b+2c+a \\ b+3c = c+2a+b \\ c+3a = a+2b+c \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c$$

4. Kỹ thuật thêm bớt

Nếu ở các kỹ thuật trên, ta được rèn luyện thói quen định hướng dựa vào bề ngoài của một bài toán. Thì từ đây ta bắt đầu gặp những lớp bất đẳng thức phong phú hơn – những bất đẳng thức mà lời giải cho chúng luôn đòi hỏi một tầm nhìn bao quát cũng như sự đột phá ý tưởng. Kỹ thuật thêm bớt là một minh chứng rõ ràng nhất cho lối tư duy sử dụng những “yếu tố bên ngoài” trong việc giải quyết vấn đề.

Ngay từ đây chúng ta sẽ bắt đầu làm quen với kỹ thuật này với những ví dụ mà cách đánh giá nó tương đối đa dạng.

Ví dụ 4.1: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a+b+c$$

Phân tích: Bất đẳng thức trên đã được chứng minh bằng phép biến đổi tương đương và cũng có thể chứng minh bằng cách sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Tuy nhiên bây giờ ta sẽ áp dụng ngay bất đẳng thức Cauchy để chứng minh bài toán. Dễ dàng nhận ra không thể sử dụng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy cũng không thể sử dụng kỹ thuật ghép đối xứng để giải quyết bài toán. Ta dự đoán

đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$. Bên vế trái xuất hiện các đại lượng $\frac{a^2}{b}; \frac{b^2}{c}; \frac{c^2}{a}$ và bên vế phải có đại lượng $a+b+c$, chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho các cặp sau

$$\left(\frac{a^2}{b}, b\right); \left(\frac{b^2}{c}, c\right); \left(\frac{c^2}{a}, a\right)$$

Để sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho các cặp trên, trước hết ta cần phải thêm vào vế trái một tổng $a+b+c$ rồi mới tiến hành ghép theo cặp.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương ta có

$$\frac{a^2}{b} + b \geq 2a; \frac{b^2}{c} + c \geq 2b; \frac{c^2}{a} + a \geq 2c$$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^2}{b} + b + \frac{b^2}{c} + c + \frac{c^2}{a} + a \geq 2a + 2b + 2c \Rightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$$

Bài toán được chứng minh xong. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 4.2: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{b+a} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Phân tích: Áp dụng ý tưởng như trên, tuy nhiên ở đây ta cần triệt tiêu $b+c$ ở dưới mẫu nên ta thêm cho $\frac{a^2}{b+c}$ một số $\frac{b+c}{k}$ và chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$ nên ta tìm được $k = 4$. Do đó ta có lời giải như sau.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương ta có

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq a; \quad \frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} \geq b; \quad \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq c$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} + \frac{c^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq a + b + c$$

Suy ra
$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Bài toán được chứng minh xong. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 4.3: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy có thể chứng minh được bài toán theo ý tưởng như trên, nhưng ta cần trả lời được các câu hỏi đặt ra là

- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho mấy số?
- Các đại lượng được thêm vào có dạng như thế nào?

Để ý đến đại lượng $\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}$ ta thấy nên áp dụng bất đẳng thức cho ba số, khi đó đại lượng

thêm vào cần triệt tiêu được tích $(b+1)(c+1)$ ở dưới mẫu, do đó ta nghĩ đến các đại lượng kiểu

$\frac{b+1}{k}; \frac{c+1}{k}$ với k là một số dương nào đó. Chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$, khi đó

$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} = \frac{b+1}{k} = \frac{c+1}{k}$ sẽ cho ta $k = 4$. Vì vậy ta có chứng minh sau

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{1+b}{8} + \frac{1+c}{8} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} \cdot \frac{1+b}{8} \cdot \frac{1+c}{8}} = \frac{3}{4}a$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{1+c}{8} + \frac{1+a}{8} \geq \frac{3}{4}b; \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{1+a}{8} + \frac{1+b}{8} \geq \frac{3}{4}c$$

Cộng theo về các bất đẳng thức ta được

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{1}{4}(a+b+c) + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}(a+b+c)$$

Hay
$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{1}{2}(a+b+c) - \frac{3}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy kết hợp với giả thiết $abc = 1$, ta lại có

$$\frac{1}{2}(a+b+c) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{abc} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

Suy ra
$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}$$

Bài toán được chứng minh xong. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 4.4: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b(c+2)} + \frac{b^3}{c(a+2)} + \frac{c^3}{a(b+2)} \geq 1$$

Phân tích: Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$, khi đó ta chú ý đến đánh giá sau

$$\frac{a^3}{b(c+2)} + \frac{b}{3} + \frac{c+2}{9} \geq a \text{ và áp dụng tương tự.}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta được

$$\frac{a^3}{b(c+2)} + \frac{b}{3} + \frac{c+2}{9} \geq a; \frac{b^3}{c(a+2)} + \frac{c}{3} + \frac{a+2}{9} \geq b; \frac{c^3}{a(b+2)} + \frac{a}{3} + \frac{b+2}{9} \geq c$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a^3}{b(c+2)} + \frac{b^3}{c(a+2)} + \frac{c^3}{a(b+2)} + \frac{a+b+c}{3} + \frac{a+b+c+6}{9} \geq a+b+c \\ \Leftrightarrow & \frac{a^3}{b(c+2)} + \frac{b^3}{c(a+2)} + \frac{c^3}{a(b+2)} \geq \frac{5(a+b+c)}{9} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$. Do đó

$$\frac{a^3}{b(c+2)} + \frac{b^3}{c(a+2)} + \frac{c^3}{a(b+2)} \geq \frac{5 \cdot 3}{9} - \frac{2}{3} = 1$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 4.5: Cho a, b, c độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $a+b+c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b-c)^3}{3c} + \frac{(c+a-b)^3}{3b} + \frac{(b+c-a)^3}{3a} \geq 1$$

Phân tích: Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$, khi đó ta chú ý đến đánh giá sau

$$\frac{(a+b-c)^3}{3c} + \frac{c}{3} + \frac{1}{3} \geq 3\sqrt{\frac{(a+b-c)^3}{3c} \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{1}{3}} \geq a+b-c \text{ và áp dụng tương tự.}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta được

$$\frac{(a+b-c)^3}{3c} + \frac{c}{3} + \frac{1}{3} \geq a+b-c$$

$$\frac{(c+a-b)^3}{3b} + \frac{b}{3} + \frac{1}{3} \geq c+a-b$$

$$\frac{(b+c-a)^3}{3a} + \frac{a}{3} + \frac{1}{3} \geq b+c-a$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{(a+b-c)^3}{3c} + \frac{(c+a-b)^3}{3b} + \frac{(b+c-a)^3}{3a} \geq a+b+c - \frac{a+b+c}{3} - 1 = 1$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 4.6: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{b^2c}{a^3(b+c)} + \frac{c^2a}{b^3(c+a)} + \frac{a^2b}{c^3(a+b)} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Phân tích: Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$, khi đó ta chú ý đến đánh giá

$$\frac{b^2c}{a^3(b+c)} + \frac{b+c}{4bc} + \frac{1}{2b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^2c}{a^3(b+c)} \cdot \frac{b+c}{4bc} \cdot \frac{1}{2b}} = \frac{3}{2a} \text{ và áp dụng tương tự.}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương

$$\frac{b^2c}{a^3(b+c)} + \frac{b+c}{4bc} + \frac{1}{2b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b^2c}{a^3(b+c)} \cdot \frac{b+c}{4bc} \cdot \frac{1}{2b}} = \frac{3}{2a}$$

Từ đó suy ta
$$\frac{b^2c}{a^3(b+c)} \geq \frac{3}{2a} - \frac{b+c}{4bc} - \frac{1}{2b} = \frac{3}{2a} - \frac{3}{4b} - \frac{1}{4c}$$

Tương tự ta có
$$\frac{c^2a}{b^3(c+a)} \geq \frac{3}{2b} - \frac{3}{4c} - \frac{1}{4a}; \quad \frac{a^2b}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2c} - \frac{3}{4a} - \frac{1}{4b}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{b^2c}{a^3(b+c)} + \frac{c^2a}{b^3(c+a)} + \frac{a^2b}{c^3(a+b)} \geq \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 4.7: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^2}{b+c} \geq a + \frac{b}{2}$$

Phân tích: Bất đẳng thức cần chứng minh có hình thức khác so với các ví dụ trên, tuy nhiên đẳng thức vẫn xảy ra tại $a = b = c$. Để ý hai đại lượng đầu ta sử dụng cách thêm – bớt như các ví dụ trên thì được

$$\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b}{2} + \frac{c+a}{4} \geq \frac{3}{2}a; \quad \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c}{2} + \frac{a+b}{4} \geq \frac{3}{2}b \quad \text{khi đó ta được}$$

$$\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^2}{b+c} \geq \frac{c^2}{b+c} + a + \frac{3b}{4} - \frac{3c}{4} \quad \text{và ta cần phải chứng minh được}$$

$\frac{c^2}{b+c} + a + \frac{3b}{4} - \frac{3c}{4} \geq a + \frac{b}{2}$ hay $\frac{c^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq c$, đánh giá cuối cùng luôn đúng theo bất đẳng thức Cauchy.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương ta được

$$\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b}{2} + \frac{c+a}{4} \geq \frac{3}{2}a; \quad \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c}{2} + \frac{a+b}{4} \geq \frac{3}{2}b; \quad \frac{c^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq c$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a}{2} + b + c &\geq \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b + c \\ \Leftrightarrow \frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^2}{b+c} &\geq a + \frac{b}{2} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 4.8: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} + \sqrt{c^2 - ca + a^2}$$

Phân tích: Dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$, quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy bên trái có đại lượng $\frac{a^2}{b}$ và vế phải lại chứa $\sqrt{a^2 - ab + b^2}$, do đó để sử dụng bất đẳng thức Cauchy dạng

$x + y \geq 2\sqrt{xy}$ ta cần làm xuất hiện đại lượng $a^2 - ab + b^2$, do đó ta để ý đến phép biến đổi

$$\frac{a^2}{b} = \frac{a^2}{b} - a + b + a - b = \frac{a^2 - ab + b^2}{b} + a - b, \text{ lúc này chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta có đánh giá}$$

$\frac{a^2 - ab + b^2}{b} + b \geq 2\sqrt{a^2 - ab + b^2}$. Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \geq 2\sqrt{a^2 - ab + b^2} + 2\sqrt{b^2 - bc + c^2} + 2\sqrt{c^2 - ca + a^2}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được một trong hai khả năng sau

$$2\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c$$

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} + \sqrt{c^2 - ca + a^2} \geq a + b + c$$

Để ý ta nhận thấy $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$ do đó khả năng thứ nhất luôn đúng. Như vậy bài toán được chứng minh.

Lời giải

Ta có $\frac{a^2}{b} = \frac{a^2}{b} - a + b + a - b = \frac{a^2 - ab + b^2}{b} + a - b$, tương tự ta được

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 - ab + b^2}{b} + \frac{b^2 - bc + c^2}{c} + \frac{c^2 - ca + a^2}{a}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^2 - ab + b^2}{b} + b \geq 2\sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

$$\frac{b^2 - bc + c^2}{c} + c \geq 2\sqrt{b^2 - bc + c^2}$$

$$\frac{c^2 - ca + a^2}{a} + a \geq 2\sqrt{c^2 - ca + a^2}$$

Suy ra $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \geq 2\sqrt{a^2 - ab + b^2} + 2\sqrt{b^2 - bc + c^2} + 2\sqrt{c^2 - ca + a^2}$

Ta cần chứng minh được $2\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) \geq \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) + a + b + c$

Hay $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$

Bất đẳng thức cuối cùng chính là bất đẳng thức trong ví dụ 1.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Nhận xét: Từ những ví dụ trên ta đã thấy được sự hiệu quả của kỹ thuật thêm - bớt trong chứng minh bất đẳng thức. Tuy nhiên không phải với bất đẳng thức nào cũng có thể làm được theo cách như trên, mà đôi khi ta cần phải thực hiện việc biến đổi tương bất đẳng thức trước rồi mới thực hiện thêm bớt. Dưới đây là một số ví dụ như vậy.

Ví dụ 4.9: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c}$$

Phân tích: Nhận thấy ta chưa thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy để đánh giá ngay bất đẳng thức trên, do

đó ta cần biến đổi bất đẳng thức thành $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{c-a}{a+b} \geq 0$, đến đây ta cũng chưa thể áp dụng được bất đẳng thức Cauchy. Bây giờ ta cần tìm cách loại đi các dấu trừ mới có thể áp dụng được, để ý đến

$\frac{a-b}{b+c} + 1 = \frac{c+a}{b+c}$ lúc này ta có thể áp dụng được bất đẳng thức Cauchy.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{c-a}{a+b} \geq 0$$

Đề ý rằng $\frac{a-b}{b+c} + 1 = \frac{c+a}{b+c}$, $\frac{b-c}{c+a} + 1 = \frac{a+b}{c+a}$, $\frac{c-a}{a+b} + 1 = \frac{b+c}{a+b}$

Vậy sau khi thêm bớt như vậy, ta đã quy bài toán về chứng minh.

$$\frac{a+b}{c+a} + \frac{c+a}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} \geq 3$$

Mặt khác bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì

$$\frac{a+b}{c+a} + \frac{c+a}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a+b}{c+a} \cdot \frac{c+a}{b+c} \cdot \frac{b+c}{a+b}} = 3$$

Phép chứng minh hoàn tất. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 4.10: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca$$

Lời giải

Sử dụng kỹ thuật thêm bớt ta có bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned}
& 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq 2(ab + bc + ca) \\
& \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2) + 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca) \\
& \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2) + 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq (a + b + c)^2 \geq 9
\end{aligned}$$

Vậy ta cần chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 + 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq 9$

Hay là $(a^2 + \sqrt{a} + \sqrt{a}) + (b^2 + \sqrt{b} + \sqrt{b}) + (c^2 + \sqrt{c} + \sqrt{c}) \geq 9$

Điều này hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy bộ ba số ta có

$$a^2 + \sqrt{a} + \sqrt{a} \geq 3\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = 3a$$

$$b^2 + \sqrt{b} + \sqrt{b} \geq 3\sqrt[3]{b^2 \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = 3b$$

$$c^2 + \sqrt{c} + \sqrt{c} \geq 3\sqrt[3]{c^2 \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{c}} = 3c$$

Bài toán được giải quyết. Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Ví dụ 4.11: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c \geq 3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{a + \sqrt{bc}} + \frac{b^2}{b + \sqrt{ca}} + \frac{c^2}{c + \sqrt{ab}} \geq \frac{3}{2}$$

Phân tích: Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức thì điều đầu tiên là sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Tuy nhiên ta xem có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy được không? Nhận thấy dưới các mẫu có chứa căn bậc hai và ta tìm cách khử căn trước.

Chú ý đến chiều bất đẳng thức ta có đánh giá $2\sqrt{bc} \leq b + c$, khi đó ta được $\frac{a^2}{a + \sqrt{bc}} \geq \frac{2a^2}{2a + b + c}$, hoàn toàn tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{a + \sqrt{bc}} + \frac{b^2}{b + \sqrt{ca}} + \frac{c^2}{c + \sqrt{ab}} \geq \frac{2a^2}{2a + b + c} + \frac{2b^2}{2b + c + a} + \frac{2c^2}{2c + a + b}$$

Ta cần chỉ ra được $\frac{2a^2}{2a + b + c} + \frac{2b^2}{2b + c + a} + \frac{2c^2}{2c + a + b} \geq \frac{3}{2}$

Để ý đến đánh giá $\frac{2a^2}{2a + b + c} + \frac{2a + b + c}{8} \geq a$, áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{2a^2}{2a + b + c} + \frac{2b^2}{2b + c + a} + \frac{2c^2}{2c + a + b} \geq \frac{a + b + c}{2} \geq \frac{3}{2}$$

Đến đây bài toán được chứng minh xong.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $2\sqrt{bc} \leq b + c$ suy ra $\frac{a^2}{a + \sqrt{bc}} \geq \frac{2a^2}{2a + b + c}$.

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{a + \sqrt{bc}} + \frac{b^2}{b + \sqrt{ca}} + \frac{c^2}{c + \sqrt{ab}} \geq \frac{2a^2}{2a + b + c} + \frac{2b^2}{2b + c + a} + \frac{2c^2}{2c + a + b}$$

Ta cần chứng minh được $\frac{2a^2}{2a + b + c} + \frac{2b^2}{2b + c + a} + \frac{2c^2}{2c + a + b} \geq \frac{3}{2}$, thật vậy

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\frac{2a^2}{2a + b + c} + \frac{2a + b + c}{8} \geq a; \frac{2b^2}{2b + c + a} + \frac{2b + c + a}{8} \geq b; \frac{2c^2}{2c + a + b} + \frac{2c + a + b}{8} \geq c$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{2a^2}{2a+b+c} + \frac{2b^2}{2b+c+a} + \frac{2c^2}{2c+a+b} \geq \frac{a+b+c}{2} \geq \frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Ví dụ 4.12: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c \geq 3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3}{a+\sqrt{bc}} + \frac{b^3}{b+\sqrt{ca}} + \frac{c^3}{c+\sqrt{ab}} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $2\sqrt{bc} \leq b+c$ suy ra $\frac{a^3}{a+\sqrt{bc}} \geq \frac{2a^3}{2a+b+c}$.

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{a^3}{a+\sqrt{bc}} + \frac{b^3}{b+\sqrt{ca}} + \frac{c^3}{c+\sqrt{ab}} \geq \frac{2a^3}{2a+b+c} + \frac{2b^3}{2b+c+a} + \frac{2c^3}{2c+a+b}$$

Ta cần chứng minh được $\frac{2a^3}{2a+b+c} + \frac{2b^3}{2b+c+a} + \frac{2c^3}{2c+a+b} \geq \frac{3}{2}$, thật vậy

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\begin{aligned} \frac{2a^3}{2a+b+c} + \frac{a(2a+b+c)}{8} &\geq a^2 \\ \frac{2b^3}{2b+c+a} + \frac{b(2b+c+a)}{8} &\geq b^2 \\ \frac{2c^3}{2c+a+b} + \frac{c(2c+a+b)}{8} &\geq c^2 \end{aligned}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{2a^3}{2a+b+c} + \frac{2b^3}{2b+c+a} + \frac{2c^3}{2c+a+b} + \frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{4} \geq a^2+b^2+c^2$$

Hay
$$\frac{2a^3}{2a+b+c} + \frac{2b^3}{2b+c+a} + \frac{2c^3}{2c+a+b} \geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)}{4}$$

Chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được
$$\frac{3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)}{4} \geq \frac{3}{2}$$

Thật vậy, từ giả thiết ta có $a^2+b^2+c^2 \geq 3$ và $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

Do đó suy ra
$$\frac{3(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)}{4} \geq \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{4} \geq \frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Ví dụ 4.13: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a(a-2b+c)}{ab+1} + \frac{b(b-2c+a)}{bc+1} + \frac{c(c-2a+b)}{ca+1} \geq 0$$

Phân tích: Để áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta cần phải biến đổi bất đẳng thức trên sao cho vế phải là một số khác không, điều này làm ta nghĩ đến cộng vào hai vế của bất đẳng thức với một số dương nào đó?

Để ý ta thấy $\frac{a(a-2b+c)}{ab+1} = \frac{a(3-3b)}{ab+1} = \frac{3a-3ab}{ab+1}$, khi đó để làm mất dấu từ ta cộng thêm 3

thì được $\frac{3a-3ab}{ab+1} + 3 = \frac{3a+3}{ab+1}$, thực hiện tương tự ta được bất đẳng thức

$\frac{a+1}{ab+1} + \frac{b+1}{bc+1} + \frac{c+1}{ca+1} \geq 3$. Đến đây ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy thì được

$$\frac{a+1}{ab+1} + \frac{b+1}{bc+1} + \frac{c+1}{ca+1} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$(a+1)(b+1)(c+1) \geq (ab+1)(bc+1)(ca+1)$$

Đến đây ta biến đổi tương đương đổi tương đương thì được

$$\begin{aligned} (a+1)(b+1)(c+1) &\geq (ab+1)(bc+1)(ca+1) \\ \Leftrightarrow abc + a + b + c + 1 &\geq a^2b^2c^2 + abc(a+b+c) + 1 \\ \Leftrightarrow abc(1-abc) + a + b + c(1-abc) &\geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $abc \leq 1$. Đến đây ta trình bày lại lời giải như sau

Lời giải

Để ý ta thấy $\frac{a(a-2b+c)}{ab+1} = \frac{a(3-3b)}{ab+1} = \frac{3a-3ab}{ab+1}$, áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức cần

chứng minh là $\frac{3a-3ab}{ab+1} + \frac{3b-3bc}{bc+1} + \frac{3c-3ca}{ca+1} \geq 0$

Bất đẳng thức trên tương đương với $\frac{3a-3ab}{ab+1} + 3 + \frac{3b-3bc}{bc+1} + 3 + \frac{3c-3ca}{ca+1} + 3 \geq 9$

Hay $\frac{a+1}{ab+1} + \frac{b+1}{bc+1} + \frac{c+1}{ca+1} \geq 3$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a+1}{ab+1} + \frac{b+1}{bc+1} + \frac{c+1}{ca+1} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$(a+1)(b+1)(c+1) \geq (ab+1)(bc+1)(ca+1)$$

Đến đây ta biến đổi tương đương đổi tương đương thì được

$$\begin{aligned} (a+1)(b+1)(c+1) &\geq (ab+1)(bc+1)(ca+1) \\ \Leftrightarrow abc + a + b + c + 1 &\geq a^2b^2c^2 + abc(a+b+c) + 1 \\ \Leftrightarrow abc(1-abc) + (a+b+c)(1-abc) &\geq 0 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $3 = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ suy ra $abc \leq 1$

Do vậy bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Nhận xét: Thông qua các ví dụ trên ta nhận thấy được hiệu quả của kỹ thuật thêm - bớt trong bất đẳng thức Cauchy

- Bất đẳng thức Cauchy có thể giúp ta loại bỏ các rào cản như các căn thức, các lũy thừa bậc cao,...
- Kỹ thuật thêm - bớt có thể giúp ta đối xứng hóa bất đẳng thức cũng như các đánh giá hợp lý trong quá trình tìm lời giải.

- Chú ý đến điểm rơi giúp ta bảo toàn dấu đẳng thức trong chuỗi đánh giá.

Sau đây là một số ví dụ khác

Ví dụ 4.14: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 2abc$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a(2a-1)^2} + \frac{1}{b(2b-1)^2} + \frac{1}{c(2c-1)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Lời giải

Từ giả thiết $ab + bc + ca = 2abc$ suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$.

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, khi đó ta có $x + y + z = 2$.

Bất đẳng thức được viết lại là $\frac{x^3}{(2-x)^2} + \frac{y^3}{(2-y)^2} + \frac{z^3}{(2-z)^2} \geq \frac{1}{2}$

Hay
$$\frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{z^3}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y+z}{8} + \frac{y+z}{8} \geq \frac{3x}{4}$$

$$\frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{z+x}{8} + \frac{z+x}{8} \geq \frac{3y}{4}$$

$$\frac{z^3}{(x+y)^2} + \frac{x+y}{8} + \frac{x+y}{8} \geq \frac{3z}{4}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{z^3}{(x+y)^2} + \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3(x+y+z)}{4}$$

Hay
$$\frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{z^3}{(x+y)^2} \geq \frac{x+y+z}{4} = \frac{1}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 4.15: Cho a, b, c là các số thực không âm trong đó không có hai số nào có tổng bằng 0. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{b^2 - bc + c^2}{a^2 + bc}} + \sqrt{\frac{c^2 - ca + a^2}{b^2 + ca}} + \sqrt{\frac{a^2 - ab + b^2}{c^2 + ab}} + \frac{2(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 4$$

Phân tích: Bất đẳng thức có dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b; c = 0$ và các hoán vị của nó, như vậy kết

hợp với giả thiết ta có thể xét hai trường hợp. Tuy nhiên để ý biểu thức trong căn ta nhận thấy

$a^2 + bc + b^2 - bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$ và để ý đến chiều của bất đẳng thức ta có đánh giá

$2\sqrt{(a^2 + bc)(b^2 - bc + c^2)} \leq a^2 + b^2 + c^2$. Khi đó ta được

$$\sqrt{\frac{b^2 - bc + c^2}{a^2 + bc}} = \frac{b^2 - bc + c^2}{\sqrt{(a^2 + bc)(b^2 - bc + c^2)}} \geq \frac{2(b^2 - bc + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Đến đây áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{b^2 - bc + c^2}{a^2 + bc}} + \sqrt{\frac{c^2 - ca + a^2}{b^2 + ca}} + \sqrt{\frac{a^2 - ab + b^2}{c^2 + ab}} \\ & \geq \frac{2(b^2 - bc + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2(c^2 - ca + a^2)}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2(a^2 - ab + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2} = 4 - \frac{2(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

Đây chính là bất đẳng thức cần chứng minh.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$2\sqrt{(a^2 + bc)(b^2 - bc + c^2)} \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Khi đó ta suy ra
$$\sqrt{\frac{b^2 - bc + c^2}{a^2 + bc}} = \frac{b^2 - bc + c^2}{\sqrt{(a^2 + bc)(b^2 - bc + c^2)}} \geq \frac{2(b^2 - bc + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{b^2 - bc + c^2}{a^2 + bc}} + \sqrt{\frac{c^2 - ca + a^2}{b^2 + ca}} + \sqrt{\frac{a^2 - ab + b^2}{c^2 + ab}} \\ & \geq \frac{2(b^2 - bc + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2(c^2 - ca + a^2)}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2(a^2 - ab + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2} = 4 - \frac{2(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

Hay
$$\sqrt{\frac{b^2 - bc + c^2}{a^2 + bc}} + \sqrt{\frac{c^2 - ca + a^2}{b^2 + ca}} + \sqrt{\frac{a^2 - ab + b^2}{c^2 + ab}} + \frac{2(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 4$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b; c = 0$ và các hoán vị.

Ví dụ 4.16: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng :

$$2\sqrt{3} \left[\frac{1}{\sqrt{a(a+2b)}} + \frac{1}{\sqrt{b(b+2c)}} + \frac{1}{\sqrt{c(c+2a)}} \right] \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{3}{2a+b} + \frac{3}{2b+c} + \frac{3}{2c+a}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Quan sát bất đẳng thức và chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta có đánh giá

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a(a+2b)}} = 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{3}{a+2b}} \leq \frac{1}{a} + \frac{3}{a+2b}$$

Khi đó tương tự ta được bất đẳng thức

$$2\sqrt{3} \left[\frac{1}{\sqrt{a(a+2b)}} + \frac{1}{\sqrt{b(b+2c)}} + \frac{1}{\sqrt{c(c+2a)}} \right] \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{3}{a+2b} + \frac{3}{b+2c} + \frac{3}{c+2a}$$

Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{3}{a+2b} + \frac{3}{b+2c} + \frac{3}{c+2a} \leq \frac{3}{2a+b} + \frac{3}{2b+c} + \frac{3}{2c+a}$$

Rõ ràng bất đẳng thức trên không thể chứng minh được, điều này cho thấy cách đánh giá như trên không đem lại hiệu quả và ta cần phải tìm cách khác.

Đề ý là trong phép đánh giá trên ta triệt tiêu được đại lượng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ nhưng không đem lại hiệu

quả. Vậy ta thử đánh giá làm triệt tiêu $\frac{3}{a+2b} + \frac{3}{b+2c} + \frac{3}{c+2a}$ thì sẽ có kết quả như thế nào? Để làm được như vậy ta cần làm xuất hiện các $2a+b$; $2b+c$; $2c+a$ trong các căn và sự xuất hiện đó chỉ có thể được giải quyết bằng kỹ thuật thêm - bớt. Khi đó chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta được

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a(a+2b)}} = 2\sqrt{\frac{3}{2a+b} \cdot \frac{2a+b}{a(a+2b)}} \leq \frac{3}{2a+b} + \frac{2a+b}{a(a+2b)}$$

Hoàn toàn tương tự ta được bất đẳng thức

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3} \left[\frac{1}{\sqrt{a(a+2b)}} + \frac{1}{\sqrt{b(b+2c)}} + \frac{1}{\sqrt{c(c+2a)}} \right] \\ \leq \frac{2a+b}{a(a+2b)} + \frac{2b+c}{b(b+2c)} + \frac{2c+a}{c(c+2a)} + \frac{3}{2a+b} + \frac{3}{2b+c} + \frac{3}{2c+a} \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{2a+b}{a(a+2b)} + \frac{2b+c}{b(b+2c)} + \frac{2c+a}{c(c+2a)} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Quan sát bất đẳng thức ta nghĩ đến cách ghép đối xứng. Nhưng ghép như thế nào đây và nếu không chứng minh được bất đẳng thức trên thì chuỗi đánh giá trên hoàn toàn vô tác dụng. Sau một thời gian mày mò cuối cùng cũng phát hiện ra

$$\frac{2a+b}{a(a+2b)} \leq \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$$

Đánh giá này tương đương với $(a+2b)^2 \geq 3b(2a+b)$ là một đánh giá đúng.

Thực hiện hoàn toàn tương tự ta được điều cần phải chứng minh.

Ví dụ 4.17: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$2(ab+bc+ca) + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 9$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$. Khi đó dễ thấy theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$ab+bc+ca + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = ab + \frac{1}{ab} + bc + \frac{1}{bc} + ca + \frac{1}{ca} \geq 3$$

Như vậy ta cần chứng minh $ab+bc+ca \geq 3$ nữa là xong. Tuy nhiên với $a+b+c=3$ thì bất đẳng thức $ab+bc+ca \geq 3$ lại không đúng. Như vậy cách đánh giá như trên không hiệu quả. Ta cần tìm cách khác.

Trong bất đẳng thức có đại lượng $2(ab+bc+ca)$ và giả thiết thì có $a+b+c=3$, giữa chúng có mối liên hệ là

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2$$

Điều này gợi ý cho ta thêm vào hai vế của bất đẳng thức đại lượng $a^2+b^2+c^2$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(a+b+c)^2 + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 9 + a^2 + b^2 + c^2$$

Hay
$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Kết hợp với giả thiết $a + b + c = 3$ thì bất đẳng thức trên được viết là

$$\frac{3}{abc} \geq a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow 3 \geq abc(a^2 + b^2 + c^2)$$

Theo một đánh giá quen thuộc thì $abc(a + b + c) \leq \frac{1}{3}(ab + bc + ca)^2$

Do đó ta được

$$abc(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{3}abc(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \leq \frac{(ab + bc + ca)^2(a^2 + b^2 + c^2)}{9}$$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} (ab + bc + ca)^2(a^2 + b^2 + c^2) &= (ab + bc + ca)(ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2) \\ &\leq \left[\frac{(a + b + c)^2}{3} \right]^3 = \frac{(a + b + c)^6}{27} = 27 \end{aligned}$$

Suy ra ta được $abc(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3$. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 4.18: Cho a, b, c, d là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a-d}{b+d} + \frac{d-b}{c+b} + \frac{b-c}{a+c} + \frac{c-a}{a+d} \geq 0$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = d$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy chưa thể xác định được các phân số đã không âm hay chưa và về phải lúc này là 0 nên việc sử dụng bất đẳng thức Cauchy là không thể được. Bây giờ ta cần thay đổi các tử số để đảm bảo các phân số không âm và về phải cũng là một hằng số dương. Yêu cầu này gợi ý cho ta sử dụng kỹ thuật thêm - bớt

Để ý ta thấy $\frac{a-d}{b+d} + 1 = \frac{a+b}{b+d}$, hoàn toàn tương tự ta được

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a-d}{b+d} + 1 \right) + \left(\frac{d-b}{c+b} + 1 \right) + \left(\frac{b-c}{c+a} + 1 \right) + \left(\frac{c-a}{d+a} + 1 \right) \geq 4 \\ \Leftrightarrow &\frac{a+b}{d+b} + \frac{d+c}{c+b} + \frac{b+a}{c+a} + \frac{c+d}{d+a} \geq 4 \end{aligned}$$

Lại thấy các phân số không cùng mẫu nhưng có các cặp cùng tử, do đó ta viết được bất đẳng thức trên thành

$$(a+b) \left(\frac{1}{d+b} + \frac{1}{c+a} \right) + (c+d) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+d} \right) \geq 4$$

Bất đẳng thức trên làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

$$(a+b) \left(\frac{1}{d+b} + \frac{1}{c+a} \right) \geq \frac{4(a+b)}{a+b+c+d}$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $(c+d) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+d} \right) \geq \frac{4(c+d)}{a+b+c+d}$

Cộng hai bất đẳng thức trên theo vế ta có ngay điều phải chứng minh.

Ví dụ 4.19: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b(b+c)} + \frac{b^3}{c(c+a)} + \frac{c^3}{a(a+b)} \geq \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Phân tích: Để ý đến đánh giá $\frac{a^3}{b(b+c)} + \frac{b}{2} + \frac{b+c}{4} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b(b+c)} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b+c}{4}} = \frac{3}{2}a$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a^3}{b(b+c)} + \frac{b}{2} + \frac{b+c}{4} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b(b+c)} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b+c}{4}} = \frac{3}{2}a$$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{b^3}{c(c+a)} + \frac{c}{2} + \frac{c+a}{4} \geq \frac{3}{2}b; \quad \frac{c^3}{a(a+b)} + \frac{a}{2} + \frac{a+b}{4} \geq \frac{3}{2}c$$

Cộng về với về của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\begin{aligned} & \frac{a^3}{b(b+c)} + \frac{b^3}{c(c+a)} + \frac{c^3}{a(a+b)} + a + b + c \geq \frac{3}{2}(a+b+c) \\ \Leftrightarrow & \frac{a^3}{b(b+c)} + \frac{b^3}{c(c+a)} + \frac{c^3}{a(a+b)} \geq \frac{1}{2}(a+b+c) \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 4.20: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(b+2c)^2} + \frac{b^3}{(c+2a)^2} + \frac{c^3}{(a+2b)^2} \geq \frac{2}{9}(a+b+c)$$

Phân tích: Để ý đến đánh giá

$$\frac{a^3}{(b+2c)^2} + \frac{b+2c}{27} + \frac{b+2c}{27} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(b+c)^2} \cdot \frac{b+2c}{27} \cdot \frac{b+2c}{27}} = \frac{a}{3}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{a^3}{(b+2c)^2} + \frac{b+2c}{27} + \frac{b+2c}{27} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(b+c)^2} \cdot \frac{b+2c}{27} \cdot \frac{b+2c}{27}} = \frac{a}{3}$$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{b^3}{(c+2a)^2} + \frac{c+2a}{27} + \frac{c+2a}{27} \geq \frac{b}{3}; \quad \frac{c^3}{(a+2b)^2} + \frac{a+2b}{27} + \frac{a+2b}{27} \geq \frac{c}{3}$$

Cộng về với về của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\begin{aligned} & \frac{a^3}{(b+2c)^2} + \frac{b^3}{(c+2a)^2} + \frac{c^3}{(a+2b)^2} + \frac{a+b+c}{9} \geq \frac{a+b+c}{3} \\ \Leftrightarrow & \frac{a^3}{(b+2c)^2} + \frac{b^3}{(c+2a)^2} + \frac{c^3}{(a+2b)^2} \geq \frac{2(a+b+c)}{9} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 4.21: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Phân tích: Để ý đến đánh giá $a^3 + b^3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \geq 3\sqrt[3]{a^3 \cdot b^3 \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}} = ab\sqrt{3}$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^3 + b^3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \geq ab\sqrt{3}; \quad b^3 + c^3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \geq bc\sqrt{3}; \quad c^3 + a^3 + \frac{1}{3\sqrt{3}} \geq ca\sqrt{3}$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\begin{aligned} 2(a^3 + b^3 + c^3) + \frac{1}{\sqrt{3}} &\geq \sqrt{3}(ab + bc + ca) = \sqrt{3} \\ \Rightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) &\geq \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = b = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ b = c = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ c = a = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ ab + bc + ca = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ví dụ 4.22: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $4(a + b + c) = 3abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq \frac{3}{8}$$

Phân tích: Biến đổi giả thiết ta được $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{3}{4}$. Chú ý đến đánh giá

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{8} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b^3} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{ab}$$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $4(a + b + c) = 3abc \Leftrightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{3}{4}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{8} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b^3} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{ab}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{8} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{bc}; \quad \frac{1}{c^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{8} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{ca}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) + \frac{3}{8} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = \frac{9}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq \frac{3}{8}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 2$$

5. Kỹ thuật Cauchy ngược dấu.

Trong quá trình tìm lời giải cho một bài toán bất đẳng thức, một sai lầm thường gặp đó là sau một loạt các đánh giá ta thu được một bất đẳng thức ngược chiều. Điều này làm không ít người cảm thấy nản lòng. Lúc này nếu ta bình tĩnh suy nghĩ một chút thì thấy với đánh giá ngược chiều bằng cách nào đó ta thêm vào trước một dấu âm thì lập tức đánh giá đó sẽ cùng chiều. Sử dụng ý tưởng tương tự như kỹ thuật thêm bớt, thậm chí có phần khéo léo hơn, kỹ thuật Cauchy ngược dấu đã chứng tỏ sự đột phá đơn giản nhưng đem lại hiệu quả bất ngờ đến ngạc nhiên khi giải quyết lớp bất đẳng thức hoán vị chặt và khó. Chúng ta sẽ bắt đầu làm quen với một số ví dụ sau

Ví dụ 5.1: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \geq \frac{3}{2}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức không ít bạn sẽ đánh giá $a^2 + 1 \geq 2a$, áp dụng tương tự khi đó ta được bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}$$

Tuy nhiên bất đẳng thức thu được lại bị ngược chiều. Đến đây chúng ta sẽ bị lúng túng trong cách giải. Ta vẫn phải đánh giá mẫu nhưng nếu có thể thêm được dấu âm trước đánh giá đó thì tốt biết mấy. Điều ta mong muốn sẽ được giải quyết bằng phép biến đổi sau đây

$$\frac{1}{a^2 + 1} = 1 - \frac{a^2}{a^2 + 1} \geq 1 - \frac{a^2}{2a} = 1 - \frac{a}{2}$$

Đến đây thì ta có thể đánh giá mẫu mà không sợ bị ngược chiều nữa

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{1}{a^2 + 1} = 1 - \frac{a^2}{a^2 + 1} \geq 1 - \frac{a^2}{2a} = 1 - \frac{a}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta có: $\frac{1}{b^2 + 1} \geq 1 - \frac{b}{2}$; $\frac{1}{c^2 + 1} \geq 1 - \frac{c}{2}$

Cộng theo vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \geq 3 - \frac{a + b + c}{2} = \frac{3}{2}$$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 5.2: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1 + ab} + \frac{1}{1 + bc} + \frac{1}{1 + ca} \geq \frac{3}{2}$$

Phân tích: Nếu áp dụng bất đẳng thức Cauchy trực tiếp ta thu được

$$\frac{1}{1 + ab} + \frac{1}{1 + bc} + \frac{1}{1 + ca} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}} + \frac{1}{2\sqrt{bc}} + \frac{1}{2\sqrt{ca}} \geq \frac{3}{2}$$

Do đó ta sẽ áp dụng bất đẳng thức Cauchy theo ý tưởng như trên

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{1 + ab} = 1 - \frac{ab}{1 + ab} \geq 1 - \frac{ab}{2\sqrt{ab}} = 1 - \frac{\sqrt{ab}}{2}$$

Tương tự ta có
$$\frac{1}{1+bc} \geq 1 - \frac{\sqrt{bc}}{2}; \frac{1}{1+ca} \geq 1 - \frac{\sqrt{ca}}{2}$$

Cộng theo vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq 3 - \frac{1}{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$$

Đề ý là
$$\frac{1}{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2}\right) = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}$$

Do đó ta được
$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}$$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a + b + c = 1$

Nhận xét: Kỹ thuật Cauchy ngược dấu có thể hiểu là ta lấy nghịch đảo hai vế của một đánh giá theo bất đẳng thức Cauchy sau đó nhân hai vế với -1 . Khi đó bất đẳng thức ban đầu sẽ không bị đổi chiều. Dưới đây là một số ví dụ tương tự.

Ví dụ 5.3: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a}{b^2+1} = a - \frac{ab^2}{b^2+1} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$$

Tương tự ta có
$$\frac{b}{c^2+1} \geq b - \frac{bc}{2}; \frac{c}{a^2+1} \geq c - \frac{ca}{2}$$

Cộng theo vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq a + b + c - \frac{ab + bc + ca}{2}$$

Mặt khác theo một đánh giá quen thuộc $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = 3$

Do đó ta được
$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Ví dụ 5.4: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} = a - \frac{ab^2}{a^2+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2ab} = a - \frac{b}{2}$$

Tương tự ta có
$$\frac{b^3}{b^2+c^2} \geq b - \frac{c}{2}; \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq c - \frac{a}{2}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq a + b + c - \frac{a+b+c}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

Bài toán được giải quyết. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 5.5: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a+1}{b^2+1} = a+1 - \frac{(a+1)b^2}{b^2+1} \geq a+1 - \frac{(a+1)b^2}{2b} = a+1 - \frac{ab+b}{2}$$

Tương tự ta có: $\frac{b+1}{c^2+1} \geq b+1 - \frac{bc+c}{2}$; $\frac{c+1}{a^2+1} \geq c+1 - \frac{ca+a}{2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} &\geq a+b+c+3 - \frac{a+b+c+ab+bc+ca}{2} \\ &= \frac{a+b+c}{2} + 3 - \frac{ab+bc+ca}{2} \end{aligned}$$

Mà theo một đánh giá quen thuộc ta có $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$

Do vậy ta được $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 5.6: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2c+1} + \frac{b}{c^2a+1} + \frac{c}{a^2b+1} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a}{b^2c+1} = a - \frac{ab^2c}{b^2c+1} \geq a - \frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}} = a - \frac{ab\sqrt{c}}{2} = a - \frac{b\sqrt{a(ac)}}{2} \geq a - \frac{b(a+ac)}{4}$$

Suy ra ta có $\frac{a}{b^2c+1} \geq a - \frac{1}{4}(ab+abc)$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{b}{c^2a+1} \geq b - \frac{1}{4}(bc+abc); \quad \frac{c}{a^2b+1} \geq c - \frac{1}{4}(ca+abc)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{b^2c+1} + \frac{b}{c^2a+1} + \frac{c}{a^2b+1} \geq 3 - \frac{ab+bc+ca}{4} - \frac{3abc}{4}$$

Mặt khác ta có theo một đánh giá quen thuộc ta được

$$3 = \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab+bc+ca \Leftrightarrow \frac{3}{4} \geq \frac{ab+bc+ca}{4}$$

Và $3 = a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow \frac{3}{4} \geq \frac{3abc}{4}$

Do đó ta được

$$\frac{a}{b^2c+1} + \frac{b}{c^2a+1} + \frac{c}{a^2b+1} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \geq 3 \text{ hay } \frac{a}{b^2c+1} + \frac{b}{c^2a+1} + \frac{c}{a^2b+1} \geq \frac{3}{2}$$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 5.7: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ac = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{2b^3 + 1} + \frac{b}{2c^3 + 1} + \frac{c}{2a^3 + 1} \geq 1$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a}{2b^3 + 1} = a - \frac{2ab^3}{b^3 + b^3 + 1} \geq a - \frac{ab^3}{3b^2} = a - \frac{2ab}{3}$$

Tương tự ta có $\frac{b}{2c^3 + 1} \geq b - \frac{2bc}{3}$; $\frac{c}{2a^3 + 1} \geq c - \frac{2ca}{3}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{2b^3 + 1} + \frac{b}{2c^3 + 1} + \frac{c}{2a^3 + 1} \geq a + b + c - \frac{2(ab + bc + ca)}{3} = a + b + c - 2$$

Mặt khác ta lại có

$$\frac{(a + b + c)^2}{3} \geq ab + bc + ca \Rightarrow a + b + c \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)} = 3$$

Do đó ta được $\frac{a}{2b^3 + 1} + \frac{b}{2c^3 + 1} + \frac{c}{2a^3 + 1} \geq 1$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 5.8: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a + 2b^2} + \frac{b^2}{b + 2c^2} + \frac{c^2}{c + 2a^2} \geq 1$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a^2}{a + 2b^2} = a - \frac{2ab^2}{a + b^2 + b^2} \geq a - \frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}} = a - \frac{2}{3}\sqrt[3]{(ab)^2}$$

Tương tự ta có

$$\frac{b^2}{b + 2c^2} \geq b - \frac{2}{3}\sqrt[3]{(bc)^2}; \quad \frac{c^2}{c + 2a^2} \geq c - \frac{2}{3}\sqrt[3]{(ca)^2}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a + 2b^2} + \frac{b^2}{b + 2c^2} + \frac{c^2}{c + 2a^2} &\geq a + b + c - \frac{2}{3} \left[\sqrt[3]{(ab)^2} + \sqrt[3]{(bc)^2} + \sqrt[3]{(ca)^2} \right] \\ &= 3 - \frac{2}{3} \left[\sqrt[3]{(ab)^2} + \sqrt[3]{(bc)^2} + \sqrt[3]{(ca)^2} \right] \end{aligned}$$

Mặt khác ta có $\sqrt[3]{(ab)^2} = \sqrt[3]{a \cdot ab \cdot b} \leq \frac{a + ab + b}{3}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\sqrt[3]{(bc)^2} \leq \frac{b + bc + c}{3}$; $\sqrt[3]{(ca)^2} \leq \frac{c + ca + a}{3}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(ab)^2} + \sqrt[3]{(bc)^2} + \sqrt[3]{(ca)^2} &\leq \frac{2}{3}(a + b + c) + \frac{1}{3}(ab + bc + ca) \\ &\leq \frac{2}{3}(a + b + c) + \frac{1}{3} \cdot \frac{(a + b + c)^2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3^2}{3} = 3 \end{aligned}$$

Suy ra ta có
$$\frac{2}{3} \left[\sqrt[3]{(ab)^2} + \sqrt[3]{(bc)^2} + \sqrt[3]{(ca)^2} \right] \leq \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$$

Do đó ta được
$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1$$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 5.9: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+2b^3} + \frac{b^2}{b+2c^3} + \frac{c^2}{c+2a^3} \geq 1$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a^2}{a+2b^3} = a - \frac{2ab^3}{a+b^3+b^3} \geq a - \frac{2ab^3}{3\sqrt[3]{ab^6}} = a - \frac{2}{3}b\sqrt[3]{a^2}$$

Tương tự ta có
$$\frac{b^2}{b+2c^3} \geq b - \frac{2}{3}c\sqrt[3]{b^2}; \quad \frac{c^2}{c+2a^3} \geq c - \frac{2}{3}a\sqrt[3]{c^2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+2b^3} + \frac{b^2}{b+2c^3} + \frac{c^2}{c+2a^3} &\geq a + b + c - \frac{2}{3} \left(b\sqrt[3]{a^2} + c\sqrt[3]{b^2} + a\sqrt[3]{c^2} \right) \\ &\geq 3 - \frac{2}{3} \left(b\sqrt[3]{a^2} + c\sqrt[3]{b^2} + a\sqrt[3]{c^2} \right) \end{aligned}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$b\sqrt[3]{a^2} = b\sqrt[3]{a \cdot a \cdot 1} \leq b \left(\frac{a+a+1}{3} \right) = b \left(\frac{2a+1}{3} \right) = \frac{2ab+b}{3}$$

Tương tự ta có
$$c\sqrt[3]{b^2} \leq \frac{2bc+c}{3}; \quad a\sqrt[3]{c^2} \leq \frac{2ca+a}{3}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$b\sqrt[3]{a^2} + c\sqrt[3]{b^2} + a\sqrt[3]{c^2} \leq \frac{a+b+c}{3} + \frac{2}{3}(ab+bc+ca) \leq \frac{a+b+c}{3} + \frac{2(a+b+c)^2}{3 \cdot 3} = 3$$

Do đó ta có
$$\frac{a^2}{a+2b^3} + \frac{b^2}{b+2c^3} + \frac{c^2}{c+2a^3} \geq 1$$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 5.10: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} = a - \frac{a^2b+ab^2}{a^2+ab+b^2} \geq a - \frac{ab(a+b)}{3ab} = a - \frac{a+b}{3} = \frac{2a-b}{3}$$

Tương tự ta có
$$\frac{b^3}{b^2+bc+c^2} \geq \frac{2b-c}{3}; \quad \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{2c-a}{3}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 5.11: Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + d = 4$.

Chứng minh rằng:
$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+d^2} + \frac{d}{1+a^2} \geq 2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a}{1+b^2} = \frac{a(1+b^2) - ab^2}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab}{2}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}; \quad \frac{c}{1+d^2} \geq c - \frac{cd}{2}; \quad \frac{d}{1+a^2} \geq d - \frac{da}{2}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+d^2} + \frac{d}{1+a^2} \geq 4 - \frac{ab+bc+cd+da}{2}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{ab+bc+cd+da}{2} = \frac{(a+c)(b+d)}{2} \leq \frac{(a+b+c+d)^2}{8} = 2$$

Do vậy ta được
$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+d^2} + \frac{d}{1+a^2} \geq 2$$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$

Ví dụ 5.12: Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq 2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{a^2+1} = \frac{(a^2+1) - a^2}{a^2+1} = 1 - \frac{a^2}{a^2+1} \geq 1 - \frac{a^2}{2a} = 1 - \frac{a}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{b^2+1} \geq 1 - \frac{b}{2}; \quad \frac{1}{c^2+1} \geq 1 - \frac{c}{2}; \quad \frac{1}{d^2+1} \geq 1 - \frac{d}{2}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq 2$$

Bài toán được giải quyết. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$

Ví dụ 5.13: Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geq 2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a}{1+b^2c} = \frac{a(1+b^2c) - ab^2c}{1+b^2c} = a - \frac{ab^2c}{1+b^2c} \geq a - \frac{ab^2c}{2b\sqrt{c}} = a - \frac{ab\sqrt{c}}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{b}{1+c^2d} \geq b - \frac{bc\sqrt{d}}{2}; \quad \frac{c}{1+d^2a} \geq c - \frac{cd\sqrt{a}}{2}; \quad \frac{d}{1+a^2b} \geq d - \frac{da\sqrt{b}}{2}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geq 4 - \left(\frac{ab\sqrt{c}}{2} + \frac{bc\sqrt{d}}{2} + \frac{cd\sqrt{a}}{2} + \frac{da\sqrt{b}}{2} \right)$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{b\sqrt{a \cdot ac}}{2} \leq \frac{b(a+ac)}{4}$

Tương tự ta được

$$\frac{b\sqrt{a \cdot ac} + c\sqrt{b \cdot bd} + d\sqrt{c \cdot ca} + a\sqrt{d \cdot db}}{2} \leq \frac{ab + bc + cd + da + abc + bcd + cda + dab}{4}$$

Mà ta có $\frac{ab + bc + cd + da}{4} = \frac{(a+c)(b+d)}{4} \leq \frac{(a+c+b+d)^2}{16} = 1$ và

$$\begin{aligned} \frac{abc + bcd + cda + dab}{4} &= \frac{bc(a+d) + da(b+c)}{4} \\ &\leq \frac{(a+d)(b+c)^2 + (b+c)(a+d)^2}{16} \leq \frac{(a+b+c+d)^3}{4 \cdot 16} = 1 \end{aligned}$$

Do đó ta được $\frac{a}{1+b^2c} + \frac{b}{1+c^2d} + \frac{c}{1+d^2a} + \frac{d}{1+a^2b} \geq 2$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$

6. Kỹ thuật đổi biến số

Trong bất đẳng thức, có một quy luật chung, đó là “Trong một dạng cụ thể, thì những bất đẳng thức càng nhiều biến càng khó”. Điều này cũng đồng nghĩa với việc khẳng định “Bài toán sẽ trở nên đơn giản hơn nếu ta đưa được một bất đẳng thức nhiều biến về dạng ít biến hơn” Kỹ thuật đổi biến chính là một công cụ hữu ích để thực hiện ý tưởng này.

Ví dụ 6.1: Cho a, b là hai số thực khác 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 3$$

Phân tích: Nhìn vào bất đẳng thức cần chứng minh ta thấy hai hạng tử sau ở vế trái có vẻ như tạo ra được nghịch đảo của hạng tử thứ nhất. Vì vậy ta thử phân tích tổng hai hạng tử đó để xem kết quả có như dự đoán hay không.

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - 2a^2b^2}{a^2b^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2b^2} - 2$$

Với kết quả như vậy ta có thể sử dụng cách đặt ẩn phụ để đưa bất đẳng thức cần chứng minh về bất đẳng thức đơn giản hơn.

Lời giải

Để ý rằng bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2b^2} \geq 5$$

Đặt $t = \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2b^2}$ ta có $t \geq 4$. Từ đó suy ra $\frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{4}{t}$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$t + \frac{t}{4} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 5t + 4}{t} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)(t-4)}{t} \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do $t \geq 4$. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \pm b$

Ví dụ 6.2: Cho các số thực $a, b, c > 2$ thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Chứng minh rằng :

$$(a-2)(b-2)(c-2) \leq 1$$

Phân tích: Để triệt tiêu các dấu trừ trong bất đẳng thức cần chứng minh ta có thể đổi biến $x = a - 2$; $y = b - 2$; $z = c - 2$, khi đó giả thiết trở thành $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2} = 1$ và ta cần chứng minh $xyz \leq 1$. Đây là một bất đẳng thức có thể chứng minh bằng cách ghép cặp đối xứng. Tuy nhiên trong lời giải dưới đây ta chứng minh bài toán bằng kỹ thuật đổi biến.

Lời giải

Đặt $x = a - 2$; $y = b - 2$; $z = c - 2$ với x, y, z là các số thực dương. Bài toán quy về chứng minh $xyz \leq 1$ với $x, y, z > 0$ thỏa mãn

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} + \frac{y}{y+2} + \frac{z}{z+2} = 1$$

Đến đây ta đặt tiếp $m = \frac{x}{x+2}$; $n = \frac{y}{y+2}$; $p = \frac{z}{z+2} \Leftrightarrow m + n + p = 1$

Khi đó ta có $\frac{1}{m} = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{1}{m} - 1 = \frac{n+p}{m} \Rightarrow x = \frac{2m}{n+p}$

Tương tự ta được $y = \frac{2n}{p+m}$; $z = \frac{2p}{m+n}$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{2m}{n+p} \cdot \frac{2n}{p+m} \cdot \frac{2p}{m+n} \leq 1 \Leftrightarrow (m+n)(n+p)(p+m) \geq 8mnp$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$(m+n)(n+p)(p+m) \geq 2\sqrt{mn} \cdot 2\sqrt{np} \cdot 2\sqrt{pm} = 8mnp$$

Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$m = n = p \Leftrightarrow a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 3$$

Ví dụ 6.3: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1} \geq 1$$

Phân tích: Giả thiết $abc = 1$ gợi ý cho ta cách đổi biến $a = \frac{x}{y}$; $b = \frac{y}{z}$; $c = \frac{z}{x}$ với x, y, z là các số thực dương.

Lời giải

Đặt $a = \frac{x}{y}$; $b = \frac{y}{z}$; $c = \frac{z}{x}$ với x, y, z là các số thực dương. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{2\frac{x}{y}+1} + \frac{1}{2\frac{y}{z}+1} + \frac{1}{2\frac{z}{x}+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} + \frac{x}{2z+x} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$\frac{y}{2x+y} = \frac{y(2z+y)}{(2x+y)(2z+y)} \geq \frac{y(2z+y)}{\frac{[(2x+y)+(2z+y)]^2}{4}} = \frac{y(2z+y)}{(x+y+z)^2}$$

Tương tự ta có $\frac{z}{2x+y} \geq \frac{z(2x+z)}{(x+y+z)^2}; \frac{x}{2z+x} \geq \frac{x(2y+x)}{(x+y+z)^2}$

Cộng ba bất đẳng thức này lại về theo về, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} + \frac{x}{2z+x} &\geq \frac{y(2z+y) + z(2x+z) + x(2y+x)}{(x+y+z)^2} \\ &= \frac{2(xy+yz+zx) + x^2 + y^2 + z^2}{(x+y+z)^2} = 1 \end{aligned}$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 6.4: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $abc = 1$. chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1$$

Phân tích: Ta nhận thấy sự tương tự của bất đẳng thức trên với bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^3+b^3+1} + \frac{1}{b^3+c^3+1} + \frac{1}{c^3+a^3+1} \leq 1$$

Do đó ý tưởng đầu tiên đó ta đặt $x^3 = a; y^3 = b; z^3 = c$, khi này ta vẫn được $xyz = 1$ và khi đó ta viết lại được bất đẳng thức cần chứng minh

$$\frac{1}{x^3+y^3+1} + \frac{1}{y^3+z^3+1} + \frac{1}{z^3+x^3+1} \leq 1$$

Ngoài ra từ giả thiết $abc = 1$, ta có thể sử dụng các phép đổi như sau

$$a = \frac{x}{y}; b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x}, a = \frac{x^2}{yz}; b = \frac{y^2}{zx}; c = \frac{z^2}{xy}; a = \frac{yz}{x^2}; b = \frac{zx}{y^2}; c = \frac{xy}{z^2}$$

Lời giải

Đặt $x^3 = a; y^3 = b; z^3 = c$, khi đó ta được $xyz = 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{x^3+y^3+1} + \frac{1}{y^3+z^3+1} + \frac{1}{z^3+x^3+1} \leq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 + y^2 - xy) \geq xy(x+y)$$

Khi đó ta được $\frac{1}{x^3+y^3+1} \leq \frac{1}{xy(x+y) + xyz} = \frac{z}{x+y+z}$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{1}{x^3+y^3+1} + \frac{1}{y^3+z^3+1} + \frac{1}{z^3+x^3+1} \leq \frac{z}{x+y+z} + \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 6.5: Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta thấy vế phải chứa căn bậc ba. Do đó điều đầu tiên ta nghĩ đến là làm mất các căn bậc ba này và ta có hai ý tưởng đổi biến để làm mất căn bậc ba là

- Đặt $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{x^3(y^3+1)} + \frac{1}{y^3(z^3+1)} + \frac{1}{z^3(x^3+1)} \geq \frac{3}{xyz(xyz+1)}$$

- Đặt $abc = k^3$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{k(1+k)}$$

Ta thử chứng minh bài toán với các cách đổi biến trên như sau

Lời giải

Đặt $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{x^3(y^3+1)} + \frac{1}{y^3(z^3+1)} + \frac{1}{z^3(x^3+1)} \geq \frac{3}{xyz(xyz+1)}$$

Ta có

$$\begin{aligned} M &= 3 + (1 + x^3 y^3 z^3) \left(\frac{1}{x^3(y^3+1)} + \frac{1}{y^3(z^3+1)} + \frac{1}{z^3(x^3+1)} \right) \\ &= \frac{1}{x^3(y^3+1)} + \frac{1}{y^3(z^3+1)} + \frac{1}{z^3(x^3+1)} + \frac{x^3 y^3}{x^3+1} + \frac{y^3 z^3}{y^3+1} + \frac{z^3 x^3}{z^3+1} + 3 \\ &= \frac{1+x^3}{x^3(y^3+1)} + \frac{1+y^3}{y^3(z^3+1)} + \frac{1+z^3}{z^3(x^3+1)} + \frac{y^3(x^3+1)}{(1+y^3)} + \frac{z^3(y^3+1)}{(1+z^3)} + \frac{x^3(z^3+1)}{(1+z^3)} \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \frac{1+x^3}{x^3(y^3+1)} + \frac{1+y^3}{y^3(z^3+1)} + \frac{1+z^3}{z^3(x^3+1)} &\geq \frac{3}{xyz} \\ \frac{y^3(x^3+1)}{(1+y^3)} + \frac{z^3(y^3+1)}{(1+z^3)} + \frac{x^3(z^3+1)}{(1+z^3)} &\geq 3xyz \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó suy ra } M \geq 3xyz + \frac{3}{xyz} \Rightarrow (1 + x^3 y^3 z^3)P \geq 3xyz + \frac{3}{xyz} - 3$$

Mặt khác ta lại có

$$\frac{3}{xyz(xyz+1)} \cdot (x^3 y^3 z^3 + 1) = \frac{3(x^2 y^2 z^2 - xyz + 1)}{xyz} = 3xyz - 3 + \frac{3}{xyz}$$

Do đó ta được

$$(1 + x^3 y^3 z^3)P \geq (1 + x^3 y^3 z^3) \frac{3}{xyz(xyz+1)} \Leftrightarrow P \geq \frac{3}{xyz(xyz+1)}$$

Chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Nhận xét: Ta cũng có thể chứng minh bài toán trên theo cách sau

Với cách đặt $abc = k^3$, khi đó tồn tại các số thực dương x, y, z sao cho

$$a = \frac{ky}{x}; b = \frac{kz}{y}; c = \frac{kx}{z}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\frac{ky}{x} \left(\frac{kz}{y} + 1 \right)} + \frac{1}{\frac{kz}{y} \left(\frac{kx}{z} + 1 \right)} + \frac{1}{\frac{kx}{z} \left(\frac{ky}{x} + 1 \right)} \geq \frac{3}{k(k+1)}$$

Hay

$$\frac{x}{y+kz} + \frac{y}{z+kx} + \frac{z}{x+ky} \geq \frac{3}{k+1}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta được

$$\begin{aligned} \frac{x}{y+kz} + \frac{y}{z+kx} + \frac{z}{x+ky} &= \frac{x^2}{x(y+kz)} + \frac{y^2}{y(z+kx)} + \frac{z^2}{z(x+ky)} \\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{x(y+kz) + y(z+kx) + z(x+ky)} \\ &= \frac{(x+y+z)^2}{(k+1)(xy+yz+zx)} \geq \frac{3}{k+1} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 6.6: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b}{a\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{b\sqrt{c^2+1}} + \frac{a}{c\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{3}{2}$$

Phân tích: Ta viết lại giả thiết thành $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$, điều này gợi ý cho ta các đặt biến phụ

$x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$. Khi đó giả thiết của bài toán trở thành $xy + yz + zx = 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{x}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+1}} \geq \frac{3}{2}$. Chú ý đến

$xy + yz + zx = 1$ ta viết được $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2 + xy + yz + zx} = \sqrt{(x+y)(x+z)}$ khi đó ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh là

$$\frac{x}{\sqrt{(y+x)(y+z)}} + \frac{y}{\sqrt{(z+x)(z+y)}} + \frac{z}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \geq \frac{3}{2}$$

Đến đây ta sử dụng đánh giá Cauchy để giải quyết bài toán.

Lời giải

Từ giả thiết $a + b + c = abc$ suy ra $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$.

Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$, Khi đó giả thiết của bài toán trở thành $xy + yz + zx = 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{x}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+1}} \geq \frac{3}{2}$.

Dễ thấy $\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + xy + yz + zx} = \sqrt{(x + y)(x + z)}$

Tương tự ta được $\sqrt{y^2 + 1} = \sqrt{(y + z)(y + x)}$; $\sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{(z + x)(z + y)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{y^2 + 1}} + \frac{y}{\sqrt{z^2 + 1}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \frac{x}{\sqrt{(y + x)(y + z)}} + \frac{y}{\sqrt{(z + x)(z + y)}} + \frac{z}{\sqrt{(x + y)(x + z)}} \\ &\geq \frac{2x}{x + 2y + z} + \frac{2y}{x + y + 2z} + \frac{2z}{2x + y + z} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $\frac{2x}{x + 2y + z} + \frac{2y}{x + y + 2z} + \frac{2z}{2x + y + z} \geq \frac{3}{2}$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x + 2y + z} + \frac{2y}{x + y + 2z} + \frac{2z}{2x + y + z} &= \frac{2x^2}{x(x + 2y + z)} + \frac{2y^2}{y(x + y + 2z)} + \frac{2z^2}{z(2x + y + z)} \\ &\geq \frac{2(x + y + z)^2}{(x + y + z)^2 + xy + yz + zx} \geq \frac{2(x + y + z)^2}{(x + y + z)^2 + \frac{(x + y + z)^2}{3}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \sqrt{3}$.

Ví dụ 6.7: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a + b + 3c}{3a + 3b + 2c} + \frac{a + 3b + c}{3a + 2b + 3c} + \frac{3a + b + c}{2a + 3b + 3c} \geq \frac{15}{8}$$

Phân tích: Để đơn giản hóa các đại lượng về trái ta có thể đặt

$$\begin{cases} x = 2a + 3b + 3c \\ y = 3a + 2b + 3c \\ z = 3a + 3b + 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3y + 3z - 5x}{8} \\ b = \frac{3z + 3x - 5y}{8} \\ c = \frac{3x + 3y - 5z}{8} \end{cases}$$

Khi đó ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{7}{8} \left(\frac{x + y}{z} + \frac{y + z}{x} + \frac{z + x}{y} \right) - \frac{27}{8} \geq \frac{15}{8}$$

Đến đây ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy để đánh giá tiếp.

Lời giải

Đặt $x = 2a + 3b + 3c$; $y = 3a + 2b + 3c$; $z = 3a + 3b + 2c$, khi đó ta được

$$a = \frac{3y + 3z - 5x}{8}; b = \frac{3z + 3x - 5y}{8}; c = \frac{3x + 3y - 5z}{8}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{7}{8} \left(\frac{x + y}{z} + \frac{y + z}{x} + \frac{z + x}{y} \right) - \frac{27}{8} \geq \frac{15}{8}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta chứng minh được

$$\frac{x + y}{z} + \frac{y + z}{x} + \frac{z + x}{y} \geq 6$$

Do đó ta được
$$\frac{7}{8} \left(\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} \right) - \frac{27}{8} \geq \frac{7.6}{8} - \frac{27}{8} = \frac{15}{8}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 6.8: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+4a} + \frac{c+a}{a+c+16b} \geq \frac{16}{15}$$

Lời giải

Đặt
$$\begin{cases} x = a + b + c \\ y = b + c + 4a \\ z = c + a + 16b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = y - x \\ 15b = z - x \\ 15c = 21x - 5y - z \end{cases}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{-6x + 5y + z}{15x} + \frac{20x - 5y}{15y} + \frac{16x - z}{15z} \geq \frac{16}{15}$$

Hay
$$\frac{y}{3x} + \frac{3x}{4y} + \frac{z}{15x} + \frac{16x}{15z} \geq \frac{16}{15} + \frac{4}{5} = \frac{28}{15}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{y}{3x} + \frac{4x}{3y} \geq \frac{4}{3}; \quad \frac{z}{15x} + \frac{16x}{15z} \geq \frac{8}{15}$$

Do đó ta được
$$\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+4a} + \frac{c+a}{a+c+16b} \geq \frac{16}{15}$$
. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{y}{3x} = \frac{4x}{3y} \\ \frac{z}{15x} = \frac{16x}{15z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5c}{7} \\ b = \frac{3c}{7} \end{cases}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 6.9: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) \geq \frac{3}{2} \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right)$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta chưa thấy có dấu hiệu đặt biến phụ, do đó ta cần phải biến đổi bất đẳng thức trước. Ở đây ta chọn biến đổi về trái trước

$$(a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) = 3 + \frac{a^3 + b^3}{c^3} + \frac{b^3 + c^3}{a^3} + \frac{c^3 + a^3}{b^3}$$

Quan sát biểu thức sau khi biến đổi ta thấy cần phải đánh giá $\frac{a^3 + b^3}{c^3}$ về $\left(\frac{a+b}{c} \right)^3$, điều này có

nghĩa là ta cần chứng minh được $a^3 + b^3 \geq k(a+b)^3$, chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta tìm được

$k = \frac{1}{4}$. Như vậy ta đi chứng minh $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}(a+b)^3$, đây là một đánh giá đúng và có thể chứng minh bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy.

Đến đây ta có thể đặt $x = \frac{a+b}{c}$; $y = \frac{b+c}{a}$; $z = \frac{c+a}{b}$ và bất đẳng thức cần chứng minh

được viết lại thành $3 + \frac{x^3 + y^3 + z^3}{4} \geq \frac{3(x+y+z)}{2}$. Chú ý lúc này đẳng thức xảy ra tại $x = y = z = 2$ và ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy để chứng minh bài toán trên.

Lời giải

Bất đẳng thức được viết lại là

$$3 + \frac{a^3 + b^3}{c^3} + \frac{b^3 + c^3}{a^3} + \frac{c^3 + a^3}{b^3} \geq \frac{3}{2} \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$4(a^3 + b^3) = a^3 + b^3 + 3(a^3 + b^3) = a^3 + b^3 + 3(a+b)(a^2 + b^2 - ab) \\ \geq a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = (a+b)^3$$

Suy ra
$$\frac{a^3 + b^3}{c^3} \geq \frac{(a+b)^3}{4c^3}$$

Áp dụng tương tự ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^3 + b^3}{c^3} + \frac{b^3 + c^3}{a^3} + \frac{c^3 + a^3}{b^3} \geq \frac{(a+b)^3}{4c^3} + \frac{(b+c)^3}{4a^3} + \frac{(c+a)^3}{4b^3}$$

Ta cần chứng minh

$$3 + \frac{(a+b)^3}{4c^3} + \frac{(b+c)^3}{4a^3} + \frac{(c+a)^3}{4b^3} \geq \frac{3}{2} \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right)$$

Đặt $x = \frac{a+b}{c}$; $y = \frac{b+c}{a}$; $z = \frac{c+a}{b}$, bất đẳng thức trở thành

$$3 + \frac{x^3 + y^3 + z^3}{4} \geq \frac{3(x+y+z)}{2}$$

Hay
$$12 + x^3 + y^3 + z^3 \geq 6(x+y+z)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$x^3 + 8 + 8 \geq 12x; y^3 + 8 + 8 \geq 12y; z^3 + 8 + 8 \geq 12z$$

Suy ra

$$x^3 + y^3 + z^3 + 48 \geq 12(x+y+z) = 6(x+y+z) + 6(x+y+z) \\ \geq 6(x+y+z) + 36$$

Hay
$$12 + x^3 + y^3 + z^3 \geq 6(x+y+z)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 6.10: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)^2 \geq \frac{3}{2} \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right)$$

Phân tích: Cũng tương tự như ví dụ trên ta cần biến đổi bất đẳng thức trước khi đưa ra cách đổi biến. Trong ví dụ này ta chọn các biến đổi về phải

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b}$$

Lúc này để ý ta thấy cả hai vế xuất hiện các đại lượng $\frac{a}{b}; \frac{b}{c}; \frac{c}{a}$, lại để ý ta nhận thấy rằng

$\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}; \frac{b}{a} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}; \frac{c}{b} = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b}$. Do đó ta có thể đặt $x = \frac{a}{b}; y = \frac{b}{c}; z = \frac{c}{a}$, khi đó ta được $xyz = 1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$(x + y + z)^2 = \frac{3(xy + yz + zx + x + y + z)}{2}$$

Đến đây ta có lời giải sau

Lời giải

Đặt $x = \frac{a}{b}; y = \frac{b}{c}; z = \frac{c}{a}$ suy ra $xyz = 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$(x + y + z)^2 = \frac{3(xy + yz + zx + x + y + z)}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$

Nên $(x + y + z)^2 \geq 3(x + y + z)$

Ta cũng có $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$

Do đó ta được $2(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) + 3(x + y + z)$

Hay $(x + y + z)^2 = \frac{3(xy + yz + zx + x + y + z)}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 6.11: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $c = 8ab$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a + 2b + 3} + \frac{c}{4bc + 3c + 2} + \frac{c}{2ac + 3c + 4} \leq \frac{1}{2}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy sự khác biệt của giả thiết cũng như bất đẳng thức cần chứng minh so với các ví dụ ở trên. Từ bất đẳng thức cần chứng minh ta thấy vai trò của a, b như nhau. Do đó ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b$. Mặt khác ta thấy tử của biểu thức thứ hai và thứ ba có biến c , do đó nếu ta viết lại hai biểu thức đó như biểu thức thứ nhất thì dưới mẫu xuất hiện đại lượng $\frac{1}{c}$,

do đó rất tự nhiên ta nghĩ đẳng thức xảy ra tại $a = b = \frac{1}{c}$, khi này ta viết lại giả thiết là $8ab \frac{1}{c} = 1$. Đến

đây ta thấy được cách đặt là $x = 2a; y = 2b; z = \frac{2}{c}$ và bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{1}{2x + y + 3} + \frac{1}{2y + z + 3} + \frac{1}{2z + x + 3} \leq \frac{1}{2}$$

Tuy nhiên từ hình thức của bất đẳng thức ta thấy tương tự bất đẳng thức quen thuộc

$$\frac{1}{2x^2 + y^2 + 3} + \frac{1}{2y^2 + z^2 + 3} + \frac{1}{2z^2 + x^2 + 3} \leq \frac{1}{2}$$

Do đó ta chọn cách đặt $x^2 = 2a; y^2 = 2b; z^2 = \frac{2}{c}$ để đưa bài toán về dạng quen thuộc.

Lời giải

Đặt $x^2 = 2a$; $y^2 = 2b$; $z^2 = \frac{2}{c}$. Khi đó từ giả thiết ta được $xyz = 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$P = \frac{1}{2x^2 + y^2 + 3} + \frac{1}{2y^2 + z^2 + 3} + \frac{1}{2z^2 + x^2 + 3} \leq \frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$2x^2 + y^2 + 3 = x^2 + y^2 + x^2 + 1 + 2 \geq 2(xy + x + 1)$$

Do đó ta được

$$P \leq \frac{1}{2(xy + x + 1)} + \frac{1}{2(yz + y + 1)} + \frac{1}{2(zx + z + 1)}$$

Ta chứng minh $\frac{1}{xy + x + 1} + \frac{1}{yz + y + 1} + \frac{1}{zx + z + 1} = 1$ theo các cách sau

Cách 1: Do $xyz = 1$, nên tồn tại các số dương x, y, z để $x = \frac{m}{n}$; $y = \frac{n}{p}$; $z = \frac{p}{m}$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{xy + x + 1} + \frac{1}{yz + y + 1} + \frac{1}{zx + z + 1} &= \frac{1}{\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + 1} + \frac{1}{\frac{n}{m} + \frac{n}{p} + 1} + \frac{1}{\frac{p}{n} + \frac{m}{m} + 1} \\ &= \frac{np}{mn + np + pm} + \frac{pm}{mn + np + pm} + \frac{mn}{mn + np + pm} = 1 \end{aligned}$$

Cách 2: Do $xyz = 1$, nên ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{xy + x + 1} + \frac{1}{yz + y + 1} + \frac{1}{zx + z + 1} &= \frac{xyz}{xy + x + xyz} + \frac{1}{yz + y + 1} + \frac{y}{xyz + yz + y} \\ &= \frac{yz}{yz + y + 1} + \frac{1}{yz + y + 1} + \frac{y}{yz + y + 1} = 1 \end{aligned}$$

Suy ra $P \leq \frac{1}{2}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$ hay $a = b = \frac{1}{2}$; $c = 2$.

Ví dụ 6.13: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 2abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(2a-1)^2} + \frac{1}{b(2b-1)^2} + \frac{1}{c(2c-1)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Phân tích: Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{3}{2}$. Giả thiết của bài toán được viết

lại thành $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$, khi đó để đơn giản hóa giả thiết ta có thể đổi biến $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, khi này giả thiết mới là $x + y + z = 2$ với $0 < x, y, z < 2$. Cũng từ cách đặt trên ta suy ra được

$a = \frac{1}{x}$; $b = \frac{1}{y}$; $c = \frac{1}{z}$, thay vào bất đẳng thức cần chứng minh thì được

$$\frac{x^3}{(2-x)^2} + \frac{y^3}{(2-y)^2} + \frac{z^3}{(2-z)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Đến đây ta có thể chứng minh bất đẳng thức bằng cách thêm bớt hoặc sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức.

Lời giải

Từ giả thiết $ab + bc + ca = 2abc$ suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$.

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, khi đó ta có $x + y + z = 2$.

Bất đẳng thức được viết lại là $\frac{x^3}{(2-x)^2} + \frac{y^3}{(2-y)^2} + \frac{z^3}{(2-z)^2} \geq \frac{1}{2}$

Hay $\frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{z^3}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y+z}{8} + \frac{y+z}{8} \geq \frac{3x}{4}$$

$$\frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{z+x}{8} + \frac{z+x}{8} \geq \frac{3y}{4}$$

$$\frac{z^3}{(x+y)^2} + \frac{x+y}{8} + \frac{x+y}{8} \geq \frac{3z}{4}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{z^3}{(x+y)^2} + \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3(x+y+z)}{4}$$

Hay $\frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{z^3}{(x+y)^2} \geq \frac{x+y+z}{4} = \frac{1}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{3}{2}$.

Nhận xét: Ngoài cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy thì ta cũng có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

Ví dụ 6.14: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{ca^2 + 2c^2} + \frac{b^2}{ab^2 + 2a^2} + \frac{c^2}{bc^2 + 2b^2} \geq 1$

Lời giải

Từ giả thiết $ab + bc + ca = 3abc$ ta được $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$.

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$. Khi đó ta được $x + y + z = 3$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{x^2}{x + 2y^2} + \frac{y^2}{y + 2z^2} + \frac{z^2}{z + 2x^2} \geq 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x^2}{x+2y^2} = \frac{x^2 + 2xy^2 - 2xy^2}{x+2y^2} = x - \frac{2xy^2}{x+y^2+y^2} \geq x - \frac{2xy^2}{2\sqrt[3]{x^2y^2}} = x - \frac{2\sqrt[3]{x^2y^2}}{3}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{y^2}{y+2z^2} \geq y - \frac{2\sqrt[3]{y^2z^2}}{3}; \quad \frac{z^2}{z+2x^2} \geq z - \frac{2\sqrt[3]{z^2x^2}}{3}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^2}{x+2y^2} + \frac{y^2}{y+2z^2} + \frac{z^2}{z+2x^2} \geq (x+y+z) - \frac{2}{3}(\sqrt[3]{x^2y^2} + \sqrt[3]{y^2z^2} + \sqrt[3]{z^2x^2})$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^2y^2} &\leq \frac{xy + xy + 1}{3} = \frac{2xy + 1}{3} \\ \sqrt[3]{y^2z^2} &\leq \frac{yz + yz + 1}{3} = \frac{2yz + 1}{3} \\ \sqrt[3]{z^2x^2} &\leq \frac{zx + zx + 1}{3} = \frac{2zx + 1}{3}\end{aligned}$$

Suy ra
$$\sqrt[3]{x^2y^2} + \sqrt[3]{y^2z^2} + \sqrt[3]{z^2x^2} \leq \frac{2(xy + yz + zx)}{3} + 1 \leq \frac{2(x+y+z)^2}{9} + 1 = 3$$

Do đó ta được
$$\frac{x^2}{x+2y^2} + \frac{y^2}{y+2z^2} + \frac{z^2}{z+2x^2} \geq 3 - \frac{2 \cdot 3}{3} = 1.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 6.15: Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} = 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt{b+3c}} + \frac{1}{\sqrt{c+3a}} \leq 1$$

Phân tích: Trước hết ta đơn giản hóa giả thiết bằng cách đặt $x = \sqrt{a}$; $y = \sqrt{b}$; $z = \sqrt{c}$, khi này giả

thiết được viết lại thành $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+3z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+3x^2}} \leq 1$$

Chú ý đến giả thiết $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh là

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+3z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+3x^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

Để ý theo bất đẳng thức Cauchy ta có $x^2 + 3y^2 = x^2 + y^2 + y^2 + y^2 \geq 4\sqrt[4]{x^2y^6}$, như vậy ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}} \leq \frac{1}{2\sqrt[4]{x^2y^6}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^2y^2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{y^4}} \right) \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{y} \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y} \right)$$

Đến đây áp dụng tương tự ta được

Lời giải

Đặt $x = \sqrt{a}$; $y = \sqrt{b}$; $z = \sqrt{c}$. Khi đó ta được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + 3z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + 3x^2}} \leq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$x^2 + 3y^2 = x^2 + y^2 + y^2 + y^2 \geq 4\sqrt{x^2 y^6}$$

Áp dụng một bất đẳng thức Cauchy khác ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} &\leq \frac{1}{2\sqrt[4]{x^2 y^6}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{x^2 y^2} \cdot \sqrt[4]{y^4}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^2 y^2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{y^4}} \right) \\ &\leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{y} \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y} \right) \end{aligned}$$

Tương tự ta có $\frac{1}{\sqrt{y^2 + 3z^2}} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{y} + \frac{3}{z} \right)$; $\frac{1}{\sqrt{z^2 + 3x^2}} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{z} + \frac{3}{x} \right)$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + 3z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + 3x^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{9}{4}$

Nhận xét: Ta có thể sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski để chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta được

$$4(x^2 + 3y^2) = (1 + 1 + 1 + 1)(x^2 + y^2 + y^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$$

Do đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} = \frac{2}{\sqrt{2(x^2 + 3y^2)}} \leq \frac{2}{\sqrt{(x + 3y)^2}} = \frac{2}{x + 3y} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y} \right)$$

Ví dụ 6.17: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{ab}}{c + 2\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{bc}}{a + 2\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{b + 2\sqrt{ca}} \leq 1$$

Phân tích: Để ý là $\frac{\sqrt{ab}}{c + 2\sqrt{ab}} = \frac{1}{\frac{c}{\sqrt{ab}} + 2}$, do đó ta đặt $x = \frac{a}{\sqrt{bc}}$; $b = \frac{b}{\sqrt{ca}}$; $z = \frac{c}{\sqrt{ab}}$.

Lời giải

Về trái bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{\sqrt{ab}}{c + 2\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{bc}}{a + 2\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{b + 2\sqrt{ca}} = \frac{1}{\frac{c}{\sqrt{ab}} + 2} + \frac{1}{\frac{b}{\sqrt{ca}} + 2} + \frac{1}{\frac{a}{\sqrt{bc}} + 2}$$

Đặt $x = \frac{a}{\sqrt{bc}}$; $b = \frac{b}{\sqrt{ca}}$; $z = \frac{c}{\sqrt{ab}}$, suy ra $xyz = 1$.

Biểu thức P được viết lại thành $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2} \leq 1$.

Thật vậy, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(x+2)(y+2) + (y+2)(z+2) + (z+2)(x+2) \leq (x+2)(y+2)(z+2)$$

Triển khai và thu gọn ta được $xy + yz + xz \geq 3$

Đánh giá cuối cùng đúng theo bất đẳng thức Cauchy và $xyz = 1$.

Do đó bất đẳng thức trên được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét: Ta có thể chứng minh bài toán trên theo cách khác như sau

Biểu thức vế trái được viết lại là

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}} + \frac{2\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}} + \frac{2\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}} \right) = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{c}{c+2\sqrt{ab}} + \frac{a}{a+2\sqrt{bc}} + \frac{b}{b+2\sqrt{ca}} \right)$$

$$\text{Đặt } M = \frac{c}{c+2\sqrt{ab}} + \frac{a}{a+2\sqrt{bc}} + \frac{b}{b+2\sqrt{ca}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$2\sqrt{ab} \leq a+b; 2\sqrt{bc} \leq b+c; 2\sqrt{ca} \leq c+a$$

Do đó ta có

$$M = \frac{c}{c+2\sqrt{ab}} + \frac{a}{a+2\sqrt{bc}} + \frac{b}{b+2\sqrt{ca}} \geq \frac{c}{a+b+c} + \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} = 1$$

$$\text{Suy ra } \frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}} \leq 1$$

Do đó bất đẳng thức trên được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 6.18: Cho a, b, c là các số thực dương không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c} - \sqrt{abc} \leq 3\sqrt{3}$$

Lời giải

Đặt $x = \sqrt{a}$; $y = \sqrt{b}$; $z = \sqrt{c}$. Từ giả thiết ta được $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Khi này bất đẳng thức trở thành $P = x^3 + y^3 + z^3 - xyz \leq 3\sqrt{3}$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó ta có

$$z^2 \leq xy; x^2 + y^2 = 3 - z^2 \leq 3$$

$$\text{Do đó ta có } x^3 + y^3 + z(z^2 - xy) \leq x^3 + y^3$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(x^3 + z^3)^2 = (x+y)^2 (x^2 - xy + y^2) (x^2 - xy + y^2) \leq \left[\frac{3(x^2 + y^2)^3}{3} \right] \leq 27$$

Suy ra $x^3 + y^3 \leq 3\sqrt{3}$ nên ta được $P \leq 3\sqrt{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x = \sqrt{3}; y = z = 0 \text{ và các hoán vị } \Leftrightarrow a = 3; b = c = 0 \text{ và các hoán vị}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 3; b = c = 0$ và các hoán vị.

Nhận xét: Qua các ví dụ trên ta nhận thấy, đổi biến có một vai trò to lớn trong chứng minh bất đẳng thức, đổi biến có thể làm một bất đẳng thức trở nên đơn giản, đổi biến có thể đưa một bất đẳng thức hoán vị về bất đẳng thức đối xứng. Chúng ta cùng tham khảo thêm một số ví dụ khác sau đây để thấy được sự độc đáo của kỹ thuật đổi biến

Ví dụ 6.19: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[3]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a+b}} > 2$$

Lời giải

Đặt $a = x^3$; $b = y^3$; $c = z^3$, do đó $x, y, z > 0$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3+z^3}} + \sqrt[3]{\frac{y^3}{z^3+x^3}} + \sqrt[3]{\frac{z^3}{x^3+y^3}} > 2$$

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức sau $\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3+z^3}} > \sqrt{\frac{x^2}{y^2+z^2}}$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\left(\frac{x^3}{y^3+z^3}\right)^2 > \left(\frac{x^2}{y^2+z^2}\right)^3 \Leftrightarrow (y^2+z^2)^3 > (y^3+z^3)^2 \Leftrightarrow 3y^2z^2(y^2+z^2) > 2y^3z^3$$

Đánh giá cuối cùng đúng theo bất đẳng thức Cauchy.

Áp dụng tương tự ta được

$$\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3+z^3}} + \sqrt[3]{\frac{y^3}{z^3+x^3}} + \sqrt[3]{\frac{z^3}{x^3+y^3}} > \sqrt{\frac{x^2}{y^2+z^2}} + \sqrt{\frac{y^2}{z^2+x^2}} + \sqrt{\frac{z^2}{x^2+y^2}}$$

Ta cần chứng minh $\sqrt{\frac{x^2}{y^2+z^2}} + \sqrt{\frac{y^2}{z^2+x^2}} + \sqrt{\frac{z^2}{x^2+y^2}} \geq 2$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x^2}{y^2+z^2}} + \sqrt{\frac{y^2}{z^2+x^2}} + \sqrt{\frac{z^2}{x^2+y^2}} &= \frac{x^2}{\sqrt{x^2(y^2+z^2)}} + \frac{y^2}{\sqrt{y^2(z^2+x^2)}} + \frac{z^2}{\sqrt{z^2(x^2+y^2)}} \\ &\geq \frac{2x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{2y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{2z^2}{x^2+y^2+z^2} = 2 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

Ví dụ 6.20: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$$

Lời giải

Do $abc = 1$ nên ta có thể đặt $a = \frac{x}{y}$; $b = \frac{y}{z}$; $c = \frac{z}{x}$ với x, y, z là các số thực dương.

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại là

$$\left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y}\right) \left(\frac{y}{z} - 1 + \frac{x}{z}\right) \left(\frac{z}{x} - 1 + \frac{y}{x}\right) \leq 1$$

Hay $xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$

Do x, y, z có vai trò như nhau, không mất tính tổng quát ta giả sử $x \geq y \geq z > 0$

Như vậy $x+y-z > 0$; $x+z-y > 0$. Như vậy ta xét các trường hợp

- Nếu $y + z - x < 0$ thì bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.
- Nếu $y + z - x > 0$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có

$$\sqrt{(x - y + z)(y - z + x)} \leq x; \sqrt{(y - z + x)(z - x + y)} \leq y; \sqrt{(z - x + y)(x - y + z)} \leq z$$

Nhân theo về các bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ 6.21: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = a + b + c + 2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \frac{3}{2} \sqrt{abc}$$

Lời giải

Biến đổi giả thiết $abc = a + b + c + 2$ ta được

$$\begin{aligned} (a+1)(b+1)(c+1) &= (a+1)(b+1) + (b+1)(c+1) + (c+1)(a+1) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} &= 1 \end{aligned}$$

Đặt $x = \frac{1}{a+1}$; $y = \frac{1}{b+1}$; $z = \frac{1}{c+1}$ suy ra $x + y + z = 1$

Từ trên suy ra $a = \frac{1-x}{x} = \frac{y+z}{x}$; $b = \frac{1-y}{y} = \frac{z+x}{y}$; $c = \frac{1-z}{z} = \frac{x+y}{z}$

Và bất đẳng thức được viết lại thành

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} + \sqrt{\frac{x+y}{z}} \leq \frac{3}{2} \sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}}$$

Hay

$$\sqrt{\frac{x}{y+z} \cdot \frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{y}{z+x} \cdot \frac{z}{x+y}} + \sqrt{\frac{z}{x+y} \cdot \frac{x}{y+z}} \leq \frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x}{y+z} \cdot \frac{y}{z+x}} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} \right) \\ \sqrt{\frac{y}{z+x} \cdot \frac{z}{x+y}} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) \\ \sqrt{\frac{z}{x+y} \cdot \frac{x}{y+z}} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{x+y} + \frac{x}{y+z} \right) \end{aligned}$$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta thu được điều phải chứng minh

Ví dụ 6.22: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca + 2abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4(a + b + c)$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 2 = \frac{1}{abc}$

Đặt $a = \frac{x}{y+z}$; $b = \frac{y}{z+x}$; $c = \frac{z}{x+y}$, với $x, y, z > 0$; $x + y + z = 1$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 4 \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x}{y} + \frac{x}{z} \geq \frac{4x}{y+z}; \frac{y}{x} + \frac{y}{z} \geq \frac{4y}{z+x}; \frac{z}{x} + \frac{z}{y} \geq \frac{4z}{x+y}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 4 \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right)$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$

Ví dụ 6.23: Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} > 2$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta có thể chọn $a + b + c + d = 1$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\frac{a}{1-a}} + \sqrt{\frac{b}{1-b}} + \sqrt{\frac{c}{1-c}} + \sqrt{\frac{d}{1-d}} > 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có

$$\sqrt{\frac{a}{1-a}} = \frac{a}{\sqrt{(1-a)a}} \geq \frac{a}{\frac{1}{2}(1-a+a)} = 2a$$

Hoàn toàn tương tự ta có $\sqrt{\frac{b}{1-b}} \geq 2b$; $\sqrt{\frac{c}{1-c}} \geq 2c$; $\sqrt{\frac{d}{1-d}} \geq 2d$

Cộng vế theo vế bốn bất đẳng thức ta được:

$$\sqrt{\frac{a}{1-a}} + \sqrt{\frac{b}{1-b}} + \sqrt{\frac{c}{1-c}} + \sqrt{\frac{d}{1-d}} \geq 2$$

Ở đây dấu đẳng thức không xảy ra nên $\sqrt{\frac{a}{1-a}} + \sqrt{\frac{b}{1-b}} + \sqrt{\frac{c}{1-c}} + \sqrt{\frac{d}{1-d}} > 2$

Bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

Khi đưa lời giải trên cho bài toán trên, chắc hẳn bạn đọc sẽ thắc mắc là tại sao lại có thể chọn được $a + b + c + d = 1$ và nếu chọn $a + b + c + d = k$ bất kì thì bài toán có giải được không? Và ngoài cách chọn điều kiện như trên có thể chọn theo cách khác (chẳng hạn như $abcd = 1$) được không? Câu trả lời là hoàn toàn được, thực chất việc chọn này bắt nguồn từ việc đổi biến. Sau đây là cách đổi biến dẫn đến kết quả $a + b + c + d = 1$. Ta thực hiện biến đổi một hạng tử bên vế trái như sau:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} = \sqrt{\frac{\frac{a}{a+b+c+d}}{\frac{b+c+d}{a+b+c+d}}} = \sqrt{\frac{\frac{a}{a+b+c+d}}{\frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d}}}$$

Tới đây ta đổi biến như sau:

$$x = \frac{a}{a+b+c+d}; y = \frac{b}{a+b+c+d}; z = \frac{c}{a+b+c+d}; t = \frac{d}{a+b+c+d}$$

Thay vào biểu thức trên ta được: $\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} = \sqrt{\frac{x}{y+z+t}}$ và $x + y + z + t = 1$

Áp dụng cho vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh ta được

$$\sqrt{\frac{x}{y+z+t}} + \sqrt{\frac{y}{z+t+x}} + \sqrt{\frac{z}{t+x+y}} + \sqrt{\frac{t}{x+y+z}} > 2$$

Và $x + y + z + t = 1$

Như vậy sau phép đổi biến ta có một bất đẳng thức mới có hình thức hoàn toàn giống như bất đẳng thức cần chứng minh và được bổ sung thêm điều kiện giả thiết cho các biến là $x + y + z + t = 1$.

Ví dụ 6.24: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý Chứng minh rằng

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) \leq \frac{9}{8}(a + b)(b + c)(c + a)$$

Lời giải

Đây là một bất đẳng thức đơn giản được chứng minh bằng phép biến đổi tương đương kết hợp với bất đẳng thức Cauchy. Ta thử chứng minh bằng phương pháp đổi biến xem sao

Bất đẳng thức tương đương với

$$8(a + b + c)(ab + bc + ca) \leq 9(a + b)(b + c)(c + a)$$

Chia cả hai vế cho $(abc)^3$ ta được

$$\begin{aligned} \frac{8(a + b + c)(ab + bc + ca)}{abc} &\leq \frac{9(a + b)(b + c)(c + a)}{abc} \\ \Leftrightarrow 8\left(\frac{a}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{b}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{c}{\sqrt[3]{abc}}\right) &\left(\frac{ab}{\sqrt[3]{(abc)^2}} + \frac{bc}{\sqrt[3]{(abc)^2}} + \frac{ca}{\sqrt[3]{(abc)^2}}\right) \\ &\leq 9\left(\frac{a}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{b}{\sqrt[3]{abc}}\right)\left(\frac{b}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{c}{\sqrt[3]{abc}}\right)\left(\frac{a}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{c}{\sqrt[3]{abc}}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } x = \frac{a}{\sqrt[3]{abc}}; y = \frac{b}{\sqrt[3]{abc}}; z = \frac{c}{\sqrt[3]{abc}} \Rightarrow xyz = 1$$

Thay vào bất đẳng thức trên ta được

$$8(x + y + z)(xy + yz + zx) \leq 9(x + y)(y + z)(z + x)$$

Như vậy sau phép đổi biến ta có một bất đẳng thức mới có hình thức hoàn toàn giống như bất đẳng thức cần chứng minh và được bổ sung thêm điều kiện cho biến là $xyz = 1$. Bây giờ ta chứng minh bất đẳng thức trên với điều kiện của biến là $xyz = 1$. Thật vậy:

$$\begin{aligned} 8(x + y + z)(xy + yz + zx) &\leq 9(x + y)(y + z)(z + x) \\ \Leftrightarrow 8(3 + x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2) &\leq 9(2 + x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2) \\ \Leftrightarrow 6 \leq x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2 &\Leftrightarrow 6 \leq \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} \end{aligned}$$

Dễ thấy rằng theo bất đẳng thức Cauchy thì bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

Ví dụ 6.25: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2} + \frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2} + \frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2} \leq \frac{6}{5}$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta có thể chọn $a + b + c = 1$

$$\frac{a(1-a)}{1-2a+2a^2} + \frac{b(1-b)}{1-2b+2b^2} + \frac{c(1-c)}{1-2c+2c^2} \leq \frac{6}{5}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$2a(1-a) \leq \left(\frac{2a+1-a}{2} \right)^2 = \frac{(a+1)^2}{4}$$

Suy ra $1-2a+2a^2 = 1-2a(1-a) \geq 1 - \frac{(a+1)^2}{4} = \frac{(1-a)(a+3)}{4} > 0$

Do đó ta được $\frac{a(1-a)}{1-2a+2a^2} \leq \frac{4a(1-a)}{(1-a)(a+3)} = 4 \cdot \frac{a}{a+3} = 4 \left(1 - \frac{3}{a+3} \right)$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\begin{aligned} \frac{a(1-a)}{1-2a+2a^2} + \frac{b(1-b)}{1-2b+2b^2} + \frac{c(1-c)}{1-2c+2c^2} &\leq 4 \left[\left(1 - \frac{3}{a+3} \right) + \left(1 - \frac{3}{b+3} \right) + \left(1 - \frac{3}{c+3} \right) \right] \\ &\leq 4 \left(3 - \frac{3 \cdot 9}{a+b+c+9} \right) \leq \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 6.26: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$ khi đó ta thu được $xyz = 1$.

Ta có $\frac{1}{a^2(b+c)} = \frac{x^2}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{x^2 yz}{y+z} = \frac{x}{y+z}$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\begin{aligned} \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} &\geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y+z} + 1 \right) + \left(\frac{y}{z+x} + 1 \right) + \left(\frac{z}{x+y} + 1 \right) \geq \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow (x+y+z) &\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right) \geq \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Đánh giá cuối cùng dùng theo bất đẳng thức Cauchy

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Ví dụ 6.27: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{(2a+2b-c)^3}{a+b+4c} + \frac{(2b+2c-a)^3}{b+c+4a} + \frac{(2c+2a-b)^3}{c+a+4b} \geq \frac{9}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

Lời giải

Đặt $x = 2a+2b-c$; $y = 2b+2c-a$; $z = 2c+2a-b$

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên x, y, z là các số dương.

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y} \geq \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{x^3}{y+z} + \frac{x(y+z)}{4} \geq x^2; \frac{y^3}{y+z} + \frac{y(z+x)}{4} \geq y^2; \frac{z^3}{x+y} + \frac{z(x+y)}{4} \geq z^2$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y} + \frac{xy+yz+zx}{2} \geq x^2 + y^2 + z^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y} \geq x^2 + y^2 + z^2 - \frac{xy+yz+zx}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ ta được

$$\frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y} \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Chủ đề 6

MỘT SỐ KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACOPXKI

A. Kiến thức cần nhớ

1. Giới thiệu bất đẳng thức Bunhiacopxki

Bất đẳng thức Bunhiacopxki có tên gọi chính xác là bất đẳng thức Cauchy – Bunhiacopxki – Schwarz, đây là một bất đẳng thức do ba nhà toán học độc lập phát hiện và đề xuất, nó có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực toán học. Ở nước ta, để cho phù hợp với chương trình sách giáo khoa, trong tài liệu này chúng ta cũng sẽ gọi nó là bất đẳng thức Bunhiacopxki, gọi theo tên nhà Toán học người Nga Bunhiacopxki.

Đây là một bất đẳng thức cổ điển nổi tiếng và quen thuộc đối với phần lớn học sinh nước ta. Nó ứng dụng rất nhiều trong các bài toán về bất đẳng thức và cực trị. Trong phạm vi chương trình Toán THCS, chúng ta cũng chỉ quan tâm đến các trường hợp riêng của bất đẳng thức Bunhiacopxki.

2. Các dạng biểu diễn của bất đẳng thức Bunhiacopxki

a. Dạng tổng quát

+ Cho hai dãy số tùy ý $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$ và $b_1; b_2; b_3; \dots; b_n$. Khi đó ta có:

Dạng 1: $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$

Dạng 2: $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)} \geq |a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n|$

- Dấu đẳng thức xảy ra ở dạng 1 và dạng 2 là: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

Dạng 3: $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)} \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$

- Dấu đẳng thức xảy ra ở dạng 3 là: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \geq 0$

Dạng 4: Cho hai dãy số tùy ý $a_1; a_2; \dots; a_n$ và $x_1; x_2; \dots; x_n$ với $x_1; x_2; \dots; x_n > 0$

Khi đó ta có
$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \dots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

- Dấu đẳng thức xảy ra ở dạng 4 là: $\frac{a_1}{x_1} = \frac{a_2}{x_2} = \dots = \frac{a_n}{x_n} \geq 0$

Trong các dạng trên thì bất đẳng thức dạng 1, dạng 2, dạng 3 gọi là các bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản và bất đẳng thức dạng 4 còn được gọi là bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức.

b. Một số dạng đặc biệt

$n = 2$	$n = 3$
$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$	$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

$\sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \geq ax + by $	$\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq ay + by + cz $
$\sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \geq ax + by$	$\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq ay + by + cz$
$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ $(x, y > 0)$	$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ $(x, y > 0)$
Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$	Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

B. Một số kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki

1. Kỹ thuật chọn điểm rơi

Cũng tương tự như bất đẳng thức Cauchy, khi sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki để chứng minh bất đẳng thức ta cần phải bảo toàn được dấu đẳng thức xảy ra, điều này có nghĩa là ta cần phải xác định được điểm rơi của bài toán khi áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki. Để rõ hơn ta tìm hiểu một số ví dụ sau

Ví dụ 1.1: Cho a là số thực dương thỏa mãn $a \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = a^2 + \frac{1}{a^2}$$

+ **Sai lầm thường gặp:**

$$\text{Sai lầm 1: } A = a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2a \cdot \frac{1}{a} = 2.$$

$$\text{Sai lầm 2: } A = \frac{1}{2}(1+1)\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \geq \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của A là 2.

+ **Nguyên nhân sai lầm:** Để có giá trị nhỏ nhất là 2 thì dấu đẳng thức xảy ra tại

$$a = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = 1 \text{ trái với giả thiết } a \geq 2$$

+ **Phân tích tìm lời giải:** Xét bất đẳng thức $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ với dấu đẳng thức xảy ra

tại $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$. Giả sử với các số $\alpha; \beta$ ta có

$$A = a^2 + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \cdot (\alpha^2 + \beta^2) \geq \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \left(\alpha a + \frac{\beta}{a}\right)^2$$

Ta cần chọn hai số $\alpha; \beta$ sao cho giá trị nhỏ nhất của A đạt được tại $a = 2$. Từ đó ta có sơ đồ điểm rơi:

$$\begin{cases} a = 2 \\ \frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\beta a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

+ **Lời giải đúng:** Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$A = a^2 + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{17} \left(a^2 + \frac{1}{a^2} \right) \cdot (4^2 + 1) \geq \frac{1}{17} \left(4a + \frac{1}{a} \right)^2$$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{a}{4} + \frac{1}{a} + \frac{15a}{4} \right)^2 \geq \frac{1}{17} \left(1 + \frac{15}{2} \right)^2 = \frac{17}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{17}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2$.

Ví dụ 1.2: Cho a, b, là các số thực dương thỏa mãn $a + b = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}}$$

+ Sai lầm thường gặp:

$$A = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} \geq \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của A là $2\sqrt{2}$.

+ Nguyên nhân sai lầm: Để có giá trị nhỏ nhất là $2\sqrt{2}$ thì dấu đẳng thức xảy ra tại

$$a = b = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \Leftrightarrow a = b = 1$$

Khi đó $a + b = 2$ trái với giả thiết $a + b = 4$

+ Phân tích tìm lời giải: Xét bất đẳng thức $\sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \geq ax + by$ với dấu đẳng thức xảy ra

tại $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} \geq 0$. Khi đó với ý tưởng chuyển đổi một biểu thức trong căn thành một biểu thức ngoài căn.

Giả sử với các số $\alpha; \beta$ ta có

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \cdot (\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha a + \frac{\beta}{a} \right) \\ \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \sqrt{\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right) \cdot (\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha b + \frac{\beta}{b} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[\alpha(a + b) + \beta \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right]$$

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán giá trị nhỏ nhất của A đạt được tại $a = b = 2$. Từ đó ta có sơ đồ điểm rơi:

$$a = b = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\beta a} \\ \frac{b}{\alpha} = \frac{1}{\beta b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

+ Lời giải đúng: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \cdot (4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4a + \frac{1}{a} \right) \\ \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right) \cdot (4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4b + \frac{1}{b} \right) \end{cases}$$

Khi đó ta được $A \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left[4(a+b) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right]$

Để ý ta thấy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$, do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy và giả thiết ta được

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left[4(a+b) + \frac{4}{a+b} \right] = \frac{1}{\sqrt{17}} \left[\frac{a+b}{4} + \frac{4}{a+b} + \frac{15(a+b)}{4} \right] \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} [2+15] = \sqrt{17} \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{4} = \frac{1}{a} \\ \frac{b}{4} = \frac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\sqrt{17}$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 2$.

Ví dụ 1.3: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a + b + c \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}$$

+ **Sai lầm thường gặp:**

$$A = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \sqrt{2 \cdot \frac{a}{b}} + \sqrt{2 \cdot \frac{b}{c}} + \sqrt{2 \cdot \frac{c}{a}} \geq 3\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của A là $3\sqrt{2}$.

+ **Nguyên nhân sai lầm:** Để có giá trị nhỏ nhất là $3\sqrt{2}$ thì dấu đẳng thức xảy ra tại

$$a = b = c = \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

Khi đó $a + b + c = 3$ không thỏa mãn giả thiết $a + b + c \geq 6$

+ **Phân tích tìm lời giải:** Xét bất đẳng thức $\sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \geq ax + by$ với dấu đẳng thức xảy ra

tại $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} \geq 0$. Khi đó với ý tưởng chuyển đổi một biểu thức trong căn thành một biểu thức ngoài căn.

Giả sử với các số $\alpha; \beta$ ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right) \cdot (\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha a + \frac{\beta}{b}\right) \\ \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \sqrt{\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right) \cdot (\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha b + \frac{\beta}{c}\right) \\ \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \sqrt{\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right) \cdot (\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha c + \frac{\beta}{a}\right) \end{cases} \\ \Rightarrow A \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[\alpha(a+b+c) + \beta \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right] \end{aligned}$$

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán giá trị nhỏ nhất của A đạt được tại $a = b = c = 2$. Từ đó ta có sơ đồ điểm rơi:

$$a = b = c = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\beta b} \\ \frac{b}{\alpha} = \frac{1}{\beta c} \\ \frac{c}{\alpha} = \frac{1}{\beta a} \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = ab = bc = ca = \frac{4}{1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

+ **Lời giải đúng:** Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right) \cdot (4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4a + \frac{1}{b}\right) \\ \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right) \cdot (4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4b + \frac{1}{c}\right) \\ \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right) \cdot (4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4c + \frac{1}{a}\right) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó ta được } A \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left[4(a + b + c) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right]$$

Đề ý ta thấy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$, do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy và giả thiết ta được

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left[4(a + b + c) + \frac{9}{a + b + c} \right] = \frac{1}{\sqrt{17}} \left[\frac{a + b + c}{4} + \frac{9}{a + b + c} + \frac{15(a + b + c)}{4} \right] \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left[\frac{15}{4} \cdot 6 + 2 \cdot \frac{3}{2} \right] = \frac{3\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{4} = \frac{1}{b} \\ \frac{b}{4} = \frac{1}{c} \\ \frac{c}{4} = \frac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{3\sqrt{17}}{2}$, khi $a = b = c = 2$

Ví dụ 1.4: Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b+c}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c+a}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a+b}}$$

Phân tích: Chuyển đổi một biểu thức trong căn thành một biểu thức ngoài căn. Giả sử với các số $\alpha; \beta$ ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + \frac{1}{b+c}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sqrt{\left[a^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b+c}} \right)^2 \right] (\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha a + \frac{\beta}{\sqrt{b+c}} \right) \\ \sqrt{b^2 + \frac{1}{c+a}} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha b + \frac{\beta}{\sqrt{c+a}} \right) \\ \sqrt{c^2 + \frac{1}{a+b}} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left(\alpha c + \frac{\beta}{\sqrt{a+b}} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[\alpha (a+b+c) + \beta \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} \right) \right]$$

Do A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán giá trị nhỏ nhất của A đạt tại
 $a = b = c = 2$

Do đó ta có sơ đồ điểm rơi

$$a = b = c = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\beta b} \\ \frac{b}{\alpha} = \frac{1}{\beta c} \\ \frac{c}{\alpha} = \frac{1}{\beta a} \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = ab = bc = ca = \frac{4}{1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + \frac{1}{b+c}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{b+c} \right) \cdot (4^2 + 1^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4a + \frac{1}{\sqrt{b+c}} \right) \\ \sqrt{b^2 + \frac{1}{c+a}} \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4b + \frac{1}{\sqrt{c+a}} \right) \\ \sqrt{c^2 + \frac{1}{a+b}} \geq \frac{1}{\sqrt{4^2 + 1^2}} \left(4c + \frac{1}{\sqrt{a+b}} \right) \end{cases}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$A \geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left[4(a+b+c) + \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} \right) \right]$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4(a+b+c) + \frac{9}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a+b} + \sqrt{c+a}} \right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left(4(a+b+c) + \frac{9}{\sqrt{6}(a+b+c)} \right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left[\frac{31}{8}(a+b+c) + \frac{1}{8}(a+b+c) + \frac{9}{2\sqrt{6}(a+b+c)} + \frac{9}{2\sqrt{6}(a+b+c)} \right] \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{17}} \left[\frac{31}{8} \cdot 6 + 3 \sqrt[3]{\frac{1}{8}(a+b+c) \cdot \frac{9}{2\sqrt{6}(a+b+c)} \cdot \frac{9}{2\sqrt{6}(a+b+c)}} \right] = \frac{3\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{3\sqrt{17}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$

Ví dụ 1.5: Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c + \sqrt{2abc} \geq 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \sqrt{\frac{8}{a^2} + \frac{9b^2}{2} + \frac{c^2a^2}{4}} + \sqrt{\frac{8}{b^2} + \frac{9c^2}{2} + \frac{a^2b^2}{4}} + \sqrt{\frac{8}{c^2} + \frac{9a^2}{2} + \frac{b^2c^2}{4}}$$

Phân tích: Do biểu thức A là biểu thức đối xứng với a, b, c nên ta dự đoán giá trị nhỏ nhất của A đạt tại $a = b = c = 2$. Do đó ta có sơ đồ điểm rơi

$$a = b = c = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\beta b} \\ \frac{b}{\alpha} = \frac{1}{\beta c} \\ \frac{c}{\alpha} = \frac{1}{\beta a} \end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = ab = bc = ca = \frac{4}{1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{cases} \sqrt{2+18+4} \cdot \sqrt{\frac{8}{a^2} + \frac{9b^2}{2} + \frac{c^2a^2}{4}} \leq \frac{4}{a} + 9b + ca \\ \sqrt{2+18+4} \cdot \sqrt{\frac{8}{b^2} + \frac{9c^2}{2} + \frac{a^2b^2}{4}} \leq \frac{4}{b} + 9c + ab \\ \sqrt{2+18+4} \cdot \sqrt{\frac{8}{c^2} + \frac{9a^2}{2} + \frac{b^2c^2}{4}} \leq \frac{4}{c} + 9a + bc \end{cases}$$

$$\text{Do đó ta được } A \geq \frac{1}{\sqrt{24}} \left[\left(\frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} \right) + 9(a+b+c) + (ab+bc+ca) \right]$$

$$\text{Hay } \sqrt{24} \cdot A \geq \left(\frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} \right) + 9(a+b+c) + (ab+bc+ca)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{24} \cdot A &\geq \left(\frac{4}{a} + a \right) + \left(\frac{4}{b} + b \right) + \left(\frac{4}{c} + c \right) + (2a+bc) + (2b+ac) + (2c+ab) + 6(a+b+c) \\ &\geq 2\sqrt{\frac{4}{a}} \cdot a + 2\sqrt{\frac{4}{b}} \cdot b + 2\sqrt{\frac{4}{c}} \cdot c + 2\sqrt{2abc} + 2\sqrt{2abc} + 2\sqrt{2abc} + 6(a+b+c) \quad \text{Suy ra} \\ &\geq 12 + 6(a+b+c + \sqrt{2abc}) \geq 72 \end{aligned}$$

$$\text{ta được } A \geq \frac{72}{\sqrt{24}} = 6\sqrt{6}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $6\sqrt{6}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$.

Ví dụ 1.6: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{4a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{4b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{4c^2 + \frac{1}{c^2}}$$

Phân tích: Trong ví dụ này ta xét biểu thức đại diện $A = \sqrt{4a^2 + \frac{1}{a^2}}$. Một cách tự nhiên ta tìm cách khử căn của biểu thức. Nếu áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki một cách bình thường:

$$\sqrt{4a^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2a + \frac{1}{a} \right)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, khi đó nếu áp dụng tương tự thì không thỏa mãn giả thiết của toán.

Dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{2}{3}$. Khi đó ta cần chọn một bộ số $\alpha; \beta$ để có đánh giá

$$A = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sqrt{\left(4a^2 + \frac{1}{a^2} \right) (\alpha^2 + \beta^2)} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sqrt{\left(2a\alpha + \frac{\beta}{a} \right)^2} = \frac{\alpha \cdot 2a + \frac{\beta}{a}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra tại $\frac{\alpha}{2a} = \beta a$ với $a = \frac{2}{3}$. Từ đó dễ dàng chọn được $\alpha = 8; \beta = 9$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$$\begin{aligned} \sqrt{(8^2 + 9^2) \left(4a^2 + \frac{1}{a^2} \right)} &\geq 16a + \frac{9}{a} \Rightarrow \sqrt{4a^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{145}} \left(16a + \frac{9}{a} \right) \\ \sqrt{(8^2 + 9^2) \left(4b^2 + \frac{1}{b^2} \right)} &\geq 16b + \frac{9}{b} \Rightarrow \sqrt{4b^2 + \frac{1}{b^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{145}} \left(16b + \frac{9}{b} \right) \\ \sqrt{(8^2 + 9^2) \left(4c^2 + \frac{1}{c^2} \right)} &\geq 16c + \frac{9}{c} \Rightarrow \sqrt{4c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{145}} \left(16c + \frac{9}{c} \right) \end{aligned}$$

Từ đó ta được

$$A \geq \frac{1}{\sqrt{145}} \left[16(a + b + c) + 9 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right] \geq \frac{1}{\sqrt{145}} \left[16(a + b + c) + \frac{81}{a + b + c} \right] = \frac{\sqrt{145}}{2}$$

trị nhỏ nhất của A bằng $\frac{\sqrt{145}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{2}{3}$.

Ví dụ 1.7: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}}$$

Phân tích: Xét biểu thức $A = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$. Nếu áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki một cách trực tiếp thì ta được $\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(a + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$. Khi đó dấu đẳng thức không xảy ra tại

$a = b = c = \frac{1}{2}$. Từ đó ta chọn các số p, q, r để có đánh giá như sau:

$$A = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) (p^2 + q^2 + r^2)} \\ \geq \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \sqrt{\left(ap + \frac{q}{a} + \frac{r}{b} \right)^2} = \frac{pa + \frac{q}{a} + \frac{r}{b}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

Và đẳng thức xảy ra tại $\frac{a}{p} = \frac{a}{q} = \frac{b}{r}$ với $a = b = c = \frac{2}{3}$. Từ đó ta chọn được một bộ số thỏa

mãn là $p = \frac{1}{2}, q = r = 2$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2^2} + 2^2 + 2^2 \right) \left(a^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \geq \frac{a}{2} + \frac{2}{a} + \frac{2}{b} \Rightarrow \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{33}} \left(\frac{a}{2} + \frac{2}{a} + \frac{2}{b} \right) \\ \sqrt{\left(\frac{1}{2^2} + 2^2 + 2^2 \right) \left(b^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)} \geq \frac{b}{2} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \Rightarrow \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{33}} \left(\frac{b}{2} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right) \\ \sqrt{\left(\frac{1}{2^2} + 2^2 + 2^2 \right) \left(c^2 + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right)} \geq \frac{c}{2} + \frac{2}{c} + \frac{2}{a} \Rightarrow \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{33}} \left(\frac{c}{2} + \frac{2}{c} + \frac{2}{a} \right)$$

Từ đó ta được

$$A \geq \frac{2}{\sqrt{33}} \left[\frac{a+b+c}{2} + 4 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right] \geq \frac{2}{\sqrt{33}} \left[\frac{3}{4} + \frac{36}{a+b+c} \right] = \frac{3\sqrt{33}}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $\frac{3\sqrt{33}}{2}$ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 1.8: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + 4b^2 + 9c^2 = 2015$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = a + b + c$$

Phân tích và lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$P^2 = (a + b + c)^2 = \left(am \cdot \frac{1}{m} + bn \cdot \frac{1}{n} + cp \cdot \frac{1}{p} \right)^2 \\ \leq \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} \right) (a^2 m^2 + b^2 n^2 + c^2 p^2)$$

Để sử dụng được giả thiết ta $a^2 + 4b^2 + 9c^2 = 1$ cần chọn một bộ số $m; n; p$ sao cho hệ sau thỏa mãn

$$\begin{cases} m^2a^2 + n^2b^2 + p^2c^2 = x^2 + 4y^2 + 9z^2 \\ \frac{am}{m} = \frac{bn}{n} = \frac{cp}{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \\ p = 3 \end{cases}$$

Khi đó ta có lời giải như sau

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} P^2 &= (a + b + c)^2 = \left(a + 2b \cdot \frac{1}{2} + 3c \cdot \frac{1}{3} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) (a^2 + 4b^2 + 9c^2) = \frac{14}{36} \end{aligned}$$

Do đó ta được $P \leq \frac{\sqrt{14}}{6}$ hay giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{\sqrt{14}}{6}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a^2 + 4b^2 + 9c^2 = 1 \\ a = 4b = 9c \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{7}; b = \frac{1}{28}; c = \frac{1}{63}$$

Ví dụ 1.9: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + 2b + 3c = 14$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a^2 + b^2 + c^2$$

Phân tích và lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(m^2 + n^2 + k^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (ma + nb + kc)^2$$

Để áp dụng giả thiết $a + 2b + 3c = 14$ ta cần chọn một bộ số $m; n; k$ thỏa mãn hệ sau

$$\begin{cases} ma + nb + kc = a + 2b + 3c \\ \frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \\ k = 3 \end{cases}$$

Khi đó ta có lời giải như sau

Áp dụng bất đẳng thức Binhiacopxki ta được

$$P = \frac{1}{14} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{(a + 2b + 3c)^2}{14} = \frac{14^2}{14} = 14$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của P là 14 . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 14 \\ \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} \end{cases} \Rightarrow a = 1; b = 2; c = 3$$

Ví dụ 1.10: Cho a, b, c là các số thực dương sao thỏa mãn $4a + 9b + 16c = 49$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{25}{b} + \frac{64}{c} \geq 49$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(m^2a + n^2b + k^2c) \left(\frac{1}{a} + \frac{25}{b} + \frac{64}{c} \right) \geq (m + 5n + 8k)^2$$

Như vậy ta cần chọn một bộ số m; n; k sao cho hệ sau thỏa mãn

$$\begin{cases} m^2a + n^2b + k^2c = 4a + 9b + 16c = 49 \\ ma = \frac{nb}{5} = \frac{kc}{8} \end{cases}$$

Thử một số trường hợp ta chọn được $m = 2$; $n = 5$; $k = 8$, khi đó ta có lời giải như sau

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(4a + 9b + 16c) \left(\frac{1}{a} + \frac{25}{b} + \frac{64}{c} \right) \geq (2 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 8)^2 = 49^2$$

Hay

$$49 \left(\frac{1}{a} + \frac{25}{b} + \frac{64}{c} \right) \geq 49^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{25}{b} + \frac{64}{c} \geq 49$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{1}{2a} = \frac{5}{3b} = \frac{8}{4c} \\ 4a + 9b + 16c = 49 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}; b = \frac{3}{5}; c = 2$$

Cách 2: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy có thể sử dụng bất đẳng thức Binhiacopxki dạng phân thức.

Tuy nhiên chú ý đến giả thiết $4a + 9b + 16c = 49$, ta cần nhân thêm hệ số để khi áp dụng dưới mẫu xuất hiện $4a + 9b + 16c$. Do đó ta có thể chứng minh bài toán trên như sau

Áp dụng bất đẳng thức Binhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{1}{a} + \frac{25}{b} + \frac{64}{c} = \frac{4}{4a} + \frac{225}{9b} + \frac{1024}{16c} \geq \frac{(2 + 15 + 32)^2}{4a + 9b + 16c} = \frac{49^2}{49} = 49$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{1}{2a} = \frac{5}{3b} = \frac{8}{4c} \\ 4a + 9b + 16c = 49 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}; b = \frac{3}{5}; c = 2$$

Ví dụ 1.11: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + b = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{4}{ab}$$

+ **Sai lầm thường gặp:** Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{4}{ab} = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{8}{2ab} \geq \frac{(1 + \sqrt{8})^2}{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{(1 + \sqrt{8})^2}{(a + b)^2} = (1 + \sqrt{8})^2$$

+ **Nguyên nhân sai lầm:** Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b$ khi đó $\frac{1}{a^2 + b^2} \neq \frac{\sqrt{8}}{2ab}$. Tức là dấu

đẳng thức của bất đẳng thức trên không xảy ra

+ **Phân tích:** Để áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, ta chọn một số k sao cho

$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{k^2}{2ab} \geq \frac{(1+k)^2}{a^2 + b^2 + 2ab} = (1+k)^2$ và đảm bảo dấu đẳng thức xảy ra, tức là thỏa mãn điều kiện

$\frac{1}{a^2 + b^2} = \frac{k}{2ab}$ với $a = b$, do đó ta chọn được $k = 1$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{4}{ab} = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} + \frac{7}{2ab} \geq \frac{(1+1)^2}{a^2 + b^2 + 2ab} + \frac{7}{2ab} = 4 + \frac{7}{2ab}$$

Mặt khác ta lại có $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Do đó ta được $P \geq 18$, hay giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 18. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 1.12: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9}{ab + bc + ca} \geq 30$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{1}{3}$. Khi sử dụng bất đẳng thức

Bunhiacopxki dạng phân thức ta chú ý cộng các mẫu để có thể viết được thành $(a + b + c)^2$.

Để ý là nếu đánh giá $\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2}{2(ab + bc + ca)} \geq \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{(a + b + c)^2} = (1 + \sqrt{2})^2$, khi đó đẳng

thức không xảy ra vì $\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \neq \frac{\sqrt{2}}{2(ab + bc + ca)}$

Như vậy để có thể áp dụng được bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta làm như sau

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{k^2}{2(ab + bc + ca)} \geq \frac{(1+k)^2}{(a + b + c)^2} = (1+k)^2$$

Ta cần chọn k để đẳng thức sau đúng $\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{k}{2(ab + bc + ca)}$, dễ dàng chọn được giá trị

$k = 2$. Đến đây ta có lời giải như sau

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9}{ab + bc + ca} &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{4}{2(ab + bc + ca)} + \frac{7}{ab + bc + ca} \\ &\geq \frac{(1+2)^2}{(a+b+c)^2} + \frac{7}{ab + bc + ca} = 9 + \frac{7}{ab + bc + ca}.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $\frac{7}{ab + bc + ca} \geq 21$. Tuy nhiên, dễ thấy

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}$$

Do đó ta được $\frac{7}{ab + bc + ca} \geq 21$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 1.13: Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{5a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{5b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2}{5c^2 + (a+b)^2} \leq \frac{1}{3}$$

Phân tích và lời giải

Dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$, Trước hết ta để ý đến mẫu số có thể phân tích được $5a^2 + (b+c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(2a^2 + bc)$. Quan sát bất đẳng thức ta thấy có thể áp dụng được bất đẳng thức Bunhiacopxki. Khi vậy ta cần chọn các số $m; n$ để được bất đẳng thức

$$\frac{(m+n)^2 a^2}{5a^2 + (b+c)^2} = \frac{(m+n)^2 a^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 2(2a^2 + bc)} \leq \frac{m^2 a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{n^2 a^2}{2(2a^2 + bc)}$$

Đồng thời đẳng thức $\frac{m}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{n}{2(2a^2 + bc)}$ đúng với $a = b = c$.

Dễ dàng chọn được $m = 1; n = 2$

Khi đó ta có thể giải được bài toán như sau:

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{a^2}{5a^2 + (b+c)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{(1+2)^2 a^2}{(a^2 + b^2 + c^2) + 2(2a^2 + bc)} \leq \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2a^2}{2a^2 + bc} \right)$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\begin{aligned}\frac{b^2}{5b^2 + (c+a)^2} &\leq \frac{1}{9} \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2b^2}{2b^2 + ac} \right) \\ \frac{c^2}{5c^2 + (a+b)^2} &\leq \frac{1}{9} \left(\frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2c^2}{2c^2 + ab} \right)\end{aligned}$$

Do đó ta có

$$\frac{a^2}{5a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{5b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2}{5c^2 + (a+b)^2} \leq \frac{1}{9} \left(1 + \frac{2a^2}{2a^2 + bc} + \frac{2b^2}{2b^2 + ca} + \frac{2c^2}{2c^2 + ab} \right)$$

Ta cần chứng minh được $\frac{1}{9} \left(1 + \frac{2a^2}{2a^2 + bc} + \frac{2b^2}{2b^2 + ca} + \frac{2c^2}{2c^2 + ab} \right) \leq \frac{1}{3}$

Bất đẳng thức đó tương đương với

$$\frac{2a^2}{2a^2 + bc} + \frac{2b^2}{2b^2 + ca} + \frac{2c^2}{2c^2 + ab} \leq 2$$

Hay $\frac{bc}{2a^2 + bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab} \geq 1$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức thì

$$\frac{bc}{2a^2 + bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab} \geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)} = 1$$

Như vậy đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng.

Do đó bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Ví dụ 1.14: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{2}$$

Phân tích và lời giải

Tương tự như ví dụ trên ta chọn được $m = n = 1$, khi đó áp dụng bất đẳng Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{a^2 + bc} = \frac{a^2}{a^3 + abc} \leq \frac{a^2}{a^3 + a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{a^3} + \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 \right)$$

Ta cần chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 1$

Thật vậy, áp dụng một đánh giá quen thuộc và kết hợp với giả thiết, ta được

$$1 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} \geq \frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$

Ví dụ 1.15: Cho các số thực a, b thỏa mãn $2a - b = 2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2 + (b+1)^2} + \sqrt{a^2 + (b-3)^2} \geq 2\sqrt{5}$$

Phân tích: Giả sử đẳng thức xảy ra tại $a = m; b = n; 2a - b = 2$. Từ đó ta mạnh dạn đưa vào các số p, q để có đánh giá như sau

$$\sqrt{a^2 + (b+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} \sqrt{(p^2 + q^2) \left[a^2 + (b+1)^2 \right]} \geq \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} \left[pa + q(b+1) \right]$$

Và đánh giá trên xảy ra dấu bằng tại $a = m$; $b = n$; $2a - b = 2$, ta được $\frac{p}{m} = \frac{q}{n+1}$ từ đó ta có thể chọn $p = m$, $q = n+1$.

Hoàn toàn tương tự với biểu thức $\sqrt{x^2 + (y-3)^2}$ ta có thể chọn $p = m$, $q = n-3$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + (b+1)^2} &\geq \frac{1}{\sqrt{m^2 + (n+1)^2}} \cdot [ma + (n+1)(b+1)] \\ \sqrt{a^2 + (b-3)^2} &\geq \frac{1}{\sqrt{m^2 + (n-3)^2}} \cdot [ma + (n-3)(b-3)] \end{aligned}$$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned} &\sqrt{a^2 + (b+1)^2} + \sqrt{a^2 + (b-3)^2} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{m^2 + (n+1)^2}} [ma + (n+1)(b+1)] + \frac{1}{\sqrt{m^2 + (n-3)^2}} [ma + (n-3)(b-3)] \\ &= \left[\frac{m}{\sqrt{m^2 + (n+1)^2}} + \frac{m}{\sqrt{m^2 + (n-3)^2}} \right] a + \left[\frac{n+1}{\sqrt{m^2 + (n+1)^2}} + \frac{n-3}{\sqrt{m^2 + (n-3)^2}} \right] b \end{aligned}$$

Ta cần chọn m, n sao cho

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} &\frac{m}{\sqrt{m^2 + (n+1)^2}} + \frac{m}{\sqrt{m^2 + (n-3)^2}} - 2 \left[\frac{n+1}{\sqrt{m^2 + (n+1)^2}} + \frac{n-3}{\sqrt{m^2 + (n-3)^2}} \right] \\ &2m - n = 0 \end{aligned} \right. \\ \Leftrightarrow &\left\{ \begin{aligned} &\frac{m+2n+2}{\sqrt{m^2 + (n+1)^2}} + \frac{m+2n-6}{\sqrt{m^2 + (n-3)^2}} = 0 \\ &2m - n = 0 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = -\frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó ta được $\sqrt{a^2 + (b+1)^2} + \sqrt{a^2 + (b-3)^2} \geq \frac{12\sqrt{5}}{25}a - \frac{6\sqrt{5}}{25}b + \frac{38\sqrt{5}}{25} = 2\sqrt{5}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{2}{3}$; $b = -\frac{2}{3}$

Ví dụ 1.16: Cho các số thực a, b tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{(a+1)^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2} + \sqrt{(a+2)^2 + (b+2)^2} \geq \sqrt{6} + 2\sqrt{2}$$

Phân tích: Giả sử đẳng thức xảy ra tại $a = b = m$. Từ đó ta mạnh dạn đưa vào các số p, q để có đánh giá như sau

$$\begin{aligned}\sqrt{(a+1)^2 + (b-1)^2} &= \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cdot \sqrt{(p^2 + q^2) \left[(a+1)^2 + (b-1)^2 \right]} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cdot [p(a+1) + q(b-1)]\end{aligned}$$

Ta cần chọn p, q sao cho đẳng thức xảy ra khi $x = y = a$ nên $\frac{p}{m+1} = \frac{q}{m-1}$ từ đó ta có thể chọn $p = m+1; q = m-1$.

Tương tự với biểu thức $\sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2}$ ta có thể chọn $p = m-1; q = m+1$ và với biểu thức $\sqrt{(a+2)^2 + (b+2)^2}$ ta có thể chọn $p = q = 1$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$$\begin{aligned}\sqrt{(a+1)^2 + (b-1)^2} &\geq \frac{1}{\sqrt{(m+1)^2 + (m-1)^2}} \cdot [(m+1)(a+1) + (m-1)(b-1)] \\ \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2} &\geq \frac{1}{\sqrt{(m-1)^2 + (m+1)^2}} \cdot [(m-1)(a-1) + (m+1)(b+1)] \\ \sqrt{(a+2)^2 + (b+2)^2} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \cdot (a+2) + 1 \cdot (b+2)]\end{aligned}$$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned}\sqrt{(a+1)^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2} + \sqrt{(a+2)^2 + (b+2)^2} \\ \geq \left[\frac{2m}{\sqrt{2(m^2+1)}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right] (a+b) + \frac{4}{\sqrt{2(m^2+1)}} + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Ta cần chọn m sao cho $\frac{2m}{\sqrt{2(m^2+1)}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Với giá trị vừa tìm của m ở trên ta được

$$\sqrt{(a+1)^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2} + \sqrt{(a+2)^2 + (b+2)^2} \geq \sqrt{6} + 2\sqrt{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản

Bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản là những bất đẳng thức đánh giá từ đại lượng $(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$ về đại lượng $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$ hoặc ngược lại. Để rõ hơn ta xét một số ví dụ sau

Ví dụ 2.1: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \left(\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \right)^2 = 9$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 2.2: Cho a, b, c là các số thực dương bất kỳ. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{c+a}{a+b+c}} \leq \sqrt{6}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy có thể đưa đại lượng dưới các dấu căn ở vế trái vào trong cùng một căn thức, chú ý chiều bất đẳng thức ta liên tưởng đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{a+b}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{c+a}{a+b+c}} \\ & \leq \sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2) \left(\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{a+b+c} + \frac{c+a}{a+b+c} \right)} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta được } \sqrt{\frac{a+b}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{c+a}{a+b+c}} \leq \sqrt{6}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 2.3: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Phân tích: Để ý là $a + b - c + b + c - a = 2b$. Do đó ta nghĩ đến việc đưa hai đại lượng dưới dấu căn vào trong cùng một dấu căn. Chú ý đến chiều của bất đẳng thức ta liên tưởng đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cơ bản dạng $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$, ta được

$$\left(\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} \right)^2 \leq 2(a+b-c + b+c-a) = 4b$$

Do đó ta được $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} \leq 2\sqrt{b}$, tương tự ta có

$$\sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq 2\sqrt{c}; \quad \sqrt{c+a-b} + \sqrt{a+b-c} \leq 2\sqrt{a}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Ví dụ 2.4: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$a + b + c \leq 2 \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right)$$

Phân tích: Để ý nếu ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Bất đẳng thức trên gợi ý cho ta sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Tuy nhiên ở đây ta thử áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản xem sao.

Ta cần đánh giá đại lượng $a + b + c$ sao cho xuất hiện $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$, do đó ta viết

$a + b + c$ thành $\frac{a}{\sqrt{b+c}} \sqrt{b+c} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} \sqrt{c+a} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \sqrt{a+b}$, đến đây ta áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản.

Lời giải

$$\text{Ta có } a + b + c = \frac{a}{\sqrt{b+c}} \cdot \sqrt{b+c} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} \cdot \sqrt{c+a} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \cdot \sqrt{a+b}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a}{\sqrt{b+c}} \cdot \sqrt{b+c} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} \cdot \sqrt{c+a} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \cdot \sqrt{a+b} \\ & \leq \left[\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{c+a}} \right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{a+b}} \right)^2 \right] \left[\left(\sqrt{b+c} \right)^2 + \left(\sqrt{c+a} \right)^2 + \left(\sqrt{a+b} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta có } (a + b + c)^2 \leq \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) [2(a + b + c)]$$

$$\text{Suy ra ta được } a + b + c \leq 2 \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right)$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 2.5: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{1+a} + b\sqrt{1+b} \leq \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Phân tích: Chú ý đến giả thiết có đại lượng $a^2 + b^2$ và trong bất đẳng thức cần chứng minh cho đại lượng $a\sqrt{1+a} + b\sqrt{1+b}$. Chú ý đến chiều của bất đẳng thức ta có đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki là $a\sqrt{1+a} + b\sqrt{1+b} \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(1+a+1+b)}$. Đến đây ta chỉ cần đánh giá $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$ là xong.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} a\sqrt{1+a} + b\sqrt{1+b} &\leq \sqrt{(a^2+b^2)(1+a+1+b)} = \sqrt{a+b+2} \\ &\leq \sqrt{\sqrt{2(a^2+b^2)}+2} = \sqrt{\sqrt{2}+2} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ \frac{a}{\sqrt{a+1}} = \frac{b}{\sqrt{b+1}} \Leftrightarrow a = b = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \end{cases}$$

Ví dụ 2.6: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq \left(\frac{a+3b}{4}\right)^4 + \left(\frac{b+3c}{4}\right)^4 + \left(\frac{c+3a}{4}\right)^4$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy nếu đánh giá từ vế trái sang vế phải của bất đẳng thức thì rất khó khăn, do đó ta tìm cách đánh giá từ vế phải sang vế trái, tức là ta cần chứng minh được bất đẳng

thức kiểu $\left(\frac{a+3b}{4}\right)^4 \leq ?$. Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ nên ta viết được

$$\left(\frac{a+3b}{4}\right)^4 = \left[\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{b}{4} + \frac{b}{4}\right)^2\right]^2, \text{ chú ý đến chiều của bất đẳng thức cần chứng minh ta có đánh giá}$$

theo bất đẳng thức Bunhiacopxki là

$$\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{b}{4} + \frac{b}{4}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right)(a^2 + b^2 + b^2 + b^2)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta đánh giá được $(a^2 + 3b^2)^2$ về $a^4 + 3b^4$, tuy nhiên đánh giá này hoàn toàn có thể thực hiện được nhờ bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Binhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+3b}{4}\right)^4 &= \left[\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{b}{4} + \frac{b}{4}\right)^2\right]^2 \leq \left[\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right)(a^2 + b^2 + b^2 + b^2)\right]^2 \\ &\leq \frac{1}{16}(a^2 + b^2 + b^2 + b^2)^2 \leq \frac{1}{16}(1+1+1+1)(a^4 + b^4 + b^4 + b^4) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta được } \left(\frac{a+3b}{4}\right)^4 \leq \frac{a^4 + 3b^4}{4}$$

$$\text{Hoàn toàn tương tự ta được } \left(\frac{b+3c}{4}\right)^4 \leq \frac{b^4 + 3c^4}{4}; \left(\frac{c+3a}{4}\right)^4 \leq \frac{c^4 + 3a^4}{4}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\left(\frac{a+3b}{4}\right)^4 + \left(\frac{b+3c}{4}\right)^4 + \left(\frac{c+3a}{4}\right)^4 \leq a^4 + b^4 + c^4$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 2.7: Cho các số thực $a; b; c \in (0; 1)$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta thấy trong căn thức thứ nhất có chứa nhân tử a và trong căn thức thứ hai lại có chứa nhân tử $1-a$, để ý là $a + 1-a = 1$ nên ta sẽ sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki để triệt tiêu đi biến a

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}\right)^2 &\leq [a + (1-a)][bc + (1-b)(1-c)] \\ &= bc + (1-b)(1-c) \end{aligned}$$

Khi này ta được $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \sqrt{bc + (1-b)(1-c)}$. Không cần quan tâm đến dấu đẳng thức xảy ra nên ta có $\sqrt{bc + (1-b)(1-c)} < \sqrt{bc} + \sqrt{(1-b)(1-c)}$. Đến ta đây ta lặp lại đánh giá như trên thì bài toán được hoàn tất.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Binhiacopxki ta có

$$\left(\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}\right)^2 \leq bc + (1-b)(1-c)$$

Do đó ta được $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \sqrt{bc + (1-b)(1-c)}$

Dễ dàng chứng minh được $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ($x, y > 0$). Áp dụng vào bài toán ta được

$$\sqrt{bc + (1-b)(1-c)} < \sqrt{bc} + \sqrt{(1-b)(1-c)}$$

Lại theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\left(\sqrt{bc} + \sqrt{(1-b)(1-c)}\right)^2 \leq [b + (1-b)][c + (1-c)] = 1$$

Hay $\sqrt{bc} + \sqrt{(1-b)(1-c)} \leq 1$

Vậy ta có $\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} < 1$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 2.8: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$3(a+b+c)^2 \leq (a^2+2)(b^2+2)(c^2+2).$$

Phân tích: Bất đẳng thức trên có các biến độc lập nhau, do đó nếu đánh giá làm giảm đi số biến thì bài toán sẽ đơn giản hơn. Ta chú ý đến sự xuất hiện của đại lượng $(a + b + c)^2$ ở vế trái và $a^2 + 2$ ở vế phải của bất đẳng thức cần chứng minh. Sự xuất hiện này làm cho ta suy nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki để đánh giá đại lượng $(a + b + c)^2$ làm sao cho xuất hiện đại lượng $a^2 + 2$. Như vậy ta sẽ có đánh giá sau

$$(a + b + c)^2 = \left[a.1 + \sqrt{2} \cdot \frac{(b+c)}{\sqrt{2}} \right]^2 \leq (a^2 + 2) \left[1 + \left(\frac{b+c}{\sqrt{2}} \right)^2 \right]$$

Ta quy bài toán về chứng minh $3 \left[1 + \frac{(b+c)^2}{2} \right] \leq (b^2 + 2)(c^2 + 2)$. Bất đẳng thức này chỉ có hai biến và có thể chứng minh được bằng phép biến đổi tương đương.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$ ta được

$$(a + b + c)^2 = \left[a.1 + \sqrt{2} \cdot \frac{(b+c)}{\sqrt{2}} \right]^2 \leq (a^2 + 2) \left[1 + \left(\frac{b+c}{\sqrt{2}} \right)^2 \right]$$

Bài toán đưa về chứng minh $3 \left[1 + \frac{(b+c)^2}{2} \right] \leq (b^2 + 2)(c^2 + 2)$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được $\frac{(b-c)^2}{2} + (bc - 1)^2 \geq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng này hiển nhiên đúng nên bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} b = c \\ a = \frac{2}{b+c} \\ bc = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

Nhận xét: Bất đẳng thức này còn được chứng minh bằng cách sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki kết hợp với nguyên lý Dirichlet như sau:

Theo nguyên lý Dirichlet thì trong ba số a, b, c luôn tồn tại hai số cùng không lớn hơn 1 hoặc không nhỏ hơn 1.

Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là b và c , khi đó ta được

$$(b^2 - 1)(c^2 - 1) \geq 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(a + b + c)^2 = (a.1 + 1.b + 1.c)^2 \leq (a^2 + 2)(1 + b^2 + c^2)$$

Bài toán quy về chứng minh $3(1 + b^2 + c^2) \leq (b^2 + 2)(c^2 + 2)$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta thu được $(b^2 - 1)(c^2 - 1) \geq 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo giả sử trên. Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2.9: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(ab + bc + ca - 1)^2 \leq (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$$

Phân tích: Tương tự như trên, ta chú ý đến sự xuất hiện đại lượng $(ab + bc + ca - 1)^2$ ở vế trái và $a^2 + 1$ ở vế phải của bất đẳng thức cần chứng minh. Ta cần đánh giá đại lượng $(ab + bc + ca - 1)^2$ làm sao cho xuất hiện đại lượng $a^2 + 1$. Để thực hiện được đánh giá đó ta để ý đến phép biến đổi $(ab + bc + ca - 1)^2 = [a \cdot (b + c) + 1 \cdot (bc - 1)]^2$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(ab + bc + ca - 1)^2 = [a \cdot (b + c) + 1 \cdot (bc - 1)]^2 \leq (a^2 + 1)[(b + c)^2 + (bc - 1)^2]$$

Bài toán quy về chứng minh $(b + c)^2 + (bc - 1)^2 \leq (b^2 + 1)(c^2 + 1)$

Đây là một đẳng thức đúng vì $(b + c)^2 + (bc - 1)^2 = (b^2 + 1)(c^2 + 1)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a(bc - 1) = b + c \Leftrightarrow a + b + c = abc$$

Ví dụ 2.10: Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1) = 16$.

Chứng minh rằng: $-3 \leq ab + ac + ad + bc + bd + cd - abcd \leq 5$

Phân tích: Trước hết ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$(ab + ac + ad + bc + bd + cd - abcd - 1)^2 \leq 16$$

Quan sát giả thiết ta viết bất đẳng thức cần chứng minh được thành

$$(ab + ac + ad + bc + bd + cd - abcd - 1)^2 \leq (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1)$$

Đến đây ta liên tưởng đến bất đẳng thức Bunhiacopxki với cách áp dụng như các ví dụ trên.

Lời giải

Ta viết bất đẳng thức cần chứng minh lại như sau

$$-4 \leq ab + ac + ad + bc + bd + cd - abcd - 1 \leq 4$$

Hay $(ab + ac + ad + bc + bd + cd - abcd - 1)^2 \leq 16$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned}
& (ab + ac + ad + bc + bd + cd - abcd - 1)^2 \\
&= \left[a(b + c + d - bcd) + 1 \cdot (bc + bd + cd - 1) \right]^2 \\
&\leq (a^2 + 1) \left[(b + c + d - bcd)^2 + (bc + bd + cd - 1)^2 \right]
\end{aligned}$$

Bài toán đưa về chứng minh

$$(b + c + d - bcd)^2 + (bc + bd + cd - 1)^2 \leq (b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1)$$

Đây là một bất đẳng thức đúng vì

$$(b + c + d - bcd)^2 + (bc + bd + cd - 1)^2 = (b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1)$$

Ví dụ 2.11: Cho các số thực $a, b, c > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leq \sqrt{a+b+c}$$

Phân tích: Sự xuất hiện đại lượng $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1}$ cùng với chiều của bất đẳng thức cần chứng minh là cơ sở để ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki. Tuy nhiên ta cần đánh giá làm sao để xuất hiện $\frac{1}{a}$. Để ý ta có $\sqrt{a-1} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{a}}$ và với sự xuất hiện của đại lượng $\sqrt{a+b+c}$ thì nhận định trên càng có cơ sở.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \right)^2 &= \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{a-1}{a}} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{\frac{b-1}{b}} + \sqrt{c} \cdot \sqrt{\frac{c-1}{c}} \right)^2 \\
&\leq (a+b+c) \left(\frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-1}{c} \right) \\
&= (a+b+c) \left(3 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)
\end{aligned}$$

Do đó ta được $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leq \sqrt{a+b+c}$
 Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \\ \frac{a-1}{a^2} = \frac{b-1}{b^2} = \frac{c-1}{c^2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{3}{2}$$

Ví dụ 2.12: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}$$

Phân tích: Các đại lượng trong bất đẳng thức có dạng phân thức nên điều đầu tiên ta nghĩ đến là sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, tuy nhiên do bậc ở mẫu lớn hơn trên tử nên việc đánh giá sẽ

khó khăn hơn. Do đó ta tính đến sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản, nhưng để dễ đánh giá hơn ta viết bất đẳng thức lại thành

$$(a+b+c) \left[\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \right] \geq \frac{9}{4}$$

Đến đây áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(a+b+c) \left[\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \right] \geq \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)^2$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)^2 \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Đánh giá cuối cùng chính là bất đẳng thức Neibiz.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Binhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} & (a+b+c) \left[\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \right] \\ &= \left[(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 \right] \left[\left(\frac{\sqrt{a}}{b+c} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{b}}{c+a} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{c}}{a+b} \right)^2 \right] \\ &\geq \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)^2 \end{aligned}$$

Dễ dàng chứng minh được $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Do đó ta có $(a+b+c) \left[\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \right] \geq \frac{9}{4}$

Hay $\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 2.13: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2(c+a)} + \frac{b}{c^2(a+b)} + \frac{c}{a^2(b+c)} \geq \frac{9}{2(ab+bc+ca)}$$

Phân tích: Tương tự như ví dụ trên ta viết lại được bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$(ab+bc+ca) \left[\frac{a}{b^2(c+a)} + \frac{b}{c^2(a+b)} + \frac{c}{a^2(b+c)} \right] \geq \frac{9}{2}$$

Ta thấy $ab+bc+ca = \frac{a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)}{2}$ và $a(b+c) \cdot \frac{c}{a^2(b+c)} = \frac{c}{a}$

Đến đây ta có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki như lời giải sau đây

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$(ab + bc + ca) \left[\frac{a}{b^2(c+a)} + \frac{b}{c^2(a+b)} + \frac{c}{a^2(b+c)} \right] \geq \frac{9}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} & \left[\frac{b(c+a) + c(a+b) + a(b+c)}{2} \right] \left[\frac{a}{b^2(c+a)} + \frac{b}{c^2(a+b)} + \frac{c}{a^2(b+c)} \right] \\ & \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{ab(c+a)}{b^2(c+a)}} + \sqrt{\frac{bc(a+b)}{c^2(a+b)}} + \sqrt{\frac{ca(b+c)}{a^2(b+c)}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}} \right)^2 \end{aligned}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}} \geq 3$.

Do đó ta được
$$(ab + bc + ca) \left[\frac{a}{b^2(c+a)} + \frac{b}{c^2(a+b)} + \frac{c}{a^2(b+c)} \right] \geq \frac{9}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 2.14: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b+2c}} + \sqrt{\frac{bc}{b+c+2a}} + \sqrt{\frac{ca}{c+a+2b}} \leq \frac{1}{2}$$

Phân tích: Chú ý đến giả thiết và chiều bất đẳng thức ta có đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki là

$$4(a+b+2c) = (1+1+2)(a+b+2c) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{c})^2.$$

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$4(a+b+2c) = (1+1+2)(a+b+2c) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{c})^2$$

Kết hợp với bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b+2c}} = \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{4(a+b+2c)}} \leq \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{c}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} \right)$$

Áp dụng tương tự ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{bc}{b+c+2a}} & \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} \right) \\ \sqrt{\frac{ca}{c+a+2b}} & \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} \right) \end{aligned}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b+2c}} + \sqrt{\frac{bc}{b+c+2a}} + \sqrt{\frac{ca}{c+a+2b}} \leq \frac{1}{2} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) = \frac{1}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{9}$.

Cách 2: Đặt $x = \sqrt{a}$; $y = \sqrt{b}$; $z = \sqrt{c}$. Từ giả thiết ta suy ra $x + y + z = 1$.

Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2}} + \frac{yz}{\sqrt{y^2 + z^2 + 2x^2}} + \frac{zx}{\sqrt{z^2 + x^2 + 2y^2}} \leq \frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$4(x^2 + y^2 + 2z^2) = (1 + 1 + 2)(x^2 + y^2 + 2z^2) \geq (x + y + 2z)^2$$

Do đó ta có

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2}} = \frac{2xy}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + 2z^2)}} \leq \frac{2xy}{x + y + 2z} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{xy}{x + z} + \frac{xy}{y + z} \right)$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{yz}{\sqrt{y^2 + z^2 + 2x^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{yz}{x + y} + \frac{yz}{x + z} \right); \quad \frac{zx}{\sqrt{z^2 + x^2 + 2y^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{zx}{x + y} + \frac{zx}{y + z} \right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2}} + \frac{yz}{\sqrt{y^2 + z^2 + 2x^2}} + \frac{zx}{\sqrt{z^2 + x^2 + 2y^2}} \leq \frac{x + y + z}{2} = \frac{1}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{9}$.

Ví dụ 2.15: Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(2a^2 + b^2)(2a^2 + c^2)} + \frac{b^3}{(2b^2 + c^2)(2b^2 + a^2)} + \frac{c^3}{(2c^2 + a^2)(2c^2 + b^2)} \leq \frac{1}{a + b + c}$$

Phân tích: Để ý đến đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki là

$$(2a^2 + b^2)(2a^2 + c^2) = (a^2 + a^2 + b^2)(a^2 + c^2 + a^2) \geq (a^2 + ab + ac)^2 = a^2(a + b + c)^2$$

Lời giải

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(2a^2 + b^2)(2a^2 + c^2) = (a^2 + a^2 + b^2)(a^2 + c^2 + a^2) \geq (a^2 + ab + ac)^2 = a^2(a + b + c)^2$$

Do đó $\frac{a^3}{(2a^2 + b^2)(2a^2 + c^2)} \leq \frac{a}{(a + b + c)^2}$, chứng minh tương tự ta được

$$\frac{b^3}{(2b^2 + c^2)(2b^2 + a^2)} \leq \frac{b}{(a + b + c)^2}; \quad \frac{c^3}{(2c^2 + a^2)(2c^2 + b^2)} \leq \frac{c}{(a + b + c)^2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3}{(2a^2 + b^2)(2a^2 + c^2)} + \frac{b^3}{(2b^2 + c^2)(2b^2 + a^2)} + \frac{c^3}{(2c^2 + a^2)(2c^2 + b^2)} \leq \frac{1}{a + b + c}$$

Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 2.16: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3b}{1+ab^2} + \frac{b^3c}{1+bc^2} + \frac{c^3a}{1+ca^2} \geq \frac{abc(a+b+c)}{1+abc}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a^3b}{1+ab^2} + \frac{b^3c}{1+bc^2} + \frac{c^3a}{1+ca^2} \right) \left(\frac{1+ab^2}{ab} + \frac{1+bc^2}{bc} + \frac{1+ca^2}{ca} \right) \geq (a+b+c)^2 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{a^3b}{1+ab^2} + \frac{b^3c}{1+bc^2} + \frac{c^3a}{1+ca^2} \right) \left(\frac{c+ab^2c}{abc} + \frac{a+abc^2}{abc} + \frac{b+ca^2b}{abc} \right) \geq (a+b+c)^2 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{a^3b}{1+ab^2} + \frac{b^3c}{1+bc^2} + \frac{c^3a}{1+ca^2} \right) \left(\frac{abc+1}{abc} \right) (a+b+c) \geq (a+b+c)^2 \\ \Leftrightarrow & \frac{a^3b}{1+ab^2} + \frac{b^3c}{1+bc^2} + \frac{c^3a}{1+ca^2} \geq \frac{abc(a+b+c)}{1+abc} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 2.17: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Chứng minh rằng:

$$|a^3 + b^3 + c^3 - abc| \leq 2\sqrt{2}$$

Phân tích và lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $(a^3 + b^3 + c^3 - abc)^2 \leq 8$.

Quan sát giả thiết và chiều bất đẳng thức cần chứng minh ta liên tưởng đến bất đẳng thức Bunhiacopxki. Bất đẳng thức không xảy ra dấu đẳng thức tại $a = b = c$ mà lại xảy ra tại $a = b = 0; c = \pm\sqrt{2}$. Do đó ta có đánh giá bất đẳng thức trên theo hướng giảm biến. Vì vai trò của a, b, c như nhau nên ta giả sử c là số lớn nhất, khi đó ta có đánh giá

$$a^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 = 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} (a^3 + b^3 + c^3 - abc)^2 &= [a^3 + b^3 + c(c^2 - ab)]^2 \\ &\leq [(a+b)^2 + c^2] [(a^2 - ab + b^2) + (c^2 - ab)^2] \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab)(2c^4 + 2a^2b^2 + 4 - 4c^2 - 4ab) \end{aligned}$$

Đến đây ta đặt $t = ab$, do đó ta có $|t| = |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = 1$

Khi đó ta được

$$|a^3 + b^3 + c^3 - abc|^2 \leq 4(t+1) [t^2 - 2t + 2 + c^2(c^2 - 2)] \leq 4(t+1)(t^2 - 2t + 2)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $4(t+1)(t^2 - 2t + 2) \leq 8$

Hay $(t+1)(t^2-2t+2) \leq 2 \Leftrightarrow t^2(t-1) \leq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = 0$; $c = \pm\sqrt{2}$ và các hoán vị của nó.

Ví dụ 2.18: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^4+b^3+c^2} + \frac{1}{b^4+c^3+a^2} + \frac{1}{c^4+a^3+b^2} \leq 1$$

Phân tích: Để ý đến đánh giá $(a^4+b^3+c^2)(1+b+c^2) \geq (a^2+b^2+c^2)^2$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(a^4+b^3+c^2)(1+b+c^2) \geq (a^2+b^2+c^2)^2$$

Do đó ta có
$$\frac{1}{a^4+b^3+c^2} = \frac{1+b+c^2}{(a^4+b^3+c^2)(1+b+c^2)} \leq \frac{1+b+c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^4+b^3+c^2} + \frac{1}{b^4+c^3+a^2} + \frac{1}{c^4+a^3+b^2} \leq \frac{3+a+b+c+a^2+b^2+c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{3+a+b+c+a^2+b^2+c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} \leq 1$$

Hay
$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3+a+b+c+a^2+b^2+c^2$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(a^2+b^2+c^2)^2 = (a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2) \geq 3\sqrt{abc}(a^2+b^2+c^2) = 3(a^2+b^2+c^2)$$

Mà
$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq a+b+c; \quad a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt{a^2b^2c^2} \geq 3$$

Do đó
$$3(a^2+b^2+c^2) \geq a^2+b^2+c^2+a+b+c+3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 2.19: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^3+b^2+c} + \frac{b}{b^3+c^2+a} + \frac{c}{c^3+a^2+b} \leq 1$$

Phân tích: Để ý đến đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki sau

$$(a^3+b^2+c)\left(\frac{1}{a}+1+c\right) \geq (a+b+c)^2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(a^3 + b^2 + c) \left(\frac{1}{a} + 1 + c \right) \geq (a + b + c)^2$$

Do đó ta được

$$\frac{a}{a^3 + b^2 + c} = \frac{a \left(\frac{1}{a} + 1 + c \right)}{(a^3 + b^2 + c) \left(\frac{1}{a} + 1 + c \right)} \leq \frac{a \left(\frac{1}{a} + 1 + c \right)}{(a + b + c)^2} = \frac{ac + a + 1}{9}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{b}{b^3 + c^2 + a} \leq \frac{ab + b + 1}{9}; \quad \frac{c}{c^3 + a^2 + b} \leq \frac{cb + c + 1}{9}$$

Do đó ta có bất đẳng thức

$$\frac{a}{a^3 + b^2 + c} + \frac{b}{b^3 + c^2 + a} + \frac{c}{c^3 + a^2 + b} \leq \frac{ab + bc + ca + a + b + c + 3}{9}$$

Ta cần chứng minh $\frac{ab + bc + ca + 6}{9} \leq 1$ hay $ab + bc + ca \leq 3$

Thật vậy, theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 2.20: Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{3a}{b + c} + \frac{4b}{c + a} + \frac{5c}{a + b}$$

Phân tích: Quan sát biểu thức ta thấy có thể viết biểu thức về dạng

$$P + 12 = (a + b + c) \left(\frac{3}{b + c} + \frac{4}{c + a} + \frac{5}{a + b} \right)$$

Yêu cầu của bài toán cùng với cách phát biểu của biểu thức làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức Bunhiacopxki

Lời giải

Biến đổi biểu thức P ta được

$$P + 12 = (a + b + c) \left(\frac{3}{b + c} + \frac{4}{c + a} + \frac{5}{a + b} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{1}{2} [(b + c) + (c + a) + (a + b)] \left(\frac{3}{b + c} + \frac{4}{c + a} + \frac{5}{a + b} \right) \geq \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2$$

$$\text{Nên } P \geq \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2 - 12$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2} (\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2 - 12$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{b+c}{\sqrt{3}} = \frac{c+a}{2} = \frac{a+b}{\sqrt{5}}.$$

Ví dụ 2.21: Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{3(c-b)}{2b+a} + \frac{4(a-c)}{b+2c} + \frac{5(b-a)}{c+2a}$$

Lời giải

Biến đổi biểu thức ta có

$$\begin{aligned} T + 12 &= \left(\frac{3(c-b)}{2b+a} + 3 \right) + \left(\frac{4(a-c)}{b+2c} + 4 \right) + \left(\frac{5(b-a)}{c+2a} + 5 \right) \\ &= \frac{3(a+b+c)}{a+2b} + \frac{4(a+b+c)}{b+2c} + \frac{5(a+b+c)}{c+2a} \\ &= (a+b+c) \left(\frac{3}{a+2b} + \frac{4}{b+2c} + \frac{5}{c+2a} \right) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{1}{3} \left[(a+2b) + (b+2c) + (c+2a) \right] \left(\frac{3}{a+2b} + \frac{4}{b+2c} + \frac{5}{c+2a} \right) \geq \frac{1}{3} (\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2$$

Do đó ta được
$$T \geq \frac{1}{3} (\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2 - 12$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức T là $\frac{1}{3} (\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})^2 - 12$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{b+c}{\sqrt{3}} = \frac{c+a}{2} = \frac{a+b}{\sqrt{5}}$

Ví dụ 2.22: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác và x, y, z là các số thực. Chứng minh rằng:

$$\frac{ax^2}{b+c-a} + \frac{by^2}{c+a-b} + \frac{cz^2}{a+b-c} \geq xy + yz + zx$$

Phân tích: Để ý là $\frac{ax^2}{b+c-a} + \frac{x^2}{2} = \frac{(a+b+c)x^2}{2(b+c-a)}$, do đó ta thêm vào hai vế cùng một đại lượng

$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$ và áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Lời giải

Đặt $T = \frac{ax^2}{b+c-a} + \frac{by^2}{c+a-b} + \frac{cz^2}{a+b-c}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} T + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} &= \left(\frac{ax^2}{b+c-a} + \frac{x^2}{2} \right) + \left(\frac{by^2}{c+a-b} + \frac{y^2}{2} \right) + \left(\frac{cz^2}{a+b-c} + \frac{z^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (a+b+c) \left[\frac{x^2}{b+c-a} + \frac{y^2}{c+a-b} + \frac{z^2}{a+b-c} \right] \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{1}{2}(a+b+c)\left(\frac{x^2}{b+c-a} + \frac{y^2}{c+a-b} + \frac{z^2}{a+b-c}\right) \geq \frac{1}{2}(x+y+z)^2$$

Do đó ta được

$$T + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \geq \frac{1}{2}(x+y+z)^2$$

Suy ra

$$\frac{ax^2}{b+c-a} + \frac{by^2}{c+a-b} + \frac{cz^2}{a+b-c} \geq xy + yz + zx$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b = c \\ x = y = z \end{cases}$

Ví dụ 2.23: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh thì suy nghĩ đầu tiên là khử căn bậc hai bằng bất đẳng thức Bunhiacopxki

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq \sqrt{3\left(\frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{b+c} + \frac{2c}{c+a}\right)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{b+c} + \frac{2c}{c+a} \leq 3$$

Tuy nhiên đánh giá trên lại là một đánh giá ngược chiều.

Để ý ta thấy bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức hoán vị, có một kinh nghiệm khi chứng minh bất đẳng thức đó là nếu ta biến đổi từ bất đẳng thức hoán vị về thành bất đẳng thức đối xứng thì bài toán sẽ trở nên đơn giản hơn. Với kinh nghiệm đó ta thử biến đổi bất đẳng thức về dạng đối xứng xem sao. Quan sát đại lượng về trái ta có thể đối xứng hóa như sau

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} = \sqrt{\frac{2a(a+c)}{(a+b)(a+c)}} + \sqrt{\frac{2b(a+b)}{(b+c)(b+a)}} + \sqrt{\frac{2c(b+c)}{(c+a)(b+c)}}$$

Đến đây ta có thể khử căn bất đẳng thức trên bằng bất đẳng thức Bunhiacopxki như sau

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2a(a+c)}{(a+b)(a+c)}} + \sqrt{\frac{2b(a+b)}{(b+c)(b+a)}} + \sqrt{\frac{2c(b+c)}{(c+a)(b+c)}} \\ & \leq (2a+2b+2c) \left(\frac{2a}{(a+b)(a+c)} + \frac{2b}{(b+c)(b+a)} + \frac{2c}{(c+a)(b+c)} \right) \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$(2a+2b+2c) \left(\frac{2a}{(a+b)(a+c)} + \frac{2b}{(b+c)(b+a)} + \frac{2c}{(c+a)(b+c)} \right) \leq 3$$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$8(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq 9(a+b)(b+c)(c+a)$$

Tiếp tục biến đổi tương đương ta được

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Đây là một bất đẳng thức đúng.

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 2.24: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{a+b+2c}} + \sqrt{\frac{b}{b+c+2a}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a+2b}} \leq \frac{3}{2}$$

Phân tích và lời giải

Ta đối xứng hóa bất đẳng thức trên thành

$$\sqrt{\frac{a(a+2b+c)}{(a+b+2c)(a+2b+c)}} + \sqrt{\frac{b(a+b+2c)}{(b+c+2a)(a+b+2c)}} + \sqrt{\frac{c(b+c+2a)}{(c+a+2b)(b+c+2a)}} \leq \frac{3}{2}$$

Gọi vế trái của bất đẳng thức là A , áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$A^2 \leq \frac{4(a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3bc + 3ca)(a+b+c)}{(a+b+2c)(b+c+2a)(c+a+2b)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$16(a^2 + b^2 + c^2 + 3ab + 3bc + 3ca)(a+b+c) \leq 9(a+b+2c)(b+c+2a)(c+a+2b)$$

Biên đổi tương đương ta được

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta được $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$. Do đó ta cần chứng minh được

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

Đây là một đánh giá đúng quen thuộc.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

3. Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

Bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức là bất đẳng thức có ứng dụng rộng rãi trong chứng minh các bài toán bất đẳng thức. Nó giải quyết được một lớp các bất đẳng thức chứa các đại lượng có dạng phân thức.

Ví dụ 3.1: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Phân tích: Quan sát các đại lượng bên vế trái và chiều bất đẳng thức, một cách tự nhiên ta nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b)+(c+a)+(a+b)} = \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 3.2: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} + \frac{c^2}{c^2+2ab} \geq 1$$

Phân tích: Quan sát các đại lượng bên vế trái và chiều bất đẳng thức, một cách tự nhiên ta nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} + \frac{c^2}{c^2+2ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)} = 1$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Nhận xét: Nếu ta thay các biến a, b, c tương ứng bởi $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ thì ta thu được bất đẳng thức

$$\frac{bc}{bc+2a^2} + \frac{ca}{ca+2b^2} + \frac{ab}{ab+2c^2} \geq 1$$

Để ý ta lại thấy $\frac{bc}{bc+2a^2} = 1 - \frac{2a^2}{bc+2a^2}$, khi đó ta được bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{bc+2a^2} + \frac{b^2}{ca+2b^2} + \frac{c^2}{ab+2c^2} \leq 1$$

Ví dụ 3.3: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} \geq 1$$

Phân tích: Quan sát vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh ta cũng có thể nghĩ đến việc vận dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Nhưng nếu để như thế mà áp dụng thì không được. Trước hết ta cần tạo ra các biểu thức có dạng bình phương ở tử có 3 phân thức ở vế trái bằng cách nhân thêm vào tử và mẫu các lượng thích hợp.

$$\text{Đề ý là } \frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} = \frac{a^2}{a(2b+c)} + \frac{b^2}{b(2c+a)} + \frac{c^2}{c(2a+b)}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} = \frac{a^2}{a(2b+c)} + \frac{b^2}{b(2c+a)} + \frac{c^2}{c(2a+b)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$

Tuy nhiên đánh giá trên ta một đánh giá đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 3.4: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(a+b+c)^2}$$

Ta lại có
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2$$

Do đó ta được
$$\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 3.5: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{1+a^2b} + \frac{b^4}{1+b^2c} + \frac{c^4}{1+c^2a} \geq \frac{abc(a+b+c)}{1+abc}$$

Phân tích: Ở bài toán này tử số của các phân thức đã ở dạng lũy thừa bậc chẵn nên ta có thể nghĩ đến việc vận dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

$$\frac{a^4}{1+a^2b} + \frac{b^4}{1+b^2c} + \frac{c^4}{1+c^2a} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{3 + a^2b + b^2c + c^2a}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{3 + a^2b + b^2c + c^2a} \geq \frac{abc(a+b+c)}{1+abc}$$

Nhưng thực sự bất ngờ khi cách áp dụng như thế này lại không giúp ta giải quyết được bài toán vì đánh giá trên là một đánh giá không đúng. Nên buộc ta phải tìm hướng giải quyết khác

Để ý ta thấy $c(1+a^2b) + a(1+b^2c) + b(1+c^2a) = (1+abc)(a+b+c)$. Khi đó ta áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức như sau

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^4}{1+a^2b} + \frac{b^4}{1+b^2c} + \frac{c^4}{1+c^2a} &= \frac{a^4c}{c(1+a^2b)} + \frac{b^2a}{a(1+b^2c)} + \frac{c^2b}{b(1+c^2a)} \\ &\geq \frac{(a^2\sqrt{c} + b^2\sqrt{a} + c^2\sqrt{b})^2}{c(1+a^2b) + a(1+b^2c) + b(1+c^2a)} = \frac{(a^2\sqrt{c} + b^2\sqrt{a} + c^2\sqrt{b})^2}{(1+abc)(a+b+c)} \end{aligned}$$

Khi đó ta cần chứng minh được

$$a^2\sqrt{c} + b^2\sqrt{a} + c^2\sqrt{b} \geq \sqrt{abc}(a + b + c) \Leftrightarrow \frac{a^2}{\sqrt{ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{ca}} + \frac{c^2}{\sqrt{bc}} \geq a + b + c$$

Theo bất đẳng thức Cauchy và Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{\sqrt{ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{ca}} + \frac{c^2}{\sqrt{bc}} \geq \frac{a^2}{\frac{a+b}{2}} + \frac{b^2}{\frac{b+c}{2}} + \frac{c^2}{\frac{c+a}{2}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2}} = a + b + c$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 3.6: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{(b+c)^2}{b^2 + c^2 + a(b+c)} + \frac{(c+a)^2}{c^2 + a^2 + b(c+a)} + \frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2 + c(a+b)} \leq 3$$

Phân tích: Bất đẳng thức có tử là các lũy thừa bậc hai, tuy nhiên ta không thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki như các ví dụ trên vì ta sẽ thu được bất đẳng thức ngược chiều. Để ý ta thấy có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức kiểu

$$\frac{(b+c)^2}{b^2 + c^2 + a(b+c)} \leq \frac{b^2}{x} + \frac{c^2}{y}$$

Ta cần xác định được x và y sao cho tổng của chúng là $b^2 + c^2 + a(b+c)$ và đảm bảo dấu đẳng thức xảy ra. Xét đến vai trò đối xứng của b và c trong biểu thức ta có thể xác định được $x = b^2 + ab$; $y = c^2 + ac$, khi đó ta được

$$\frac{(b+c)^2}{b^2 + c^2 + a(b+c)} \leq \frac{b^2}{b^2 + ab} + \frac{c^2}{c^2 + ca} = \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+a}$$

Đến đây ta có thể giải được bài toán trên.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{(b+c)^2}{b^2 + c^2 + a(b+c)} = \frac{(b+c)^2}{b(a+b) + c(c+a)} \leq \frac{b^2}{b(a+b)} + \frac{c^2}{c(c+a)} = \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+a}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{(c+a)^2}{c^2 + a^2 + b(c+a)} \leq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+b}; \quad \frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2 + c(a+b)} \leq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{b+c}$$

Cộng các bất đẳng thức trên vế theo vế ta được:

$$\frac{(b+c)^2}{b^2 + c^2 + a(b+c)} + \frac{(c+a)^2}{c^2 + a^2 + b(c+a)} + \frac{(a+b)^2}{a^2 + b^2 + c(a+b)} \leq 3$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 3.7: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + 4b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 4c^2} \leq \frac{1}{2}$$

Phân tích: Sự xuất hiện biểu thức $\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2}$ và chiều của bất đẳng thức cần chứng minh làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức với cách đánh giá tương tự như ví dụ trên. Như

vậy ta cần viết $\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2}$ về dạng $\frac{(A + B + C)^2}{x + y + z}$, ta cần xác định được các đại lượng $A + B + C$; $x + y + z$ với $x + y + z = 4a^2 + b^2 + c^2$. Để ý đến giả thiết $a + b + c = 3$ khi đó $(a + b + c)^2 = 9$, do đó ta có thể định được $A + B + C$ theo phép biến đổi

$$\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{(a + b + c)^2}{2a^2 + (a^2 + b^2) + (c^2 + a^2)}.$$

Bunhiacopxki dạng phân thức là

$$\frac{(a + b + c)^2}{2a^2 + (a^2 + b^2) + (c^2 + a^2)} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{c^2 + a^2} \right)$$

Đến đây ta có thể trình bày lời giải cho bài toán như sau

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{(a + b + c)^2}{2a^2 + (a^2 + b^2) + (c^2 + a^2)} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{c^2 + a^2} \right)$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 + 4b^2 + c^2} &\leq \frac{1}{9} \left(\frac{b^2}{2b^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{b^2 + c^2} \right) \\ \frac{1}{a^2 + b^2 + 4c^2} &\leq \frac{1}{9} \left(\frac{c^2}{2c^2} + \frac{a^2}{a^2 + c^2} + \frac{b^2}{b^2 + c^2} \right) \end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức trên về theo về ta được

$$\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + 4b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 4c^2} \leq \frac{1}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 3.8: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{b + c}{a^2 + bc} + \frac{c + a}{b^2 + ca} + \frac{a + b}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Phân tích: Để ý đến biến đổi và đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki sau

$$\frac{b + c}{a^2 + bc} = \frac{(b + c)^2}{(a^2 + bc)(b + c)} = \frac{(b + c)^2}{c(a^2 + b^2) + b(c^2 + a^2)} \leq \frac{b^2}{c(a^2 + b^2)} + \frac{c^2}{b(c^2 + a^2)}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Binhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{b + c}{a^2 + bc} = \frac{(b + c)^2}{(a^2 + bc)(b + c)} = \frac{(b + c)^2}{c(a^2 + b^2) + b(c^2 + a^2)} \leq \frac{b^2}{c(a^2 + b^2)} + \frac{c^2}{b(c^2 + a^2)}$$

Áp dụng tương tự ta được ,

$$\frac{c+a}{b^2+ca} \leq \frac{c^2}{a(b^2+c^2)} + \frac{a^2}{c(a^2+b^2)}; \quad \frac{a+b}{c^2+ab} \leq \frac{a^2}{b(c^2+a^2)} + \frac{b^2}{a(b^2+c^2)}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét: Nếu ta thay các biến a, b, c tương ứng bởi $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ thì ta thu được bất đẳng thức

$$\frac{a^2(b+c)}{bc+a^2} + \frac{b^2(c+a)}{ca+b^2} + \frac{c^2(a+b)}{ca+b^2} \leq a+b+c$$

Để ý ta lại thấy $\frac{a^2(b+c)}{bc+a^2} = b+c - \frac{bc(b+c)}{bc+a^2}$, khi đó ta được bất đẳng thức

$$\frac{bc(b+c)}{bc+a^2} + \frac{ca(c+a)}{ca+b^2} + \frac{ab(a+b)}{ca+b^2} \geq a+b+c$$

Ví dụ 3.9: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} + \frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)} + \frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \leq \frac{1}{3}$$

Phân tích: Để ý ta có phép biến đổi $(2a+b)(2a+c) = 2a(a+b+c) + 2a^2 + bc$ khi đó ta có đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki sau

$$\frac{1}{2a(a+b+c) + (2a^2 + bc)} \leq \frac{1}{9} \left[\frac{4}{2a(a+b+c)} + \frac{1}{2a^2 + bc} \right]$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} &= \frac{1}{9} \cdot \frac{a^2(2+1)^2}{2a(a+b+c) + (2a^2 + bc)} \\ &\leq \frac{1}{9} \left[\frac{4a^2}{2a(a+b+c)} + \frac{a^2}{2a^2 + bc} \right] = \frac{1}{9} \left[\frac{2a}{a+b+c} + \frac{a^2}{2a^2 + bc} \right] \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)} &\leq \frac{1}{9} \left[\frac{2b}{a+b+c} + \frac{b^2}{2b^2 + ca} \right] \\ \frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} &\leq \frac{1}{9} \left[\frac{2c}{a+b+c} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} \right] \end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức trên về theo về ta được

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} + \frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)} + \frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)} \leq \frac{1}{3}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.10: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a^2+1} + \frac{ca}{b^2+1} + \frac{ab}{c^2+1} \leq \frac{3}{4}$$

Phân tích: Để ý ta có phép biến đổi $a^2 + 1 = 2a^2 + b^2 + c^2$ và theo bất đẳng thức Cauchy ta được $ab \leq \frac{(b+c)^2}{4}$. Khi đó ta có đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki sau

$$\frac{bc}{a^2+1} \leq \frac{(b+c)^2}{4(2a^2+b^2+c^2)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{c^2+a^2} \right)$$

Áp dụng tương tự ta có lời giải như sau

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và bất đẳng thức Bunhiacopki dạng phân thức ta được

$$\frac{bc}{a^2+1} \leq \frac{(b+c)^2}{4(2a^2+b^2+c^2)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{c^2+a^2} \right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{ca}{b^2+1} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{c^2}{b^2+c^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2} \right); \quad \frac{ab}{c^2+1} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{c^2+a^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2} \right)$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{bc}{a^2+1} + \frac{ca}{b^2+1} + \frac{ab}{c^2+1} \leq \frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 3.11: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{3a+b}{\sqrt{a^2+2b^2+c^2}} + \frac{3b+c}{\sqrt{b^2+2c^2+a^2}} + \frac{3c+a}{\sqrt{c^2+2a^2+b^2}} \leq 6$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta nghĩ đến đánh giá các mẫu bằng bất đẳng thức Cauchy. Tuy nhiên ở đây ta phân tích xem có sử dụng được bất đẳng thức Bunhiacopxki để đánh giá bất đẳng thức hay không? Bất đẳng thức có chứa căn và nếu ta làm mất được dấu căn thì tốt quá. Chú ý đến chiều bất đẳng thức ta có đánh giá sau

$$\left(\frac{3a+b}{\sqrt{a^2+2b^2+c^2}} + \frac{3b+c}{\sqrt{b^2+2c^2+a^2}} + \frac{3c+a}{\sqrt{c^2+2a^2+b^2}} \right)^2 \leq 3 \left(\frac{(3a+b)^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{(3b+c)^2}{b^2+2c^2+a^2} + \frac{(3c+a)^2}{c^2+2a^2+b^2} \right)$$

Như vậy ta cần chứng minh được

$$\frac{(3a+b)^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{(3b+c)^2}{b^2+2c^2+a^2} + \frac{(3c+a)^2}{c^2+2a^2+b^2} \leq 12$$

Các phân thức ở vế trái bất đẳng thức trên có các tử là các bình phương nên ta có thể áp dụng bất đẳng thức Bnhiacopxki dạng phân thức như các ví dụ trên,

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\left(\frac{3a+b}{\sqrt{a^2+2b^2+c^2}} + \frac{3b+c}{\sqrt{b^2+2c^2+a^2}} + \frac{3c+a}{\sqrt{c^2+2a^2+b^2}} \right)^2 \leq 3 \left(\frac{(3a+b)^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{(3b+c)^2}{b^2+2c^2+a^2} + \frac{(3c+a)^2}{c^2+2a^2+b^2} \right)$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{(3a+b)^2}{a^2+2b^2+c^2} \leq \frac{9a^3}{a^2+b^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{9a^3}{a^2+b^2+c^2} + 1$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned} \frac{(3a+b)^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{(3b+c)^2}{b^2+2c^2+a^2} + \frac{(3c+a)^2}{c^2+2a^2+b^2} \\ \leq \frac{9a^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9b^2}{b^2+c^2+a^2} + \frac{9c^2}{c^2+a^2+b^2} + 3 = 12 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó} \quad \left(\frac{3a+b}{\sqrt{a^2+2b^2+c^2}} + \frac{3b+c}{\sqrt{b^2+2c^2+a^2}} + \frac{3c+a}{\sqrt{c^2+2a^2+b^2}} \right)^2 \leq 3.12 = 36$$

$$\text{Hay} \quad \frac{3a+b}{\sqrt{a^2+2b^2+c^2}} + \frac{3b+c}{\sqrt{b^2+2c^2+a^2}} + \frac{3c+a}{\sqrt{c^2+2a^2+b^2}} \leq 6$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Ví dụ 3.12: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{3a-b+c} + \frac{b}{3b-c+a} + \frac{c}{3c-a+b} \geq 1$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh thì suy nghĩ đầu tiên là áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

$$\frac{a}{3a-b+c} + \frac{b}{3b-c+a} + \frac{c}{3c-a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(a^2+b^2+c^2)}$$

$$\text{Ta cần chứng minh được } \frac{(a+b+c)^2}{3(a^2+b^2+c^2)} \geq 1 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2), \text{ tuy nhiên}$$

đây lại là một đánh giá sai. Do đó ta không thể áp dụng trực tiếp được.

Ta cần phải biến đổi bất đẳng thức trước rồi mới nghĩ đến áp dụng. Chú ý đến giả thiết cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Như vậy có thể bất đẳng thức sẽ liên quan đến các đại lượng $a+b-c$; $b+c-a$; $c+a-b$, ta thử biến đổi các đại lượng xem có thể tạo ra các đại lượng $a+b-c$; $b+c-a$; $c+a-b$ không

$$\text{Để ý là } 4a = (3a-b+c) + (a+b-c) \text{ khi đó ta được}$$

$$\frac{4a}{3a-b+c} = \frac{(3a-b+c) + (a+b-c)}{3a-b+c} = 1 + \frac{a+b-c}{3a-b+c}$$

Đến đây ta có thể áp dụng được bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{4a}{3a-b+c} + \frac{4b}{3b-c+a} + \frac{4c}{3c-a+b} \geq 4$$

Ta có biến đổi sau

$$\frac{4a}{3a-b+c} = \frac{(3a-b+c) + (a+b-c)}{3a-b+c} = 1 + \frac{a+b-c}{3a-b+c}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{4b}{3b-c+a} = 1 + \frac{b+c-a}{3b-c+a}; \quad \frac{4c}{3c-a+b} = 1 + \frac{c+a-b}{3c-a+b}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a+b-c}{3a-b+c} + \frac{b+c-a}{3b-c+a} + \frac{c+a-b}{3c-a+b} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a+b-c}{3a-b+c} + \frac{b+c-a}{3b-c+a} + \frac{c+a-b}{3c-a+b} \\ & \geq \frac{(a+b-c+b+c-a+c+a-b)^2}{(a+b-c)(3a-b+c) + (b+c-a)(3b-c+a) + (c+a-b)(3c-a+b)} \\ & = \frac{(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca} = 1 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét: Ta có thể sử dụng phép đổi biến để chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a+b-c}{3a-b+c} + \frac{b+c-a}{3b-c+a} + \frac{c+a-b}{3c-a+b} \geq 1$$

Đặt $x = a+b-c$; $y = c+a-b$; $z = a+b-c$

Khi đó ta được $2a = y+z$; $2b = z+x$; $2c = x+y$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x}{2z+x} + \frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{x}{2z+x} + \frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.13: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2 + bc + c^2} + \frac{b}{c^2 + ca + a^2} + \frac{c}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{a + b + c}{ab + bc + ca}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cộng mẫu ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b^2 + bc + c^2} + \frac{b}{c^2 + ca + a^2} + \frac{c}{a^2 + ab + b^2} \\ &= \frac{a^2}{ab^2 + abc + ac^2} + \frac{b^2}{bc^2 + bca + a^2b} + \frac{c^2}{a^2c + abc + b^2c} \\ &\geq \frac{(a + b + c)^2}{a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(a + b + c)^2}{a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc} = \frac{a + b + c}{ab + bc + ca}$$

Hay $(a + b + c)(ab + bc + ca) = a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc$

Đẳng thức trên đúng với mọi a, b, c . Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.14: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cộng mẫu ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c}{c^2 + ca + a^2} \\ &= \frac{a^2}{a^3 + a^2b + ab^2} + \frac{b^2}{b^3 + b^2c + bc^2} + \frac{c^2}{c^3 + c^2a + a^2c} \\ &\geq \frac{(a + b + c)^2}{a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(a + b + c)^2}{a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2} \geq \frac{a + b + c}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Hay $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2$

Bất đẳng thức trên đúng với mọi a, b, c . Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.15: Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2} \geq \frac{32(a^2 + b^2)}{(a + b)^4}$$

Bài làm

Ta có
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{4}{a^2 + b^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2 b^2 (a^2 + b^2)} + \frac{4a^2 b^2}{a^2 b^2 (a^2 + b^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2 b^2 (a^2 + b^2)} + \frac{4a^2 b^2}{a^2 b^2 (a^2 + b^2)} \geq \frac{(a^2 + b^2 + 2ab)^2}{2a^2 b^2 (a^2 + b^2)} = \frac{(a + b)^4}{2a^2 b^2 (a^2 + b^2)}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{(a + b)^4}{2a^2 b^2 (a^2 + b^2)} \geq \frac{32(a^2 + b^2)}{(a + b)^4}$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$(a + b)^8 \geq 64a^2 b^2 (a^2 + b^2)^2 \text{ hay } (a + b)^4 \geq 8ab(a^2 + b^2)$$

Triển khai và thu gọn ta được $(a - b)^4 \geq 0$. Bất đẳng thức cuối cùng đúng với mọi số thực a, b.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Ví dụ 3.16: Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta thấy có dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Tuy nhiên để áp dụng được ta cần viết các tử số về dạng bình phương. Khi đó ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a\sqrt{a^2 + 8bc} + b\sqrt{b^2 + 8ca} + c\sqrt{c^2 + 8ab}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a + b + c)^2}{a\sqrt{a^2 + 8bc} + b\sqrt{b^2 + 8ca} + c\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

Bất đẳng thức trên có mẫu số chứa các căn bậc hai nên ta nghĩ đến đánh giá đưa các đại lượng trong các dấu căn về cùng trong một dấu căn. Để đến đại lượng trên tử số ta có đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki như sau

$$\begin{aligned} a\sqrt{a^2 + 8bc} + b\sqrt{b^2 + 8ca} + c\sqrt{c^2 + 8ab} \\ = \sqrt{a}\sqrt{a^3 + 8abc} + \sqrt{b}\sqrt{b^3 + 8abc} + \sqrt{c}\sqrt{c^3 + 8abc} \\ \leq \sqrt{(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3 + 24abc)} \end{aligned}$$

Đến đây ta chỉ cần chứng minh được $(a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$ là bài toán được giải quyết xong.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a\sqrt{a^2 + 8bc} + b\sqrt{b^2 + 8ca} + c\sqrt{c^2 + 8ab}}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} a\sqrt{a^2 + 8bc} + b\sqrt{b^2 + 8ca} + c\sqrt{c^2 + 8ab} &= \sqrt{a}\sqrt{a^3 + 8abc} + \sqrt{b}\sqrt{b^3 + 8abc} + \sqrt{c}\sqrt{c^3 + 8abc} \\ &\leq \sqrt{(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3 + 24abc)} \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} &\geq \frac{(a + b + c)^2}{\sqrt{(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3 + 24abc)}} \\ &= \sqrt{\frac{(a + b + c)^3}{a^3 + b^3 + c^3 + 24abc}} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $(a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$, bất đẳng thức này tương đương với

$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$. Đây là bất đẳng thức đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.17: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 3bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 3ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 3ab}} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 3bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 3ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 3ab}} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a\sqrt{a^2 + 3bc} + b\sqrt{b^2 + 3ca} + c\sqrt{c^2 + 3ab}}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} a\sqrt{a^2 + 3bc} + b\sqrt{b^2 + 3ca} + c\sqrt{c^2 + 3ab} &= \sqrt{a}\sqrt{a^3 + 3abc} + \sqrt{b}\sqrt{b^3 + 3abc} + \sqrt{c}\sqrt{c^3 + 3abc} \\ &\leq \sqrt{(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3 + 9abc)} \end{aligned}$$

Do vậy ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 3bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 3ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 3ab}} \geq \frac{(a + b + c)^2}{\sqrt{(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3 + 9abc)}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a + b + c)^2}{\sqrt{(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3 + 9abc)}} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{(a + b + c)^3}{a^3 + b^3 + c^3 + 9abc} \geq \frac{9}{4}$$

Thực hiện biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được

$$12 \left[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \right] \geq 5(a^3 + b^3 + c^3) + 57abc$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$

Do đó
$$6(a^3 + b^3 + c^3 + 9abc) \geq 5(a^3 + b^3 + c^3) + 57abc$$

Như vậy ta cần chứng minh

$$2 \left[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \right] \geq a^3 + b^3 + c^3 + 9abc$$

Hay
$$(3a-b-c)(b-c)^2 + (b+c-a)(a-b)(a-c) \geq 0$$

Do a, b, c có tính đối xứng, nên không mất tính tổng quát ta chọn a lớn nhất, khi đó bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Ví dụ 3.18: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}} \geq a + b + c$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}} = \frac{a^2}{a\sqrt{b}} + \frac{b^2}{b\sqrt{c}} + \frac{c^2}{c\sqrt{a}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a}}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a}} \geq a + b + c$$

Hay
$$a + b + c \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a}$$

Cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a})^2 = (\sqrt{a} \cdot \sqrt{ab} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{bc} + \sqrt{c} \cdot \sqrt{ca})^2 \leq (a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Hay
$$a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq \sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

Ta cần chứng minh
$$\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)} \leq a + b + c$$

Hay ta cần chứng minh

$$ab + bc + ca \leq a + b + c \Leftrightarrow (ab + bc + ca)^2 \leq (a + b + c)^2$$

Mà ta có $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, như vậy phép chứng minh sẽ hoàn ta nếu ta chỉ ra được $ab + bc + ca \leq 3$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng vì $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 = 3$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Ví dụ 3.19: Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) (a+b+c) \geq 3\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Phân tích: Theo bất đẳng thức Buniacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{bc} + \frac{c^2}{ca} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

Khi đó ta có $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)(a+b+c) \geq \frac{(a+b+c)^3}{ab+bc+ca}$ và phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ

ra được $\frac{(a+b+c)^3}{ab+bc+ca} \geq 3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}.$

Việc chứng minh bất đẳng thức trên hoàn toàn dễ dàng.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{bc} + \frac{c^2}{ca} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

$$\text{Do đó } \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)(a+b+c) \geq \frac{(a+b+c)^3}{ab+bc+ca}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^3}{ab+bc+ca} \geq 3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \Leftrightarrow (a+b+c)^3 \geq 3(ab+bc+ca)\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a^2+b^2+c^2) + (ab+bc+ca) + (ab+bc+ca) \\ &\geq 3\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2}\end{aligned}$$

$$\text{Lũy thừa bậc ba hai vế ta được } (a+b+c)^6 \geq 27(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2$$

Lấy căn bậc hai hai vế bất đẳng thức trên ta được

$$(a+b+c)^3 \geq 3(ab+bc+ca)\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.20: Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \geq 2\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \geq 2\sqrt{\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)(a+b+c)}$$

$$\text{Ta cần chứng minh } \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)(a+b+c) \geq 3(a^2+b^2+c^2)$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = \frac{a^4}{a^2b} + \frac{b^4}{b^2c} + \frac{c^4}{c^2a} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b + b^2c + c^2a}$$

Ta cần chỉ ra được
$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2 (a + b + c)}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) \text{ hay}$$
$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Tức là ta cần chứng minh

$$(a^3 + ab^2) + (b^3 + bc^2) + (c^3 + ca^2) \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Đánh giá trên đây đúng theo bất đẳng thức Cauchy. Do đó bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.21: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)} \\ &\geq \frac{1}{a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2)} \end{aligned}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\begin{aligned} a(b^2 + c^2) &= \sqrt{\frac{1}{2} 2a^2 (b^2 + c^2)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} 2a^2 (b^2 + c^2)(b^2 + c^2)} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}{3} \right)^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Áp dụng tương tự ta được $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

Do đó ta được
$$\frac{1}{a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2)} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Từ đó suy ra
$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 3.22: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + 1}} \leq \frac{9}{2(a + b + c)}$$

Phân tích: Để ý ta thấy

$$\begin{aligned} & (a+b+c) \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} \right) \\ &= \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{b+c}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{c+a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{a+b}{\sqrt{c^2+1}} \end{aligned}$$

Ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \leq \frac{3}{2}; \quad \frac{b+c}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{c+a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{a+b}{\sqrt{c^2+1}} \leq 3$$

Lời giải

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} \right) \leq \frac{9}{2}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \leq \sqrt{\frac{3a^2}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{3b^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{3c^2}{a^2+b^2+2c^2}}$$

Mặt khác ta lại có $\frac{3a^2}{2a^2+b^2+c^2} \leq \frac{3}{4} \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2}{a^2+c^2} \right)$, áp dụng tương tự ta được

$$\sqrt{\frac{3a^2}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{3b^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{3c^2}{a^2+b^2+2c^2}} \leq \frac{3}{2}$$

Do đó
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \leq \frac{3}{2} \quad (1)$$

Áp tương tự như trên ta được

$$\frac{b+c}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{c+a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{a+b}{\sqrt{c^2+1}} \leq \sqrt{\frac{3(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{3(c+a)^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{3(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2}}$$

Dễ dàng chứng minh được
$$\frac{3(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2} \leq 3 \left(\frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} \right)$$

Tương tự ta được
$$\sqrt{\frac{3(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{3(c+a)^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{3(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2}} \leq 3$$

Hay
$$\frac{b+c}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{c+a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{a+b}{\sqrt{c^2+1}} \leq 3 \quad (2)$$

Cộng theo về các bất đẳng thức (1) và (2) ta được

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} \right) \leq \frac{9}{2}$$

Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 3.23: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{(a+b+c+\sqrt[3]{abc})^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} &= \frac{c^2}{c^2(a+b)} + \frac{a^2}{a^2(b+c)} + \frac{b^2}{b^2(c+a)} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{c^2(a+b) + a^2(b+c) + b^2(c+a)} \end{aligned}$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} &\frac{(a+b+c)^2}{c^2(a+b) + a^2(b+c) + b^2(c+a)} + \frac{1}{2\sqrt[3]{abc}} \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{c^2(a+b) + a^2(b+c) + b^2(c+a)} + \frac{(\sqrt[3]{abc})^2}{2abc} \\ &\geq \frac{(a+b+c+\sqrt[3]{abc})^2}{c^2(a+b) + a^2(b+c) + b^2(c+a) + 2abc} = \frac{(a+b+c+\sqrt[3]{abc})^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta được } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{(a+b+c+\sqrt[3]{abc})^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Ví dụ 3.24: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+a}{b+c} + \frac{1+b}{c+a} + \frac{1+c}{a+b} \leq 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)$$

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{1+a}{b+c} + \frac{1+b}{c+a} + \frac{1+c}{a+b} &\leq 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \Leftrightarrow \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} + 3 \leq 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} - \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c} - \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a} - \frac{c}{a+b} &\geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{ac}{b(b+c)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ab}{c(c+a)} \geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} &\frac{ac}{b(b+c)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ab}{c(c+a)} \\ &= \frac{(ac)^2}{abc(b+c)} + \frac{(bc)^2}{abc(a+b)} + \frac{(ab)^2}{abc(c+a)} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)} \end{aligned}$$

$$\text{Ta cần chứng minh } \frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)} \geq \frac{3}{2}$$

Hay $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$

Đánh giá cuối cùng đúng theo bất đẳng thức Cauchy. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 3.25: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{2a^2 + bc} + \frac{b}{2b^2 + ca} + \frac{c}{2c^2 + ab} \geq abc$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{2a^2bc + b^2c^2} + \frac{1}{2ab^2c + c^2a^2} + \frac{1}{2abc^2 + a^2b^2} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki và chú ý một bất đẳng thức quen thuộc

$$(ab + bc + ca)^2 \leq \left[\frac{(a + b + c)^2}{3} \right]^2 = 9$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a^2bc + b^2c^2} + \frac{1}{2ab^2c + c^2a^2} + \frac{1}{2abc^2 + a^2b^2} \\ \geq \frac{9}{a^2b^2 + b^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c)} = \frac{9}{(ab + bc + ca)^2} \geq 1 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.26: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + a + b + c \geq 6$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{bc} + \frac{c^2}{ca} \geq \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca}$$

Do đó ta được $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + a + b + c \geq \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca} + a + b + c$

Ta cần chứng minh $\frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca} + a + b + c \geq 6$

Thật vậy, từ giả thiết ta có

$$ab + bc + ca = \frac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} = \frac{(a + b + c)^2 - 3}{2}$$

Đặt $t = a + b + c \Rightarrow 0 < t \leq 3$. Khi đó ta được bất đẳng thức sau

$$\frac{2t^2}{t^2 - 3} + t \geq 6 \Leftrightarrow 2t^2 + t(t^2 - 3) \geq 6(t^2 - 3) \Leftrightarrow (t - 3)^2(t + 2) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng với mọi $t > 0$. Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.27: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3 + 8}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^3 + 8}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^3 + 8}} \geq 1$$

Phân tích: Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$, do đó ta chú ý đến đánh giá theo bất đẳng thức Cauchy là $\sqrt{b^3 + 8} = \sqrt{(b + 2)(b^2 - 2b + 4)} \leq \frac{b^2 - b + 6}{2}$. Khi đó hoàn toàn tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3 + 8}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^3 + 8}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^3 + 8}} \geq \frac{2a^2}{b^2 - b + 6} + \frac{2b^2}{c^2 - c + 6} + \frac{2c^2}{a^2 - a + 6}$$

Ta cần chỉ ra được $\frac{a^2}{b^2 - b + 6} + \frac{b^2}{c^2 - c + 6} + \frac{c^2}{a^2 - a + 6} \geq \frac{1}{2}$.

Đến đây ta có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho đánh giá trên.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{b^3 + 8} = \sqrt{(b + 2)(b^2 - 2b + 4)} \leq \frac{b^2 - b + 6}{2}$$

Tương tự ta có $a^3 + 2 \leq \frac{a^2 - a + 6}{2}; c^3 + 2 \leq \frac{c^2 - c + 6}{2}$

Khi đó ta được bất đẳng thức sau

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3 + 8}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^3 + 8}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^3 + 8}} \geq \frac{2a^2}{b^2 - b + 6} + \frac{2b^2}{c^2 - c + 6} + \frac{2c^2}{a^2 - a + 6}$$

Ta cần chứng minh $\frac{a^2}{b^2 - b + 6} + \frac{b^2}{c^2 - c + 6} + \frac{c^2}{a^2 - a + 6} \geq \frac{1}{2}$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{b^2 - b + 6} + \frac{b^2}{c^2 - c + 6} + \frac{c^2}{a^2 - a + 6} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 - (a + b + c) + 18}$$

Ta cần chỉ ra được $\frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 - (a + b + c) + 18} \geq \frac{1}{2}$

Hay $2(a + b + c)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 - (a + b + c) + 18$

Hay $(a + b + c)^2 + (a + b + c) - 12 \geq 0$

Hay $(a + b + c + 4)(a + b + c - 3) \geq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì từ $ab + bc + ca = 3$ ta có

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) = 9 \Rightarrow a + b + c \geq 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Ví dụ 3.28: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{1+ab+bc} + \frac{b^2}{1+bc+ca} + \frac{c^2}{1+ca+ab} \geq 1$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski a được

$$\frac{a^2}{1+ab+bc} + \frac{b^2}{1+bc+ca} + \frac{c^2}{1+ca+ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3+2(ab+bc+ca)}$$

Để ý ta thấy $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ nên ta có $3+2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2$

Suy ra

$$\frac{(a+b+c)^2}{3+2(ab+bc+ca)} = 1$$

Do đó ta được

$$\frac{a^2}{1+ab+bc} + \frac{b^2}{1+bc+ca} + \frac{c^2}{1+ca+ab} \geq 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 3.29: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a^2+3} + \frac{1}{4b^2+3} + \frac{1}{4c^2+3} \geq \frac{3}{7}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức trên thì suy nghĩ đầu tiên là áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski dạng phân thức

$$\frac{1}{4a^2+3} + \frac{1}{4b^2+3} + \frac{1}{4c^2+3} \geq \frac{9}{4(a^2+b^2+c^2)+9}$$

Phép toán sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{9}{4(a^2+b^2+c^2)+9} \geq \frac{3}{7} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \leq 3$$

Tuy nhiên đánh giá trên không đúng. Do vậy ta phải tìm hướng giải khác cho bài toán trên.

Để ý bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại là

$$\frac{a^2}{4a^2+3} + \frac{a^2}{4b^2+3} + \frac{c^2}{4c^2+3} \leq \frac{3}{7}$$

Đến đây ta cũng nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopski dạng phân thức nhưng áp dụng theo chiều

$$\frac{(a+b)^2}{x+y} \leq \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}. \text{ Để ý tiếp ta lại thấy } 4a^2+3 = a^2+ab+ac+3a^2+bc$$

Do đó để bảo toàn dấu đẳng thức ta có đánh giá

$$\frac{4a^2}{4a^2+3} = \frac{(3+4)a^2}{a^2+ab+ca+3a^2+bc} \leq \frac{9a^2}{a^2+ab+ca} + \frac{16a^2}{3a^2+bc}$$

Suy ra

$$\frac{4a^2}{4a^2+3} \leq \frac{9a}{a+b+c} + \frac{16a^2}{3a^2+bc}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{49b^2}{4b^2 + 3} \leq \frac{9b}{a + b + c} + \frac{16b^2}{3b^2 + ca}; \quad \frac{49c^2}{4c^2 + 3} \leq \frac{9c}{a + b + c} + \frac{16c^2}{3c^2 + ab}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{49a^2}{4a^2 + 3} + \frac{49a^2}{4b^2 + 3} + \frac{49c^2}{4c^2 + 3} \leq 9 + \frac{16a^2}{3a^2 + bc} + \frac{16b^2}{3b^2 + ca} + \frac{16c^2}{3c^2 + ab}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{16a^2}{3a^2 + bc} + \frac{16b^2}{3b^2 + ca} + \frac{16c^2}{3c^2 + ab} \leq 12$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{bc}{3a^2 + bc} + \frac{ca}{3b^2 + ca} + \frac{ab}{3c^2 + ab} \geq \frac{3}{4}$$

Đến đây ta áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức thì được

$$\frac{bc}{3a^2 + bc} + \frac{ca}{3b^2 + ca} + \frac{ab}{3c^2 + ab} \geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3abc(a + b + c)}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có $abc(a + b + c) \leq \frac{1}{3}(ab + bc + ca)^2$ do đó ta được

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3abc(a + b + c) \leq \frac{4}{3}(ab + bc + ca)^2$$

Suy ra $\frac{(ab + bc + ca)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3abc(a + b + c)} \geq \frac{3}{4}$. Do đó ta được bất đẳng thức

$$\frac{bc}{3a^2 + bc} + \frac{ca}{3b^2 + ca} + \frac{ab}{3c^2 + ab} \geq \frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Ví dụ 3.30: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{ab + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{bc + c^2}} + \frac{c}{\sqrt{ca + a^2}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta thấy có thể sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, tuy nhiên trước hết ta đánh giá mẫu số để làm mất các dấu căn, để ý đến bảo toàn dấu đẳng thức ta được

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{2b(a + b)} \leq \frac{2b + (a + b)}{2} = \frac{a + 3b}{2}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a}{\sqrt{ab + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{bc + c^2}} + \frac{c}{\sqrt{ca + a^2}} \geq \frac{2a\sqrt{2}}{a + 3b} + \frac{2b\sqrt{2}}{b + 3c} + \frac{2c\sqrt{2}}{c + 3a}.$$

Ta cần chứng minh $\frac{2a\sqrt{2}}{a + 3b} + \frac{2b\sqrt{2}}{b + 3c} + \frac{2c\sqrt{2}}{c + 3a} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\text{Hay} \quad \frac{a}{a + 3b} + \frac{b}{b + 3c} + \frac{c}{c + 3a} \geq \frac{3}{4}$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức thì được

$$\frac{a}{a+3b} + \frac{b}{b+3c} + \frac{c}{c+3a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca}.$$

Tương tự như ví dụ trên ta chứng minh được

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca} \geq \frac{4}{3}$$

Do đó ta được
$$\frac{a}{a+3b} + \frac{b}{b+3c} + \frac{c}{c+3a} \geq \frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3.31: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}} \geq a + b + c$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}} = \frac{a^2}{a\sqrt{b}} + \frac{b^2}{b\sqrt{c}} + \frac{c^2}{c\sqrt{a}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a}}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a}} \geq a + b + c$$

Hay
$$a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq a + b + c$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a\sqrt{b} \leq \frac{a(b+1)}{2}; \quad b\sqrt{c} \leq \frac{b(c+1)}{2}; \quad c\sqrt{a} \leq \frac{c(b+1)}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(a+b+c+ab+bc+ca)$$

Mà lại có
$$a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow a + b + c \leq 3$$

Suy ra
$$(a+b+c)(a+b+c) \geq 3(ab+bc+ca) \geq (a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Hay
$$a + b + c \geq ab + bc + ca$$

Do đó ta có

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(a+b+c+a+b+c) \Leftrightarrow a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq a + b + c$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 3.32: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2+ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2+ab}{c\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{2}$$

Phân tích: Để ý là

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 + bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2 + ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2 + ab}{c\sqrt{a+b}} \\ &= \frac{a^2}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2}{c\sqrt{a+b}} + \frac{bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{ab}{c\sqrt{a+b}} \end{aligned}$$

Lời giải

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 + bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2 + ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2 + ab}{c\sqrt{a+b}} \\ &= \frac{a^2}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2}{c\sqrt{a+b}} + \frac{bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{ab}{c\sqrt{a+b}} \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2}{c\sqrt{a+b}} &\geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a}\sqrt{ab+ac} + \sqrt{b}\sqrt{bc+ab} + \sqrt{c}\sqrt{ca+bc}} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{2(a+b+c)(ab+bc+ca)}} \end{aligned}$$

Mà theo một đánh giá quen thuộc thì $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$ nên

$$\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{2(a+b+c)(ab+bc+ca)}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)\sqrt{\frac{2}{3}(a+b+c)}} = \sqrt{\frac{3(a+b+c)}{2}}$$

Do đó ta được
$$\frac{a^2}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2}{c\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{\frac{3(a+b+c)}{2}}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} \frac{bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{ab}{c\sqrt{a+b}} &\geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{abc(\sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} + \sqrt{a+b})} \\ &\geq \frac{3abc(a+b+c)}{abc\sqrt{6(a+b+c)}} = \sqrt{\frac{3(a+b+c)}{2}} \end{aligned}$$

Do đó ta được
$$\frac{a^2 + bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2 + ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2 + ab}{c\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{6(a+b+c)}$$

Lại có $a+b+c \geq \frac{1}{3}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = \frac{1}{3}$ nên $\sqrt{6(a+b+c)} \geq \sqrt{2}$

Hay
$$\frac{a^2 + bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2 + ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2 + ab}{c\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{9}$.

4. Kỹ thuật thêm bớt

Có những bất đẳng thức (hay biểu thức cần tìm GTLN, GTNN) nếu để nguyên dạng như đề bài cho đôi khi khó hoặc thậm chí không thể giải quyết bằng cách áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki. Khi đó ta chịu khó biến đổi một số biểu thức bằng cách thêm bớt các số hay biểu thức phù hợp ta có thể vận dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki một cách dễ dàng hơn. Ta cùng xem xét các ví dụ sau để minh họa cho điều đó.

Ví dụ 4.1: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \leq 1$$

Phân tích: Các đại lượng về trái của bất đẳng thức cần chứng minh có dạng phân thức nên suy nghĩ đầu tiên là sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Nếu áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức một cách trực tiếp ta thu được bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 6 \right)$$

Để hoàn thành phép chứng minh ta cần đánh giá được $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq 3$. Tuy nhiên để ý là đại lượng $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ trội nhất nên không thể đánh giá về đại lượng trội hơn

Do đó ta không thể áp dụng trực tiếp bất đẳng thức Bunhiacopxki để chứng minh được, vì vậy ta tính đến phương án đổi chiều bất đẳng thức trước. Chú ý là

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2 + 1} = \frac{a^2}{a^2 + 2}$$

Như vậy ta có phép biến đổi tương đương bất đẳng thức như sau

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \leq 1 &\Leftrightarrow - \left(\frac{2}{a^2 + 2} + \frac{2}{b^2 + 2} + \frac{2}{c^2 + 2} \right) \geq -2 \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{a^2 + 2} + 1 - \frac{1}{b^2 + 2} + 1 - \frac{1}{c^2 + 2} \geq 3 - 2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2 + 2} + \frac{b^2}{b^2 + 2} + \frac{c^2}{c^2 + 2} \geq 1 \end{aligned}$$

Đến đây ta có thể áp dụng được bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức để đánh giá bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{a^2 + 2} + \frac{b^2}{b^2 + 2} + \frac{c^2}{c^2 + 2} \geq 1$$

Lời giải

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$3 - 2 \left(\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \right) \geq 1$$

Hay
$$\frac{a^2}{a^2 + 2} + \frac{b^2}{b^2 + 2} + \frac{c^2}{c^2 + 2} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức bunhiacopxki dạng cộng mẫu kết hợp với giả thiết ta được

$$\frac{a^2}{a^2+2} + \frac{b^2}{b^2+2} + \frac{c^2}{c^2+2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6} = \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = 1$$

Do đó bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 4.2: Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\frac{ab}{c^2+2ab} + \frac{bc}{a^2+2bc} + \frac{ca}{b^2+2ca} \leq 1$$

Phân tích: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{c^2}{c^2+2ab} + \frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} \geq 1$$

Đến đây ta có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức được.

Lời giải

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$3 - 2 \left(\frac{ab}{c^2+2ab} + \frac{bc}{a^2+2bc} + \frac{ca}{b^2+2ca} \right) \geq 1$$

Hay

$$\frac{c^2}{c^2+2ab} + \frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cộng mẫu ta được

$$\frac{c^2}{c^2+2ab} + \frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = 1$$

Do đó bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 4.3: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2+a^2} + \frac{1}{2+b^2} + \frac{1}{2+c^2} \leq 1$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2}{2+a^2} + \frac{b^2}{2+b^2} + \frac{c^2}{2+c^2} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{2+a^2} + \frac{b^2}{2+b^2} + \frac{c^2}{2+c^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{6+a^2+b^2+c^2}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^2}{6+a^2+b^2+c^2} \geq 1 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 6+a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow ab+bc+ca \geq 3.$$

Từ giả thiết của bài toán ta được $abc(a+b+c) = ab+bc+ca$ và từ đánh giá quen thuộc

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c), \text{ suy ra ta được}$$

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \Leftrightarrow ab + bc + ca \geq 3.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 4.4: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2}$$

Lời giải

Đặt $P = \frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca}$.

Xét

$$\begin{aligned} \frac{P-3}{2} &= \frac{1}{2-2ab} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2-2bc} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2-2ca} - \frac{1}{2} = \frac{ab}{2-2ab} + \frac{bc}{2-2bc} + \frac{ca}{2-2ca} \\ &= \frac{\frac{ab}{ab}}{2(a^2+b^2+c^2)-2ab} + \frac{\frac{bc}{bc}}{2(a^2+b^2+c^2)-2bc} + \frac{\frac{ca}{ca}}{2(a^2+b^2+c^2)-2ca} \\ &\leq \frac{ab}{a^2+b^2+2c^2} + \frac{bc}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{ca}{a^2+2b^2+c^2} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} &\frac{ab}{a^2+b^2+2c^2} + \frac{bc}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{ca}{a^2+2b^2+c^2} \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2} + \frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{(c+a)^2}{a^2+2b^2+c^2} \right) \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} + \frac{c^2}{b^2+c^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2} \right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Do đó ta được $\frac{P-3}{2} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow P \leq \frac{9}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Ví dụ 4.5: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ca} + \frac{c^2}{2c^2+ab} \leq 1$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{2a^2}{2a^2+bc} + \frac{2b^2}{2b^2+ca} + \frac{2c^2}{2c^2+ab} \leq 2$$

Hay $1 - \frac{2a^2}{2a^2+bc} + 1 - \frac{2b^2}{2b^2+ca} + 1 - \frac{2c^2}{2c^2+ab} \geq 1$

Hay $\frac{bc}{2a^2+bc} + \frac{ca}{2b^2+ca} + \frac{ab}{2c^2+ab} \geq 1$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{bc}{2a^2 + bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab} = \frac{(bc)^2}{bc(2a^2 + bc)} + \frac{(ca)^2}{ca(2b^2 + ca)} + \frac{(ab)^2}{ab(2c^2 + ab)}$$

$$\geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Ví dụ 4.6: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a + 2b}{2a + 4b + 3c^2} + \frac{b + 2c}{2b + 4c + 3a^2} + \frac{c + 2a}{2c + 4a + 3b^2} \leq 1$$

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được

$$\frac{2(a + 2b)}{2a + 4b + 3c^2} + \frac{2(b + 2c)}{2b + 4c + 3a^2} + \frac{2(c + 2a)}{2c + 4a + 3b^2} \leq 2$$

Hay $1 - \frac{2(a + 2b)}{2a + 4b + 3c^2} - 1 + \frac{2(b + 2c)}{2b + 4c + 3a^2} + 1 - \frac{2(c + 2a)}{2c + 4a + 3b^2} \geq 1$

Hay $\frac{c^2}{2a + 4b + 3c^2} + \frac{a^2}{2b + 4c + 3a^2} + \frac{b^2}{2c + 4a + 3b^2} \geq \frac{1}{3}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{c^2}{2a + 4b + 3c^2} + \frac{a^2}{2b + 4c + 3a^2} + \frac{b^2}{2c + 4a + 3b^2}$$

$$= \frac{c^2}{c^3} + \frac{a^2}{a^3} + \frac{b^2}{b^3}$$

$$= \frac{c}{c(2a + 4b + 3c^2)} + \frac{a}{a(2b + 4c + 3a^2)} + \frac{b}{b(2c + 4a + 3b^2)}$$

$$\geq \frac{(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3})^2}{3(a^3 + b^3 + c^3) + 6(ab + bc + ca)}$$

Ta cần chứng minh $\frac{(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3})^2}{3(a^3 + b^3 + c^3) + 6(ab + bc + ca)} \geq \frac{1}{3}$

Hay $\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{b^3c^3} + \sqrt{c^3a^3} \geq ab + bc + ca$

Thật vậy, Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{b^3c^3} + \sqrt{c^3a^3}$$

$$= (\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{ab}) + (\sqrt{b^3c^3} + \sqrt{bc}) + (\sqrt{c^3a^3} + \sqrt{ca}) - (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$$

$$\geq 2(ab + bc + ca) - (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$$

$$\geq ab + bc + ca + 3 - \sqrt{3(ab + bc + ca)} = ab + bc + ca$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Ví dụ 4.7: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq \frac{ab}{a^2 + ab + bc} + \frac{bc}{b^2 + bc + ca} + \frac{ca}{c^2 + ca + ab}$$

Lời giải

Theo một đánh giá quen thuộc ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq 1$

Do đó ta cần chứng minh $1 \geq \frac{ab}{a^2 + ab + bc} + \frac{bc}{b^2 + bc + ca} + \frac{ca}{c^2 + ca + ab}$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} 3 &\geq \frac{ab}{a^2 + ab + bc} + \frac{bc}{b^2 + bc + ca} + \frac{ca}{c^2 + ca + ab} + 2 \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{ab}{a^2 + ab + bc} + 1 - \frac{bc}{b^2 + bc + ca} + 1 - \frac{ca}{c^2 + ca + ab} &\geq 2 \\ \Leftrightarrow \frac{a^2 + bc}{a^2 + ab + bc} + \frac{b^2 + ca}{b^2 + bc + ca} + \frac{c^2 + ab}{c^2 + ca + ab} &\geq 2 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a^2 + ab + bc} + \frac{b^2}{b^2 + bc + ca} + \frac{c^2}{c^2 + ca + ab} &\geq \frac{(a + b + c)^2}{(a + b + c)^2} = 1 \\ \frac{bc}{a^2 + ab + bc} + \frac{ca}{b^2 + bc + ca} + \frac{ab}{c^2 + ca + ab} &\geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{(ab + bc + ca)^2} = 1 \end{aligned}$$

Cộng theo về hai bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^2 + bc}{a^2 + ab + bc} + \frac{b^2 + ca}{b^2 + bc + ca} + \frac{c^2 + ab}{c^2 + ca + ab} \geq 2$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét: Qua các ví dụ trên ta nhận thấy chỉ với việc thêm bớt vào bất đẳng thức một đại lượng phù hợp ta có thể đổi được chiều bất đẳng thức và áp dụng được bất đẳng thức Bunhiacopski để chứng minh bài toán. Kỹ thuật này gọi là kỹ thuật thêm – bớt trong bất đẳng thức Bunhiacopski. Vậy thì kỹ thuật thêm bớt còn được sử dụng trong các trường hợp nào nữa, ta tiếp tục tìm hiểu các ví dụ sau đây

Ví dụ 4.8: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3$$

Phân tích: Nếu áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski một cách trực tiếp ta được

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq \frac{9}{6 - (a + b + c)}$$

Trong khi đó ta có $0 < a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} = 3$ nên $\frac{9}{6 - (a + b + c)} \leq 3$

Như vậy đánh giá như trên không chứng minh được bài toán.

Bất đẳng thức cần chứng minh không cần phải đổi chiều như các ví dụ trên nhưng khi áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski dạng phân thức thì không đem lại hiệu quả. Để có một đánh giá tốt hơn ta cần thay đổi cách phát biểu các đại lượng của bất đẳng thức xem sao? Chú ý một tí ta sẽ có biến đổi khá thú vị

sau $\frac{1}{2-a} - \frac{1}{2} = \frac{a}{2(2-a)}$. Lúc này bất đẳng thức trở thành $\frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} \geq 3$. Với bất đẳng

thức này hy vọng ta sẽ chứng minh được.

Lời giải

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$\left(\frac{1}{2-a} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2-a} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2-a} - \frac{1}{2}\right) \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} \geq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a(2-a) + b(2-b) + c(2-c)} = \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c) - 3}$$

Ta cần chứng minh được $\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c) - 3} \geq 3$ hay $(a+b+c)^2 \geq 6(a+b+c) - 9$

$$\text{Hay } (a+b+c)^2 - 6(a+b+c) + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (a+b+c-3)^2 \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét: Như vậy bằng việc thêm – bớt một đại lượng ta đã biến đổi bất đẳng thức đã cho về dạng khác và khi đó có thể dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki một cách thuận lợi hơn. Vậy thì làm thế nào để ta có thể chọn được đại lượng phù hợp?

Xét ý tưởng sau đây: Ta sẽ tìm một số m dương sao cho $\frac{1}{2-a} - m = \frac{1-m(1-a)}{2-a}$ có tử số là

$1-m(1-a)$ là một đại lượng dương và đánh giá này càng chặt càng tốt. Do đó ta chọn được $m = \frac{1}{2}$,

khi đó thì $\frac{1}{2-a} - \frac{1}{2} = \frac{a}{2(2-a)} > 0$.

Để chứng minh bất đẳng thức $\frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} \geq 3$ ta có thể áp dụng bất đẳng thức

Bunhiacopxki dạng phân thức theo cách khác sau

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} &= \frac{a^4}{a^3(2-a)} + \frac{b^4}{b^3(2-b)} + \frac{c^4}{c^3(2-c)} \\ &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2(a^3 + b^3 + c^3) - (a^4 + b^4 + c^4)} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh được

$$\begin{aligned} 3 &\geq 2(a^3 + b^3 + c^3) - (a^4 + b^4 + c^4) \\ \Leftrightarrow (a^4 + b^4 + c^4) + (a^2 + b^2 + c^2) &\geq 2(a^3 + b^3 + c^3) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $a^4 + a^2 \geq 2a^3$; $b^4 + b^2 \geq 2b^3$; $c^4 + c^2 \geq 2c^3$.

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức cuối cùng.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 4.9: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{3a-b+c} + \frac{b}{3b-c+a} + \frac{c}{3c-a+b} \geq 1$$

Phân tích: Để áp dụng được bất đẳng thức Bunhiacopxki ta cần tìm số m dương sao cho

$$\frac{a}{3a-b+c} - m = \frac{a(1-3m) + mb - mc}{3a-b+c} \text{ có tử số là } a(1-3m) + mb - mc \text{ là một số dương và}$$

đánh giá trên càng chặt càng tốt. Để ý giả thiết a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên ta nghĩ đến chọn m

sao cho tử số trên có dạng $a + b - c$. Từ những nhận định đó ta chọn được $m = \frac{1}{4}$. Khi đó ta có lời giải

như sau

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{3a-b+c} - \frac{1}{4} + \frac{4b}{3b-c+a} - \frac{1}{4} + \frac{4c}{3c-a+b} - \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$$

Hay bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a+b-c}{3a-b+c} + \frac{b+c-a}{3b-c+a} + \frac{c+a-b}{3c-a+b} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a+b-c}{3a-b+c} + \frac{b+c-a}{3b-c+a} + \frac{c+a-b}{3c-a+b} \\ & \geq \frac{(a+b-c+b+c-a+c+a-b)^2}{(a+b-c)(3a-b+c) + (b+c-a)(3b-c+a) + (c+a-b)(3c-a+b)} \\ & = \frac{(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca} = 1 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 4.10: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{5a+3b}{3a+b+2c} + \frac{5b+3c}{3b+c+2a} + \frac{5c+3a}{3c+a+2b} \geq 4$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức trên thì suy nghĩ đầu tiên là áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

$$\begin{aligned} & \frac{5a+3b}{3a+b+2c} + \frac{5b+3c}{3b+c+2a} + \frac{5c+3a}{3c+a+2b} \\ & \geq \frac{(5a+3b+5b+3c+5c+3a)^2}{(5a+3b)(3a+b+2c) + (5b+3c)(3b+c+2a) + (5c+3a)(3c+a+2b)} \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(5a + 3b + 5b + 3c + 5c + 3a)^2}{(5a + 3b)(3a + b + 2c) + (5b + 3c)(3b + c + 2a) + (5c + 3a)(3c + a + 2b)} \geq 4$$

Hay

$$\frac{64(a + b + c)^2}{18(a^2 + b^2 + c^2) + 30(ab + bc + ca)} \geq 4 \Leftrightarrow ab + bc + ca \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Tuy nhiên đánh giá trên là sai. Do đó ta không thể áp dụng được trực tiếp bất đẳng thức Bunhiacopxki mà cần biến đổi bất đẳng thức về một dạng khác. Với ý tưởng đó ta cần tìm số m dương sao cho

$$\frac{5a + 3b}{3a + b + 2c} - m = \frac{a(5 - 3m) + (3 - m)b - 2mc}{3a + b + 2c} = \frac{k(a + b - c)}{3a + b + 2c}$$

Và đánh giá trên càng chặt càng tốt. Từ những nhận định đó ta chọn được $m = 1$. Khi đó ta có lời giải như sau

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

Hay

$$\frac{5a + 3b}{3a + b + 2c} - 1 + \frac{5b + 3c}{3b + c + 2a} - 1 + \frac{5c + 3a}{3c + a + 2b} - 1 \geq 1$$

$$\frac{2(a + b - c)}{3a + b + 2c} + \frac{2(b + c - a)}{3b + c + 2a} + \frac{2(c + a - b)}{3c + a + 2b} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{2(a + b - c)}{3a + b + 2c} + \frac{2(b + c - a)}{3b + c + 2a} + \frac{2(c + a - b)}{3c + a + 2b} \geq \frac{2(a + b - c + b + c - a + c + a - b)^2}{(a + b - c)(3a + b + 2c) + (b + c - a)(3b + c + 2a) + (c + a - b)(3c + a + 2b)}$$

Ta cần chứng minh được

$$\frac{2(a + b - c + b + c - a + c + a - b)^2}{(a + b - c)(3a + b + 2c) + (b + c - a)(3b + c + 2a) + (c + a - b)(3c + a + 2b)} \geq 1$$

Hay

$$\frac{2(a + b + c)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2) + 4(ab + bc + ca)} \geq 1$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 4.11: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{3a + b}{2a + c} + \frac{3b + c}{2b + a} + \frac{3c + a}{2c + b} \geq 4$$

Phân tích: Để ý đến phép biến đổi $\frac{3a + b}{2a + c} - 1 = \frac{a + b - c}{2a + c}$.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a + b - c}{2a + c} + \frac{b + c - a}{2b + a} + \frac{c + a - b}{2c + b} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a+b-c}{2a+c} + \frac{b+c-a}{2b+a} + \frac{c+a-b}{2c+b} \geq \frac{(a+b-c+b+c-a+c+a-b)^2}{(a+b-c)(2a+c) + (b+c-a)(2b+a) + (c+a-b)(2c+a)}$$

Ta cần chứng minh được

$$\frac{(a+b-c+b+c-a+c+a-b)^2}{(a+b-c)(2a+c) + (b+c-a)(2b+a) + (c+a-b)(2c+a)} \geq 1$$

Hay

$$\frac{(a+b+c)^2}{(a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ca)} \geq 1$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 4.12: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{5}{2}$$

Phân tích: Để ý đến phép biến đổi $1 - \frac{a}{b+c} = \frac{b+c-a}{b+c}$.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{b+c-a}{b+c} + \frac{c+a-b}{c+a} + \frac{a+b-c}{a+b} \geq \frac{1}{2} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$$

Hay

$$\frac{b+c-a}{b+c} + \frac{c+a-b}{c+a} + \frac{a+b-c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiachopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{b+c-a}{b+c} + \frac{c+a-b}{c+a} + \frac{a+b-c}{a+b} \\ & \geq \frac{(a+b-c+b+c-a+c+a-b)^2}{(b+c)(b+c-a) + (c+a)(c+a-b) + (a+b)(a+b-c)} \\ & = \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 4.13: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{a^2+2bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+2ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+2ab} \leq 2$$

Phân tích: Để ý đến phép biến đổi $1 - \frac{a(b+c)}{a^2+2bc} = \frac{a^2+2bc-a(b+c)}{a^2+2bc}$. Ta lại có

$$a^2+2bc-a(b+c) = bc + (a-b)(a-c) \geq bc - |(a-b)(a-c)| > 0$$

Lại thấy $a^2+2bc-a(b+c) + b^2+2ca-b(c+a) + c^2+2ab-c(a+b) = a^2+b^2+c^2$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2+2bc-a(b+c)}{a^2+2bc} + \frac{b^2+2ca-b(c+a)}{b^2+2ca} + \frac{c^2+2ab-c(a+b)}{c^2+2ab} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a^2+2bc-a(b+c)}{a^2+2bc} + \frac{b^2+2ca-b(c+a)}{b^2+2ca} + \frac{c^2+2ab-c(a+b)}{c^2+2ab} \\ & \geq \frac{\left[a^2+2bc-a(b+c) + b^2+2ca-b(c+a) + c^2+2ab-c(a+b) \right]^2}{M} \end{aligned}$$

Với

$$M = (a^2+2bc)[a^2+2bc-a(b+c)] + (b^2+2ca)[b^2+2ca-b(c+a)] + (c^2+2ab)[c^2+2ab-c(a+b)]$$

Ta cần chứng minh được

$$\begin{aligned} & (a^2+b^2+c^2)^2 + a^3b + ab^3 + b^3c + bc^3 + c^3a + ca^3 \\ & \geq a^4 + b^4 + c^4 + 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \end{aligned}$$

$$\text{Hay } ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$$

Đánh giá cuối cùng đúng theo bất đẳng thức Cauchy.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 4.14: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{7+a^2} + \frac{1}{7+b^2} + \frac{1}{7+c^2} - \frac{1}{14} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \leq \frac{15}{56}$$

Phân tích: Để ý ta thấy $\frac{1}{7+a^2} = \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{a^2}{7+a^2}$ khi đó ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} + 2 \left(\frac{a^2}{7+a^2} + \frac{b^2}{7+b^2} + \frac{c^2}{7+c^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{1}{7+a^2} = \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{a^2}{7+a^2}; \quad \frac{1}{7+b^2} = \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{b^2}{7+b^2}; \quad \frac{1}{7+c^2} = \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{c^2}{7+c^2}$$

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau:

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} + 2 \left(\frac{a^2}{7+a^2} + \frac{b^2}{7+b^2} + \frac{c^2}{7+c^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{(b+c) + (c+a) + (a+b)} = \frac{9}{2(a+b+c)}$$

$$\frac{a^2}{7+a^2} + \frac{b^2}{7+b^2} + \frac{c^2}{7+c^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(7+a^2) + (7+b^2) + (7+c^2)} = \frac{(a+b+c)^2}{24}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{9}{a+b+c} + \frac{(a+b+c)^2}{6} \geq \frac{9}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{9}{a+b+c} + \frac{(a+b+c)^2}{6} = \frac{9}{2(a+b+c)} + \frac{9}{2(a+b+c)} + \frac{(a+b+c)^2}{6} \geq 3\sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{9}{2}$$

Do vậy đánh giá giá cuối cùng đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét: Ở đây ta được sử dụng kỹ năng thêm bớt bằng cách đưa vào tham số m để lý luận và đưa vào các điều kiện ràng buộc hợp lý để tìm ra m .

Ví dụ 4.15: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{c^2 - c + 1} \leq 3$$

Phân tích: Chú ý đến phép biến đổi $\frac{4}{3} - \frac{1}{a^2 - a + 1} = \frac{(2a-1)^2}{3(a^2 - a + 1)}$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh cần chứng minh với

$$\frac{(2a-1)^2}{a^2 - a + 1} + \frac{(2b-1)^2}{b^2 - b + 1} + \frac{(2c-1)^2}{c^2 - c + 1} \geq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{(2a-1)^2}{a^2 - a + 1} + \frac{(2b-1)^2}{b^2 - b + 1} + \frac{(2c-1)^2}{c^2 - c + 1} \geq \frac{(2a+2b+2c-3)^2}{a^2 + b^2 + c^2 - (a+b+c) + 3}$$

Ta cần chứng minh được
$$\frac{(2a+2b+2c-3)^2}{a^2 + b^2 + c^2 - (a+b+c) + 3} \geq 3$$

Hay
$$(a+b+c)^2 + 6(ab+bc+ca) \geq 9(a+b+c)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$ab+bc+ca \geq \sqrt{3abc(a+b+c)} = \sqrt{3(a+b+c)}$$

Ta quy bài toán về chứng minh

$$(a+b+c)^2 + 6\sqrt{3(a+b+c)} \geq 9(a+b+c)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{a+b+c}{3}} \geq 1$, khi đó bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$(3t^2)^2 + 18t \geq 27t^2 \Leftrightarrow 9t(t^3 + 2 - 3t) \geq 0$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $t^3 + 2 = t^3 + 1 + 1 \geq 3t$ và $t \geq 1$ nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Ví dụ 4.16: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{2a+1} + \frac{b^2}{2b+1} + \frac{c^2}{2c+1} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + 6}$$

Phân tích: Áp dụng ý tưởng như các ví dụ trên là cần tìm một số dương m sao cho đánh giá $m - \frac{a^2}{2a+1} = \frac{2ma + m - a^2}{2a+1}$ có tử số $2ma + m - a^2$ dương và đánh giá càng chặt càng tốt. Để ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta chọn được $m = \frac{1}{2}$, tuy nhiên nếu chọn như vậy thì ta không đảm bảo được tử số luôn dương. Do đó nếu chọn được m mà làm triệt tiêu được a^2 thì mới đảm bảo được tử dương. Để ý đến $a + b + c = 3$ khi đó ta chọn $m = \frac{a}{2}$. Áp dụng tương tự ta có lời giải như sau

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{2} - \frac{a^2}{2a+1} + \frac{b}{2} - \frac{b^2}{2b+1} + \frac{c}{2} - \frac{c^2}{2c+1} \geq \frac{a+b+c}{2} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + 6}$$

$$\text{Hay} \quad \frac{a}{2a+1} + \frac{b}{2b+1} + \frac{c}{2c+1} + \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + 6} \geq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{2a+1} + \frac{b}{2b+1} + \frac{c}{2c+1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2) + 3}$$

Khi đó ta cần chứng minh được

$$\frac{9}{2(a^2 + b^2 + c^2) + 3} + \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + 6} \geq 3$$

Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$, khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\begin{aligned} \frac{9}{2t+3} + \frac{2t}{\sqrt{t+6}} &\geq 3 \Leftrightarrow \frac{9}{2t+3} - 1 + \frac{2t}{\sqrt{t+6}} - 2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2(3-t)}{2t+3} + \frac{2t-2\sqrt{t+6}}{\sqrt{t+6}} &\geq 0 \Leftrightarrow (t-3) \left(\frac{t+2}{\sqrt{t+6}(t+\sqrt{t+6})} - \frac{1}{2t+3} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow (t+2)(2t+3) - \sqrt{t+6}(t+\sqrt{t+6}) &\geq 0 \Leftrightarrow t(2t+6-\sqrt{t+6}) \geq 0 \end{aligned}$$

Do $t \geq 3$ nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 4.17: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{3a+1} + \frac{b^2}{3b+1} + \frac{c^2}{3c+1} \leq \frac{1}{18(ab+bc+ca)}$$

Phân tích: Áp dụng ý tưởng như các ví dụ trên là cần tìm một số dương m sao cho đánh giá

$m - \frac{a^2}{3a+1} = \frac{3ma + m - a^2}{2a+1}$ có tử số $3ma + m - a^2$ dương và đánh giá càng chặt càng tốt. Khi đó nếu áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta thấy có sự xuất hiện của các hạng tử bậc 3 và nếu quy đồng thì ta thu được một bất đẳng thức bậc 5 thì khó đánh giá.

Để ý đến đánh giá $\frac{a^2}{3a+1} < \frac{a^2}{3a} = \frac{a}{3}$, đây là một đánh giá khá chặt. Khi đó xét biến đổi sau

$\frac{a}{3} - \frac{a^2}{3a+1} = \frac{a}{3(3a+1)}$, hoàn toàn tương tự ta có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức có bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{3(3a+1)} + \frac{b}{3(3b+1)} + \frac{c}{3(3c+1)} + \frac{1}{18(ab+bc+ca)} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{3(3a+1)} + \frac{b}{3(3b+1)} + \frac{c}{3(3c+1)} + \frac{1}{18(ab+bc+ca)} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Hay
$$\frac{a}{3a+1} + \frac{b}{3b+1} + \frac{c}{3c+1} + \frac{1}{6(ab+bc+ca)} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{3a+1} + \frac{b}{3b+1} + \frac{c}{3c+1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(a^2+b^2+c^2)+a+b+c} = \frac{1}{3(a^2+b^2+c^2)+1}$$

Khi đó ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{1}{3(a^2+b^2+c^2)+1} + \frac{1}{6(ab+bc+ca)} \geq 1$$

Đến đây ta áp dụng bất đẳng thức Binhiacopxki dạng phân thức thì được

$$\frac{1}{3(a^2 + b^2 + c^2) + 1} + \frac{1}{6(ab + bc + ca)} \geq \frac{4}{3(a^2 + b^2 + c^2) + 6(ab + bc + ca) + 1} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Ví dụ 4.18: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{9a+1} + \frac{b^2}{9b+1} + \frac{c^2}{9c+1} \leq \frac{1}{12\sqrt{3(ab+bc+ca)}}$$

Phân tích: Để ý đến phép biến đổi $\frac{a}{9} - \frac{a^2}{9a+1} = \frac{a}{9(9a+1)}$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{9} - \frac{a^2}{9a+1} + \frac{b}{9} - \frac{b^2}{9b+1} + \frac{c}{9} - \frac{c^2}{9c+1} \geq \frac{a+b+c}{9} - \frac{1}{12\sqrt{3(ab+bc+ca)}}$$

Hay
$$\frac{a}{9a+1} + \frac{b}{9b+1} + \frac{c}{9c+1} + \frac{3}{4\sqrt{3(ab+bc+ca)}} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{9a+1} + \frac{b}{9b+1} + \frac{c}{9c+1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{9(a^2+b^2+c^2)+a+b+c} = \frac{1}{9(a^2+b^2+c^2)+1}$$

Lại theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{3}{4\sqrt{3(ab+bc+ca)}} \geq \frac{3}{2[1+3(ab+bc+ca)]}$$

Ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{1}{9(a^2+b^2+c^2)+1} + \frac{3}{2[1+3(ab+bc+ca)]} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{1}{9(a^2+b^2+c^2)+1} + \frac{3}{2[1+3(ab+bc+ca)]} \\ &= \frac{1}{9(a^2+b^2+c^2)+1} + \frac{9}{6[1+3(ab+bc+ca)]} \\ &\geq \frac{(1+3)^2}{9(a^2+b^2+c^2)+1+6[1+3(ab+bc+ca)]} = \frac{16}{9(a+b+c)^2+7} = 1 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

5. Kỹ thuật đổi biến trong bất đẳng thức Bunhiacopxki

Có một số bất đẳng thức, nếu ta để nguyên dạng phát biểu của nó thì rất khó để phát hiện ra cách chứng minh. Tuy nhiên bằng một số phép đổi biến nhỏ nhỏ ta có thể đưa chúng về dạng quen thuộc mà bất đẳng thức Bunhiacopxki có thể áp dụng được. Trong mục này chúng ta cùng tìm hiểu kỹ thuật đổi biến trong bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Với bất đẳng thức ba biến a, b, c ta có thể sử dụng một số phép biến đổi như

- 1) $(a; b; c) \rightarrow \left(\frac{1}{x}; \frac{1}{y}; \frac{1}{z}\right); \left(\frac{1}{xy}; \frac{1}{yz}; \frac{1}{zx}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{xy}}; \frac{1}{\sqrt{yz}}; \frac{1}{\sqrt{zx}}\right); \dots$
- 2) $(a; b; c) \rightarrow (yz; zx; xy); (\sqrt{yz}; \sqrt{zx}; \sqrt{xy}); \dots$
- 3) $(a; b; c) \rightarrow (y+z; z+x; x+y); (y+z-x; z+x-y; x+y-z); \dots$

Với một số bất đẳng thức có giả thiết là $abc = 1$ ta có thể đổi biến

- 1) $(a; b; c) \rightarrow \left(\frac{1}{x}; \frac{1}{y}; \frac{1}{z}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{x}}; \frac{1}{\sqrt{y}}; \frac{1}{\sqrt{z}}\right); \dots$
- 2) $(a; b; c) \rightarrow \left(\frac{x}{y}; \frac{y}{z}; \frac{z}{x}\right); \left(\frac{b}{a}; \frac{c}{b}; \frac{a}{c}\right); \left(\sqrt{\frac{x}{y}}; \sqrt{\frac{y}{z}}; \sqrt{\frac{z}{x}}\right); \dots$
- 3) $(a; b; c) \rightarrow \left(\frac{yz}{x^2}; \frac{zx}{y^2}; \frac{ab}{z^2}\right); \left(\frac{x^2}{yz}; \frac{y^2}{zx}; \frac{z^2}{xy}\right); \dots$
- 4) $(a; b; c) \rightarrow \left(\frac{\sqrt{yz}}{x}; \frac{\sqrt{zx}}{y}; \frac{\sqrt{xy}}{z}\right); \left(\frac{x}{\sqrt{yz}}; \frac{y}{\sqrt{zx}}; \frac{z}{\sqrt{xy}}\right); \dots$

Ví dụ 5.1: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ac = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2abc + ab^2} + \frac{1}{2abc + bc^2} + \frac{1}{2abc + ca^2} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

Phân tích: Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{ac}{2ac + ab} + \frac{ab}{2ab + bc} + \frac{bc}{2bc + ca} \geq \frac{abc(a + b + c)}{3}$$

Để ý ta thấy bất đẳng thức có sự lặp lại của các đại lượng $ab; bc; ca$ và chú ý ta nhận thấy $abc(a + b + c) = ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab$. Do vậy một cách tự nhiên ta nghĩ đến phép đổi biến là $x = ab; y = bc; z = ca$.

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{ac}{2ac + ab} + \frac{ab}{2ab + bc} + \frac{bc}{2bc + ca} \geq \frac{abc(a + b + c)}{3}$$

Đặt $x = ab; y = bc; z = ca$, khi đó ta được $x + y + z = 3$, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{y}{2y + z} + \frac{z}{2z + x} + \frac{x}{2x + y} \geq \frac{xy + yz + zx}{3}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{y}{2y+z} + \frac{z}{2z+x} + \frac{x}{2x+y} = \frac{y^2}{y(2y+z)} + \frac{z^2}{z(2z+x)} + \frac{x^2}{x(2x+y)}$$

$$\geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx}$$

Ta cần chứng minh $\frac{(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx} \geq \frac{xy+yz+zx}{3}$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$9(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)[2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx]$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^4 \geq 3(xy+yz+zx)[2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx]$$

Đặt $A = x^2 + y^2 + z^2$; $B = xy + yz + zx$ suy ra $A + 2B = (x + y + z)^2 = 9$, khi đó ta cần chứng minh $(A + 2B)^2 \geq 3B(2A + B) \Leftrightarrow A^2 + B^2 \geq 2AB$.

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 5.2: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Phân tích: Bất đẳng thức được viết lại thành

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2+c^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2+a^2}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Quan sát bất đẳng thức trên ta nghĩ đến phép đổi biến $x = a^2$; $y = b^2$; $z = c^2$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{y+z}} + \sqrt{\frac{z}{z+x}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Đây là bất đẳng thức được chứng minh trong mục 2 với phép đối xứng hóa.

Lời giải

Đặt $x = a^2$; $y = b^2$; $z = c^2$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{y+z}} + \sqrt{\frac{z}{z+x}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned}
& \left(\sqrt{\frac{x}{x+y}} + \sqrt{\frac{y}{y+z}} + \sqrt{\frac{z}{z+x}} \right)^2 \\
&= \left(\sqrt{\frac{x(x+z)}{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{\frac{y(y+x)}{(y+z)(y+x)}} + \sqrt{\frac{z(z+y)}{(z+x)(z+y)}} \right)^2 \\
&\leq 2(x+y+z) \left(\frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(y+z)(y+x)} + \frac{z}{(z+x)(z+y)} \right) \\
&= \frac{4(x+y+z)(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}
\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{4(x+y+z)(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{9}{2}$$

Hay

$$8(x+y+z)(xy+yz+zx) \leq 9(x+y)(y+z)(z+x)$$

Hay

$$8xyz \leq (x+y)(y+z)(z+x)$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Ví dụ 5.3: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq 3 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$

Phân tích: Quan sát giả thiết ta thấy có thể viết lại giả thiết thành $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Đến đây ta đặt

$x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$ và khi này ta viết lại được bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} \geq 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức.

Lời giải

Từ giả thiết $ab + bc + ca = abc$ suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$

Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$, từ giả thiết suy ra $x + y + z = 1$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} \geq 3(x^2 + y^2 + z^2)$

Theo Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} = \frac{x^4}{x^2z} + \frac{y^4}{y^2x} + \frac{z^4}{z^2y} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2z + y^2x + z^2y}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2z + y^2x + z^2y} \geq 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

Hay
$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3(x^2z + y^2x + z^2y)$$

Vì $x + y + z = 1$, nên bất đẳng thức trên trở thành

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \geq 3(x^2z + y^2x + z^2y)$$

Hay
$$x^3 + y^3 + z^3 + xz^2 + yx^2 + zy^2 \geq 2(x^2z + y^2x + z^2y)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$x^3 + xz^2 \geq 2x^2z; y^3 + yx^2 \geq 2y^2x; z^3 + zy^2 \geq 2z^2y$$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta được

$$x^3 + y^3 + z^3 + xz^2 + yx^2 + zy^2 \geq 2(x^2z + y^2x + z^2y)$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$.

Nhân xét: Bất đẳng thức trên còn được chứng minh theo cách sau

Biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} \geq 3(x^2 + y^2 + z^2) \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} - (x + y + z)^2 \geq 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} - (x + y + z) \geq 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 \\ \Leftrightarrow & \frac{(x - z)^2}{z} + \frac{(y - x)^2}{x} + \frac{(z - y)^2}{y} \geq (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \\ \Leftrightarrow & (x - y)^2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + (y - z)^2 \left(\frac{1}{y} - 1 \right) + (z - x)^2 \left(\frac{1}{z} - 1 \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Vì $x + y + z = 1$ nên $\frac{1}{x}; \frac{1}{y}; \frac{1}{z} > 1$. Do đó bất đẳng thức cuối cùng đúng.

Phép chứng minh hoàn tất.

Ví dụ 5.4: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{ab}}{c + 3\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{bc}}{a + 3\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{b + 3\sqrt{ca}} \leq \frac{3}{4}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức nghĩ đến đổi biến $x = \sqrt{a}; y = \sqrt{b}; z = \sqrt{c}$. Khi đó bất đẳng thức

được viết lại thành
$$\frac{xy}{z^2 + 3xy} + \frac{yz}{a^2 + 3yz} + \frac{zx}{y^2 + 3zx} \leq \frac{3}{4}.$$

Ta có thể chứng minh bất đẳng thức trên bằng kỹ thuật thêm – bớt.

Lời giải

Đặt $x = \sqrt{a}; y = \sqrt{b}; z = \sqrt{c}$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{xy}{z^2 + 3xy} + \frac{yz}{a^2 + 3yz} + \frac{zx}{y^2 + 3zx} \leq \frac{3}{4}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{xy}{z^2 + 3xy} + \frac{yz}{x^2 + 3yz} + \frac{zx}{y^2 + 3zx} \leq \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{3} - \frac{xy}{z^2 + 3xy} + \frac{1}{3} - \frac{yz}{x^2 + 3yz} + \frac{1}{3} - \frac{zx}{y^2 + 3zx} \geq 1 - \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow & \frac{z^2}{z^2 + 3xy} + \frac{x^2}{x^2 + 3yz} + \frac{y^2}{y^2 + 3zx} \geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức và một đánh giá quen thuộc ta được

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{z^2 + 3xy} + \frac{x^2}{x^2 + 3yz} + \frac{y^2}{y^2 + 3zx} & \geq \frac{(x + y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 3(xy + yz + zx)} \\ & \geq \frac{(x + y + z)^2}{(x + y + z)^2 + \frac{(x + y + z)^2}{3}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 5.5: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \geq \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Phân tích: Trước hết ta viết lại giả thiết thành $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, khi đó ta nghĩ đến phép đổi biến

$x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$. Bất đẳng thức được viết lại thành

$$\sqrt{x + yz} + \sqrt{y + zx} + \sqrt{z + xy} \geq 1 + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$$

Để ý đến giả thiết $x + y + z = 1$, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\sqrt{x + yz} = \sqrt{x(x + y + z) + yz} = \sqrt{(x + y)(x + z)} \geq x + \sqrt{yz}$$

Áp dụng tương tự ta có lời giải như sau

Lời giải

Từ giả thiết $ab + bc + ca = abc$ suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$, khi đó ta được $x + y + z = 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{x + yz} + \sqrt{y + zx} + \sqrt{z + xy} \geq 1 + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\sqrt{x + yz} = \sqrt{x(x + y + z) + yz} = \sqrt{(x + y)(x + z)} \geq x + \sqrt{yz}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{y + zx} \geq y + \sqrt{zx}; \quad \sqrt{z + xy} \Leftrightarrow z + \sqrt{xy}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{x + yz} + \sqrt{y + zx} + \sqrt{z + xy} &\geq x + y + z + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \\ &= 1 + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$ hay $a = b = c = 3$.

Ví dụ 5.6: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn hệ thức $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{cb} + \frac{\sqrt{a^2 + 2ac}}{ac} \geq \sqrt{3}$$

Lời giải

Từ giả thiết ta được $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$, khi đó ta có $x + y + z = 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\sqrt{x^2 + 2y^2} + \sqrt{y^2 + 2z^2} + \sqrt{z^2 + 2x^2} \geq \sqrt{3}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$(x + 2y)^2 = (1 \cdot x + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}y)^2 \leq 3(x^2 + 2y^2)$$

Do đó ta được

$$\sqrt{x^2 + 2y^2} \geq \sqrt{\frac{(x + 2y)^2}{3}} = \frac{x + 2y}{\sqrt{3}}$$

Tương tự ta có

$$\sqrt{y^2 + 2z^2} \geq \frac{y + 2z}{\sqrt{3}}; \quad \sqrt{z^2 + 2x^2} \geq \frac{z + 2x}{\sqrt{3}}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên về theo về ta được

$$\sqrt{x^2 + 2y^2} + \sqrt{y^2 + 2z^2} + \sqrt{z^2 + 2x^2} \geq \frac{x + 2y}{\sqrt{3}} + \frac{y + 2z}{\sqrt{3}} + \frac{z + 2x}{\sqrt{3}} = \frac{3(x + y + z)}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$ hay $a = b = c = 3$.

Ví dụ 5.7: Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a^2(b + c)} + \frac{ca}{b^2(c + a)} + \frac{ab}{c^2(a + b)} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta thấy vế phải có đại lượng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, để ý đến phép đổi biến

$$\frac{bc}{a^2(b+c)} = \frac{1}{a^2\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}. \text{ Từ đó rất tự nhiên ta nghĩ đến phép đổi biến.}$$

Lời giải

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 5.8: Cho các số thực $a, b, c > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1}$$

Phân tích: Chính sự xuất hiện giả thiết $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ làm cho ta suy nghĩ đến việc sử dụng phép đổi

biến $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$.

Lời giải

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, khi đó $x, y, z \in (0; 1)$ và $x + y + z = 2$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \geq \sqrt{\frac{1-x}{x}} + \sqrt{\frac{1-y}{y}} + \sqrt{\frac{1-z}{z}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}} + \sqrt{\frac{1-y}{y}} + \sqrt{\frac{1-z}{z}}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(3-x-y-z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{3}{2}$.

Ví dụ 5.9: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + 2 = abc$. Chứng minh rằng:

$$2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \leq a + b + c + 6$$

Phân tích: Để ý ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{2(a+b+c+2)}$$

Trước hết ta biến đổi giả thiết thành

$$(a+1)(b+1)(c+a) = (a+1)(b+1) + (b+1)(c+1) + (c+1)(a+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1$$

Khi đó ta nghĩ đến phép đổi biến $x = \frac{1}{a+1}$; $y = \frac{1}{b+1}$; $z = \frac{1}{c+1}$. Để ý là từ cách đổi biến đó ta

được $a = \frac{1-x}{x} = \frac{y+z}{x}$; $b = \frac{1-y}{y} = \frac{z+x}{y}$; $c = \frac{1-z}{z} = \frac{x+y}{z}$. Bất đẳng thức được viết lại thành

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} + \sqrt{\frac{x+y}{z}} \leq \sqrt{2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)}$$

Bunhiacopxki để chứng minh bài toán

Lời giải

Ta có
$$2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - (a + b + c)$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - (a + b + c) \leq a + b + c + 6$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \leq 2(a + b + c + 3)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{2(a + b + c + 3)}$$

Giả thiết được viết lại thành

$$(a+1)(b+1)(c+a) = (a+1)(b+1) + (b+1)(c+1) + (c+1)(a+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 1$$

Đặt $x = \frac{1}{a+1}$; $y = \frac{1}{b+1}$; $z = \frac{1}{c+1}$, suy ra $x + y + z = 1$.

Khi đó ta được $a = \frac{1-x}{x} = \frac{y+z}{x}$; $b = \frac{1-y}{y} = \frac{z+x}{y}$; $c = \frac{1-z}{z} = \frac{x+y}{z}$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} + \sqrt{\frac{x+y}{z}} \leq \sqrt{2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\sqrt{\frac{y+z}{x}} + \sqrt{\frac{z+x}{y}} + \sqrt{\frac{x+y}{z}} \leq \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(2x + 2y + 2z)} = \sqrt{2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$

Ví dụ 5.10: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b}{a\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{b\sqrt{c^2+1}} + \frac{a}{c\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{3}{2}$$

Phân tích: Từ giả thiết ta được $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$, khi đó rất tự nhiên ta nghĩ đến phép đổi biến

$x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, suy ra $xy + yz + zx = 1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{x}{\sqrt{y^2 + 1}} + \frac{y}{\sqrt{z^2 + 1}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq \frac{3}{2}$$

Đề ý đến phép biến đổi $\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + xy + yz + zx} = \sqrt{(x + y)(x + z)}$. Hoàn toàn tương tự ta có thể chứng minh được bài toán.

Lời giải

Từ giả thiết $a + b + c = abc$ suy ra $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$.

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, Khi đó giả thiết của bài toán trở thành $xy + yz + zx = 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{x}{\sqrt{y^2 + 1}} + \frac{y}{\sqrt{z^2 + 1}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq \frac{3}{2}$.

Dễ thấy $\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + xy + yz + zx} = \sqrt{(x + y)(x + z)}$

Tương tự ta được $\sqrt{y^2 + 1} = \sqrt{(y + z)(y + x)}$; $\sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{(z + x)(z + y)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{y^2 + 1}} + \frac{y}{\sqrt{z^2 + 1}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \frac{x}{\sqrt{(y + x)(y + z)}} + \frac{y}{\sqrt{(z + x)(z + y)}} + \frac{z}{\sqrt{(x + y)(x + z)}} \\ &\geq \frac{2x}{x + 2y + z} + \frac{2y}{x + y + 2z} + \frac{2z}{2x + y + z} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $\frac{2x}{x + 2y + z} + \frac{2y}{x + y + 2z} + \frac{2z}{2x + y + z} \geq \frac{3}{2}$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x + 2y + z} + \frac{2y}{x + y + 2z} + \frac{2z}{2x + y + z} \\ \geq \frac{2(x + y + z)^2}{(x + y + z)^2 + xy + yz + zx} \geq \frac{2(x + y + z)^2}{(x + y + z)^2 + \frac{(x + y + z)^2}{3}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \sqrt{3}$.

Ví dụ 5.11: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} + \frac{a+b}{c^2} \geq 2$$

Phân tích: Quan sát giả thiết của bài toán ta nghĩ đến phép đổi biến $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$.

Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành $\frac{x^2(y+z)}{yz} + \frac{y^2(z+x)}{zx} + \frac{z^2(x+y)}{xy} \geq 2$.

Để ý đến đánh giá $4xy \leq (x+y)^2$. Ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{4x^2}{y+z} + \frac{4y^2}{z+x} + \frac{4z^2}{x+y} \geq 2$$

Bất đẳng thức trên dễ dàng chứng minh được bằng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức.

Lời giải

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$. Từ giả thiết suy ra $x + y + z = 1$.

Bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{x^2(y+z)}{yz} + \frac{y^2(z+x)}{zx} + \frac{z^2(x+y)}{xy} \geq 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}; yz \leq \frac{(y+z)^2}{4}; zx \leq \frac{(z+x)^2}{4}$$

Khi đó ta được bất đẳng thức sau

$$\frac{x^2(y+z)}{yz} + \frac{y^2(z+x)}{zx} + \frac{z^2(x+y)}{xy} \geq \frac{4x^2}{y+z} + \frac{4y^2}{z+x} + \frac{4z^2}{x+y}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{4x^2}{y+z} + \frac{4y^2}{z+x} + \frac{4z^2}{x+y} \geq \frac{4(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = 2(x+y+z) = 2$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$.

Nhận xét: Ngoài cách chứng minh như trên ta có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki chứng minh theo cách sau

Bất đẳng thức được viết lại thành $x^2\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + y^2\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) + z^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 2$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$\begin{aligned}x^2 \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) &= \frac{x^2}{y+z} (y+z) \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq \frac{4x^2}{y+z} \\y^2 \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) &= \frac{y^2}{z+x} (z+x) \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) \geq \frac{4y^2}{z+x} \\z^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) &= \frac{z^2}{x+y} (x+y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq \frac{4z^2}{x+y}\end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^2(y+z)}{yz} + \frac{y^2(z+x)}{zx} + \frac{z^2(x+y)}{xy} \geq \frac{4x^2}{y+z} + \frac{4y^2}{z+x} + \frac{4z^2}{x+y}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned}&\frac{4x^2}{y+z} + \frac{4y^2}{z+x} + \frac{4z^2}{x+y} \\&= 2 \left[(x+y) + (y+z) + (z+x) \right] \left[\frac{x^2}{(y+z)} + \frac{y^2}{(z+x)} + \frac{z^2}{(x+y)} \right] \\&\geq 2 \left(\frac{x}{\sqrt{y+z}} \sqrt{y+z} + \frac{y}{\sqrt{z+x}} \sqrt{z+x} + \frac{z}{\sqrt{x+y}} \sqrt{x+y} \right)^2 = 2(x+y+z)^2 = 2\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 5.12: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a}}{2+b\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{2+c\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{c}}{2+a\sqrt{c}} \geq 1$$

Phân tích: Từ giả thiết $abc = 1$ của bài toán, rất tự nhiên ta nghĩ đến phép đổi biến dạng

$a = \frac{x}{y}$; $b = \frac{y}{z}$; $c = \frac{z}{x}$, chú ý đến các căn bậc hai có trong bất đẳng thức cần chứng minh, ta chọn

cách đổi biến là $\sqrt{a} = \frac{x}{y}$; $\sqrt{b} = \frac{y}{z}$; $\sqrt{c} = \frac{z}{x}$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$\frac{xz^2}{2z^2y + y^2x} + \frac{yx^2}{2x^2z + z^2y} + \frac{zy^2}{2y^2x + x^2z} \geq 1$. Bất đẳng thức cần chứng minh có dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Do đó ta thử áp dụng xem có thể chứng minh được bài toán không?

Lời giải

Vì $abc = 1$ nên tồn tại các số thực dương để $\sqrt{a} = \frac{x}{y}$; $\sqrt{b} = \frac{y}{z}$; $\sqrt{c} = \frac{z}{x}$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{xz^2}{2z^2y + y^2x} + \frac{yx^2}{2x^2z + z^2y} + \frac{zy^2}{2y^2x + x^2z} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{xz^2}{2z^2y + y^2x} + \frac{yx^2}{2x^2z + z^2y} + \frac{zy^2}{2y^2x + x^2z} = \frac{x^2z^2}{2xyz^2 + x^2y^2} + \frac{y^2x^2}{2x^2yz + z^2y^2} + \frac{z^2y^2}{2xy^2z + x^2z^2}$$

$$\geq \frac{(xy + yz + zx)^2}{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x + y + z)} = \frac{(xy + yz + zx)^2}{(xy + yz + zx)^2} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 5.13: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{b^2 + b + 1} + \frac{1}{c^2 + c + 1} \geq 1$$

Phân tích: Nếu ta sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski trực tiếp kiểu

$$\frac{1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{b^2 + b + 1} + \frac{1}{c^2 + c + 1} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + 3}$$

Khi đó để phép chứng minh được hoàn tất ta phải chỉ ra được

$$\frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + 3} \geq 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \leq 6$$

Với giả thiết $abc = 1$ thì đánh giá cuối cùng là một đánh giá sai.

Để ý đến giả thiết $abc = 1$ ta nghĩ đến phép đặt ẩn phụ, vấn đề đặt ra là ta chọn cách đặt ẩn phụ nào? Trước hết ta thấy bất đẳng thức có tính đối xứng do đó để không làm mất tính đối xứng của nó ta sẽ

không đặt ẩn phụ kiểu $\frac{x}{y}; \frac{y}{z}; \frac{z}{x}$ hoặc $\frac{y}{x}; \frac{z}{y}; \frac{x}{z}$. Đầu tiên ta sử dụng phép đổi biến

$a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z}$ khi bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^2}{x^2 + x + 1} + \frac{y^2}{y^2 + y + 1} + \frac{z^2}{z^2 + z + 1} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x^2}{x^2 + x + 1} + \frac{y^2}{y^2 + y + 1} + \frac{z^2}{z^2 + z + 1} \geq \frac{(x + y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z + 3}$$

Ta cần chứng minh được $(x + y + z)^2 \geq x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z + 3$

Tuy nhiên đánh giá này lại sai. Do đó cách đổi biến này không khả thi

Như vậy ta tính đến cách đổi biến $a = \frac{x^2}{yz}; b = \frac{y^2}{zx}; c = \frac{z^2}{xy}$ và $a = \frac{yz}{x^2}; b = \frac{zx}{y^2}; c = \frac{xy}{z^2}$. Trong hai

cách đổi biến trên, suy nghĩ một chút ta sẽ loại cách đặt thứ nhất vì bất đẳng thức chỉ chứa biến ở mẫu nên khi đổi biến và quy đồng mỗi phân thức ta sẽ thu được một phân thức mà trên tử có chứa các đại lượng $y^2z^2; z^2x^2; x^2y^2$ còn dưới mẫu lại chứa các đại lượng $x^4; y^4; z^4$ trộn hơn, nên muốn đánh giá

các mẫu theo chiều tăng lên là rất khó. Do đó ta chỉ còn cách đổi biến $a = \frac{yz}{x^2}$; $b = \frac{zx}{y^2}$; $c = \frac{xy}{z^2}$, hy vọng sẽ chứng minh được bài toán.

Khi này bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{x^4}{x^4 + x^2yz + y^2z^2} + \frac{y^4}{y^4 + y^2zx + z^2x^2} + \frac{z^4}{z^4 + z^2xy + x^2y^2} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{x^4}{x^4 + x^2yz + y^2z^2} + \frac{y^4}{y^4 + y^2zx + z^2x^2} + \frac{z^4}{z^4 + z^2xy + x^2y^2} \\ \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2} \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$$

Biến đổi tương đương và thu gọn ta được

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z)$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét: Nếu chấp nhận biến bất đẳng thức trên từ dạng đối xứng về dạng hoán vị thì với cách đổi biến

$$a = \frac{y}{x}; b = \frac{z}{y}; c = \frac{x}{z}, \text{ bất đẳng thức cần chứng minh trở thành}$$

$$\frac{a^2}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^2}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^2}{c^2 + ca + a^2} \geq 1$$

Khi đó bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a^2 + ab + b^2} - \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca} \\ = \frac{a^2(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca - a^2 - ab - b^2)}{(a^2 + ab + b^2)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)} \\ = \frac{a^2c(a + b + c)}{(a^2 + ab + b^2)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)} \end{aligned}$$

Áp dụng tương tự ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{a^2c}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^2c}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^2c}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{ab + bc + ca}{a + b + c}$$

Áp dụng dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2c}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^2a}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^2b}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{c(a^2+bc+b^2)+a(b^2+bc+a^2)+b(c^2+ca+a^2)} = \frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 5.14: Cho các số thực $a; b; c \neq 1$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(1-a)^2} + \frac{b^2}{(1-b)^2} + \frac{c^2}{(1-c)^2} \geq 1$$

Phân tích: Chú ý đến giả thiết $abc = 1$ và tính đối xứng của bất đẳng thức ta nghĩ đến phép đổi biến.

Ngoài ra ta cũng thấy các phân thức chứa biến trên tử nên ta có thể chọn cách đổi biến

$$a = \frac{x^2}{yz}; b = \frac{y^2}{zx}; c = \frac{z^2}{xy}$$

Lời giải

Đặt $a = \frac{x^2}{yz}; b = \frac{y^2}{zx}; c = \frac{z^2}{xy}$ với $x; y; z > 0$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^4}{(x^2-yz)^2} + \frac{y^4}{(y^2-zx)^2} + \frac{z^4}{(z^2-xy)^2} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{x^4}{(x^2-yz)^2} + \frac{y^4}{(y^2-zx)^2} + \frac{z^4}{(z^2-xy)^2} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(x^2-yz)^2 + (y^2-zx)^2 + (z^2-xy)^2}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(x^2-yz)^2 + (y^2-zx)^2 + (z^2-xy)^2} \geq 1$$

Hay tương đương với

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - \left[(x^2-yz)^2 + (y^2-zx)^2 + (z^2-xy)^2 \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (xy+yz+zx)^2 \geq 0$$

Đánh giá cuối cùng luôn là một đánh giá đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 5.15: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(c+1)(c+2)} \geq \frac{1}{2}$$

Phân tích: Chú ý đến giả thiết $abc = 1$ và tính đối xứng của bất đẳng thức ta có thể đổi biến

$$a = \frac{yz}{x^2}; b = \frac{zx}{y^2}; c = \frac{xy}{z^2}.$$

Lời giải

Đặt $a = \frac{yz}{x^2}; b = \frac{zx}{y^2}; c = \frac{xy}{z^2}$ với $x; y; z > 0$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^4}{(x^2 + yz)(2x^2 + yz)} + \frac{y^4}{(y^2 + zx)(2y^2 + zx)} + \frac{z^4}{(z^2 + xy)(2z^2 + xy)} \geq \frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{x^4}{(x^2 + yz)(2x^2 + yz)} + \frac{y^4}{(y^2 + zx)(2y^2 + zx)} + \frac{z^4}{(z^2 + xy)(2z^2 + xy)} \\ & \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{(x^2 + yz)(2x^2 + yz) + (y^2 + zx)(2y^2 + zx) + (z^2 + xy)(2z^2 + xy)} \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{(x^2 + yz)(2x^2 + yz) + (y^2 + zx)(2y^2 + zx) + (z^2 + xy)(2z^2 + xy)} \geq \frac{1}{2}$$

Hay ta cần chứng minh

$$2(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq (x^2 + yz)(2x^2 + yz) + (y^2 + zx)(2y^2 + zx) + (z^2 + xy)(2z^2 + xy)$$

Khai triển và thu gọn ta được $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z)$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng. Bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 5.16: Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $abcd = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{1}{(d+1)^2} \geq 1$$

Lời giải

Cách 1: Đặt $a = \frac{x}{z}; b = \frac{y}{z}; c = \frac{x}{t}; d = \frac{t}{x}$ với $x; y; z; t > 0$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{x^2}{(x+y)^2} + \frac{y^2}{(y+z)^2} + \frac{z^2}{(z+t)^2} + \frac{t^2}{(t+x)^2} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức và bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x^2}{(x+y)^2} + \frac{y^2}{(y+z)^2} + \frac{z^2}{(z+t)^2} + \frac{t^2}{(t+x)^2}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{\left[x(t+x) + y(x+y) + z(y+z) + t(z+t) \right]^2}{(x+y)^2(x+t)^2 + (y+z)^2(x+y)^2 + (z+t)^2(y+z)^2 + (t+x)^2(z+t)^2} \\
&= \frac{\left[x(t+x) + y(x+y) + z(y+z) + t(z+t) \right]^2}{\left[(x+y)^2 + (z+t)^2 \right] \left[(x+t)^2 + (y+z)^2 \right]} \\
&= \frac{\left[(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+t)^2 + (x+t)^2 \right]^2}{4 \left[(x+y)^2 + (z+t)^2 \right] \left[(x+t)^2 + (y+z)^2 \right]} \geq 1
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$.

Cách 2: Đặt $a = \frac{yz}{x^2}$; $b = \frac{zt}{y^2}$; $c = \frac{tx}{z^2}$; $d = \frac{xy}{t^2}$ với $x; y; z; t > 0$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{x^4}{(x^2 + yz)^2} + \frac{y^4}{(y^2 + zt)^2} + \frac{z^4}{(z^2 + tx)^2} + \frac{t^4}{(t^2 + xy)^2} \geq 1$$

Áp dụng liên tục bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned}
\frac{x^4}{(x^2 + yz)^2} + \frac{z^4}{(z^2 + tx)^2} &\geq \frac{(x^2 + z^2)^2}{(x^2 + yz)^2 + (z^2 + tx)^2} \\
&\geq \frac{(x^2 + z^2)^2}{(x^2 + y^2)(x^2 + z^2) + (z^2 + x^2)(z^2 + t^2)} = \frac{x^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}
\end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{y^4}{(y^2 + zt)^2} + \frac{t^4}{(t^2 + xy)^2} \geq \frac{y^2 + t^2}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^4}{(x^2 + yz)^2} + \frac{y^4}{(y^2 + zt)^2} + \frac{z^4}{(z^2 + tx)^2} + \frac{t^4}{(t^2 + xy)^2} \geq 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Chương II. MỘT SỐ KỸ THUẬT GIẢI TOÁN ĐẶC SẮC

Chủ đề 7. ỨNG DỤNG NGUYÊN LÝ DIRICHLET TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Nhà toán học Đức P.G.Lejeune Dirichlet (1805-1859) đã nêu ra một định lý mà về sau người ta gọi là Nguyên lý Dirichlet, nguyên lý được phát biểu như sau:

“Nếu nhốt vào n chiếc lồng một số chú thỏ mà số lượng lớn hơn n thì ta sẽ tìm được một chiếc lồng mà trong đó có nhiều hơn một con thỏ”

Chúng ta biết bất đẳng thức là một dạng toán hay và khó, thường có trong các kì thi học sinh giỏi cấp Tỉnh, cấp Quốc gia và Quốc tế. Có rất nhiều phương pháp để chứng minh bất đẳng thức như phương pháp chứng minh bằng phép biến đổi tương đương, phương pháp quy nạp, phương pháp chứng minh bằng phản chứng, dùng các BĐT cổ điển: Cauchy, Bunhiacopxki,...

Trong bài viết này chúng tôi muốn giới thiệu một phương pháp chứng minh bất đẳng thức khá thú vị là ứng dụng nguyên lý Dirichlet. Với phương pháp này, giúp chúng ta chứng minh được một số bài toán bất đẳng thức một cách rất gọn gàng và độc đáo.

Từ nguyên lý Dirichlet có một mệnh đề có ý nghĩa hết sức quan trọng: ***Trong 3 số thực bất kì a, b, c bao giờ cũng tìm được hai số cùng dấu.***

Đây là một mệnh đề rất quan trọng, bởi khi ta đã chọn được “điểm rơi” (tức là đẳng thức của bài toán) thì ta có thể áp dụng mệnh đề trên để chứng minh bất đẳng thức. Chẳng hạn đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = k$ thì ta có thể giả sử 2 số $(a - k); (b - k)$ cùng dấu, khi đó thì $(a - k)(b - k) \geq 0$. Chúng ta sẽ tìm hiểu một số ví dụ sau để thấy được ý nghĩa việc ứng dụng nguyên lý Dirichlet trong việc giải bất đẳng thức như thế nào?

Bài toán 1. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca)$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Theo một đánh giá quen thuộc ta có $9(ab + bc + ca) \leq 3(a + b + c)^2$. Như vậy ta cần chứng minh

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(a + b + c)^2$$

Quan sát bất đẳng thức trên ta nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki. Như vậy ta cần đánh giá từ $(a + b + c)^2$ làm xuất hiện $a^2 + 2$, để ý ta thấy

$$(a + b + c)^2 \leq (a^2 + 1 + 1)(1 + b^2 + c^2) = (a^2 + 2)(1 + b^2 + c^2)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\begin{aligned} 3(a^2 + 2)(1 + b^2 + c^2) &\leq (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \\ \Leftrightarrow 3(1 + b^2 + c^2) &\leq (b^2 + 2)(c^2 + 2) \end{aligned}$$

Biến đổi tương đương ta thu được

$$3(1 + b^2 + c^2) \leq (b^2 + 2)(c^2 + 2) \Leftrightarrow 3 + 3b^2 + 3c^2 \leq b^2c^2 + 2b^2 + 2c^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow b^2c^2 - b^2 - c^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (b^2 - 1)(c^2 - 1) \geq 0$$

Như vậy ta chỉ cần chỉ ra được $(b^2 - 1)(c^2 - 1) \geq 0$, tuy nhiên vì vai trò của a, b, c như nhau nên theo nguyên lí Dirichlet thì trong ba số $a^2 - 1$; $b^2 - 1$; $c^2 - 1$ luôn tồn tại hai số cùng dấu và ta hoàn toàn có thể giả sử hai số đó là $b^2 - 1$; $c^2 - 1$. Như vậy bài toán được chứng minh xong.

Nhận xét: Ta có thể chứng minh bất đẳng thức trên theo cách khác sau:

Theo nguyên lí Dirichlet trong ba số $ab - 1$; $bc - 1$; $ca - 1$ tồn tại hai số không trái dấu, Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là $ab - 1$; $bc - 1$ khi đó ta được

$$(ab - 1)(bc - 1) \geq 0 \Rightarrow ab^2c + 1 \geq ab + bc$$

$$\text{Suy ra} \quad a^2b^2c^2 + b^2 + 2 \geq 2(ab^2c + 1) \geq 2(ab + bc)$$

Bất đẳng thức cần chứng minh viết lại thành

$$a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 8 \geq 9(ab + bc + ca)$$

$$\text{Ta có } a^2b^2c^2 + b^2 + 2 \geq 2(ab + bc) \text{ và } 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(ab + bc + ca)$$

$$\text{Lại thấy } a^2b^2 + 1 \geq 2ab \text{ nên } 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 6 \geq 4(ab + bc + ca)$$

Và $a^2 + c^2 \geq 2ac$. Từ các bất đẳng thức trên ta được

$$a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 8 \geq 9(ab + bc + ca)$$

Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 2. Cho a, b, c là các số thực không âm bất kì. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$$

Lời giải

Trước hết ta để ý đến đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$ điều này có nghĩa là khi đẳng thức xảy ra thì $a - 1$; $b - 1$; $c - 1$ cùng bằng 0, ngoài ra trong bất đẳng thức chứa các đại lượng $ab, abc, \dots$ nên ta nghĩ đến tích $c(a - 1)(b - 1)$, tuy nhiên ta chưa thể khẳng định được tích đó có không âm hay không nên ta sử dụng nguyên lí Dirichlet.

Theo nguyên lí Dirichlet trong ba số $a - 1$; $b - 1$; $c - 1$ luôn tồn tại hai số cùng dấu, không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là $a - 1$; $b - 1$, khi đó ta có

$$(a - 1)(b - 1) \geq 0 \Leftrightarrow c(a - 1)(b - 1) \geq 0 \Leftrightarrow abc - ac - bc + c \geq 0$$

Khi đó ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 = (a - b)^2 + (1 - c)^2 + 2(abc - ac - bc + c) + 2(ab + bc + ca)$$

Dễ thấy $(a - b)^2 + (1 - c)^2 + 2(abc - ac - bc + c) \geq 0$ nên ta có

$$(a - b)^2 + 2ab + (1 - c)^2 + 2c + 2abc - 2ac - 2bc + 2(bc + ca) \geq 2(ab + bc + ca)$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét: Ta có thể chứng minh được bất đẳng thức đúng với mọi số thực nếu thay đổi một chút:

$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2c^2 + 2 \geq 2(ab + bc + ca)$$

Theo nguyên lý Dirichlet thì $c^2(a^2 - 1)(b^2 - 1) \geq 0 \Rightarrow a^2b^2c^2 + c^2 \geq b^2c^2 + c^2a^2$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$a^2 + b^2 + 2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow (a - b)^2 + (bc - 1)^2 + (ca - 1)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \pm 1$

Bài toán 3. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geq (a + 1)(b + 1)(c + 1)$$

Lời giải

Sau khi nhân 2 vế cho 2 thì bất đẳng thức trên tương đương với

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc + 4 \geq 2(ab + bc + ca) + 2(a + b + c)$$

Theo bài toán 2 ta được $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c) \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài toán 4. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(a + b + c)^2 + (abc - 1)^2$$

Lời giải

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc + 7 \geq 9(ab + bc + ca)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy thì

$$2a^2b^2 + 2 + 2b^2c^2 + 2 + 2c^2a^2 + 2 \geq 4ab + 4bc + 4ca$$

$$\text{Và} \quad 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq 3ab + 3bc + 3ca$$

Từ đó kết hợp với bài toán 2 ta suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$

Chứng minh rằng: $ab + bc + ca - abc \leq 2$

Lời giải

Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$

Cách 1: Theo nguyên lý Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a - 1)$; $(b - 1)$; $(c - 1)$ cùng dấu. Không mất tính

tổng quát, giả sử $(a - 1)(b - 1) \geq 0$ thì

$$c(a - 1)(b - 1) \geq 0 \Rightarrow abc \geq bc + ca - c$$

Mặt khác ta có $4 = a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 2ab + c^2 + abc$

Suy ra $4 - c^2 \geq 2ab + abc \Leftrightarrow 2 - c \geq ab$

Suy ra $0 \leq ab + bc + ca - abc \leq 2 - c + bc + ca - (bc + ca - c) = 2$

Cách 2: Theo nguyên lý Dirichlet ta có $c(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow abc \geq bc + ca - c$

$$\Rightarrow ab + bc + ca - abc \leq ab + bc + ca - (ac + bc - c)$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca - abc \leq ab + c$$

Ta đi chứng minh $ab + c \leq 2$

Từ $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ ta được $a^2 \leq 4$; $b^2 \leq 4$; $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \leq 4$.

Mặt khác cũng từ $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ suy ra $c^2 + abc + a^2 + b^2 - 4 = 0$

Xem đẳng thức trên là là phương trình là bậc hai theo biến c .

Khi đó ta được $\Delta = (ab)^2 - 4(a^2 + b^2 - 4) = (4 - a^2)(4 - b^2) \geq 0$

Do đó phương trình có hai nghiệm

$$c = \frac{-ab + \sqrt{(4 - a^2)(4 - b^2)}}{2} \text{ và } c = \frac{-ab - \sqrt{(4 - a^2)(4 - b^2)}}{2}$$

$$\text{Vì } c \geq 0 \text{ nên } c = \frac{-ab + \sqrt{(4 - a^2)(4 - b^2)}}{2}$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} ab + \frac{-ab + \sqrt{(4 - a^2)(4 - b^2)}}{2} &\leq 2 \Leftrightarrow ab + \frac{-ab + \sqrt{(4 - a^2)(4 - b^2)}}{2} \leq 2 \\ \Leftrightarrow 4 - ab &\geq \sqrt{(4 - a^2)(4 - b^2)} \Leftrightarrow (4 - ab)^2 \geq (4 - a^2)(4 - b^2) \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức phải chứng minh.

Bài toán 6. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$. Chứng minh rằng:
 $a + b + c \geq ab + bc + ca$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử hai số $a - 1$ và $b - 1$ cùng không âm

Khi đó ta được $c(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow abc \geq bc + ca - c$

Suy ra $a + b + c + abc \geq a + b + c + ac + bc - c \Leftrightarrow a + b + c + abc \geq (a + b)(c + 1)$

Mặt khác ta có

$$4 = ab + bc + ca + abc = c(a + b) + ab + abc \leq c(a + b) + \frac{(a + b)^2}{4} + \frac{c(a + b)^2}{4}$$

Suy ra $c \geq \frac{4}{a + b} - 1 \Rightarrow (a + b)(c + 1) \geq 4$

Do đó ta được $a + b + c + abc \geq 4$ nên ta có

$$a + b + c + abc \geq ab + bc + ca + abc$$

Hay $a + b + c \geq ab + bc + ca$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Nhân xét: Ta cũng có thể chứng minh theo cách sau đây

Theo nguyên lý Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a-1), (b-1), (c-1)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0$.

$$\text{Khi đó} \quad c(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow c \geq ac + bc - abc.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $a + b \geq ab + abc$

$$\text{Từ giả thiết } ab + bc + ca + abc = 4 \text{ suy ra } c = \frac{4 - ab}{a + b + ab}$$

Thay vào bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức tương đương là:

$$a + b \geq ab \left(1 + \frac{4 - ab}{a + b + ab} \right) \Leftrightarrow (a + b)(a + b + ab) \geq ab(4 + a + b) \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Phép chứng minh hoàn tất.

Bài toán 7. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq 2(a + b + c).$$

Lời giải

$$\text{Bất đẳng thức được viết lại là } P = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 - 2(a + b + c) \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a - 1$ và $b - 1$ cùng không âm.

Khi đó suy ra $(a - 1)(b - 1) \geq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 - 2(a + b + c) = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 + \frac{2}{ab} + \frac{1}{c^2} - 2(a + b + c) + 3 \\ &= \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 + 2c + a^2b^2 - 2(a + b + c) + 3 = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 + a^2b^2 - 2a - 2b + 3 \\ &= \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 + 2(a - 1)(b - 1) + (ab - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài toán 8. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(a + \frac{1}{b} - 1 \right) \left(b + \frac{1}{c} - 1 \right) + \left(b + \frac{1}{c} - 1 \right) \left(c + \frac{1}{a} - 1 \right) + \left(c + \frac{1}{a} - 1 \right) \left(a + \frac{1}{b} - 1 \right) \geq 3$$

Lời giải

$$\text{Đặt } x = a + \frac{1}{b}; y = b + \frac{1}{c}; z = c + \frac{1}{a}, \text{ khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành}$$

$$(x - 1)(y - 1) + (y - 1)(z - 1) + (z - 1)(x - 1) \geq 3$$

$$\text{Hay ta cần chứng minh } xy + yz + zx \geq 2(x + y + z)$$

Theo nguyên lý Dirichlet thì 2 trong 3 số $(x - 2), (y - 2), (z - 2)$ cùng dấu.

Không mất tính tổng quát, giả sử $(x - 2)(y - 2) \geq 0$, suy ra

$$xy + 4 \geq 2x + 2y \Rightarrow 2(x + y + z) \leq 2z + xy + 4$$

Lại có $xyz = abc + \frac{1}{abc} + x + y + z \geq 2 + x + y + z \geq 2 + 2\sqrt{xy} + z$

Suy ra $z(xy - 1) \geq 2(\sqrt{xy} - 1) \Rightarrow z(\sqrt{xy} - 1) \geq 2$

Từ hai bất đẳng thức trên ta được $2(x + y + z) \leq 2z + xy + 4 \leq xy + yz + zx$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 9. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1) \geq 1$$

Lời giải

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a - 1), (b - 1), (c - 1)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $(b - 1)(c - 1) \geq 0$. Khi đó ta được

$$\begin{aligned}(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1) &= bc(b - 1)(c - 1) + b^2 + c^2 - b - c + 1 \\ &\geq b^2 + c^2 - b - c + 1 \geq \frac{1}{2}(b + c)^2 - (b + c) + 1\end{aligned}$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned}(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1) \\ \geq (a^2 - a + 1)\left[\frac{1}{2}(b + c)^2 - (b + c) + 1\right] = \frac{1}{2}(a^2 - a + 1)(a^2 - 4a + 5)\end{aligned}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$(a^2 - a + 1)(a^2 - 4a + 5) \geq 2 \Leftrightarrow (a - 1)^2(a^2 - 3a + 3) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài toán 10. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \geq 2(ab + bc + ca)$$

Lời giải

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a - 1), (b - 1), (c - 1)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $(a - 1)(b - 1) \geq 0 \Rightarrow abc \geq ac + bc - c$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(ab + bc + ca)$$

Thật vậy ta có $a^2 + b^2 + c^2 + 3 = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $c^2 + 1 \geq 2c$

Kết hợp với $abc \geq ac + bc - c$ ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2ab + 2c + 2(bc + ca - c) = 2(ab + bc + ca)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài toán 11. Cho a, b, c là các số thực không âm bất kì. Chứng minh rằng:

$$abc + 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \right] \geq a + b + c$$

Lời giải

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a-1), (b-1), (c-1)$ cùng dấu. Không mất tính tổng quát, giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab \geq a + b - 1$.

Vì vậy để hoàn tất bài toán ta chỉ cần chứng minh

$$c(a+b-1) + 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \right] \geq a + b + c$$

$$\text{Hay} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \right] \geq (a+b-2)(1-c)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 &\geq \frac{(a+b-2)^2}{2} + (c-1)^2 \\ &\geq \sqrt{2} \left| (a+b-2)(1-c) \right| \geq \sqrt{2} (a+b-2)(1-c) \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài toán 12. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 8 \geq 5(a + b + c)$$

Lời giải

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a-1), (b-1), (c-1)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow abc \geq ac + bc - c$.

$$\text{Suy ra} \quad 2(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 8 \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) + ac + bc - c + 8$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + ac + bc - c + 8 \geq 5(a + b + c)$$

Thật vậy, bất đẳng trên tương đương với

$$(b+c-2)^2 + (c+a-2)^2 + 3(a-1)^2 + 3(b-1)^2 + 2(c-1)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng.

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét: Hoàn toàn tương tự ta có thể tổng quát hóa bài toán trên:

a). Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$m(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 3m + 2 \geq (2m+1)(a+b+c).$$

Trong đó m là số thực cho trước thỏa mãn $m \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$(2m-1)(a^2 + b^2 + c^2) + 2abc + 1 \geq 2m(ab + bc + ca).$$

Trong đó m là số thực cho trước thỏa mãn $m \geq 1$

c) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức:

$$abc + a^2 + b^2 + c^2 + 2 \geq a + b + c + ab + bc + ca$$

d) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$2abc + a^4 + b^4 + c^4 + 13 \geq 6(a + b + c)$$

Bài toán 13. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$5(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc + 9 \geq 9(ab + bc + ca)$$

Lời giải

Theo nguyên lý Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a - 1)$, $(b - 1)$, $(c - 1)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $(a - 1)(b - 1) \geq 0 \Rightarrow 3abc \geq 3ac + 3bc - 3c$.

$$\text{Suy ra } 5(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc + 9 \geq 5(a^3 + b^3 + c^3) + 3ac + 3bc - 3c + 9$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\begin{aligned} & 5(a^3 + b^3 + c^3) + 3ac + 3bc - 3c + 9 \geq 9(ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow & 5(a^3 + b^3 + c^3) + 9 \geq 9ab + 6bc + 6ca + 3c \end{aligned}$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$3c = 3\sqrt[3]{c^3 \cdot 1 \cdot 1} \leq c^3 + 1 + 1; \quad 6ca = 6\sqrt[3]{c^3 a^3 \cdot 1} \leq 2c^3 + 2a^3 + 2$$

$$6bc = 6\sqrt[3]{b^3 \cdot c^3 \cdot 1} \leq 2b^3 + 2c^3 + 2; \quad 9ab = 9\sqrt[3]{a^3 \cdot b^3 \cdot 1} \leq 3a^3 + 3b^3 + 3$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$5(a^3 + b^3 + c^3) + 9 \geq 9ab + 6bc + 6ca + 3c$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài toán 14. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$9abc + 1 \geq 4(ab + bc + ca)$$

Lời giải

Theo nguyên lý Dirichlet thì 2 trong 3 số $\left(a - \frac{1}{3}\right)$, $\left(b - \frac{1}{3}\right)$, $\left(c - \frac{1}{3}\right)$ cùng dấu, không mất tính tổng quát giả sử $\left(a - \frac{1}{3}\right)\left(b - \frac{1}{3}\right) \geq 0 \Rightarrow 9abc \geq 3ac + 3bc - c$.

$$\text{Suy ra } 1 + 9abc \geq 1 + 3ac + 3bc - c$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $1 + 3ac + 3bc - c \geq 4(ab + bc + ca)$

Thật vậy bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} & 1 \geq c + c(a + b) + 4ab \Leftrightarrow 1 \geq c + c(1 - c) + 4ab \\ \Leftrightarrow & (1 - c)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a = b = c = \frac{1}{3} \text{ hoặc } a = b = \frac{1}{2}; c = 0 \text{ và các hoán vị}$$

Nhận xét: Hoàn toàn tương tự ta có thể chứng minh bài toán: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = k$. Chứng minh rằng: $9abc + k^3 \geq 4k(ab + bc + ca)$

Bài toán 15. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)} \geq 1$$

Lời giải

Theo nguyên lý Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a-1), (b-1), (c-1)$ cùng dấu, không mất tính

tổng quát giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow a+b \leq 1+ab = \frac{c+1}{c}$.

Do đó ta được

$$(a+1)(b+1)(c+1) = (1+a+b+ab)(c+1) = 2(1+ab)(1+c) \leq \frac{2(c+1)^2}{c}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} &\geq \frac{1}{(1+ab)\left(1+\frac{a}{b}\right)} + \frac{1}{(1+ab)\left(1+\frac{b}{a}\right)} \\ &= \frac{b}{(1+ab)(a+b)} + \frac{a}{(1+ab)(a+b)} = \frac{1}{1+ab} = \frac{c}{c+1} \end{aligned}$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)} \\ \geq \frac{c}{c+1} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{c}{(c+1)^2} = \frac{c(c+1)+1+c}{(c+1)^2} = 1 \end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$

Bài toán 16. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{1}{a+b+c+1} \geq 1$$

Lời giải

Trước hết ta chứng minh $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{1}{1+ab}$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$(ab+1)\left((a+1)^2 + (b+1)^2\right) \geq (a+1)^2(b+1)^2 \Leftrightarrow ab(a-b)^2 + (ab-1)^2$$

Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh.

Mà ta có $\frac{1}{1+ab} = \frac{c}{1+c}$ nên ta có $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{c}{1+c}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{c}{1+c} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{1}{a+b+c+1} \geq 1$$

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a-1)$, $(b-1)$, $(c-1)$ cùng dấu, không mất tính

tổng quát giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow a+b \leq 1+ab = \frac{c+1}{c}$.

Khi đó ta được

$$\frac{c}{1+c} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{1}{a+b+c+1} \geq \frac{c}{1+c} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{1}{\frac{c+1}{c} + c + 1} = \frac{c(c+1)+1+c}{(c+1)^2} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 17. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+3}{(a+1)^2} + \frac{b+3}{(b+1)^2} + \frac{c+3}{(c+1)^2} \geq 3$$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh 2 bổ đề sau:

Bổ đề 1.
$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{2}{1+a+b+c} + 1$$

Bổ đề 2.
$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{a+b+c+1} \geq 1$$

+ Bổ đề 1: Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{3+ab+bc+ca+2(a+b+c)}{2+ab+bc+ca+a+b+c} \geq \frac{3+a+b+c}{1+a+b+c} \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 3$$

Đánh giá cuối cùng luôn đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy thì

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$$

Vậy bổ đề 1 được chứng minh.

+ Bổ đề 2: Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $(a-1)$, $(b-1)$, $(c-1)$ cùng dấu, không mất

tính tổng quát giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow \frac{c+1}{c} = ab+1 \geq a+b$.

Ta có
$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab} \Leftrightarrow (ab-1)^2 + (a-b)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Do đó ta được
$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab} = \frac{c}{c+1}$$

Suy ra

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{a+b+c+1} \geq \frac{c}{c+1} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{1}{\frac{c+1}{c} + c + 1} = 1$$

Vậy bổ đề 2 được chứng minh.

Trở lại bài toán thì bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+b} + \frac{2}{(a+1)^2} + \frac{2}{(b+1)^2} + \frac{2}{(b+1)^2} \geq 3$$

Mà theo bổ đề trên ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+b} + \frac{2}{(a+1)^2} + \frac{2}{(b+1)^2} + \frac{2}{(b+1)^2} \\ & \geq \frac{2}{(a+1)^2} + \frac{2}{(b+1)^2} + \frac{2}{(b+1)^2} + \frac{2}{a+b+c+1} + 1 \geq 2 = 1 = 3 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài toán 18. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2 + (b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{b^2 + (c+a)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2 + (a+b)^2} \geq \frac{3}{5}$$

Lời giải

Chú ý đến giả thiết ta viết lại bất đẳng thức thành

$$\frac{(1-2a)^2}{a^2 + (b+c)^2} + \frac{(1-2b)^2}{b^2 + (c+a)^2} + \frac{(1-2c)^2}{c^2 + (a+b)^2} \geq \frac{3}{5}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

$$\frac{(1-2b)^2}{b^2 + (c+a)^2} + \frac{(1-2c)^2}{c^2 + (a+b)^2} \geq \frac{(2-2b-2c)^2}{b^2 + c^2 + (1-a)^2 + (1-b)^2} = \frac{2a^2}{b^2 + c^2 + a}$$

Ta quy bài toán về chứng minh $\frac{2a^2}{b^2 + c^2 + a} + \frac{(1-2a)^2}{a^2 + (b+c)^2} \geq \frac{3}{5}$

Theo nguyên lí Dirichlet thì 2 trong 3 số $\left(a - \frac{1}{3}\right), \left(b - \frac{1}{3}\right), \left(c - \frac{1}{3}\right)$ cùng dấu, không mất

tính tổng quát giả sử $\left(b - \frac{1}{3}\right)\left(c - \frac{1}{3}\right) \geq 0 \Rightarrow b^2 + c^2 \leq \left(b + c - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}$.

$$\text{Do đó ta được } \frac{2a^2}{b^2 + c^2 + a} \geq \frac{2a^2}{\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{9} + a} = \frac{18a^2}{9a^2 - 3a + 5}$$

$$\text{Suy ra } \frac{2a^2}{b^2 + c^2 + a} + \frac{(1-2a)^2}{a^2 + (b+c)^2} \geq \frac{18a^2}{9a^2 - 3a + 5} + \frac{(1-2a)^2}{a^2 + (b+c)^2}$$

Để dàng chứng minh được

$$\frac{18a^2}{9a^2 - 3a + 5} + \frac{(1-2a)^2}{a^2 + (b+c)^2} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow (3a-1)^2 (17a^2 - 8a + 5) \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Qua một số bài toán trên, ta thấy rằng nguyên lí Dirichlet không những có ứng dụng trong việc giải toán rời rạc, các bài toán về số học, tổ hợp, ... mà còn rất có hiệu quả trong việc chứng minh một số

bài toán về bất đẳng thức, trong một số trường hợp cho ta lời giải vô cùng đẹp đẽ và trong sáng, góp phần trong việc nâng cao tư duy và tạo sự hứng thú cho các học sinh yêu thích môn toán. Hy vọng rằng, với suy nghĩ và những ví dụ trên sẽ góp phần bổ sung thêm kiến thức và kinh nghiệm trong việc chứng minh bất đẳng thức.

Chủ đề 8.

PHƯƠNG PHÁP HỆ SỐ BẤT ĐỊNH TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG ĐẲNG THỨC

Có bao nhiêu điều bí ẩn mà bạn chưa biết đến ?! Câu trả lời là rất rất nhiều và đôi khi bạn cảm thấy bức bối, khó chịu khi không thể tìm ra một lời giải thích thỏa đáng cho bí ẩn nào đó. Nhưng bạn hãy quan niệm rằng đằng sau bất kì một điều gì luôn hàm chứa một ý nghĩa nhất định. Và cũng không phải ngẫu nhiên mà sự lí giải lại được hình thành. Trong thế giới bất đẳng thức cũng vậy. Đôi khi bạn không thể hiểu được tại sao người ta lại có thể tìm ra một lời giải trông có vẻ “kì cục” như thế !!! Phải chăng là lần mò và may rủi lắm mới tìm ra được ?

Câu trả lời lại một lần nữa được nhắc lại là mỗi lời giải đều có sự giải thích của riêng bản thân nó. Việc tìm ra lời giải đó phải đi qua một quá trình lập luận, thử, sai và đúng. Trong bài viết nho nhỏ này chúng tôi muốn giới thiệu đến các bạn một kĩ thuật cơ bản nhưng không kém phần hiệu quả trong việc chứng minh một số dạng của bất đẳng thức. Nó không giúp ta giải quyết tất cả các bài toán mà chỉ giúp ta tìm ra những lời giải ngắn gọn và ấn tượng trong một lớp bài toán nào đó. Một số bài toán tuy dễ đối với phương pháp này nhưng lại là khó đối với kỹ thuật kia. Đây cũng là điều hiển nhiên và dễ hiểu.

1. Ví dụ mở đầu

Bài toán 1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{3} \geq 5$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2a^2}{3} + \frac{2b^2}{3} + \frac{2c^2}{3} \geq 5$$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau đây

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{7}{3} - \frac{2a}{3}$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{(a-1)^2(2a^2+6a+3)}{3a^2} \geq 0$$

Hiển nhiên đúng với a là số thực dương.

Áp dụng tương tự ta được $\frac{1}{b^2} + \frac{2b^2}{3} \geq \frac{7}{3} - \frac{2b}{3}$; $\frac{1}{c^2} + \frac{2c^2}{3} \geq \frac{7}{3} - \frac{2c}{3}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2a^2}{3} + \frac{2b^2}{3} + \frac{2c^2}{3} \geq 7 - \frac{2(a+b+c)}{3} = 5$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Chúng ta sẽ khởi đầu kỹ thuật này bằng việc đưa ra cách giải thích cho việc tìm ra bất đẳng thức phụ trên và nó cũng chính là cách giải thích cho các bài toán sau này của chúng ta.

Bài toán trên các biến trong cả hai vế và điều kiện đều không ràng buộc nhau điều này khiến ta nghĩ ngay sẽ tách theo từng biến để chứng minh được đơn giản hơn nếu có thể. Nhưng rõ ràng chỉ từng đó thôi là không đủ. Để ý đến dấu đẳng thức xảy ra nên ta nghĩ đến chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{(a-1)(a+1)(2a^2-3)}{3a^2} \geq 0$$

Tuy nhiên đánh giá trên không hoàn toàn đúng với a thực dương.

Đề ý là với cách làm trên ta chưa sử dụng điều kiện $a + b + c = 3$.

Như vậy ta sẽ không đi theo đường lối suy nghĩ đơn giản ban đầu nữa mà sẽ đi tìm hệ số để bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} + ma + n \quad (1)$$

Trong đó m và n là các hệ số chưa xác định.

Thiết lập tương tự với các biến b và c ta được

$$\frac{1}{b^2} + \frac{2b^2}{3} \geq \frac{5}{3} + mb + n; \quad \frac{1}{c^2} + \frac{2c^2}{3} \geq \frac{5}{3} + mc + n$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}{3} \geq 5 + m(a+b+c) + 3n = 5 + 3(m+n)$$

Như vậy ở đây 2 hệ số m và n phải thỏa mãn điều kiện $m + n = 0 \Leftrightarrow n = -m$. Thế vào (1) dẫn đến

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} + m(a-1) \quad (2)$$

Đến đây ta chỉ cần xác định hệ số duy nhất là m để bất đẳng thức (2) là đúng. Chú ý đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$ nên ta cần xác định m sao cho

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{5}{3} + m(a-1) \Leftrightarrow (a-1) \left(\frac{(a+1)(2a^2-3)}{3a^2} - m \right) \geq 0$$

Khi cho $a = 1$ thì ta có $\frac{(a+1)(2a^2-3)}{3a^2} = -\frac{2}{3}$ từ đó ta dự đoán rằng $m = -\frac{2}{3}$ để tạo thành đại

lượng bình phương $(a-1)^2$ trong biểu thức. Từ đó ta sẽ chứng minh bất đẳng thức phụ

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2a^2}{3} \geq \frac{7}{3} - \frac{2a}{3}$$

Bài toán 2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{5a^3 - b^3}{ab + 3a^2} + \frac{5b^3 - c^3}{bc + 3b^2} + \frac{5c^3 - a^3}{ca + 3c^2} \leq 3$$

Lời giải

Ta đi chứng minh bất đẳng thức $\frac{5a^3 - b^3}{ab + 3a^2} \leq 2a - b$

Thật vậy, dễ dàng chứng minh được $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$, ta biến đổi tương đương bất đẳng thức bên như sau

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 \geq ab(a+b) &\Leftrightarrow 5a^3 - b^3 \leq 6a^3 - ab(a+b) \\ &\Leftrightarrow 5a^3 - b^3 \leq a(6a^2 - ab - b^2) \Leftrightarrow 5a^3 - b^3 \leq a(2a-b)(3a+b) \\ &\Leftrightarrow \frac{5a^3 - b^3}{ab + 3a^2} \leq 2a - b \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{5b^3 - c^3}{bc + 3b^2} \leq 2b - c$; $\frac{5c^3 - a^3}{ca + 3c^2} \leq 2c - a$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{5a^3 - b^3}{ab + 3a^2} + \frac{5b^3 - c^3}{bc + 3b^2} + \frac{5c^3 - a^3}{ca + 3c^2} \leq a + b + c = 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét: Hoàn toàn tương tự như bài toán trên, ta đi tìm hệ số m, n sao cho bất đẳng thức

$$\frac{5a^3 - b^3}{ab + 3a^2} \leq ma + nb \text{ đúng, với } m + n = 1 \Leftrightarrow n = 1 - m.$$

Ta viết lại bất đẳng thức trên thành

$$\frac{\frac{5a^3}{b^3} - 1}{\frac{a}{b} + \frac{3a^2}{b^2}} \leq \frac{ma}{b} + 1 - m \Leftrightarrow \frac{5t^3 - 1}{t + 3t^2} \leq m(t - 1) + 1 \text{ với } t = \frac{a}{b}$$

Để ý đến đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$ tức là xảy ra tại $t = 1$, khi đó ta cần xác định m sao cho

$$\frac{5t^3 - 1}{t + 3t^2} \leq m(t - 1) + 1 \Leftrightarrow (t - 1) \left(\frac{5t^2 + 2t + 1}{t + 3t^2} - m \right) \leq 0$$

Cho $t = 1$ thì ta được $\frac{5t^2 + 2t + 1}{t + 3t^2} = 2$ nên ta chọn $m = 2$ và từ đó ta được $n = -1$. Khi này ta

$$\text{đi chứng minh bất đẳng thức } \frac{5a^3 - b^3}{ab + 3a^2} \leq 2a - b$$

Chắc chắn ngay khi đọc lời giải cho các bài toán này bạn có phần lúng túng và không hiểu tại sao lại có thể tìm ra bất đẳng thức phụ một cách “khó hiểu” như vậy. Phải chăng đó là dự đoán một cách may mắn. Hoặc cũng có người sẽ nghĩ bài toán trên được tạo ra từ chính bất đẳng thức phụ đó. Câu trả lời là hoàn toàn không phải. Tất cả đều đi theo một qui luật của nó. Ở các phần tiếp theo chúng tôi sẽ phân tích về một kỹ thuật phân tích giúp tìm ra các bất đẳng thức phụ và mở rộng vấn đề này theo chiều hướng khá mới mẻ. Kỹ thuật này có tên là **U.C.T**, là viết tắt của 3 chữ cái đầu của cụm từ tiếng Anh **Undefined Coefficient Technique** hay còn gọi là kỹ thuật hệ số bất định. Đây là một kỹ thuật cơ bản và là nền tảng quan trọng trên con đường tìm kiếm lời giải cho những bất đẳng thức khó.

2. Một số bài toán áp dụng phương pháp hệ số bất định

Có thể nói với phương pháp hệ số bất định ta có thể giải quyết được một lớp các bất đẳng thức mà ở đó các biến độc lập với nhau. Dưới đây là một số bài toán áp dụng phương pháp hệ số bất định.

Bài toán 1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + b + c} + \frac{1}{b^2 + c + a} + \frac{1}{c^2 + a + b} \leq 1$$

Lời giải

Ở đây ta cần tìm m để bất đẳng thức dưới là đúng

$$\frac{1}{a^2 + b + c} = \frac{1}{a^2 - a + 3} \leq \frac{1}{3} + m(a - 1) \Leftrightarrow -\frac{a(a - 1)}{3(a^2 - a + 3)} \leq m(a - 1)$$

Tương tự như trên ta dự đoán rằng với $m = -\frac{1}{9}$ thì bất đẳng thức phụ đúng. Thật vậy

$$\frac{1}{a^2 - a + 3} \leq \frac{4}{9} - \frac{a}{9} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(a-1)^2(3-a)}{3(a^2 - a + 3)} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(a-1)^2(b+c)}{3(a^2 - a + 3)}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{b^2 - b + 3} \leq \frac{4}{9} - \frac{b}{9}; \frac{1}{c^2 - c + 3} \leq \frac{4}{9} - \frac{c}{9}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^2 + b + c} + \frac{1}{b^2 + c + a} + \frac{1}{c^2 + a + b} \leq \frac{4}{3} - \frac{a+b+c}{9} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Bài toán 2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng

$$4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 5(a^2 + b^2 + c^2) \geq 27$$

Lời giải

Ta cần tìm hệ số m sao cho

$$\frac{4}{a} + 5a^2 \geq 9 + m(a^3 - 1) \Leftrightarrow \frac{(a-1)(5a^2 + 5a - 4)}{a} \geq m(a-1)(a^2 + a + 1)$$

Ta dễ dàng nhận ra đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Khi cho $a = 1$ thì ta có thể dự đoán rằng $m = 2$. Ta sẽ chứng minh rằng với $m = 2$ thì bất đẳng thức phụ trên là đúng. Thật vậy

$$\frac{4}{a} + 5a^2 \geq 7 + 2a^3 \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(-2a^2 + a + 4)}{a} \geq 0$$

Do $a \leq \sqrt[3]{3} \Rightarrow -2a^2 + a + 4 \geq 0$. Vậy bất đẳng thức phụ trên là đúng.

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{4}{b} + 5b^2 \geq 7 + 2b^3; \frac{4}{c} + 5c^2 \geq 7 + 2c^3$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 5(a^2 + b^2 + c^2) \geq 21 + 2(a^3 + b^3 + c^3) = 27$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài toán 3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{4(a+b+c)}{3} \geq 7$$

Lời giải

Ta cần tìm hệ số m sao cho

$$\frac{1}{a} + \frac{4a}{3} \geq m(a^2 - 1) + \frac{7}{3} \Leftrightarrow 3ma^3 - 4a^2 + (7 - 3m)a - 3 \leq 0$$

Dự đoán là đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$, khi đó ta tìm được $m = \frac{1}{6}$. Như vậy ta đi chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a} + \frac{4a}{3} \geq \frac{1}{6}(a^2 - 1) + \frac{7}{3} \Leftrightarrow (a - 1)^2(6 - a) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì từ $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ ta được $0 < a, b, c < \sqrt{3}$.

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{b} + \frac{4b}{3} \geq \frac{1}{6}(b^2 - 1) + \frac{7}{3}; \quad \frac{1}{c} + \frac{4c}{3} \geq \frac{1}{6}(c^2 - 1) + \frac{7}{3}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{4(a + b + c)}{3} \geq 7$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài toán 4. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$ và làm cho các biểu thức của bất đẳng thức luôn xác định. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2 + a - 1} + \sqrt{b^2 + b - 1} + \sqrt{c^2 + c - 1} \leq 3$$

Lời giải

Biểu thức P xác định khi và chỉ khi $a, b, c \geq \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại

$$a = b = c = 1.$$

Khi đó ta đi tìm m để bất đẳng thức sau đúng

$$\sqrt{a^2 + a - 1} \leq ma - \frac{1}{2}$$

Để ý đẳng thức xảy ra tại $a = 1$ khi đó ta tìm được $m = \frac{3}{2}$, tức là ta cần phải chứng minh được

$$\sqrt{a^2 + a - 1} \leq \frac{3a - 1}{2}$$

$$\text{Thật vậy ta có } \sqrt{a^2 + a - 1} = \sqrt{\frac{(3a - 1)^2 - 5(a - 1)^2}{4}} \leq \sqrt{\frac{(3a - 1)^2}{4}} = \frac{3a - 1}{2}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{b^2 + b - 1} \leq \frac{3b - 1}{2}; \quad \sqrt{c^2 + c - 1} \leq \frac{3c - 1}{2}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{a^2 + a - 1} + \sqrt{b^2 + b - 1} + \sqrt{c^2 + c - 1} \leq \frac{3(a + b + c) - 3}{2} = 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 - a + 3} + \frac{1}{b^2 - b + 3} + \frac{1}{c^2 - c + 3} \leq 1$$

Lời giải

Vì a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Do đó ta được $a, b, c \in (0; 3)$. Dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.
Ta cần tìm m để bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{1}{a^2 - a + 3} \leq ma + \frac{4}{9}$$

Để ý là đẳng thức xảy ra tại $a = 1$, khi đó ta tìm được $m = -\frac{1}{9}$

Khi đó ta đi chứng minh $\frac{1}{a^2 - a + 3} \leq -\frac{a}{9} + \frac{4}{9}$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^2 - a + 3} \leq \frac{4 - a}{9} \Leftrightarrow (4 - a)(a^2 - a + 3) \geq 9 \Leftrightarrow (a - 3)(a - 1)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì $a \in (0; 3)$.

Chứng minh tương tự ta được $\frac{1}{b^2 - b + 3} \leq \frac{4 - b}{9}$; $\frac{1}{c^2 - c + 3} \leq \frac{4 - c}{9}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^2 - a + 3} + \frac{1}{b^2 - b + 3} + \frac{1}{c^2 - c + 3} \leq \frac{12 - (a + b + c)}{9} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 6. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải

Từ giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, ta được

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} = \frac{a}{1 - a^2} + \frac{b}{1 - b^2} + \frac{c}{1 - c^2}$$

$$\text{Xét } \frac{a}{1 - a^2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{2a - 3\sqrt{3}a^2(1 - a^2)}{2(1 - a^2)} = \frac{a(\sqrt{3}a + 2)(\sqrt{3}a - 1)^2}{2(1 - a^2)} \geq 0$$

Từ đó suy ra $\frac{a}{1 - a^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$, chứng minh tương tự ta được

$$\frac{b}{1 - b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}b^2; \quad \frac{c}{1 - c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo về ta được

$$\frac{a}{1 - a^2} + \frac{b}{1 - b^2} + \frac{c}{1 - c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2)}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài toán 7. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Lời giải

Dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Ta có nhận xét, nếu có một trong ba số a, b, c thuộc khoảng $\left(0; \frac{1}{3}\right)$, chẳng hạn $0 < a < \frac{1}{3}$ thì ta có

$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} > 9 = (a + b + c)^2 > a^2 + b^2 + c^2$ nên bài toán được chứng minh, do vậy ta chỉ xét $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right]$.

Khi đó ta đi tìm hệ số m để bất đẳng thức sau đúng $\frac{1}{a^2} - a^2 \geq m(a - 1)$, Để ý là khi $a = 1$ thì đẳng thức luôn xảy ra với mọi m , do đó để chọn được m lấy giá trị của a càng gần 1 càng tốt và ta chọn m sao cho đẳng thức gần xảy ra, bằng cách đó ta chọn được $m = -4$ là giá trị tốt nhất.

Ta đi chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{a^2} - a^2 \geq -4a + 4$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{1}{a^2} - a^2 + 4a - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2 \left[2 - (a-1)^2 \right]}{a^2} \geq 0$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{1}{b^2} - b^2 \geq -4b + 4$; $\frac{1}{c^2} - c^2 \geq -4c + 4$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - (a^2 + b^2 + c^2) \geq -4(a + b + c) + 12 = 0$$

Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 8. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq 1$$

Lời giải

Ta chưa thể sử dụng phương pháp hệ số bất định cho bài toán này ngay được, ta cần phải biến đổi như thế nào đó để đưa bài toán đã cho về dạng các biến độc lập với nhau

Áp dụng bất đẳng thức $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$, khi đó hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq \frac{2}{8-(a^2+b^2)} + \frac{2}{8-(b^2+c^2)} + \frac{2}{8-(c^2+a^2)}$$

Tiếp theo đặt $x = (b^2 + c^2)^2$; $y = (c^2 + a^2)^2$; $z = (a^2 + b^2)^2$ thì ta được

$$x + y + z \leq 4(a^4 + b^4 + c^4) = 12$$

Bài toán quy về chứng minh $\frac{1}{8 - \sqrt{x}} + \frac{1}{8 - \sqrt{y}} + \frac{1}{8 - \sqrt{z}} \leq \frac{1}{2}$.

Đến đây ta chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{8 - \sqrt{x}} \leq \frac{1}{144}(x - 4) + \frac{1}{6}$. Thật vậy bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{x - 4}{6(\sqrt{x} + 2)(8 - \sqrt{x})} - \frac{1}{144}(x - 4) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 4)^2(\sqrt{x} - 4)}{144(\sqrt{x} + 2)^2(8 - \sqrt{x})} \leq 0$$

Vì $x + y + z \leq 12$ nên $x \in (0; 12)$ do đó bất đẳng thức trên hoàn toàn đúng.

Tương tự ta được $\frac{1}{8 - \sqrt{y}} \leq \frac{1}{144}(y - 4) + \frac{1}{6}$; $\frac{1}{8 - \sqrt{z}} \leq \frac{1}{144}(z - 4) + \frac{1}{6}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{8 - \sqrt{x}} + \frac{1}{8 - \sqrt{y}} + \frac{1}{8 - \sqrt{z}} \leq \frac{1}{144}(x + y + z - 12) + 3 \cdot \frac{1}{6} \leq \frac{1}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 4$ hay $a = b = c = 1$.

Bài toán 9. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} + \frac{1}{d^2 + 1} \geq 2$$

Lời giải

Ta sẽ xác định hệ số m để bất đẳng thức sau là đúng

$$\begin{aligned} \frac{2}{a^2 + 1} \geq 1 + m(a - 1) &\Leftrightarrow -\frac{(a - 1)(a + 1)}{a^2 + 1} \geq m(a - 1) \\ &\Leftrightarrow (a - 1)\left(-\frac{a + 1}{a^2 + 1} - m\right) \geq 0 \end{aligned}$$

Đề ý là đẳng thức xảy ra tại $a = 1$, khi ta tìm được $m = -1$.

Ta đi chứng minh bất đẳng thức sau đúng $\frac{2}{a^2 + 1} \geq 2 - a$

Thật vậy

$$\frac{2}{a^2 + 1} \geq 2 - a \Leftrightarrow \frac{a(a - 1)^2}{a^2 + 1} \geq 0$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{2}{b^2 + 1} \geq 2 - b; \frac{2}{c^2 + 1} \geq 2 - c; \frac{2}{d^2 + 1} \geq 2 - d$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} + \frac{1}{d^2+1} \geq 2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$.

Nhận xét: Ta có thể sử dụng kỹ thuật “Cauchy ngược dấu” để tìm ra bất đẳng thức phụ trên

$$\frac{1}{a^2+1} = 1 - \frac{a^2}{a^2+1} \geq 1 - \frac{a^2}{2a} = 1 - \frac{a}{2}$$

Bài toán 10. Cho bốn số dương a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng:

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{8}$$

Lời giải

Dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = d = \frac{1}{4}$

Ta cần tìm hệ số m sao cho bất đẳng thức sau đúng $6a^3 - a^2 \geq ma - \frac{1}{8}$

Để ý đẳng thức xảy ra tại $a = \frac{1}{4}$, ta chọn được $m = \frac{5}{8}$.

Khi đó ta cần chứng minh $6a^3 - a^2 \geq \frac{5}{8}a - \frac{1}{8}$. Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với

$$6a^3 - a^2 - \left(\frac{5}{8}a - \frac{1}{8}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}(4a-1)^2(3a+1) \geq 0$$

Bất đẳng thức trên luôn đúng do $a > 0$.

Hoàn toàn tương tự ta được

$$6b^3 - b^2 \geq \frac{5}{8}b - \frac{1}{8}; 6c^3 - c^2 \geq \frac{5}{8}c - \frac{1}{8}; 6d^3 - d^2 \geq \frac{5}{8}d - \frac{1}{8}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq \frac{1}{8}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài toán 11. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Chứng minh rằng:

$$2(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq 2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{2 + ab + ac + ad + bc + bd + dc}$$

Lời giải

Theo bài ra a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c + d)^2 = 2(2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c + d) = \sqrt{2(2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd)}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq 2 + \frac{3}{2}(a + b + c + d)$$

Ta cần xác định hệ số m để bất đẳng thức sau đúng

$$2a^3 \geq \frac{3a+1}{2} + m(a-1) \Leftrightarrow \frac{(2a+1)^2(a-1)}{2} \geq m(a-1)$$

Để dàng dự đoán được $m = \frac{9}{2}$. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức

$$2a^3 \geq \frac{3a+1}{2} + \frac{9(a-1)}{2}$$

Thật vậy

$$2a^3 \geq \frac{3a+1}{2} + \frac{9(a-1)}{2} \Leftrightarrow 2(a-1)^2(a+2) \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức trên đúng.

Hoàn toàn tương tự ta được

$$2b^3 \geq \frac{3b+1}{2} + \frac{9(b-1)}{2}; 2c^3 \geq \frac{3c+1}{2} + \frac{9(c-1)}{2}; 2d^3 \geq \frac{3d+1}{2} + \frac{9(d-1)}{2}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$2(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq 2 + \frac{3}{2}(a + b + c + d)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$

Bài toán 12. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2 + 3ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + 3bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + 3ca + a^2} \geq \frac{3}{5}$$

Lời giải

Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Ta đi tìm hệ số m, n sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a^3}{a^2 + 3ab + b^2} \geq ma + nb$$

Để ý đến đẳng thức xảy ra tại $a = b = 1$ ta tìm được $m = \frac{2}{5}; n = -\frac{1}{5}$

Khi đó ta đi chứng minh $\frac{a^3}{a^2 + 3ab + b^2} \geq \frac{2a-b}{5}$

Thật vậy, ta có biến đổi sau

$$\frac{a^3}{a^2 + 3ab + b^2} = \frac{a^3 + 3a^2b + ab^2 - (3a^2b + ab^2)}{a^2 + 3ab + b^2} = a - \frac{3a^2b + ab^2}{a^2 + 3ab + b^2}$$

Theo bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab$, do đó ta có

$$\frac{a^3}{a^2 + 3ab + b^2} = a - \frac{3a^2b + ab^2}{a^2 + 3ab + b^2} \geq a - \frac{ab(3a+b)}{5ab} = \frac{2a-b}{5}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{b^3}{b^2 + 3bc + c^2} \geq \frac{2b-c}{5}; \frac{c^3}{c^2 + 3ca + a^2} \geq \frac{2c-a}{5}$$

Từ các bất đẳng thức trên ta suy ra

$$\frac{a^3}{a^2 + 3ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + 3bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + 3ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{5} = \frac{3}{5}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 13. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} \geq 2$$

Lời giải

Ta có biến đổi biểu thức như sau

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} = \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2 + ab + b^2}$$

Để dàng chứng minh được $a^2 - ab + b^2 \geq \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$3(a^2 - ab + b^2) \geq a^2 + ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

Áp dụng bất đẳng thức vừa chứng minh trên ta được

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} = \frac{1}{3}(a + b)$$

Áp dụng tương tự kết hợp với bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{2}{3}(a + b + c) \geq 2\sqrt[3]{abc} = 2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

3. Kỹ thuật đổi biến và phương pháp hệ số bất định

Bây giờ chúng ta sẽ bước sang một khoảng không gian mới với lớp bất đẳng thức đối xứng ba biến và kỹ thuật đổi biến theo hướng chuẩn hóa kết hợp với phương pháp hệ số bất định.

Bài toán 1. Cho a, b, c là các số thực không dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Chia cả tử và mẫu của mỗi phân thức cho $a + b + c$.

Khi đó ta đặt $x = \frac{3a}{a + b + c}$; $y = \frac{3b}{a + b + c}$; $z = \frac{3c}{a + b + c}$ thì được $x + y + z = 3$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x}{y + z} + \frac{y}{z + x} + \frac{z}{x + y} \geq \frac{3}{2}$$

Bài toán trên tương đương với bài toán: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}$

Cách đổi biến như trên ta gọi là chuẩn hóa.

Bài toán quy về việc chứng minh

$$\frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{3}{2}$$

Ta cần tìm hệ số m để bất đẳng thức đúng

$$\frac{a}{3-a} \geq \frac{1}{2} + m(a-1) \Leftrightarrow \frac{3(a-1)}{2(3-a)} \geq m(a-1)$$

Dễ dàng dự đoán $m = \frac{3}{4}$. Ta chứng minh bất đẳng thức với m như vậy thì luôn đúng

$$\frac{a}{3-a} \geq \frac{3a-1}{4} \Leftrightarrow \frac{3(a-1)^2}{4(3-a)} \geq 0$$

Điều này hiển nhiên đúng.

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{b}{3-b} \geq \frac{3b-1}{4}; \frac{cb}{3-c} \geq \frac{3c-1}{4}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được $\frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài toán 2. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(a+c-b)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{2c^2+(b+a)^2} \geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

Lời giải

Tương tự như bài toán trên ta có thể chọn $a+b+c=3$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} + \frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3} + \frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3} \geq a^2+b^2+c^2$$

Ta cần xác định hệ số m để bất đẳng thức sau là đúng

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} \geq a^2 + m(a-1)$$

Ta lại có

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} - a^2 = -\frac{(a-1)(a+3)(a^2-4a+6)}{a^2-2a+3}$$

Từ đây dễ dàng dự đoán với $m = -6$ thì bất đẳng thức phụ trên là đúng. Thật vậy

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} \geq a^2 - 6(a-1) \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(6-a)a}{a^2-2a+3} \geq 0$$

Điều này hiển nhiên đúng do $a \in (0, 3)$.

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3} \geq b^2 - 6(b-1); \frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3} \geq c^2 - 6(c-1)$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} + \frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3} + \frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài toán 3. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2} + \frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2} + \frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2} \leq \frac{6}{5}$$

Lời giải

Tương tự như bài toán trên ta có thể chọn $a + b + c = 3$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a(3-a)}{9-6a+2a^2} + \frac{b(3-b)}{9-6b+2b^2} + \frac{c(3-c)}{9-6c+2c^2} \leq \frac{6}{5}$$

Tương tự như trên ta dễ dàng tìm ra bất đẳng thức phụ sau:

$$\frac{a(3-a)}{9-6a+2a^2} \leq \frac{21+9a}{25} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{(a-1)^2(18a+9)}{25(9-6a+2a^2)}$$

Tương tự ta được $\frac{b(3-b)}{9-6b+2b^2} \leq \frac{21+9b}{25}; \frac{c(3-c)}{9-6c+2c^2} \leq \frac{21+9c}{25}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a(3-a)}{9-6a+2a^2} + \frac{b(3-b)}{9-6b+2b^2} + \frac{c(3-c)}{9-6c+2c^2} \leq \frac{6}{5}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài toán 4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(ab)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)}$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a + b + c = 3$. Bài toán cần chứng minh quy về dạng sau

$$\frac{a}{(3-a)^2} + \frac{b}{(3-b)^2} + \frac{c}{(3-c)^2} \geq \frac{3}{4}$$

Dễ dàng dự đoán bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{a}{(3-a)^2} \geq \frac{2a-1}{4} \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(9-2a)}{4(3-a)^2} \geq 0$$

Điều này hiển nhiên đúng do $a \in [0; 3)$.

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{b}{(3-b)^2} \geq \frac{2b-1}{4}; \frac{c}{(3-c)^2} \geq \frac{2c-1}{4}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{(3-a)^2} + \frac{b}{(3-b)^2} + \frac{c}{(3-c)^2} \geq \frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài toán 5. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-3a)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(a+c-3b)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(a+b-3c)^2}{2c^2+(b+a)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a + b + c = 3$. Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(3-4a)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(3-4b)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(3-4c)^2}{2c^2+(3-c)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức phụ sau

$$\frac{(3-4a)^2}{2a^2+(3-a)^2} \geq \frac{8a-7}{6} \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2(39-8a)}{6(a^2-2a+3)} \geq 0$$

Điều này hiển nhiên đúng vì $0 \leq a \leq 3 \Rightarrow 39 - 8a \geq 39 - 24 = 15 > 0$.

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{(3-4b)^2}{2b^2+(3-b)^2} \geq \frac{8b-7}{6}; \quad \frac{(3-4c)^2}{2c^2+(3-c)^2} \geq \frac{8c-7}{6}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{(3-4a)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(3-4b)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(3-4c)^2}{2c^2+(3-c)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Sau một quá trình tìm hiểu và phân tích cụ thể các bài toán, chắc hẳn rằng các bạn cũng đã phần nào cảm nhận được nét đẹp của phương pháp hệ số bất định dù rằng thực ra đây là một kĩ thuật cực kì đơn giản và dễ hiểu. Chúng tôi không xem phương pháp hệ số bất định là một phương pháp chính thống mà đơn giản nó là một kĩ thuật cần biết và cần nắm vững khi bạn học bất đẳng thức. Nhiều người quan niệm rằng phương pháp hệ số bất định không có ý nghĩa gì nhưng theo bản thân chúng tôi nó nên được khái quát để sử dụng trong một số trường hợp. Phương pháp hệ số bất định là một bước đệm quan trọng và đôi khi mang nhiều ý nghĩa trên con đường đi tìm lời giải cho bài toán. Một kĩ thuật hay không nhất thiết nó là nó giải được tất cả các dạng toán mà là nó phải đưa ta đến những ý tưởng, đường đi sáng sủa, dễ nghĩ, dễ nhận thấy bằng mắt trực quan.

Chủ đề 9

ỨNG DỤNG CỦA MỘT HỆ QUẢ CỦA BẤT ĐẲNG THỨC SCHUR

Trong chương trình môn Toán ở bậc phổ thông thì bài tập chứng minh bất đẳng thức là một trong những loại bài tập khó. Cái khó của loại bài tập này là ở chỗ, mỗi bài nó có một cách tiếp cận riêng, cách giải riêng và độc đáo. Chứa đựng trong chúng là những kiến thức sâu rộng và những kĩ năng phức tạp, nó

đòi hỏi chúng ta cần phải có tư duy linh hoạt, kỹ năng thuần thục tới độ “linh cảm”. Mặc dù chúng ta đã biết rất nhiều phương pháp chứng minh bất đẳng thức như: Phương pháp biến đổi tương đương, phương pháp sử dụng các bất đẳng thức đã biết, phương pháp quy nạp, phương pháp đánh giá đại diện, phương pháp phản chứng...; cũng như đã có nhiều kỹ thuật để chứng minh bất đẳng thức, đặc biệt các kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Cauchy, Bunhiacopxki để chứng minh bất đẳng thức là rất phong phú. Trong khi đó nội dung bất đẳng thức ở trường phổ thông lại đóng vai trò quan trọng trong việc rèn luyện tư duy, khả năng linh hoạt và óc sáng tạo; đồng thời nó cũng giúp học sinh rèn luyện tính cần cù, tinh thần vượt khó. Hơn thế nữa, mỗi bất đẳng thức và cách chứng minh bất đẳng thức đó có một vẻ đẹp lộng lẫy và sức hấp dẫn kì lạ đối với mỗi người nghiên cứu chúng nên việc nghiên cứu chúng còn có tác dụng kích thích sự say mê trong học tập môn Toán cũng như các môn học khác.

Bên cạnh đó, sau khi giải xong một bài tập về bất đẳng thức, một câu hỏi thường được đặt ra với chúng ta là: Bất đẳng thức này từ đâu mà có? Bất đẳng thức này có thể ứng dụng để chứng minh được các bài toán nào? Để trả lời câu hỏi này thật không đơn giản chút nào.

Trước hết ta bắt đầu với bài toán: Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a) \leq abc$$

Bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức đối xứng ba biến và nó là một hệ quả của bất đẳng thức **Schur**. Có ba cách giải đều rất hiệu quả như sau

Không mất tính tổng quát, ta giả sử a là số lớn nhất trong ba số a, b, c .

Cách 1. Khi đó $a + b - c \geq 0$; $a + c - b \geq 0$. Nếu $b + c - a < 0$ thì bất đẳng thức đã cho đúng. Do đó ta chỉ còn xét cả ba đại lượng $a + b - c$; $a + c - b$; $b + c - a$ đều dương.

Theo bất đẳng thức Cauchy

$$\begin{aligned}(a + b - c)(a - b + c) &\leq \left(\frac{a + b - c + a - b + c}{2} \right)^2 = a^2 \\(a - b + c)(b + c - a) &\leq \left(\frac{a - b + c - a + b + c}{2} \right)^2 = c^2 \\(b + c - a)(a + b - c) &\leq \left(\frac{b + c - a + a + b - c}{2} \right)^2 = b^2\end{aligned}$$

Do cả hai vế của các bất đẳng thức trên đều dương, nên nhân vế với vế ta được:

$$\left[(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a) \right]^2 \leq (abc)^2$$

Hay ta được $(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a) \leq abc$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2. Ta có bất đẳng thức hiển nhiên $a^2 - (b - c)^2 \leq a^2$ hay

$$(a + b - c)(a - c + b) \leq a^2$$

Tương tự ta có thêm hai bất đẳng thức nữa

$$(b + c - a)(a + b - c) \leq b^2; (c + a - b)(b + c - a) \leq c^2$$

Do cả hai vế của các bất đẳng thức trên đều dương, nên nhân vế với vế ta được:

$$\left[(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a) \right]^2 \leq (abc)^2$$

Hay ta được $(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a) \leq abc$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 3. Biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử a là số lớn nhất trong ba số a, b, c . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & (a - b)^2(a + b - c) + c(a - c)(b - c) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh

Khá bất ngờ với cách giải thứ ba bởi vì khi biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta thu được một hệ quả khác của bất đẳng thức Schur, thông thường với bài toán trên ta thường sử dụng cách thứ nhất hoặc cách thứ hai. Một vấn đề được đặt ra ở đây là từ bất đẳng thức

$$(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a) \leq abc$$

Ta có thể ứng dụng để chứng minh được một lớp những bất đẳng thức nào?

1. Bất đẳng thức Schur và các hệ quả

a) Bất đẳng thức Schur: Cho a, b, c là các số thực không âm. Khi đó ta có

$$a(a - b)(a - c) + b(b - c)(b - a) + c(c - a)(c - b) \geq 0$$

b) Hệ quả: Cho a, b, c là các số thực không âm. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & + a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \\ & + abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \end{aligned}$$

2. Một số bài toán ứng dụng hệ quả của bất đẳng thức Schur

Với hai hệ quả trên ta sẽ ứng dụng để chứng minh được một lớp các bất đẳng thức đối xứng bậc ba, qua đó ta sẽ thấy được ứng dụng rộng lớn của bất đẳng thức Schur

Bài toán 1. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq (a + b + c)(ab + bc + ca)$$

Lời giải

Để ý đến đẳng thức

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) = a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) + 3abc$$

Khi đó bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)$$

Bất đẳng thức trên là hệ quả của bất đẳng thức Schur.

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Bài toán 2. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c)^3 + 9abc \geq 4(a + b + c)(ab + bc + ca)$$

Lời giải

Để ý đến đẳng thức $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$

Do đó ta được $(a + b + c)^3 + 9abc = a^3 + b^3 + c^3 + 9abc + 3(a + b)(b + c)(c + a)$

Theo hệ quả của bất đẳng thức Schur ta được

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 9abc + 3(a+b)(b+c)(c+a) \\ \geq a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 6abc + 3(a+b)(b+c)(c+a) \end{aligned}$$

Đề ý đến các đẳng thức

$$\begin{aligned} a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc &= (a+b+c)(ab+bc+ca) \\ (a+b)(b+c)(c+a) + abc &= (a+b+c)(ab+bc+ca) \end{aligned}$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 6abc + 3(a+b)(b+c)(c+a) \\ = 4(a+b+c)(ab+bc+ca) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } a^3 + b^3 + c^3 + 9abc + 3(a+b)(b+c)(c+a) \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\text{Hay } (a+b+c)^3 + 9abc \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Bài toán 3. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca)$$

Lời giải

$$\text{Vì } a, b, c \text{ là các số dương khi đó } a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca)$$

$$\text{Tương đương với } (a+b+c)^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 4(ab+bc+ca)$$

$$\text{Hay } (a+b+c)^3 + 9abc \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo bài toán 2.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài toán 4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} a(a+b)(a+c) + b(a+b)(b+c) + c(c+a)(b+c) + 4abc \\ \geq 2(a+b)(b+c)(a+c) \end{aligned}$$

Hay tương đương với

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 3abc &\geq a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 \\ \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc &\geq a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng là hệ quả của bất đẳng thức Schur

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài toán 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$4(ab+bc+ca) \leq 9abc + 1$$

Lời giải

Bất đẳng thức có các vế chưa đồng bậc, chú ý đến giả thiết $a + b + c = 1$ ta đồng bậc hóa bất đẳng thức thành

$$4(a + b + c)(ab + bc + ca) \leq 9abc + (a + b + c)^3$$

Đây chính là bất đẳng thức trong bài toán 2.

Bài toán 6. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$ab + bc + ca - 2abc \leq \frac{7}{27}$$

Lời giải

Để dàng chứng minh được $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc$

Hay $(1 - 2a)(1 - 2b)(1 - 2c) \leq abc$, khai triển ra ta được

$$\begin{aligned} 1 - 2(a + b + c) + 4(ab + bc + ca) - 8abc &\leq abc \\ \Leftrightarrow 4(ab + bc + ca) &\leq 1 + 9abc \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $ab + bc + ca \leq \frac{1 + 9abc}{4}$

Mặt khác, từ $a + b + c = 1$ và bất đẳng thức Cauchy ta được $abc \leq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

Do đó ta có $ab + bc + ca - 2abc \leq \frac{1 + 9abc}{4} - 2abc \leq \frac{7}{27}$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Nhận xét: Một lớp các bất đẳng thức tương tự

$$\begin{aligned} 7(ab + bc + ca) &\leq 9abc + 2 \\ 2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc &\geq a^2 + b^2 + c^2 \\ ab + bc + ca - abc &\leq \frac{8}{27} \\ 6(a^3 + b^3 + c^3) + 9abc &\geq 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 + 4abc &\geq \frac{13}{27} \\ 8(ab + bc + ca) &\leq 9abc + \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Bài toán 7. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \right) \geq 2(ab + bc + ca)$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}$ ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c}$$

Ta cần chỉ ra được $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca)$, bất đẳng thức này tương đương với

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b).$$

Bất đẳng thức trên là hệ quả của bất đẳng thức Schur. Như vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài toán 8. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2}{b+c} + \frac{b^2 + c^2}{c+a} + \frac{c^2 + a^2}{a+b} \leq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a+b+c}$$

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức như sau

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{b^2 + c^2}{b+c} + \frac{c^2 + a^2}{c+a} \leq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a+b+c} \\ \Leftrightarrow & 2(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{c(a^2 + b^2)}{a+b} + \frac{a(b^2 + c^2)}{b+c} + \frac{b(c^2 + a^2)}{c+a} \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \\ \Leftrightarrow & \frac{c[(a+b)^2 - 2ab]}{a+b} + \frac{a[(b+c)^2 - 2bc]}{b+c} + \frac{b[(c+a)^2 - 2ca]}{c+a} \leq a^2 + b^2 + c^2 \\ \Leftrightarrow & 2(ab + bc + ca) \leq a^2 + b^2 + c^2 + abc \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức dạng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$ ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c}$$

Ta cần chỉ ra được $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca)$, bất đẳng thức này tương đương với

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b).$$

Bất đẳng thức trên là hệ quả của bất đẳng thức Schur

Bài toán trên được chứng minh xong. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài toán 9. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3 + 1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{b^3 + 1}{c^3 + a^3 + 1} + \frac{c^3 + 1}{a^3 + b^3 + 1} \geq 2$$

Lời giải

Đặt $x = a^3; y = b^3; z = c^3 \Rightarrow xyz = 1$, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x+1}{y+z+1} + \frac{y+1}{z+x+1} + \frac{z+1}{x+y+1} \geq 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{x+1}{y+z+1} + \frac{y+1}{z+x+1} + \frac{z+1}{x+y+1} \\ &= \frac{(x+1)^2}{(x+1)(y+z+1)} + \frac{(y+1)^2}{(y+1)(z+x+1)} + \frac{(z+1)^2}{(z+1)(x+y+1)} \\ &\geq \frac{(x+y+z+3)^2}{2(xy+yz+zx) + 3(x+y+z) + 3} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $\frac{(x+y+z+3)^2}{2(xy+yz+zx) + 3(x+y+z) + 3} \geq 2$, bất đẳng thức này tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+zx) + 6(x+y+z) + 9 \\ \geq 4(xy+yz+zx) + 6(x+y+z) + 6 \end{aligned}$$

Hay $3 \geq 2(xy+yz+zx) - (x^2 + y^2 + z^2)$

Từ bất đẳng thức quen thuộc $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \leq xyz$

Khai triển và biến đổi tương đương ta được

$$(x+y+z)^3 + 9xyz \geq 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

Do đó ta được $4(xy+yz+zx) - (x+y+z)^2 \leq \frac{9xyz}{x+y+z} = \frac{9}{x+y+z}$

Hay $2(xy+yz+zx) - (x^2 + y^2 + z^2) \leq \frac{9}{x+y+z}$

Cuối cùng ta cần chỉ ra rằng $\frac{9}{x+y+z} \leq 3$ hay $x+y+z \geq 3$. Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo bất

đẳng thức Cauchy. Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Bài toán 10. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)^3 (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq 27a^2b^2c^2$$

Lời giải

Xét trường hợp $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) < 0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Xét trường hợp $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \geq 0$, khi đó dễ dàng chứng minh được

$$(a+b-c) \geq 0; (b+c-a) \geq 0; (c+a-b) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$27abc(a+b+c)^3 (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq 9^3 a^3 b^3 c^3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} 27abc(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \\ \leq [a(b+c-a) + b(c+a-b) + c(a+b-c)]^3 \end{aligned}$$

Hay $27abc(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq [2(ab+bc+ca) - (a^2 + b^2 + c^2)]^3$

Khi đó ta được

$$27abc(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b+c)^3 \leq \left[2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2) \right]^3 (a+b+c)^3$$

Như vậy ta cần chứng minh $(a+b+c) \left[2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2) \right] \leq 9abc$

Hay
$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca)$$

Khai triển và rút gọn ta được

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \\ \Leftrightarrow abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng với mọi a, b, c . Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài toán 11. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(1+ab)^2}{(1-ab)^2} + \frac{(1+bc)^2}{(1-bc)^2} + \frac{(1+ca)^2}{(1-ca)^2} \geq 12$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{(1+ab)^2}{(1-ab)^2} + \frac{(1+bc)^2}{(1-bc)^2} + \frac{(1+ca)^2}{(1-ca)^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{(1+ab)^2 (1+bc)^2 (1+ca)^2}{(1-ab)^2 (1-bc)^2 (1-ca)^2}}$$

Như vậy ta cần chứng minh $\frac{(1+ab)^2 (1+bc)^2 (1+ca)^2}{(1-ab)^2 (1-bc)^2 (1-ca)^2} \geq 64$ hay ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$(1+ab)(1+bc)(1+ca) \geq 8(1-ab)(1-bc)(1-ca).$$

Đặt $x = ab; y = bc; z = ca$, khi đó $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $(1+x)(1+y)(1+z) \geq 8(1-x)(1-y)(1-z)$, tương đương với bất đẳng thức sau $9xyz \geq 7(xy + yz + zx) - 2$

Ta dễ dàng chứng minh được $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9xyz}{x+y+z} \geq 2(xy + yz + zx)$.

Mà $x + y + z = 1$ nên ta suy ra được $9xyz \geq 4(xy + yz + zx) - 1$.

Vì $x + y + z = 1$ nên $3(xy + yz + zx) \leq 1$, do đó

$$4(xy + yz + zx) - 1 \geq 7(xy + yz + zx) - 2$$

Điều này dẫn tới $9xyz \geq 7(xy + yz + zx) - 2$.

Như vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

Bài toán 12. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(a + b + c)^2$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 8 \\ \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) + 6(ab + bc + ca)$$

Hay $a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + a^2 + b^2 + c^2 + 8 \geq 6(ab + bc + ca)$

Áp dụng bất đẳng thức Caychy ta được

$$a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + a^2 + b^2 + c^2 + 8 \\ = a^2b^2c^2 + 1 + 2[(a^2b^2 + 1) + (b^2c^2 + 1) + (c^2a^2 + 1)] + a^2 + b^2 + c^2 + 1 \\ \geq 2abc + 4(ab + bc + ca) + a^2 + b^2 + c^2 + 1$$

Phép chứng minh hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2abc + 4(ab + bc + ca) + a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 6(ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 2abc \geq 2(ab + bc + ca)$$

Dễ dàng chứng minh được

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a + b + c} \geq 2(ab + bc + ca)$$

Ta cần chỉ ra được $1 + 2abc \geq \frac{9abc}{a + b + c} \Leftrightarrow (1 + 2abc)(a + b + c) \geq 9abc$

Đánh giá cuối cùng luôn đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy thì

$$1 + 2abc = 1 + abc + abc \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}; a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 13. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 8 \geq 5(a + b + c)$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $a + b + c \leq \frac{(a + b + c)^2 + 9}{6}$

Bài toán quy về chứng minh

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 8 \geq \frac{5}{6}[(a + b + c)^2 + 9]$$

Hay $\frac{7}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + abc + \frac{1}{2} \geq \frac{5}{3}(ab + bc + ca)$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$abc + \frac{1}{2} = \frac{2abc + 1}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2} = \frac{9abc}{2 \cdot 3\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{9abc}{2(a + b + c)}$$

Do đó phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{7}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{9abc}{2(a + b + c)} \geq \frac{5}{3}(ab + bc + ca)$$

Hay $7(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3 \cdot 9abc}{a + b + c} \geq 10(ab + bc + ca)$

Theo một đánh giá quen thuộc thì $4(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4(ab + bc + ca)$ nên ta được

$$7(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3.9abc}{a+b+c} \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3.9abc}{a+b+c} + 4(ab + bc + ca)$$

Ta cần chỉ ra được

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3.9abc}{a+b+c} + 4(ab + bc + ca) \geq 10(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab + bc + ca)$$

Đánh giá cuối cùng đã được chứng minh.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài toán 14. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)^2 + \frac{14abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 4$$

Lời giải

Đặt $x = \frac{a}{b+c}$; $y = \frac{b}{c+a}$; $z = \frac{c}{a+b}$, khi đó ta được

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2 \Leftrightarrow xy + yz + zx + 2xyz = 1$$

Dễ dàng chứng minh được $x + y + z \geq \frac{3}{2}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(x + y + z)^2 + 14xyz \geq 4$$

Dễ ta chứng minh được

$$(x + y + z)^2 + \frac{9xyz}{x + y + z} \geq 4(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow (x + y + z)^2 + 14xyz \geq 14xyz + 4(xy + yz + zx) - \frac{9xyz}{x + y + z}$$

Từ $x + y + z \geq \frac{3}{2}$ suy ra $\frac{9xyz}{x + y + z} \leq 6xyz$, do đó ta được

$$14xyz + 4(xy + yz + zx) - \frac{9xyz}{x + y + z} \geq 4(xy + yz + zx) + 8xyz = 4$$

Do đó ta được $(x + y + z)^2 + 14xyz \geq 4$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài toán 15. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1 + 9bc + 4(b-c)^2} + \frac{b}{1 + 9ca + 4(c-a)^2} + \frac{c}{1 + 9ab + 4(a-b)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{1+9bc+4(b-c)^2} + \frac{b}{1+9ca+4(c-a)^2} + \frac{c}{1+9ab+4(a-b)^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)+27abc+4a(b-c)^2+4b(c-a)^2+4c(a-b)^2}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2(a+b+c)^2 \geq 1+27abc+4a(b-c)^2+4b(c-a)^2+4c(a-b)^2$$

Hay $1 \geq 4ab(a+b)+4bc(b+c)+4ca(c+a)+3abc$

Để ý đến giả thiết ta viết lại được bất đẳng thức trên thành

$$(a+b+c)^3 \geq 4ab(a+b)+4bc(b+c)+4ca(c+a)+3abc$$

Hay $a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

Biến đổi tương đương ta được $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

Bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức đúng và dễ dàng chứng minh được.

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=b=\frac{1}{2}; c=0$ và các hoán vị.

Chủ đề 10. ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BÀI TOÁN TÌM CỰC TRỊ

Trong việc chứng minh bất đẳng thức hay tìm cực trị của một biểu thức, vận dụng phương pháp dồn biến để khảo sát hàm số là một chủ đề rất được nhiều bạn học sinh tham gia các kỳ thi chọn HSG và kỳ thi TSDH, THPT – Quốc Gia quan tâm.

Để có thể dồn một biểu thức nhiều biến về một biến chúng ta có nhiều kỹ thuật, tuy nhiên trong nội dung của chủ đề chúng tôi chỉ giới thiệu một số kỹ thuật quan trọng, thường gặp và sắp xếp theo sự phổ biến của các kỹ thuật đó gồm:

- Vận dụng các bất đẳng thức kinh điển.
- Kết hợp kỹ thuật đổi biến số.
- Kết hợp kỹ thuật sắp thứ tự các biến.
- Phương pháp tiếp tuyến.
- Khảo sát hàm nhiều biến.
- Kết hợp với việc sử dụng bổ đề.
- Vận dụng kỹ thuật dồn biến cổ điển

1. Dồn biến nhờ vận dụng kỹ thuật sử dụng các bất đẳng thức kinh điển.

❖ **Bài toán 1.** Cho các số thực $a, b, c \in (0; 1) : abc = (1-a)(1-b)(1-c)$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{3}{4}$.

Phân tích. Khai triển đẳng thức ở giả thiết cho ta:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c - 1)^2 + 1 - 4abc$$

Để ý là : $abc \leq_{AM-GM} \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$. Từ đó ta quy việc giải bài toán bất đẳng thức

về bài toán khảo sát hàm số theo biến $t = a + b + c, t \in (0; 3)$.

Lời giải. Ta có $abc = 1 - (a + b + c) + ab + bc + ca - abc$

$$\Leftrightarrow 1 - (a + b + c) + ab + bc + ca = 2abc$$

$$\Leftrightarrow 1 - (a + b + c) + \frac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} = 2abc$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c - 1)^2 + 1 - 4abc \geq (a + b + c - 1)^2 + 1 - \frac{4}{27}(a + b + c)^3$$

Đặt $t = a + b + c \Rightarrow t \in (0; 3)$. Xét hàm số $F(t) = -\frac{4}{27}t^3 + t^2 - 2t + 2$

$$\text{Ta có } F'(t) = -\frac{4}{9}t^2 + 2t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t = 3 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta có: $\min F(t) = F\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{3}{4}$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

❖ **Bài toán 2.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xz + 2xy + yz = 4z^2$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{2y+z} + \frac{y}{2x+z} + \frac{3}{2} \left(\frac{z}{x+y+z} \right)^2$

Lời giải. Ta có

$$4z^2 - (x+y)z = 2xy \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{(x+y)^2}{2} \Rightarrow \left(\frac{x+y}{z}\right)^2 + 2\left(\frac{x+y}{z}\right) - 8 \geq 0 \Rightarrow \frac{x+y}{z} \geq 2$$

Lại có :

$$P \geq \frac{(x+y)^2}{(x+y)^2 + (x+y)z} + \frac{3}{2} \left(\frac{z}{x+y+z}\right)^2 = \frac{\left(\frac{x+y}{z}\right)}{\left(\frac{x+y}{z}\right) + 1} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\frac{x+y}{z} + 1}\right)^2$$

Đặt $\frac{x+y}{z} = t, t \geq 2$. Khảo sát hàm số $f(t) = \frac{t}{t+1} + \frac{3}{2(t+1)^2}, t \in [2; +\infty)$

Ta tìm được $\min_{[2; +\infty)} f(t) = f(2) = \frac{5}{6}$

Hay $\min P = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = y = z$.

❖ **Bài toán 3.** Cho các số thực không âm thỏa mãn $a+b \geq c^2$.
 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c}\right) - \frac{32c}{27(c+1)}$$

Lời giải.

Ta có $\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} - \frac{c}{c+1} = \frac{c(a+b-c^2) + ab(c+2)}{(a+c)(b+c)(c+1)} \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} \geq \frac{c}{c+1}$$

Do đó $P \geq \left(\frac{c}{c+1}\right)^4 - \frac{32}{27} \left(\frac{c}{c+1}\right)$. Xét hàm số $f(t) = t^4 - \frac{32}{27}t, t \geq 0$ có:

$$f'(t) = 4t^3 - \frac{32}{27} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

Lập bảng biến thiên ta có $f(t) \geq -\frac{16}{27}$

Do đó $\min P = -\frac{16}{27} \Leftrightarrow a=0, b=4, c=2$ hoặc $b=0, a=4, c=2$.

❖ **Bài toán 4.** Cho các số thực dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{32(abc)^2} - \frac{27}{(2a^2 + 2b^2 + c + 1)^3}$

Lời giải.

Ta có $P \stackrel{AM-GM}{\geq} \frac{1}{32(abc)^2} - \frac{27}{(4ab+c+1)^3} \stackrel{AM-GM}{\geq} \frac{1}{32(abc)^2} - \frac{1}{4abc}$

Đặt $t = abc, t > 0$. Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{32t^2} - \frac{1}{4t}, t \in (0; +\infty)$ có :

$$f'(t) = \frac{4t-1}{16t^3} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}.$$

Lập bảng biến thiên ta có $f(t) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

Hay $\min P = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\frac{1}{2} \\ c=1. \end{cases}$

❖ **Bài toán 5. (HSG Tỉnh Nghệ An – 2012)** Cho các số thực dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$$

Lời giải.

Ta có $a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \underset{AM-GM}{\leq} a + \frac{1}{2} \cdot \frac{a+4b}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{a+4b+16c}{3} = \frac{4}{3}(a+b+c)$

Suy ra $P \geq \frac{3}{2(a+b+c)} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$

Đặt $t = a+b+c, t > 0$

Xét hàm số $f(t) = \frac{3}{2t} - \frac{3}{\sqrt{t}}$ với $t > 0$ ta có $f'(t) = \frac{3}{2t^2} - \frac{3}{2t^2}$.

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2t^2} - \frac{3}{2t^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Lập bảng biến thiên ta có $\min_{t>0} f(t) = f(1) = -\frac{3}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{3}{2}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a=4b=16c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{16}{21} \\ b=\frac{4}{21} \\ c=\frac{1}{21} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (a, b, c) = \left(\frac{16}{21}, \frac{4}{21}, \frac{1}{21}\right).$$

❖ **Bài toán 6.** Cho các số thực x, y, z không âm và thỏa mãn điều kiện $x+3y+2z=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{2 + \frac{x^2 + 9y^2}{xy+1}} + 3z - z^2$$

Lời giải.

Ta có $\sqrt{2 + \frac{x^2 + 9y^2}{xy+1}} = \sqrt{\left(\frac{x^2 + 9y^2}{xy+1} + 6\right) - 4} = \sqrt{\frac{(x+3y)^2 + 6}{xy+1}} - 4$

$$\leq \sqrt{\frac{(x+3y)^2 + 6}{0+1}} - 4 = \sqrt{(x+3y)^2 + 2} \quad (\text{Do } xy \geq 0)$$

Lại do $x+3y=3-2z$, vậy nên :

$$P \leq \sqrt{(3-2z)^2 + 2} + 3z - z^2. \text{ Đặt } t = z^2 - 3z, t \geq -\frac{9}{4}.$$

Khảo sát hàm số $f(t) = \sqrt{4t+11} - t$ ta tìm được $\max_{\left[-\frac{9}{4}; +\infty\right)} f(t) = f\left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{15}{4}$

Hay $\max P = \frac{15}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+2z=3 \\ xy=0 \\ z^2-3z+\frac{7}{4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, y=\frac{\sqrt{2}}{3}, z=\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x=\sqrt{2}, y=0, z=\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

❖ **Bài toán 7. (Khối B năm 2014)** Cho các số thực a, b, c không âm và thỏa mãn điều kiện $(a+b)c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \frac{c}{2(a+b)}$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} \geq \frac{2(a+b)}{a+b+c} = \frac{2}{1+\frac{c}{a+b}}$.

Vậy $P \geq \frac{2}{1+\frac{c}{a+b}} + \frac{c}{2(a+b)}$,

Đặt $t = \frac{c}{a+b}, t > 0$. Xét hàm số $g(t) = \frac{2}{1+t} + \frac{1}{2}t$ với $t > 0$,

Khảo sát hàm số ta được GTNN của P bằng $\frac{3}{2}$ đạt được khi $a = 0, b = c, b > 0$.

❖ **Bài toán 8.** Cho các số thực a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2 + bc = b^2 + c^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{b}{a^2 + c^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} - \frac{3a^3}{(b+c)^6}$$

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - bc \Leftrightarrow a^2(b+c) = b^3 + c^3 \\ a = \sqrt{b^2 + c^2 - bc} = \sqrt{(b+c)^2 - 3bc} \geq \frac{b+c}{2} \end{cases}$

Nên $P = \frac{2a^2(b+c)}{(a^2+c^2)(a^2+b^2)} - \frac{3a^3}{(b+c)^6} \leq \frac{2a^2(b+c)}{(ab+ac)^2} - \frac{3a^3}{(b+c)^6} =$
 $= \frac{2}{b+c} - \frac{3a^3}{(b+c)^6} \leq \frac{2}{b+c} - \frac{3}{8(b+c)^3}$

Đặt $\frac{1}{b+c} = t, t > 0$. Khảo sát hàm số $f(t) = 2t - \frac{3}{8}t^3, t > 0$

Ta tìm được $\max_{(0;+\infty)} f(t) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{9}$

Hay $\max P = \frac{16}{9} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{3}{8}$.

❖ **Bài toán 9.** Cho các số thực x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z = 3xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{x^3 + y^3}{16z}$$

Lời giải.

Ta có $3xy = x^2 + y^2 + z \geq 2xy + z \Rightarrow xy \geq z$

Suy ra $\begin{cases} \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} \geq \frac{(x+y)^2}{2xy+z(x+y)} \geq \frac{(x+y)^2}{xy(2+x+y)} \geq \frac{4}{2+x+y} \\ \frac{x^3 + y^3}{16z} \geq \frac{xy(x+y)}{16z} \geq \frac{x+y}{16} \end{cases}$

Do đó $\Rightarrow P \geq \frac{4}{(x+y)+2} + \frac{x+y}{16}$

Đặt $t = x+y, t > 0$. Khảo sát hàm số $f(t) = \frac{4}{t+2} + \frac{t}{16}, t \in (0;+\infty)$

Ta được $\min_{(0;+\infty)} f(t) = f(6) = \frac{7}{8}$.

Hay $\min P = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 3 \\ z = 9 \end{cases}$

❖ **Bài toán 10.** Cho các số thực x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + z^2 = y^2 + xy + 3yz + zx$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{(2y+z)^2} - \frac{1}{xy(y+2z)}$$

Lời giải.

Ta có $x^2 + z^2 = y^2 + xy + 3yz + zx \Leftrightarrow (x+z)^2 = (x+y)(y+3z)$

$$\leq \left(\frac{x+y+y+3z}{2} \right)^2 = \frac{(x+2y+3z)^2}{4} \Rightarrow x+2y+3z \geq 2(x+z) \Rightarrow 2y+z \geq x$$

Do đó $\frac{x}{(2y+z)^2} \leq \frac{1}{2y+z}$. Lại có :

$$xy(y+2z) = \frac{1}{3}x \cdot (3y)(y+2z) \leq \frac{1}{3}x \cdot \left(\frac{3y+y+2z}{2} \right)^2 = \frac{1}{3}x(2y+z)^2 \leq \frac{1}{3}(2y+z)^3$$

$$\text{Nên } P \leq \frac{1}{2y+z} - \frac{3}{(2y+z)^3}$$

Đặt $2y+z=t, t>0$. Khảo sát hàm số $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{3}{t^3}, t \in (0; +\infty)$

Ta tìm được $\max_{(0;+\infty)} f(t) = f(3) = \frac{2}{9}$. Hay $\max P = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=z=1 \end{cases}$

❖ **Bài toán 11.** Cho các số thực x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = z^2 + 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2y^2}{2y+xz} + \frac{3x^3+3xy^2-2x^2y}{y(z+2)^2}$$

Lời giải. Ta có :

$$\begin{cases} 2y+xz \leq \frac{1}{2}(y^2+4+x^2+z^2) = x^2+y^2 \\ 3x^3+3xy^2-2x^2y \geq 3x(x^2+y^2)-x(x^2+y^2) = 2x(4+z^2) \geq x(2+z)^2 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó suy ra } P \geq \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{x}{y} = \frac{2}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1} + \frac{x}{y}$$

Đặt $t = \frac{x}{y}, t>0$. Khảo sát hàm số $f(t) = \frac{2}{t^2+1} + t, t>0$

Suy ra $\min_{(0;+\infty)} f(t) = f(1) = 2$. Hay $\min P = 2 \Leftrightarrow x=y=z=2$.

❖ **Bài toán 12.** Cho các số thực x, y, z thỏa mãn

$$\begin{cases} x+y \geq 0 \\ \sqrt{(x+y)^2+1} = \sqrt{10}z \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{xy(x+y)(2z+1)}{z^4}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $z>0$. Lại có $(x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{(x+y)^2}{4z^2} \geq \frac{xy}{z^2}$

Từ giả thiết $\sqrt{(x+y)^2+1} = \sqrt{10}z \Rightarrow (x+y)^2+1 = 10z^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+y}{z} \right)^2 = 10 - \frac{1}{z^2} \Rightarrow \frac{x+y}{z} = \sqrt{10 - \frac{1}{z^2}}$$

$$\text{Do đó } P = \frac{xy}{z^2} \cdot \frac{x+y}{z} \left(2 + \frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{10 - \frac{1}{z^2}}\right)^3 \left(2 + \frac{1}{z}\right)$$

Đặt $\frac{1}{z} = t > 0$. Xét hàm số $f(t) = (t+2)(10-t^2)\sqrt{10-t^2}, t > 0$

Ta có $f'(t) = -(2t^2 + 3t - 5)\sqrt{10-t^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Lập bảng biến thiên ta có $\underset{(0;+\infty)}{Max} f(t) = 81 \Leftrightarrow t = 1$

$$\text{Hay } MaxP = \frac{81}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x = y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

❖ **Bài toán 13.** Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a+c+2}{a^2+2bc+2(a+b)+1} - \frac{\sqrt{3}}{2(a+b)^2}.$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có $a^2 + (b+c)^2 = 2(bc+1)$

Áp dụng bất đẳng thức **AM-GM** ta có:

$$2(bc+1) = a^2 + (b+c)^2 \geq 2a(b+c) \Leftrightarrow bc+1 \geq ab+ac$$

$$\Leftrightarrow 2bc+1 \geq ab+bc+ca$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2bc + 2(a+b) + 1 \geq a^2 + ab + bc + ca + 2a + 2b$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2bc + 2(a+b) + 1 \geq (a+c+2)(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+c+2}{a^2+2bc+2(a+b)+1} \leq \frac{1}{a+b}$$

$$\text{Từ đó suy ra } P \leq \frac{1}{a+b} - \frac{\sqrt{3}}{2(a+b)^2}$$

Đặt $\frac{1}{a+b} = t > 0$, đồng thời

$$\frac{(a+b)^2}{2} \leq a^2 + b^2 = 2 - c^2 < 2 \Rightarrow a+b < 4 \Rightarrow t > \frac{1}{4}$$

Xét hàm số $f(t) = t - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2, t \in \left(\frac{1}{4}; +\infty\right) \Rightarrow f'(t) = 1 - \sqrt{3}t$

Lập bảng biến thiên suy ra $f(t) \leq f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$$\text{Hay } MaxP = \frac{\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow (a, b, c) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

❖ **Bài toán 14.** Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+2b+3c = 18abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{3}(a+2b+3c) + 2\sqrt[3]{2} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2b+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{a+3c}} \right).$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } a+2b+3c = 18abc = 3.a.(2b)(3c) \underset{AM-GM}{\leq} 3 \left(\frac{a+2b+3c}{3} \right)^3$$

$$\Rightarrow (a+2b+3c)^2 \geq 9 \Rightarrow a+2b+3c \geq 3.$$

$$\text{Lại có : } \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{2}{2b+1}} \stackrel{AM-GM}{\geq} \frac{6}{2b+5} \\ \sqrt[3]{\frac{2}{a+3c}} \stackrel{AM-GM}{\geq} \frac{6}{a+3c+4} \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{2}{2b+1}} + \sqrt[3]{\frac{2}{a+3c}} \geq \frac{24}{a+2b+3c+9}$$

$$\text{Do đó } P \geq \frac{1}{3}(a+2b+3c) + \frac{48}{a+2b+3c+9}$$

$$\text{Đặt } a+2b+3c = t, t \geq 3. \text{ Khảo sát hàm số } f(t) = \frac{1}{3}t + \frac{48}{t+9}, t \in [3; +\infty)$$

$$\text{Ta được } \min_{[3; +\infty)} f(t) = f(3) = 5$$

$$\text{Hay } \min P = 5 \Leftrightarrow a = 2b = 3c = 1.$$

❖ **Bài toán 15.** Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn

$$5(x^2 + y^2 + z^2) = 6(xy + yz + zx).$$

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức } P = \sqrt{2(x+y+z)} - (y^2 + z^2).$$

Lời giải.

$$\text{Từ } 5(x^2 + y^2 + z^2) = 6(xy + yz + zx) \Rightarrow 5(y^2 + z^2) - 6yz \geq (y+z)^2$$

$$\text{Suy ra } \frac{y+z}{5} \leq x \leq y+z. \text{ Do đó } P \leq 2\sqrt{y+z} - \frac{(y+z)^2}{2}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{y+z} = t, t \geq 0. \text{ Khảo sát hàm số } f(t) = 2t - \frac{t^4}{2}, t \geq 0$$

$$\text{Ta được } \max_{[0; +\infty)} f(t) = f(1) = \frac{3}{2}. \text{ Hay } \max P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

❖ **Bài toán 16.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1+xy}{1+y+z} + \frac{1+yz}{1+z+x} + \frac{1+xz}{1+x+y} - 2(x+y+z).$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \frac{1+xy}{1+y+z} + \frac{1+yz}{1+z+x} + \frac{1+xz}{1+x+y} \geq \\ & \geq \frac{(x+y)^2 + z^2 - xy}{1+y+z} + \frac{(y+z)^2 + x^2 - yz}{1+z+x} + \frac{(z+x)^2 + y^2 - zx}{1+x+y} \\ & \geq \frac{3(x+y)^2 + 4z^2}{4(1+y+z)} + \frac{3(y+z)^2 + 4x^2}{4(1+z+x)} + \frac{3(z+x)^2 + 4y^2}{4(1+x+y)} \\ & \geq \frac{3}{4} \left[\frac{4(x+y+z)^2}{2(x+y+z)+3} \right] + \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)+3} = \frac{4(x+y+z)^2}{2(x+y+z)+3} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{4(x+y+z)^2}{2(x+y+z)+3} - 2(x+y+z)$$

$$\text{Đặt } x+y+z = t, 0 < t \leq \sqrt{3}. \text{ Khảo sát hàm số } f(t) = \frac{4t^2}{2t+3} - 2t, t \in (0; \sqrt{3}]$$

$$\text{Ta tìm được } \min_{(0; \sqrt{3}]} f(t) = f(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} - 12$$

$$\text{Hay } \min P = 6\sqrt{3} - 12 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

❖ **Bài toán 17.** Cho các số thực $x, y, z \geq -1$ thỏa mãn $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + 4(xy + 1)} + \frac{y^2 - 1}{z^2 - 4x + 5}.$$

Lời giải. Ta có $x + y = z - 3$.

Đồng thời, do $x, y \geq -1 \Rightarrow (x + 1)(y + 1) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq -(x + y) - 1$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } x^2 + y^2 + 4(xy + 1) &= (x + y)^2 + 2xy + 4 \geq (x + y)^2 - 2(x + y) + 2 = \\ &= (3 - z)^2 - 2(3 - z) + 2 = z^2 - 4z + 5 \end{aligned}$$

$$\text{Lại có } x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \leq (x + y)^2 + 2(x + y) + 2 = z^2 - 18z + 17$$

$$\text{Từ các kết quả trên suy ra } P \leq \frac{z^2 - 8z + 16}{z^2 - 4z + 5}.$$

$$\text{Khảo sát hàm số } f(z) = \frac{z^2 - 8z + 16}{z^2 - 4z + 5}, z \in [-1; +\infty)$$

$$\text{Ta tìm được } \max_{[-1; +\infty)} f(z) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 5.$$

$$\text{Hay } \max P = 5 \Leftrightarrow (x; y; z) = \left\{ \left(-1; \frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right), \left(\frac{5}{2}; -1; \frac{3}{2}\right) \right\}$$

❖ **Bài toán 18.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 = y^2 + z$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{(1 + 2xy)z}{(x^2 + y^2)(1 + z^2)} + \frac{3z^2}{(1 + z^2)\sqrt{1 + z^2}}.$$

Lời giải.

Từ điều kiện giả thiết ta có $(1 + 2xy)z = z + 1 + 2xyz = x^2 - y^2 + 2xyz$

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S ta có:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 2xyz &= \sqrt{(x^2 - y^2 + 2xyz)^2} \\ &\leq \sqrt{\left((x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2\right)(1 + z^2)} = (x^2 + y^2)\sqrt{1 + z^2} \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó : } P \leq \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} + \frac{3z^2}{(1 + z^2)\sqrt{1 + z^2}}$$

$$\text{Xét hàm số } f(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} + \frac{3z^2}{(1 + z^2)\sqrt{1 + z^2}}, z > 0$$

$$\text{Ta có : } f'(z) = \frac{z\sqrt{1 + z^2}(5 - 4z^2)}{(1 + z^2)^3}$$

$$\text{Nên : } f'(z) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5} - 2z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Lập bảng biến thiên cho ta có giá trị lớn nhất của P là $\frac{16}{9}$.

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{2xy}{z} \\ x^2 - y^2 = z \\ z = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt[4]{125}}{2\sqrt{2}} \\ y = \frac{\sqrt[4]{5}}{2\sqrt{2}} \\ z = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

❖ **Bài toán 19.** Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 6.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{(x+y+z)^2}{z+6} - \frac{1}{24}(xy+yz+zx)^2.$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S ta có:

$$2(x+y) + (y+z) + (z+x) \leq \sqrt{(2^2+1+1)[(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2]} = 6$$

$$\Leftrightarrow 3x+3y+2z \leq 6 \Leftrightarrow 3(x+y+z) \leq 6+z \Leftrightarrow \frac{1}{6+z} \leq \frac{1}{3(x+y+z)}$$

Từ điều kiện ban đầu, khai triển ta lại có: $(x+y+z)^2 - 3 = xy + yz + zx$

$$\text{Từ đó cho ta } P \leq \frac{x+y+z}{3} - \frac{1}{24}[(x+y+z)^2 - 3]^2$$

$$\text{Lại có } xy + yz + zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3} \Rightarrow (x+y+z)^2 - 3 \leq \frac{(x+y+z)^2}{3}$$

$$\Rightarrow 0 \leq x+y+z \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Đặt } t = x+y+z, t \in \left[0; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right].$$

$$\text{Khảo sát hàm số } f(t) = \frac{t}{3} - \frac{(t^2-3)^2}{24}, t \in \left[0; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\text{Ta được } \max_{\left[0; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right]} f(t) = f(2) = \frac{5}{8}. \text{ Hay } \max P = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ z=0. \end{cases}$$

❖ **Bài toán 20.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$x+y+1=z.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{x+yz} + \frac{y}{y+zx} + \frac{z^2+2}{z+xy}.$

Lời giải. Ta có: $x+y+1=z \Leftrightarrow z+xy=(x+1)(y+1)$ nên

$$\begin{aligned} P &= \frac{x}{(z-y-1)+yz} + \frac{y}{(z-x-1)+zx} + \frac{z^2+2}{(x+1)(y+1)} \\ &= \frac{x}{(y+1)(z-1)} + \frac{y}{(x+1)(z-1)} + \frac{z^2+2}{(x+1)(y+1)} = \\ &= \frac{x}{(y+1)(x+y)} + \frac{y}{(x+1)(x+y)} + \frac{z^2+2}{(x+1)(y+1)} = \\ &= \frac{x^2+y^2+x+y}{(x+y)(x+1)(y+1)} + \frac{z^2+2}{(x+1)(y+1)} \geq \frac{\frac{(x+y)^2}{4}+x+y}{(x+y)\frac{(x+y+2)^2}{4}} + \frac{z^2+2}{\frac{(x+y+2)^2}{4}} \\ &= \frac{2}{z+1} + \frac{4(z^2+2)}{(z+1)^2}. \end{aligned}$$

Khảo sát hàm số $f(z) = \frac{2}{z+1} + \frac{4(z^2+2)}{(z+1)^2}, z > 0$ cho ta

$$\min_{(0;+\infty)} f(z) = f(3) = \frac{13}{14}. \text{ Hay } \min P = \frac{13}{14} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ z=3 \end{cases}$$

❖ **Bài toán 21.** Cho các số thực a, b, c thỏa mãn

$$\begin{cases} a \geq b \geq c \geq 0 \\ ab + bc + ca = 3 \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a\sqrt{(a+2b)(a+2c)} + c\sqrt{(c+2a)(c+2b)} + \frac{4b}{a+c}.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } (a+2b)(a+2c) = a^2 + 2ab + 2ac + 4bc = a^2 + 2bc + 6 \quad (1)$$

$$\text{và } (a-b)(a-c) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - ab - ac + bc \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2bc \geq ab + bc + ca = 3 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $(a+2b)(a+2c) \geq 9$, tương tự $(c+2a)(c+2b) \geq 9$

$$\text{Do đó } P \geq 3(a+c) + \frac{4b}{a+c} = 3(a+c) + \frac{4\left(\frac{3-ac}{a+c}\right)}{a+c} \geq 3(a+c) + \frac{12-(a+c)^2}{(a+c)^2} = 3(a+c) + \frac{12}{(a+c)^2} - 1.$$

Đặt $a+c=t, t>0$. Khảo sát hàm số $f(t) = 3t + \frac{12}{t^2} - 1, t>0$ ta được

$$\min_{(0;+\infty)} f(t) = f(2) = 8. \text{ Hay } \min P = 8 \Leftrightarrow a=b=c=1.$$

❖ **Bài toán 22.** Cho $x, y, z \in [1;3]: x+y+2z=6$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = x^3 + y^3 + 5z^3$.

Lời giải. Từ giả thiết ta có : $4xy = 4(3-z)^2 - (x-y)^2 \leq 4(3-z)^2 \Rightarrow xy \leq (3-z)^2$

$$\text{Ta lại có : } (x-1)(y-1) \geq 0 \Rightarrow xy \geq x+y-1 = 5-2z \Rightarrow 5-2z \leq xy \leq (3-z)^2.$$

Mặt khác ta có : $2z = 6 - x - y \leq 4 \Rightarrow z \in [1;2]$.

$$\text{Ta có : } P = (x+y)\left[(x+y)^2 - 3xy\right] + 5z^3 = 2(3-z)\left[4(3-z)^2 - 3xy\right] + 5z^3.$$

$$\text{Vì } 5-2z \leq xy \leq (3-z)^2$$

$$\Rightarrow 2(3-z)^3 + 5z^3 \leq P \leq 2(3-z)\left[4(3-z)^2 + 6z - 15\right] + 5z^3, (z \in [1;2])$$

$$\Leftrightarrow 2(3-z)^3 + 5z^3 \leq P \leq -3z^3 + 60z^2 - 150z + 126, (z \in [1;2]).$$

$$\text{Đặt } f(z) = 2(3-z)^3 + 5z^3, g(z) = -3z^3 + 60z^2 - 150z + 126.$$

Xét hàm số $f(z), g(z)$ trên miền $z \in [1;2]$

Đạo hàm và lập bảng biến thiên hàm số $f(z), g(z)$ ta có :

$$\text{Min } f(z) = 210 - 60\sqrt{10} \text{ tại } z = -2 + \sqrt{10} \Rightarrow x = y = 5 - \sqrt{10}.$$

$$\text{Max } g(z) = 42 \text{ tại } z = 2 \Rightarrow x = y = 1.$$

$$\text{Vậy } \text{Min } P = 210 - 60\sqrt{10} \text{ khi } x = y = 5 - \sqrt{10}, z = -2 + \sqrt{10}.$$

$$\text{Max } P = 42 \text{ khi } x = y = 1, z = 2.$$

❖ **Bài toán 23.** Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $2a^2 + 3(b^2 + c^2) = 4ab + 3ac$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(a^2+1)c^2 + b^2 + 4}{25bc} + \frac{2b^2 + c^2}{ab+2ac}.$$

$$\text{Từ giả thiết ta có } 4ab + 3ac = 2a^2 + 3(b^2 + c^2) = (a^2 + 4b^2) + (a^2 + 4c^2) - (b^2 + c^2)$$

$$\geq 4ab + 4ac - (b^2 + c^2) \Rightarrow b^2 + c^2 \geq ac \quad (1)$$

$$\text{Lại có } (a-b-c)^2 \geq 0 \Rightarrow 2ab + 2ac \leq a^2 + 2b(b+c) + c^2 - b^2$$

$$\leq a^2 + \frac{4b^2 + (b+c)^2}{2} + c^2 - b^2$$

$$= \frac{2a^2 + 3(b^2 + c^2)}{2} + bc = \frac{4ab + 3ac}{2} + bc \Rightarrow ac \leq 2bc \Rightarrow 0 < \frac{a}{b} \leq 2 \quad (2)$$

Lúc đó $P = \frac{(a^2c^2 + 4) + (b^2 + c^2)}{25bc} + \frac{2b^2 + c^2}{ab + 2ac}$

$$\geq \frac{2\sqrt{4a^2c^2} + ac}{25bc} + \frac{b}{a} \left[1 + \frac{(b-c)^2}{b^2 + 2bc} \right] = \frac{1}{5} \cdot \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t}{5} + \frac{1}{t}$, $t \in (0; 2]$ có $f'(t) = \frac{1}{5} - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 5}{5} < 0, \forall 0 < t \leq 2$.

Suy ra $f(t) \geq f(2) = \frac{9}{10}$. Hay $\text{Min}P = \frac{9}{10} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = c = 1. \end{cases}$

Bài toán 24. Cho các số thực thay đổi x, y, z thỏa mãn

$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{16}{25}xy = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3}{5}(x^2 + y^2) + \frac{5}{6}z^2 + xy - \sqrt{10(xy + yz + zx)}$$

Lời giải. Áp dụng BĐT Cauchy-Schwazr ta có :

$$x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \Rightarrow P \geq \frac{3}{10}(x+y)^2 + \frac{5}{6}z^2 + xy - \sqrt{10(xy + yz + zx)} \geq$$

$$\geq |(x+y)z| + xy - \sqrt{10(xy + yz + zx)}$$

$$\geq xy + yz + zx - \sqrt{10(xy + yz + zx)}.$$

Đặt $t = \sqrt{xy + yz + zx}$, $t \geq 0$

Xét hàm số $F(t) = t^2 - t\sqrt{10}$, $t \geq 0$

Ta có : $F'(t) = 2t - \sqrt{10} = 0 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Lập bảng biến thiên ta có : $\text{Min}F = F\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = -\frac{5}{2}$.

Vậy $\text{Min}P = -\frac{5}{2}$ khi $x = y = \frac{5}{\sqrt{34}}, z = \frac{6}{\sqrt{34}}$ hoặc $x = y = -\frac{5}{\sqrt{34}}, z = -\frac{6}{\sqrt{34}}$.

Bài toán 25. Cho các số thực x, y, z thuộc đoạn $[1; 3]$. Tìm

giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{25(y+z)^2}{12x^2 + 2012(xy + yz + zx)}$.

Lời giải.

Ta biến đổi biểu thức đã cho trở thành : $T = \frac{25(y+z)^2}{12x^2 + 2012x(y+z) + 2012yz}$

Mặt khác với mọi số thực $y, z \in [1; 3]$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có : $4yz \leq (y+z)^2$.

Do đó ta có : $T \geq \frac{25(y+z)^2}{12x^2 + 2012x(y+z) + 503(y+z)^2} = N$

Vì $y, z \in [1; 3] \Rightarrow y+z \neq 0$ nên ta chia cả tử và mẫu của N cho $y+z$ ta được :

$$N = \frac{25}{12 \cdot \left(\frac{x}{y+z}\right)^2 + 2012 \cdot \left(\frac{x}{y+z}\right) + 503}$$

Đặt $t = \frac{x}{y+z}, t \in \left[\frac{1}{6}; \frac{3}{2}\right]$. Lúc đó ta xét hàm số: $f(t) = \frac{25}{12t^2 + 2012t + 503}, t \in \left[\frac{1}{6}; \frac{3}{2}\right]$.

Ta có: $f'(t) = -\frac{25 \cdot (24t + 2012)}{(12t^2 + 2012t + 503)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 24t + 2012 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{503}{6}$ (loại).

Lập bảng biến thiên ta nhận thấy rằng với $t \in \left[\frac{1}{6}; \frac{3}{2}\right]$, ta có $f(t)$ đồng biến.

Do đó ta có ngay được $f(t) \geq f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{75}{2516}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $t = \frac{1}{6} \Leftrightarrow (x, y, z) = (1, 3, 3)$.

Vậy ta có giá trị nhỏ nhất của $T = \frac{75}{2516}$ đạt được khi $(x, y, z) = (1, 3, 3)$.

❖ **Bài toán 26.** Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ac \geq 2b$ và $(ac+b)(ab+c) - a^2c^2 = 4b^2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left(1 + \frac{b}{ac}\right)^2 + \left(\frac{ac+b}{ac-b}\right)^2$.

Lời giải. Ta có

$$(ac+b)(ab+c) - a^2c^2 = 4b^2 \Leftrightarrow \left(a + \frac{b}{c}\right)\left(\frac{ab}{c} + 1\right) = a^2 + 4\frac{b^2}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(a + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{ab}\right) = \frac{ac}{b} + 4\frac{b}{ac}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ac}{b} + 4\frac{b}{ac} = \left(a + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{1}{a}\right) \geq 2\left(\sqrt{\frac{ac}{b}} + \sqrt{\frac{b}{ac}}\right) \quad (*)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{ac}{b}} \left(t \geq \sqrt{2}\right)$, từ (*) ta có

$$t^2 + \frac{4}{t^2} \geq 2\left(t + \frac{1}{t}\right) \Leftrightarrow t^4 - 2t^3 - 2t + 4 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^3-2) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \left(t \geq \sqrt{2}\right) \text{ hay } \frac{ac}{b} \geq 4$$

$$\text{Lại có } P = \left(1 + \frac{b}{ac}\right)^2 + \left(\frac{ac+b}{ac-b}\right)^2 = \left(1 + \frac{b}{ac}\right)^2 + \left(\frac{1 + \frac{b}{ac}}{1 - \frac{b}{ac}}\right)^2$$

Xét hàm số $f(u) = \left(1 + u\right)^2 + \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2, u = \frac{b}{ac} \leq \frac{1}{4}$, ta có

$$f'(u) = 2(1+u) + \frac{4(1+u)}{(1-u)^3} \geq 0, \forall u \leq \frac{1}{4} \Rightarrow f(u) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{625}{144}.$$

$$\text{Vậy } \text{Max} P = \frac{625}{144} \Leftrightarrow \begin{cases} ac = 4b \\ ab = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 2b \end{cases}.$$

❖ **Bài toán 27.** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $x + y + 1 = z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3}{x+yz} + \frac{y^3}{y+zx} + \frac{z^3}{z+xy} + \frac{14}{(z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)}}.$$

Lời giải.

$$\text{Biểu thức } P \text{ được viết lại như sau: } P = \frac{x^4}{x^2+xyz} + \frac{y^4}{y^2+xyz} + \frac{z^3}{(x+1)(y+1)} + \frac{14}{(z+1)\sqrt{(x+1)(y+1)}}$$

$$\text{Áp dụng BĐT Cauchy ta có: } (x+1)(y+1) \leq \frac{(x+y+2)^2}{4} = \frac{(z+1)^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2 + xyz} + \frac{4z^3}{(z+1)^2} + \frac{28}{(z+1)^2} \geq \frac{x^2 + y^2}{z+1} + \frac{4z^3 + 28}{(z+1)^2} \geq \frac{(x+y)^2}{2(z+1)} + \frac{4z^3 + 28}{(z+1)^2}$$

$$= \frac{(z-1)^2}{2(z+1)} + \frac{4z^3 + 28}{(z+1)^2} = \frac{9z^3 - z^2 - z + 57}{2(z+1)^2}, (z > 1)$$

Xét hàm số $P(z) = \frac{9z^3 - z^2 - z + 57}{2(z+1)^2}, (z > 1)$.

Ta có : $P'(z) = \frac{(3z-5)(3z^2 + 14z + 23)}{2(z+1)^3} = 0 \Rightarrow z = \frac{5}{3}$.

Lập bảng biến thiên ta có : $\min P(z) = P\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{53}{8}$.

Vậy $\min P = \frac{53}{8} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{3}, z = \frac{5}{3}$.

❖ **Bài toán 28.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + 8y^2 + 9z^2 \leq 4xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4x + 2y^2 + z^3}{\sqrt{6(36y - 11\sqrt{2z}) - 11x}}$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có : $(x - 3z)^2 + 8y^2 + 6zx \leq 4xyz$

$$\Rightarrow 0 < 8y^2 \leq 2zx(2y - 3) - (x - 3z)^2 \leq 2zx(2y - 3) \Rightarrow y > \frac{3}{2}$$

Ta lại có : $4zx \geq \frac{x^2}{y} + 4y + \frac{9z^2}{y} + 4y \geq 4x + 12z \geq 8\sqrt{3zx} \Rightarrow zx \geq 12$.

Ta có : $P = \frac{4x + 2y^2 + z^3 + 8 + 8 - 16}{\sqrt{216y - 11(3\sqrt{2z} + 3\sqrt{2z} + x)}} \geq \frac{4x + 12z + 2y^2 - 16}{\sqrt{216y - 33\sqrt{18zx}}}$

$$\geq \frac{2y^2 + 8\sqrt{3zx} - 16}{\sqrt{216y - 198}} \geq \frac{2y^2 + 32}{\sqrt{216y - 198}}.$$

Xét hàm số $F(y) = \frac{2y^2 + 32}{\sqrt{216y - 198}}, \left(y > \frac{3}{2}\right)$.

Ta có : $F'(y) = \frac{8(81y^2 - 99y - 432)}{(216y - 198)\sqrt{216y - 198}} = 0 \Rightarrow y = 3$.

Lập bảng biến thiên ta có : $\min F(y) = F(3) = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

Vậy $\min P = \frac{5\sqrt{2}}{3}$ khi $x = 6, y = 3, z = 2$.

Bài toán 29. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (x + y + z)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} - \frac{1}{xy + yz + zx} \right)$$

Lời giải. Từ giả thiết ta có : $(x + y + z)^2 = 1 + 2(xy + yz + zx)$

Ta có : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)[x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx]$

$$= 3xyz + (x + y + z)[1 - (xy + yz + zx)]$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} = 3 + \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) [1 - (xy + yz + zx)]$$

$$\geq 3 + \frac{9}{xy + yz + zx} [1 - (xy + yz + zx)].$$

Đặt $t = xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 0 < t \leq 1$.

$$\Rightarrow P \geq 1 + 2t + \frac{1}{2} \left[3 + \frac{9}{t} (1-t) - \frac{1}{t} \right] = -2 + 2t + \frac{4}{t}.$$

Xét hàm số $F(t) = 2t - 2 + \frac{4}{t}$, $t \in (0; 1]$.

Ta có : $F'(t) = 2 - \frac{4}{t^2} = 0 \Rightarrow 2t^2 - 4 = 0 \Rightarrow t = \pm\sqrt{2}$.

Lập bảng biến thiên ta có : $\min F(t) = F(1) = 4$

Vậy $\min P = 4$ khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài toán 30. [THPT Quốc Gia 2015] . Cho các số thực a, b, c thuộc đoạn $[1; 3]$ và thỏa mãn $a + b + c = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc.$$

Lời giải.

$$\text{Do } a, b, c \in [1; 3] \Rightarrow \begin{cases} (a-1)(b-1)(c-1) \geq 0 \\ (a-3)(b-3)(c-3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} abc \geq ab + bc + ca - 5 \\ abc \leq 3(ab + bc + ca) - 27 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca \geq 11$$

Lại có $ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 12$. Hơn nữa:

$$(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc$$

Nên

$$P = \frac{(ab + bc + ca)^2 + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc \leq \frac{(ab + bc + ca)^2 + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}(ab + bc + ca - 5)$$

Đặt $ab + bc + ca = t$, $t \in [11; 12]$

Khảo sát hàm số $f(t) = \frac{t}{2} + \frac{72}{t} + \frac{5}{2}$, $t \in [11; 12]$

$$\text{ta tìm được } \max_{[11; 12]} f(t) = f(11) = \frac{160}{11}$$

Hay $\max P = \frac{160}{11}$ khi $(a; b; c) = (1; 2; 3)$ và các hoán vị của nó.

Bài toán 31. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 1$ và $a + b + c = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (ab + bc + ca)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 1)$.

Lời giải : Từ giả thiết ta có : $0 \leq a, b \leq 1 \leq c$ và $a + b + c = 2$

$$\text{Ta có } P = (ab + bc + ca)[(ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) + 1]$$

$$= (ab + bc + ca)[(ab + bc + ca)^2 - 4abc + 1].$$

$$\text{Mà } (a+b)c + ab(1-c) \leq \frac{(a+b+c)^2}{4} = 1 \text{ (Vì } 0 \leq a, b \leq 1 \leq c \text{ và } a + b + c = 2)$$

nên $abc \geq ab + bc + ca - 1$

$$\text{Suy ra : } P \leq (ab + bc + ca)[(ab + bc + ca)^2 - 4(ab + bc + ca) + 5]$$

$$\text{Đặt } t = ab + bc + ca. \text{ Ta có } 0 \leq t \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Xét hàm số $f(t) = t(t^2 - 4t + 5)$ trên đoạn $\left[0; \frac{4}{3}\right]$

$$\text{Có } f'(t) = 3t^2 - 8t + 5, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in \left(0; \frac{4}{3}\right) \\ t = \frac{5}{3} \notin \left(0; \frac{4}{3}\right) \end{cases}.$$

$$f(0) = 0, f(1) = 2, f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{52}{27}. \text{ Suy ra } \max_{[0; \frac{4}{3}]} f(t) = f(1) = 2$$

Vậy $\max P = 2$, đạt được khi $a = 0, b = 1, c = 1$ hoặc $a = 1, b = 0, c = 1$.

Bài toán 32. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 5$
 Chứng minh rằng $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \geq -4$

Lời giải.

Ta có $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \geq -4 \Leftrightarrow P := (a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ca) \leq 4$ (*).

- Nếu $ab+bc+ca < 0$ thì $P \leq 0$ suy ra BĐT được chứng minh.
- Nếu $ab+bc+ca \geq 0$, đặt $ab+bc+ca = x \geq 0$ ta có :

$$(a-b)(b-c) \leq \left(\frac{a-b+b-c}{2}\right)^2 = \frac{(a-c)^2}{4} \Rightarrow (a-b)(b-c)(a-c) \leq \frac{(a-c)^3}{4} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= 2(a-c)^2 + 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2 + [(a-b) + (b-c)]^2 \\ &= 2(a-c)^2 + (a-c)^2 = 3(a-c)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } 4(5-x) \geq 3(a-c)^2, \text{ từ đây ta có } x \leq 5 \text{ và } a-c \leq \sqrt{\frac{4}{3}(5-x)} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } P \leq \frac{1}{4}x \cdot \sqrt{\left[\frac{4}{3}(5-x)\right]^3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}x\sqrt{(5-x)^3}$$

Lại có $f(x) = x\sqrt{(5-x)^3}$ hàm số liên tục trên đoạn $[0; 5]$.

$$f'(x) = \sqrt{5-x}\left(5 - \frac{5}{2}x\right); f'(x) = 0 \Rightarrow x = 5; x = 2.$$

$$\text{Ta có } f(2) = 6\sqrt{3}, f(0) = f(5) = 0$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in [0; 5]} f(x) = f(2) = 6\sqrt{3}, \min_{x \in [0; 5]} f(x) = f(0) = 0.$$

nên suy ra $P \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot 6\sqrt{3} \Rightarrow P \leq 4$. Vậy (*) được chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $a = 2; b = 1; c = 0$.

2. Đồn biến nhờ kết hợp với kỹ thuật đổi biến số.

❖ **Bài toán 33.** Cho a, b, c dương thỏa mãn : $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.
 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 5(a+b+c) + \frac{3}{abc}.$$

Phân tích. Ta có $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)$

đồng thời $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$. Do đó giữa các đại lượng

$(a+b+c), (ab+bc+ca), (abc)$ tồn tại một mối liên hệ mà ta quan tâm.

Và để làm gọn các biểu thức ta có thể sử dụng phép đổi biến số (dạng ẩn phụ) như lời giải sau:

$$\text{Lời giải. Đặt } x = a+b+c, y = ab+bc+ca \Rightarrow \begin{cases} x > \sqrt{3}, y > 0 \\ x^2 = 2y + 3 \end{cases}$$

Mặt khác ta có: $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c) \Rightarrow \frac{1}{abc} \geq \frac{3x}{y^2}$.

$$\Rightarrow P \geq 5x + \frac{9x}{y^2} = 5x + \frac{36x}{(x^2 - 3)^2}.$$

Xét hàm số $F(x) = 5x + \frac{36x}{(x^2 - 3)^2}$ với $x > \sqrt{3}$

$$\text{Ta có: } F'(x) = \frac{(x-3)(5x^5 + 15x^4 + 27x + 81)}{(x^2 - 3)^3}$$

$$\text{Vì } x > \sqrt{3} \Rightarrow 5x^5 + 15x^4 + 27x + 81 > 0 \Rightarrow F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Lập bảng biến thiên ta có: $\min F = F(3) = 18$.

$$\text{Vậy } \min P = 18 \text{ khi } \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$$

Bài toán 34. (HSG Tỉnh 12 - Nghệ An 2010) . Cho các số dương a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn đồng thời các điều kiện $ab + bc = 2c^2$ và $2a \leq c$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-c} + \frac{c}{c-a}.$$

Phân tích. Nhận thấy đẳng thức ở giả thiết và biểu thức P có dạng đồng bậc, do đó ta có thể nghĩ đến vận dụng cách đổi biến kiểu $\begin{cases} a = x.c \\ b = y.c \end{cases}$ để dồn biểu thức ba biến về biểu thức hai biến.

$$\text{Lời giải. Đặt } \begin{cases} a = x.c \\ b = y.c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ xy + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ y = \frac{2}{x+1} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } P = \frac{x}{x-y} + \frac{y}{y-1} + \frac{1}{1-x} = \frac{x(x+1)}{x^2+x-2} + \frac{2}{1-x} + \frac{1}{1-x} = \frac{x^2-2x-6}{x^2+x-2}$$

$$\text{Ta có } P' = \frac{3x^2+8x+10}{(x^2+x-2)^2} > 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow P(x) \leq P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{5}$$

$$\Rightarrow \max P = \frac{27}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}c \\ b = \frac{4}{3}c \end{cases}.$$

BÌNH LUẬN. Thông thường phép đổi biến số được thực hiện với hai mục đích.

- Làm cho bài toán có cách nhìn đơn giản hơn dưới dạng ẩn phụ.
- Làm giảm số biến xuất hiện trong bài toán ban đầu.

Sau đây mời các bạn cùng tiếp tục theo dõi các bài toán để làm rõ hơn những vấn đề đã nêu.

❖ **Bài toán 35.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $(a+2b)(b+c) = 5bc$ và $2a \geq c$ Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2 + b^2}{ac}$.

$$\text{Lời giải. Đặt } \begin{cases} \frac{a}{b} = x \\ \frac{c}{b} = y \end{cases}. \text{ Từ điều kiện ban đầu ta có:}$$

$$\begin{cases} (x+2)(1+y)=5y \\ 2x \geq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x+2}{3-x} \Rightarrow 2x \geq \frac{x+2}{3-x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ 2x \geq y \end{cases}$$

Khi đó biểu thức $P = \frac{x^2+1}{xy} = \frac{x^2+1}{x \left(\frac{x+2}{3-x} \right)} = \frac{(3-x)(x^2+1)}{x(x+2)}$

Khảo sát hàm số $f(x) = \frac{(3-x)(x^2+1)}{x(x+2)}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ ta có:

$$f(x) = -x + 5 + \frac{3}{2x} - \frac{25}{2(x+2)} \Rightarrow f'(x) = -1 - \frac{3}{2x^2} + \frac{25}{2(x+2)^2} < 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$$

Do đó $\frac{5}{8} = f(2) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$.

Hay $\max P = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ b = c \end{cases}$ và $\min P = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = 4b \end{cases}$

❖ **Bài toán 36.** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{2c^2}. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức}$$

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Lời giải. Đặt $\frac{c}{a} = x, \frac{c}{b} = y \Rightarrow \begin{cases} x, y > 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + y \leq 1 \\ xy \leq \frac{1}{4} \end{cases} \end{cases}$

Khi đó

$$P = \frac{x}{y(x+1)} + \frac{y}{x(y+1)} + \sqrt{\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2 + x^2 y^2}} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{xy(x+1)(y+1)}} + \sqrt{\frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + \frac{1}{2}}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{x+y+xy+1}} + \sqrt{\frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + \frac{1}{2}}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy+2}} + \sqrt{\frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + \frac{1}{2}}}$$

Đặt $xy = t, t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$. Xét hàm số $f(t) = 2\sqrt{\frac{1}{t+2}} + \sqrt{\frac{t^2}{t^2+2}}, t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$

có $f'(t) = -\frac{1}{(\sqrt{t+2})^3} - \frac{t}{2\left(\sqrt{t^2+\frac{1}{2}}\right)^3} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$

$$\Rightarrow f(t) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{5} + \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Hay $\min P = \frac{4}{5} + \frac{1}{\sqrt{13}}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 2c$.

❖ **Bài toán 37.** Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{9abc}{(a+b+c)(ab+bc+ca)} \geq 4.$$

Lời giải. Ta có $VT = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{9}{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + 3}$.

$$\text{Đặt } x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a} \Rightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases}.$$

$$VT = x + y + z + \frac{9}{x + y + z + xy + yz + zx + 3} \geq x + y + z + \frac{27}{(x + y + z)^2 + 3(x + y + z) + 9}.$$

$$\text{Đặt } t = x + y + z \Rightarrow t \geq 3.$$

$$\text{Xét hàm số } F(t) = t + \frac{27}{t^2 + 3t + 9}, t \geq 3 \text{ có } F'(t) = \frac{t^4 + 6t^3 + 27t^2}{(t^2 + 3t + 9)^2} > 0 \forall t \geq 3$$

Lập bảng biến thiên ta có $\min F(t) = F(3) = 4 \Rightarrow VT \geq 4 \Rightarrow \text{đpcm.}$

Dấu '=' xảy ra khi $a = b = c.$

❖ **Bài toán 38.** Cho $x, y, z > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{z^3}{(x+y)^2} \left(\frac{x}{(y+z)^2} + \frac{y}{(x+z)^2} \right) + \frac{x+y}{8z}.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có : } P = \frac{1}{\left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right)^2} \left(\frac{\frac{x}{z}}{\left(\frac{y}{z} + 1\right)^2} + \frac{\frac{y}{z}}{\left(\frac{x}{z} + 1\right)^2} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z} \right)$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{z} = a, \frac{y}{z} = b. \text{ Khi đó : } P = \frac{1}{(a+b)^2} \left(\frac{a}{(b+1)^2} + \frac{b}{(a+1)^2} \right) + \frac{a+b}{8}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có :

$$\begin{aligned} \frac{a}{(b+1)^2} + \frac{b}{(a+1)^2} &= \frac{a^2}{a(b+1)^2} + \frac{b^2}{b(a+1)^2} \geq \frac{(a+b)^2}{a(b+1)^2 + b(a+1)^2} \\ &= \frac{2(a+b)^2}{2a(b+1)(b+1) + 2b(a+1)(a+1)} \geq \frac{2 \cdot 27(a+b)^2}{2(2a+2b+2)^3} = \frac{27(a+b)^2}{8(a+b+1)^3} \\ \Rightarrow P &\geq \frac{27}{8(a+b+1)^3} + \frac{a+b}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = (a+b+1), t > 0. \text{ Khảo sát hàm số } f(t) = \frac{27}{8t^3} + \frac{t-1}{8}, t \in (0; +\infty)$$

$$\text{Ta có } \min_{(0; +\infty)} f(t) = f(3) = \frac{3}{8}.$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{3}{8} \Leftrightarrow a = b = c$$

❖ **Bài toán 39.** Cho các số thực không âm x, y, z thỏa điều kiện $xy - 2(x+y)z - 2 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 3 \left(\frac{x}{x^2+2} + \frac{y}{y^2+2} - \frac{z^2}{4} \right) + \frac{(xy-6)^2 - 4(x^2+y^2+8)}{2(2z^2+1)(x+y)^2}$$

Lời giải.

Biểu thức đã cho kết hợp với giả thiết được biến đổi thành :

$$\begin{aligned} P &= 3 \left(\frac{x}{x^2+2} + \frac{y}{y^2+2} - \frac{z^2}{4} \right) + \frac{x^2y^2 - 12xy + 4 - 4x^2 - 4y^2}{(4z^2+2)(x+y)^2} \\ &= 3 \left(\frac{x}{x^2+2} + \frac{y}{y^2+2} - \frac{z^2}{4} \right) + \frac{x^2y^2 - 4xy + 4 - 4(x^2 - 2xy + y^2)}{(4z^2+2)(x+y)^2} \\ &= 3 \left(\frac{x}{x^2+2} + \frac{y}{y^2+2} - \frac{z^2}{4} \right) + \frac{(xy-2)^2 - 4(x+y)^2}{(4z^2+2)(x+y)^2} \end{aligned}$$

$$= 3 \left(\frac{x}{x^2+2} + \frac{y}{y^2+2} - \frac{z^2}{4} \right) + \frac{\left(\frac{xy-2}{x+y} \right)^2 - 4}{4z^2+2}$$

$$= 3 \left(\frac{x}{x^2+2} + \frac{y}{y^2+2} - \frac{z^2}{4} \right) + \frac{4z^2-4}{4z^2+2}$$

Giả thiết được viết lại là :

$$xy - 2(x+y)z - 2 = 0 \Leftrightarrow xy - 2xz - 2yz - 2 = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2z}{y} - \frac{2z}{x} - \frac{2}{xy} = 0$$

Đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = 2z$.

Lúc đó điều kiện giả thiết được viết lại : $2ab + bc + ca = 1$.

Ta có : $\frac{x}{x^2+2} = \frac{\frac{1}{x}}{1+2\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{a}{1+2a^2} = \frac{a}{2ab+bc+ca+2a^2} = \frac{a}{(a+b)(2a+c)}$.

$$\frac{y}{y^2+2} = \frac{\frac{1}{y}}{1+2\left(\frac{1}{y}\right)^2} = \frac{b}{1+2b^2} = \frac{b}{2ab+bc+ca+2b^2} = \frac{a}{(a+b)(2b+c)}$$

$$\frac{1}{2+c^2} = \frac{1}{2(2ab+bc+ca)+c^2} = \frac{1}{(2a+c)(2b+c)}$$

Từ đó ta có : $\frac{a}{1+2a^2} + \frac{b}{1+2b^2} = \frac{1+2ab}{(a+b)(2a+c)(2b+c)} \leq \sqrt{\frac{(1+2a^2)(1+2b^2)}{(a+b)^2(2a+c)^2(2b+c)^2}}$

$$\leq \sqrt{\frac{(1+2a^2)(1+2b^2)}{(1+2a^2)(1+2b^2)(c^2+2)}} = \frac{1}{\sqrt{c^2+2}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Từ đánh giá này ta có $P \leq \frac{3}{\sqrt{c^2+2}} - \frac{3c^2}{16} + \frac{c^2-4}{c^2+2}$

Xét hàm số $f(c) = \frac{3}{\sqrt{c^2+2}} - \frac{3c^2}{16} + \frac{c^2-4}{c^2+2}, c \geq 0$.

Ta có : $f'(c) = -\frac{3c}{(2+c^2)\sqrt{c^2+2}} + \frac{12c}{(c^2+2)^2} - \frac{3c}{8} = \frac{-3c(\sqrt{c^2+2}-4)}{(c^2+2)^2} - \frac{3c}{8}$

Do đó : $f'(c) \geq 0 \Leftrightarrow 3c(c^2+2)^2 + 24c(\sqrt{c^2+2}-4) \leq 0 \Leftrightarrow (c^2+2)^2 + 8(\sqrt{c^2+2}-4) \leq 0$ (1) do $c \geq 0$.

Đặt $t = \sqrt{c^2+2}, t \geq \sqrt{2}$. Khi đó bất phương trình (1) trở thành :

$$t^4 + 8t - 32 \leq 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^3 + 2t^2 + 4t + 16) \leq 0 \Leftrightarrow t \geq 2$$

Từ đó ta có : $\sqrt{c^2+2} \leq 2 \Leftrightarrow c^2 - 2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq c \leq \sqrt{2}$

Lập bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của $P = \frac{5}{8}$ đạt được khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} c = \sqrt{2} \\ a = b = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 + \sqrt{2} \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

❖ **Bài toán 40.** Cho các số thực x, y, z thỏa mãn

$x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx) > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{|x-z|}{\sqrt{y^2+2xz}} + \frac{|y-z|}{\sqrt{x^2+2yz}} + 2\ln\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2xy+z^2}\right)$$

Lời giải. Đặt $\begin{cases} (x-z)^2 = a \\ (y-z)^2 = b \\ (y-x)^2 = c \end{cases} \Rightarrow a, b, c \geq 0$

$$\text{Khi đó } P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + 2\ln\left(\frac{c}{a+b} + 1\right) = \frac{2a}{2\sqrt{a(b+c)}} + \frac{2b}{2\sqrt{b(a+c)}} + 2\ln\left(\frac{c}{a+b} + 1\right) \\ \geq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + 2\ln\left(\frac{c}{a+b} + 1\right)$$

Đặt $t = \frac{c}{a+b} \geq 0$. Xét hàm số $f(t) = \frac{2}{1+t} + 2\ln(1+t)$ có $f'(t) \geq 0$

Suy ra $f(t) \geq f(0) = 2$. Hay $\min P = 2$ đạt được khi $\begin{cases} x = y \\ z(z-4x) = 0. \end{cases}$

Bài toán 41. Cho a, b, c là 3 số thực dương thỏa mãn: $a+b-c \geq 0$, $b+c-a \geq 0$, $c+a-b \geq 0$ và $(a+b+c)^2 = 4(ab+bc+ca-1)$. Tìm GTNN của biểu thức

$$S = \sqrt{\frac{a+b}{c}} - 1 + \sqrt{\frac{b+c}{a}} - 1 + \sqrt{\frac{c+a}{b}} - 1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2-2}}$$

Lời giải 1.

Đặt $a = x+y-z$, $b = y+z-x$, $c = z+x-y$. Ta có $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ xy + yz + zx = 4 \end{cases}$. Khi đó:

$$S = \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \right) + \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Giả sử $x \geq y \geq z > 0$. Khi đó $\sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq \sqrt{\frac{y+z}{x}}$. Nên suy ra

$$S \geq \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y+z}{x}} \right) + \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \text{ Mặt khác}$$

$$\sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y+z}{x}} \right) + \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y+z}{x}} \right) + 2\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}}$$

$$= \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y+z}{x}} \right) + 2\sqrt{\frac{x(y+z)+yz}{x^2+(y+z)^2-2yz}}$$

$$\geq \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y+z}{x}} \right) + 2\sqrt{\frac{x(y+z)}{x^2+(y+z)^2}}$$

$$= \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y+z}{x}} \right) + 2\sqrt{\frac{1}{\frac{x}{y+z} + \frac{y+z}{x}}}.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y+z}{x}} \right) \Rightarrow t \geq 2\sqrt{2}.$$

Xét hàm số $g(t) = t + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{t^2 - 4}}$, $t \geq 4$, ta có $g'(t) = 1 - \frac{2\sqrt{2}t}{\sqrt{(t^2 - 4)^3}}$ nên $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(t^2 - 4)^3} - 2\sqrt{2}t = 0$

$$\Leftrightarrow (t^2 - 8)(t^4 - 4t^2 + 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2\sqrt{2} \\ t = 2\sqrt{2} \end{cases}. \text{ Lập bảng biến thiên ta có } \min_{[4; +\infty)} g(t) = g(2\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$$

Hay $\min S = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow a = c = 1, b = 2$.

Lời giải 2.

Đặt $Q = \sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}}$ suy ra

$$Q^2 = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + 2\left(\sqrt{\frac{xy}{(y+z)(z+x)}} + \sqrt{\frac{yz}{(z+x)(x+y)}} + \sqrt{\frac{zx}{(x+y)(y+z)}}\right) \text{ ta thấy rằng}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} &= \frac{1}{4} \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) \cdot (xy + yz + zx) \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4} + \frac{xyz}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \right) \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4}. \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT AM-GM ta có $\sqrt{\frac{xy}{(y+z)(z+x)}} = \frac{2xy}{2\sqrt{(xy+xz)(yz+yx)}} \geq \frac{2xy}{2xy + yz + zx}$
 $\geq \frac{2xy}{2(xy + yz + zx)} = \frac{xy}{xy + yz + zx}$

Tương tự ta có $\sqrt{\frac{yz}{(z+x)(x+y)}} \geq \frac{yz}{xy + yz + zx}$; $\sqrt{\frac{zx}{(x+y)(y+z)}} \geq \frac{zx}{xy + yz + zx}$ Suy ra:

$$\sqrt{\frac{xy}{(y+z)(z+x)}} + \sqrt{\frac{yz}{(z+x)(x+y)}} + \sqrt{\frac{zx}{(x+y)(y+z)}} \geq 1 \text{ nên } Q \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4}} + 2$$

$$\text{Suy ra } P \geq \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}} + 4 + \frac{4}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow t \geq \sqrt{xy + yz + zx} = 2.$$

Xét hàm số $g(t) = \sqrt{\frac{t^2}{2}} + 4 + \frac{4}{t}$, $t \geq 2$, khi đó ta có

$$g'(t) = \frac{t}{2\sqrt{\frac{t^2}{2} + 4}} - \frac{4}{t^2}; \quad g'(t) = 0 \Leftrightarrow t^6 - 32t^2 - 256 = 0 \Leftrightarrow t = 2\sqrt{2}$$

Lập bảng biến thiên ta có $\min_{[2; +\infty)} g(t) = g(2\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$

Hay $\min S = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow a = c = 1, b = 2$.

❖ **Bài toán 42. (HSG Tỉnh 12 - Nghệ An 2010)** . Cho a,b,c là các số thực không đồng thời bằng 0 thỏa mãn :

$$(a+b+c)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Tìm GTLN và GTNN của biểu thức :

$$P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

Lời giải 1. Ta có :

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= (a+b+c)(ab+bc+ca) + 3abc. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó : } P = 1 + \frac{3abc}{(a+b+c)(ab+bc+ca)} = 1 + \frac{3c(x-c)^2}{(x+c)^3}, \text{ với } x = a+b$$

+) Với $c=0$ thì $P=1$.

$$+) \text{ Với } c \neq 0, \text{ từ giả thiết : } (x-c)^2 = 4ab \leq (a+b)^2 = x^2 \Rightarrow \frac{x}{c} \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{c} = t, t \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Khảo sát hàm số : } f(t) = 1 + \frac{3(t-1)^2}{(t+1)^3}, \text{ cho ta : } \min P = 1; \max P = \frac{11}{9}.$$

Lời giải 2.

$$\text{Từ giả thiết: } ab+bc+ca = \frac{1}{2}[(a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2]$$

$$\text{Suy ra: } ab+bc+ca = \frac{1}{4}(a+b+c)^2$$

$$\text{Do đó: } P = \frac{4(a^3+b^3+c^3)}{(a+b+c)^3} = \frac{1}{16} \left[\left(\frac{4a}{a+b+c} \right)^3 + \left(\frac{4b}{a+b+c} \right)^3 + \left(\frac{4c}{a+b+c} \right)^3 \right]$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = \frac{4a}{a+b+c} \\ y = \frac{4b}{a+b+c} \\ z = \frac{4c}{a+b+c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z = 4-x \\ yz = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$$

$$\text{Vì } (y+z)^2 \geq 4yz \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{8}{3}$$

Ta có

$$P = \frac{1}{16}(x^3 + y^3 + z^3) = \frac{1}{16}[x^3 + (y+z)^3 - 3yz(y+z)]$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{16}(3x^3 - 12x^2 + 12x + 16)$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 3x^3 - 12x^2 + 12x + 16 \text{ với } x \in \left[0; \frac{8}{3}\right]$$

$$\Rightarrow f'(x) = 9x^2 - 24x + 12 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Ta tính được } f(0) = f(2) = 16, f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{176}{9}$$

$$\text{Suy ra } \begin{matrix} \max_{\left[0; \frac{8}{3}\right]} f(x) = \frac{176}{9}, \min_{\left[0; \frac{8}{3}\right]} f(x) = 16 \Rightarrow \begin{cases} \max P = \frac{11}{9} \Leftrightarrow a = b = \frac{c}{4}, a \neq 0 \\ \min P = 1 \Leftrightarrow a = 0, b = c \neq 0 \end{cases} \end{matrix}$$

Bài toán 43. cho x, y, z là các số thực không âm và thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = [x(y+z) + x + y][(x^2+1)(y^2+1) + x^2z(z+2)]$$

Lời giải : Đặt $z+1 = a$. Từ giả thiết ta có : $0 \leq x, y \leq 1 \leq a$ và $a + x + y = 2$

Khi đó

$$\begin{aligned} P &\leq (ax + xy + ya)(a^2x^2 + x^2y^2 + y^2a^2 + 1) \\ &= (ax + xy + ya)[(ax + xy + ya)^2 - 2axy(a + x + y) + 1] = (ax + xy + ya)[(ax + xy + ya)^2 - 4axy + 1]. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } (x+y)a + xy(1-a) \leq \frac{(a+x+y)^2}{4} = 1 \text{ (Vì } 0 \leq x, y \leq 1 \leq a; a + x + y = 2)$$

$$\text{nên } axy \geq ax + xy + ya - 1$$

Suy ra : $P \leq (ax + xy + ya) \left[(ax + xy + ya)^2 - 4(ax + xy + ya) + 5 \right]$

Đặt $t = ax + xy + ya$. Ta có $0 \leq t \leq \frac{(a+x+y)^2}{3} = \frac{4}{3}$.

Xét hàm số $f(t) = t(t^2 - 4t + 5)$ trên đoạn $\left[0; \frac{4}{3}\right]$

Có $f'(t) = 3t^2 - 4t + 5$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in \left(0; \frac{4}{3}\right) \\ t = \frac{5}{3} \notin \left(0; \frac{4}{3}\right) \end{cases}$.

$f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{52}{27}$. Suy ra $\max_{\left[0; \frac{4}{3}\right]} f(t) = f(1) = 2$

Vậy $\max P = 2$, đạt được khi $x = 0, y = 1, z = 0$ hoặc $x = 1, y = 0, z = 0$.

❖ **Bài toán 44. (Khối A - 2011)**. Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1; 4]$ và $x \geq y; y \geq z$. Tìm nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$$

Lời giải. Đặt $y = ax, z = bx \Rightarrow a, b \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

Biểu thức P được viết lại như sau:

$$P = \frac{1}{2+3a} + \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+1}$$

$$\Rightarrow P'(b) = -\frac{a}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+1)^2}; P'(b) = 0 \Rightarrow (a+b)^2 - a(b+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-a)(b^2 - a) = 0 \Rightarrow b = \sqrt{a}$$

$$\text{Vì } a, b \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \Rightarrow \min P(b) = P(a) = \frac{1}{2+3a} - \frac{2}{1+\sqrt{a}} + 2.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{a} \Rightarrow t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

$$\text{Xét hàm số } F(t) = \frac{1}{2+3t^2} - \frac{2}{1+t} + 2.$$

Ta có:

$$F'(t) = -\frac{6t}{(2+3t^2)^2} + \frac{2}{(1+t)^2}; F'(t) = 0 \Leftrightarrow 2(2+3t^2)^2 - 6t(1+t)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 18t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$\text{Vì } t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \Rightarrow 18t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 6t + 8 > 0 \Rightarrow F'(t) > 0 \forall t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

$$\Rightarrow F(t) \geq F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{34}{33}.$$

$$\text{Vậy } \min F(t) = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{34}{33} \Rightarrow \min P = \frac{34}{33} \text{ tại}$$

$$a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 4, y = 1, z = 2.$$

❖ **Bài toán 45. (HSG Tỉnh Nghệ An năm 2014)** Cho ba số thực không âm thỏa mãn $a > b > c$; $3ab + 5bc + 7ca \leq 9$.

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của } P = \frac{32}{(a-b)^4} + \frac{1}{(b-c)^4} + \frac{1}{(c-a)^4}$$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } 81P \geq (3ab + 5bc + 7ca)^2 \left[\frac{32}{(a-b)^4} + \frac{1}{(b-c)^4} + \frac{1}{(c-a)^4} \right]$$

Đặt $a = c + x + y; b = c + x$ ($x, y > 0$), ta có:

$$\begin{aligned} 9P &\geq x^2(x+y)^2 \left(\frac{32}{y^4} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{(x+y)^4} \right) = 32 \left(\frac{x(x+y)}{y^2} \right)^2 + \frac{(x+y)^2}{x^2} + \frac{x^2}{(x+y)^2} \\ &= 32 \left(\frac{x(x+y)}{y^2} \right)^2 + \left[\frac{x+y}{x} + \frac{x}{x+y} \right]^2 - 2 = \\ &= 32 \left(\frac{x(x+y)}{y^2} \right)^2 + \left[2 + \frac{y^2}{x(x+y)} \right]^2 - 2. \end{aligned}$$

Đặt $\frac{y^2}{x(x+y)} = t$ ($t > 0$), xét hàm số: $f(t) = \frac{32}{t^2} + (2+t)^2 - 2$, ta có:

$$f'(t) = -\frac{64}{t^3} + 2(t+2) \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t^4 + 4t^3 - 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2. \text{ Lập bảng biến thiên ta có: } P = \frac{5}{8}$$

❖ **Bài toán 46.** Cho ba số thực dương a, b, c thỏa :

$$\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c} = \sqrt{\frac{ab}{c}}. \text{ Tìm GTNN của biểu thức}$$

$$P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{c^2}{a^2+b^2}$$

Lời giải. Đặt $a = xc, b = yc$ ($x, y \geq 1$)

- Thay $x = 1$ vào giả thiết ta có : $\sqrt{b-c} = \sqrt{b} \Rightarrow c = 0$ không thỏa vì $c > 0$.
- Thay $y = 1$ vào giả thiết ta có : $\sqrt{a-c} = \sqrt{a} \Rightarrow c = 0$ không thỏa vì $c > 0$.
- Xét $x, y > 1$. Thay vào giả thiết ta có :

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = \sqrt{xy} \Leftrightarrow x + y - 2 + 2\sqrt{(x-1)(y-1)} = xy$$

$$\Leftrightarrow xy - x - y + 1 - 2\sqrt{(x-1)(y-1)} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-1)(y-1)} - 1 \right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-1)(y-1)} = 1 \Leftrightarrow xy = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \geq 4.$$

Biểu thức P được viết lại như sau :

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{xy+x} + \frac{y^2}{xy+y} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{(x+y)^2 - 2xy}$$

$$P \geq \frac{(x+y)^2}{2xy+x+y} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{(x+y)^2 - 2xy} = \frac{xy}{3} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2y^2 - 2xy}$$

$$= \frac{x^3y^3 - 2x^2y^2 + 3xy - 3}{3(x^2y^2 - 2xy)}$$

Đặt $t = xy, t \geq 4$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^3 - 2t^2 + 3t - 3}{t^2 - 2t}; (t \geq 4)$$

Ta có : $f'(t) = \frac{t^4 - 4t^3 + t^2 + 6t - 6}{(t^2 - 2t)^2} = \frac{t^3(t-4) + t^2 + 6(t-4) + 18}{(t^2 - 2t)^2} > 0 \forall t \geq 4.$

Lập bảng biến thiên ta có : $\min f(t) = f(4) = \frac{41}{8}$

Vậy $\min P = \frac{41}{24}$ khi $x = y = 2$ hay $a = b = 2c$.

3. Đồn biến nhờ kết hợp với kỹ thuật sắp thứ tự các biến.

❖ **Bài toán 47.** Cho $a, b, c \geq 0$ thỏa mãn: $a + b + c = 3$. Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 + abc$.

Phân tích.

Ta dễ dàng nhận thấy $P = (a+b)^2 + c^2 + ab(c-2) = (3-c)^2 + c^2 - ab(2-c)$

Khi đó ta muốn dồn biểu thức P về biến c bằng đánh giá

$0 \leq ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(3-c)^2}{4}$. Tuy nhiên dấu của $(2-c)$ thay đổi khi $c \in [0; 3]$

Để giải quyết vấn đề đó, ta có thể giả sử

$c = \min\{a, b, c\} \Rightarrow 3 = a + b + c \geq 3c \Rightarrow c \leq 1$

Lời giải. Giả sử $c = \min\{a, b, c\} \Rightarrow 3 = a + b + c \geq 3c \Rightarrow c \leq 1$.

Từ giả thiết ta có: $0 \leq ab \leq \frac{(3-c)^2}{4}$ và $c \in [0; 1]$.

Ta có : $P = (3-c)^2 + c^2 - ab(2-c)$.

Với $\begin{cases} 0 \leq ab \leq \frac{(3-c)^2}{4} \\ 2-c > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4}(c^3 - 3c + 18) \leq P \leq 2c^2 - 6c + 9$.

Đặt $f(c) = \frac{1}{4}(c^3 - 3c + 18), g(c) = 2c^2 - 6c + 9$.

Khảo sát hàm số $f(c), g(c), c \in [0; 1]$.

Ta có $\min f(c) = 4$ tại $c = 1, \max g(c) = 9$ tại $c = 0$.

Vậy $\min P = 4$ tại $a = b = c = 1$; $\max P = 9$ tại $(3; 0; 0)$ và các hoán vị.

Bình luận. Từ phân tích và lời giải bài toán trên, ta nhận thấy việc sắp thứ tự các biến phải thỏa mãn hai điều kiện:

- Thứ nhất: Vai trò của các biến là như nhau (nghĩa là khi thay đổi vai trò của chúng thì giả thiết và kết luận của bài toán không thay đổi)
- Thứ hai: Việc sắp thứ tự các biến phải xuất phát từ ý định giải toán nào: có thể là do việc so sánh gặp trở ngại về dấu như bài toán trên hay để dồn về một biến nào đó...

Sau đây mời các bạn cùng tham khảo một số bài toán để thấy được những mục đích khác nhau khi sắp thứ tự các biến.

❖ **Bài toán 48.** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = 3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc$.

Lời giải. Không mất tính tổng quát ta giả sử $0 < a \leq b \leq c$.

Ta có : $a + b + c = 3 \Rightarrow a + b = 3 - c$ và $c \geq 1$.

Mặt khác $a + b > c \Rightarrow 3 - c > c \Rightarrow c < \frac{3}{2} \Rightarrow c \in \left[1; \frac{3}{2}\right)$.

Ta có : $Q = 3(a^2 + b^2) + 3c^2 + 4abc = 3(3 - c)^2 + 3c^2 - 2(3 - 2c)ab$.

Vì $c < \frac{3}{2} \Rightarrow 3 - 2c > 0$.

Ta có : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab \Rightarrow \left(\frac{3-c}{2}\right)^2 \geq ab \Rightarrow Q \geq c^3 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2}$

Xét hàm số $F(c) = c^3 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2}$, $c \in \left[1; \frac{3}{2}\right)$

Ta có : $F'(c) = 3c^2 - 3c = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = 1 \end{cases}$.

Lập bảng biến thiên ta có : $\min F(c) = F(1) = 13$.

Vậy $\min Q = 13$ tại $(a; b; c) = (1; 1; 1)$.

❖ **Bài toán 49.** Cho các số thực a, b, c thỏa mãn:
 $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. Chứng minh rằng $2(a + b + c) \leq 10 + abc$.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} (2(a + b + c) - abc)^2 &= (2(a + b) + c(2 - ab))^2 \leq [(a + b)^2 + c^2][4 + (2 - ab)^2] \\ &= (9 + 2ab)[8 - 4ab + (ab)^2] = 2t^3 + t^2 - 20t + 72 = f(t), \text{ với } t = ab. \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử : $|a| \leq |b| \leq |c|$, ta có : $9 = a^2 + b^2 + c^2 \leq 3c^2 \Rightarrow c^2 \geq 3$.

Lại có : $2|ab| \leq a^2 + b^2 = 9 - c^2 \leq 6 \Rightarrow |t| \leq 3$

Do đó : $\max_{[-3;3]} f(t) = \max\{f(-2); f(3)\} = f(-2) = 100$. Hay : $P^2 \leq 100$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow (a, b, c) = (-1; 2; 2)$ và các hoán vị của nó.

❖ **Bài toán 50.** Cho các số thực không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (xy + yz + zx) \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} + \frac{1}{z^2 + x^2} \right)$$

Lời giải. Giả sử $z = \min\{x; y; z\}$.

Khi đó ta có $x + y \geq 2z \Leftrightarrow xy + yz + zx \geq \left(x + \frac{z}{2}\right) \left(y + \frac{z}{2}\right)$

Lại có

$$\begin{aligned} \bullet \frac{1}{x^2 + y^2} &\geq \frac{1}{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{z}{2}\right)^2}; \\ \bullet \frac{1}{y^2 + z^2} &\geq \frac{1}{\left(y + \frac{z}{2}\right)^2}; \quad \frac{1}{x^2 + z^2} \geq \frac{1}{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } P \geq \left(x + \frac{z}{2}\right) \left(y + \frac{z}{2}\right) \left[\frac{1}{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{z}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(y + \frac{z}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2} \right]$$

Đặt $x + \frac{z}{2} = a$; $y + \frac{z}{2} = b$ ($a, b \geq 0$)

Ta có $P \geq ab \left(\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \frac{\frac{a}{b}}{\left(\frac{a}{b} \right)^2 + 1} + \frac{a}{b} + \frac{1}{\left(\frac{a}{b} \right)}$. Đặt $\frac{a}{b} = x (x > 0)$ khảo sát hàm số

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + x + \frac{1}{x}, x > 0 \text{ ta tìm được } \min f(x) = \frac{5}{2}.$$

Vậy $\min P = \frac{5}{2}$ đạt được khi $a = b, c = 0$ và các hoán vị của nó.

❖ **Bài toán 51.** Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2)$$

Lời giải.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $0 \leq a \leq b \leq c \leq 3 \Rightarrow \begin{cases} a(a-b) \leq 0 \\ a(a-c) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - ab + b^2 \leq b^2 \\ a^2 - ca + c^2 \leq c^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow P \leq b^2 c^2 (b^2 - bc + c^2) = b^2 c^2 [(b+c)^2 - 3bc]$$

Mặt khác ta có: $b+c \leq a+b+c = 3 \Rightarrow 2\sqrt{bc} \leq b+c \leq 3 \Rightarrow 0 \leq bc \leq \frac{9}{4}$

$$\text{Do đó } P \leq b^2 c^2 (9 - 3bc) = -3b^3 c^3 + 9b^2 c^2.$$

$$\text{Xét hàm số } F(x) = -3x^3 + 9x^2, x \in \left[0; \frac{9}{4}\right] \Rightarrow F'(x) = -9x^2 + 18x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta có: $\max F(x) = F(2) = 12 \Rightarrow \max P = 12$ tại $(a; b; c) = (0; 1; 2)$.

Bài toán 52. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$. Tìm GTNN của

$$P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + 3\sqrt{3} \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}$$

Lời giải.

Giả sử $a \geq \max\{b, c\}$. Ta có $\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{a}}}$

$$\text{Khi đó } P \geq \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + 3\sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{\frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{a}}}.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} \Rightarrow t \geq 2.$$

Khảo sát hàm số $g(t) = t + 3\sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{t^2 - 2}}$ với $t \geq 2$, ta tìm được GTNN của P bằng $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

❖ **Bài toán 53. (ĐH Vinh MO TST 2011-2012).** Cho các số thực a, b, c không âm đôi một khác nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a^2 + b^2 + c^2) \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right]$$

Lời giải 1. Giả sử $c = \min\{a, b, c\}$

Ta có:

$$A = a^2 + b^2 + c^2 = \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 2(ab+bc+ca)}{2}$$

$$= \frac{2(a-b)^2 + 2(b-c)(a-c) + 2(ab+bc+ca)}{2}.$$

Mà : $ab+bc+ca \geq (b-c)(a-c) \Leftrightarrow c(2b+2a-c) \geq 0$ (đúng). Suy ra : $A \geq (a-b)^2 + 2(b-c)(a-c)$
(1)

Lại có : $B = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(a-c)^2} =$

$$= \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{(a-b)^2}{(b-c)^2(a-c)^2} + \frac{2}{(a-c)(b-c)} \quad (2)$$

Đặt : $(a-b)^2 = u; (b-c)(a-c) = v$. Từ (1) và (2) suy ra :

$$P \geq (u+2v)\left(\frac{1}{u} + \frac{u}{v^2} + \frac{2}{v}\right) = \frac{u+2v}{u} + \frac{u(u+2v)}{v^2} + \frac{2(u+2v)}{v} = 5 + 2\frac{v}{u} + \left(\frac{u}{v}\right)^2 + 4\left(\frac{u}{v}\right)$$

Đặt $\frac{u}{v} = t, t > 0$. Xét hàm số : $f(t) = t^2 + 4t + \frac{2}{t} + 5$, ta có : $f'(t) = 2t + 4 - \frac{2}{t^2} = \frac{2(t+1)}{t^2}(t^2 + t - 1) \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Lập bảng biến thiên cho ta : $f(t) \geq f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{11+5\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $\text{Min}P = \frac{11+5\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ (a-b)^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}ab \text{ (Hoặc hoán vị)} \\ a, b > 0 \end{cases}$

Lời giải 2. Giả sử $c = \text{Min}\{a, b, c\}$. Suy ra : $b-c \leq b; a-c \leq a$. Do đó :

$$P \geq (a^2 + b^2) \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right] = \frac{a^2 + b^2}{(a-b)^2} + \frac{a^2 + b^2}{a^2} + \frac{a^2 + b^2}{b^2} =$$

$$= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2}. \quad \text{Đặt : } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = t, t > 2.$$

Xét hàm số : $f(t) = t^2 + \frac{t}{t-2}, f'(t) = 2t - \frac{2}{(t-2)^2} = 0 \Rightarrow t = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Lập bảng biến thiên cho ta : $f(t) \geq f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{11+5\sqrt{5}}{2}$

❖ **Bài toán 54.** Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 1.
 Chứng minh rằng
 $\sqrt{a+(b-c)^2} + \sqrt{b+(c-a)^2} + \sqrt{c+(a-b)^2} \geq \sqrt{3}.$

Lời giải. Do a, b, c có vai trò như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử

$$a \geq b \geq c \Rightarrow a \in \left[\frac{1}{3}; 1\right], c \in \left[0; \frac{1}{3}\right].$$

Ta có : $\sqrt{a+(b-c)^2} + \sqrt{b+(a-c)^2} \geq \sqrt{2(a+b)+(a+b-2c)^2} = \sqrt{9c^2 - 8c + 3}.$

$$\Rightarrow VT \geq \sqrt{9c^2 - 8c + 3} + \sqrt{c}.$$

Xét hàm số $F(c) = \sqrt{9c^2 - 8c + 3} + \sqrt{c} \left(0 \leq c \leq \frac{1}{3}\right).$

Ta có : $F'(c) = \frac{(18c-8)\sqrt{c} + \sqrt{9c^2 - 8c + 3}}{2\sqrt{c}\sqrt{9c^2 - 8c + 3}} = 0 \Rightarrow \sqrt{9c^2 - 8c + 3} = \sqrt{c}(8-18c) \left(c \leq \frac{4}{9}\right) (1)$

Giải phương trình (1) và so sánh điều kiện ta được $c = \frac{1}{3}, c = \frac{7 - \sqrt{33}}{24}$.

Lập bảng biến thiên ta có :

$$\min F(c) = F(0) = F\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow VT \geq \sqrt{3} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Dấu '=' xảy ra khi (a, b, c) là $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ và các hoán vị.

❖ **Bài toán 55.** Cho a, b là các số thực thuộc $[0; 2]$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát ta giả sử $0 \leq a < b < c \leq 2$.

$$\text{Từ } 0 < c - a \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{(c-a)^2} \geq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Tiếp tục ta có: } 0 < c - b \leq 2 - b \Rightarrow \frac{1}{(b-c)^2} \geq \frac{1}{(2-b)^2} \text{ và } 0 < b - a \leq b \Rightarrow \frac{1}{(a-b)^2} \geq \frac{1}{b^2}$$

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(2-b)^2} + \frac{1}{4}, \forall b \in (0; 2).$$

$$\text{Xét hàm số } F(b) = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(2-b)^2} + \frac{1}{4}, \forall b \in (0; 2)$$

$$\text{Ta có: } F'(b) = -\frac{2}{b^3} + \frac{2}{(2-b)^3} = 0 \Rightarrow b = 1.$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta có: } \min F(b) = F(1) = \frac{9}{4} \Rightarrow \min P = \frac{9}{4}$$

Dấu "=" xảy ra tại $(a; b; c) = (0; 1; 2)$.

4. Phương pháp tiếp tuyến.

Chú ý. Nếu đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $A(x_0; y_0)$ (A không là điểm uốn) khi đó tồn tại một khoảng $(\alpha; \beta)$ chứa điểm x_0 sao cho $f(x) \geq ax + b, \forall x \in (\alpha; \beta)$ hoặc $f(x) \leq ax + b, \forall x \in (\alpha; \beta)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = x_0$.

❖ **Bài toán 56.** Cho a, b, c dương thỏa mãn : $a + b + c = 1$.

Chứng minh bất đẳng thức $\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10}$.

$$\text{Lời giải. Ta có } \frac{a}{1+bc} \geq \frac{a}{1 + \frac{(b+c)^2}{4}} = \frac{4a}{4 + (1-a)^2}$$

Hoàn toàn tương tự, ta sẽ chứng minh

$$\frac{4a}{a^2 - 2a + 5} + \frac{4b}{b^2 - 2b + 5} + \frac{4c}{c^2 - 2c + 5} \geq \frac{9}{10}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{4x}{x^2 - 2x + 5} \Rightarrow f'(x) = \frac{-4x^2 + 20}{(x^2 - 2x + 5)^2}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ } x_0 = \frac{1}{3} \text{ là } y = \frac{99x - 3}{100}$$

$$\text{Lúc đó } \frac{4x}{x^2 - 2x + 5} - \frac{99x - 3}{100} = \frac{(3x - 1)^2 (15 - 11x)}{100(x^2 - 2x + 5)} \geq 0, \forall x \in (0; 1)$$

Từ kết quả trên thay x bởi a, b, c ta được:

$$\frac{4a}{a^2 - 2a + 5} + \frac{4b}{b^2 - 2b + 5} + \frac{4c}{c^2 - 2c + 5} \geq \frac{99(a+b+c) - 9}{100} = \frac{9}{10} \text{ (đpcm)}$$

❖ **Bài toán 57.** Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{a+b+c} \geq 4 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right).$$

Lời giải. Chuẩn hóa $a+b+c=1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh là:

$$\left(\frac{4}{1-a} - \frac{1}{a} \right) + \left(\frac{4}{1-b} - \frac{1}{b} \right) + \left(\frac{4}{1-c} - \frac{1}{c} \right) \leq 9 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{5x-1}{x-x^2}$, phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ

$$x_0 = \frac{1}{3} \text{ là } y = 18x - 3.$$

Do a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên $\begin{cases} 1 = a+b+c \geq 2a \\ 1 = a+b+c \geq 2b \\ 1 = a+b+c \geq 2c \end{cases} \Rightarrow x < \frac{1}{2}$

$$\text{Suy ra } f(x) - (18x - 3) = \frac{(3x-1)^2(2x-1)}{x-x^2} \geq 0, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

Từ đó ta có: $VT(*) = f(a) + f(b) + f(c) \leq 18(a+b+c) - 9 = 9$ (đpcm).

❖ **Bài toán 58.** Cho $a, b, c \geq -\frac{3}{4}$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10} \quad (*).$$

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ

$$x_0 = \frac{1}{3} \text{ là } y = \frac{36x+3}{50}.$$

$$\text{Xét hiệu } f(x) - \frac{36x+3}{50} = -\frac{(3x-1)^2(4x+3)}{50(x^2+1)} \leq 0, \forall x \geq -\frac{3}{4}$$

$$\text{Do đó } VT(*) = f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{36}{50}(a+b+c) + \frac{9}{50} = \frac{9}{10} \text{ (đpcm).}$$

❖ **Bài toán 59. (Japan MO 2002)** Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c không âm ta có bất đẳng thức

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Lời giải. Chuẩn hóa $a+b+c=1$, bất đẳng thức đã cho trở thành:

$$\frac{(1-2a)^2}{2a^2-2a+1} + \frac{(1-2a)^2}{2a^2-2a+1} + \frac{(1-2a)^2}{2a^2-2a+1} \geq \frac{3}{5} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{4x^2-4x+1}{2x^2-2x+1}$, phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ

$$x_0 = \frac{1}{3} \text{ là } y = \frac{-54x+23}{25}.$$

$$\text{Do đó } f(x) - \frac{-54x+23}{25} = \frac{2(54x^3-27x^2+1)}{25(2x^2-2x+1)} = \frac{2(3x-1)^2(6x+1)}{25(2x^2-2x+1)} \geq 0$$

$$VT(*) = f(a) + f(b) + f(c) \geq -\frac{54}{25}(x+y+z) + 3 \cdot \frac{23}{25} = \frac{3}{5} \quad (\text{đpcm})$$

❖ **Bài toán 60. (USA MO 2003)** Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c không âm ta có bất đẳng thức

$$\frac{(b+c+2a)^2}{(b+c)^2+2a^2} + \frac{(c+a+2b)^2}{(c+a)^2+2b^2} + \frac{(a+b+2c)^2}{(a+b)^2+2c^2} \leq 8 \quad .$$

Lời giải. Chuẩn hóa $a+b+c=1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\frac{(1+a)^2}{3a^2-2a+1} + \frac{(1+b)^2}{3b^2-2b+1} + \frac{(1+c)^2}{3c^2-2c+1} \leq 8 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{3x^2-2x+1}$, phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ

$$x_0 = \frac{1}{3} \quad \text{là } y = \frac{12x+4}{3} \quad .$$

$$\text{Khi đó } f(x) - \frac{12x+4}{3} = \frac{-(3x-1)^2(4x+1)}{3(3x^2-2x+1)} \leq 0, \forall x \in (0;1)$$

$$\text{Nên } VT(*) = f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{12}{3}(a+b+c) - 3 \cdot \frac{4}{3} = 8 \quad (\text{đpcm}).$$

❖ **Bài toán 61. (Russia MO 2002)** Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca \quad .$$

Lời giải. Ta có $9 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 2\sqrt{c} \geq 9 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 + 2\sqrt{x}$, tiếp tuyến của hàm số tại điểm có hoành độ

$$x_0 = 1 \quad \text{là } y = 3x.$$

$$\text{Khi đó } f(x) - 3x = x^2 - 3x + 2\sqrt{x} = (\sqrt{x}-1)^2(x+2\sqrt{x}) \geq 0, \forall x \in (0;3)$$

$$\text{Nên } VT(*) = f(a) + f(b) + f(c) \geq 3(a+b+c) = 9 \quad (\text{đpcm}).$$

❖ **Bài toán 62.** Cho các số thực dương a, b, c Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4(a+b+c)} \quad .$$

Lời giải. Chuẩn hóa $a+b+c=1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a}{(1-a)^2} + \frac{b}{(1-b)^2} + \frac{c}{(1-c)^2} \geq \frac{9}{4} \quad (*) \quad .$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$, tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ

$$x_0 = \frac{1}{3} \quad \text{là } y = \frac{18x-3}{4} \quad .$$

Khi đó ta có

$$f(x) - \frac{18x-3}{4} = \frac{-18x^3 + 39x^2 - 20x + 3}{4(1-x)^2} = \frac{(3x-1)^2(-2x+3)}{4(1-x)^2} \geq 0, \forall x \in (0;1)$$

$$\text{Nên } VT(*) = f(a) + f(b) + f(c) \geq \frac{18}{4}(a+b+c) - \frac{9}{4} = \frac{9}{4} \quad (\text{đpcm}).$$

5. Khảo sát hàm nhiều biến số.

❖ **Bài toán 63.** Cho a, b, c dương thỏa mãn : $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.
 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c}$.

Lời giải.

$$\text{Ta xét hàm số } f(x) = \frac{1}{2-x} - 1 - \frac{1}{2}x^2, x \in (0; \sqrt{3})$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1}{(2-x)^2} - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \in (0; \sqrt{3}) \\ x = 1 \in (0; \sqrt{3}) \\ x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \notin (0; \sqrt{3}) \end{cases}.$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta có } f(x) \geq f(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2-x} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2.$$

$$\text{Thay } x \text{ bởi } a, b, c \text{ vào ta được : } P = \frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = 3.$$

Vậy $\min P = 3$ tại $a = b = c = 1$.

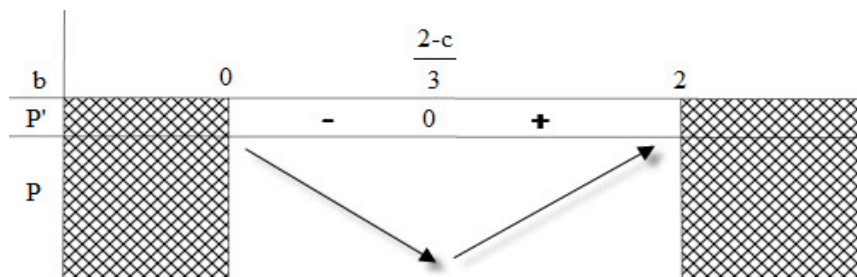
❖ **Bài toán 64.** Cho các số thực $a, b, c \in [0; 2]$, thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + 2b^2 + 3c^2 - 2a - 24c + 2060$

Lời giải : Từ $a + b + c = 3 \Rightarrow a = 3 - (b + c)$. Suy ra :

$$P = [3 - (b + c)]^2 + 2b^2 + 3c^2 - 2[3 - (b + c)] - 24c + 2060 = 3b^2 + 2b(c - 4) + 4c^2 - 28c + 2063.$$

$$\text{Ta có : } P'_b = 6b + 2c - 4, P'_b = 0 \Rightarrow b = \frac{2-c}{3}. \text{ Do } 0 \leq c \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{2-c}{3} \leq \frac{2}{3}.$$

Ta có bảng biến thiên :



Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy :

$$\max_{[0;2]} P = \max\{P(0); P(2)\} = P(2)$$

$$(\text{Do } P(2) - P(0) = (4c^2 - 24c + 2067) - (4c^2 - 28c + 2063) = 4c + 4 > 0)$$

$$\text{Lại có : } P(2) = f(c) = 4c^2 - 24c + 2067. f'(c) = 8c - 24 < 0, \forall c \in [0; 2] \Rightarrow f(c) \leq f(0) = 2067. \text{ Hay}$$

$$\max P = 2067 \Leftrightarrow a = 1; b = 2; c = 0.$$

$$\min_{[0;2]} P_b = P\left(\frac{2-c}{3}\right) = \frac{13}{3}c^2 - \frac{86}{3}c + 2063$$

$$\text{Xét } g(c) = \frac{13}{3}c^2 - \frac{86}{3}c + 2063, c \in [0;2],$$

$$\text{ta có } g'(c) = \frac{26}{3}c - \frac{86}{3} < 0 \Rightarrow g(c) \geq g(2) = 2023.$$

$$\text{Hay } \min P = 2023 \Leftrightarrow c = 2; b = 0; a = 1.$$

❖ **Bài toán 65.** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x \geq z$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{xz}{y^2 + yz} + \frac{y^2}{xz + yz} + \frac{2(x + 3z)}{x + 2z}.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{xz}{y^2 + yz} + \frac{y^2}{xz + yz} = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{y}{z} + 1} + \frac{\frac{y}{z}}{\frac{x}{y} + 1} + \frac{2\left(\frac{x}{z} + 3\right)}{\frac{x}{z} + 2}.$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{y} = a; \frac{y}{z} = b \Rightarrow ab = \frac{x}{z} \geq 1 \Rightarrow 1 \leq ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow a+b \geq 2.$$

$$\text{Khi đó: } P = \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} + \frac{2(ab+3)}{ab+2} = \frac{(a+b)^2 + (a+b) - 2ab}{ab + (a+b) + 1} + \frac{2ab+6}{ab+2}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} ab = u \\ a+b = v \end{cases} \left(1 \leq u \leq \frac{v^2}{4} \right)$$

$$\text{Xét hàm số } f(u, v) = \frac{-2u + v^2 + v}{u + v + 1} + \frac{2u + 6}{u + 2} \text{ có}$$

$$f'_u(u, v) = -\frac{(v^2 + 3v + 2)}{(u + v + 1)^2} - \frac{2}{(u + 2)^2} < 0, \forall u, v > 0$$

$$\text{Do đó } f(u, v) \geq f\left(\frac{v^2}{4}\right) = \frac{2v}{v+2} + \frac{2v^2 + 24}{v^2 + 8} := g(v)$$

Lại có

$$g'(v) = \frac{4(v^4 - 4v^3 - 16v + 64)}{(v+2)^2(v^2+8)^2} \Rightarrow g'(v) = 0 \Leftrightarrow (v-4)(v^3-16) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 4 \\ v = 2\sqrt[3]{2} \end{cases}$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta thấy } \min_{[2;+\infty)} g(v) = g(4) = g(2) = \frac{11}{3}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=2 \\ a=b=1 \end{cases}$$

$$\text{Hay } \min P = \frac{11}{3} \Leftrightarrow x = y = z \text{ hoặc } x = 2y = 4z.$$

❖ **Bài toán 66. (Khối A - 2011)** . Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1;4]$ và $x \geq y; x \geq z$. Tìm nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$$

Lời giải .

$$\bullet \text{ Nếu } x = y, \text{ thì } P(z) = \frac{1}{5} + \frac{x}{x+z} + \frac{z}{x+z} = \frac{6}{5}.$$

- Nếu $x > y$, ta có : $P'(z) = \frac{-y}{(y+z)^2} + \frac{(x+z)-z}{(z+x)^2} = \frac{-y}{(y+z)^2} + \frac{x}{(x+z)^2}$
 $\Rightarrow P'(z) = 0 \Leftrightarrow (x+z)^2 y = x(y+z)^2 \Rightarrow z = \sqrt{xy} < x$

Lập bảng biến thiên ta thấy : $P(z) \geq P(\sqrt{xy}) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}, t = \sqrt{\frac{x}{y}}, t \in [1;2]$

Khảo sát sự biến thiên cho ta : $f(t) \geq f(2) = \frac{34}{33}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 4; y = 1; z = 2$.

❖ **Bài toán 67.** Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $c < a, c < b$. Chứng minh rằng $\left(\frac{a}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c-a}\right)^2 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 0 < b-c \leq b \\ 0 < a-c \leq a \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{a}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c-a}\right)^2 \geq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \quad (1)$

Xét hàm số $f(c) = \frac{c^2 + (a^2 + b^2)}{c(a+b) + ab}, c \geq 0$ có:

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{2c[c(a+b) + ab] - (a+b)(c^2 + a^2 + b^2)}{(ab + bc + ca)^2} \\ &= \frac{2abc + (a+b)(c^2 - a^2 - b^2)}{(ab + bc + ca)^2} \leq \frac{(a+b)^2 c + 2(a+b)(c^2 - a^2 - b^2)}{2(ab + bc + ca)^2} \\ &= \frac{(a+b)(ac + bc + 2c^2 - 2a^2 - 2b^2)}{2(ab + bc + ca)^2} \\ &= \frac{(a+b)[a(c-a) + b(c-b) + (c^2 - b^2) + (c^2 - a^2)]}{2(ab + bc + ca)} < 0 \text{ do } \begin{cases} c < b \\ c < a \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $f(c) \leq f(0) = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \quad (2)$

Lại có $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \quad (3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 0 \end{cases}$

❖ **Bài toán 68.** Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn: $abc + a + c = b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
 $P = \frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2}{b^2 + 1} + \frac{3}{c^2 + 1}$

Lời giải. Ta có $a + c = b(1 - ac) > 0$.

Để thấy $ac \neq 1 \Rightarrow 0 < a < \frac{1}{c}$ nên $b = \frac{a+c}{1-ac}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= \frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2(1-ac)^2}{(a+c)^2 + (1-ac)^2} + \frac{3}{c^2 + 1} \\ &= \frac{2}{a^2 + 1} + \frac{2(a+c)^2}{(a^2 + 1)(c^2 + 1)} - 2 + \frac{3}{c^2 + 1} \end{aligned}$$

Xét $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1} + \frac{2(x+c)^2}{(x^2 + 1)(c^2 + 1)} + \frac{3}{c^2 + 1} - 2$

$$f(x) = \frac{2(x^2 + 2cx + 2c^2 + 1)}{(x^2 + 1)(c^2 + 1)} + \frac{3}{c^2 + 1} - 2 \text{ với } 0 < x < \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-4c(x^2 + 2cx - 1)}{(x^2 + 1)^2(c^2 + 1)}$$

trên khoảng $\left(0; \frac{1}{c}\right)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -c + \sqrt{c^2 + 1}$ và $f'(x)$ đổi dấu từ

dương sang âm khi x qua x_0 , suy ra $f(x)$ đạt cực đại tại $x = x_0$.

$$\Rightarrow \text{Với } \forall x \in \left(0; \frac{1}{c}\right): f(x) \leq \frac{2}{c^2 + 1 - c\sqrt{c^2 + 1}} + \frac{3}{c^2 + 1} - 2 = \frac{2c}{\sqrt{c^2 + 1}} + \frac{3}{c^2 + 1}$$

$$\text{Xét } g(c) = \frac{2c}{\sqrt{c^2 + 1}} + \frac{3}{c^2 + 1} \text{ với } c > 0$$

$$g'(c) = \frac{2(1 - 8c^2)}{(c^2 + 1)^2(\sqrt{c^2 + 1} + 3c)} \Rightarrow g'(c) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ (vì } c > 0)$$

$$\Rightarrow \forall c > 0: g(c) \leq g\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{3} + \frac{24}{9} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{10}{3}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ b = \sqrt{2} \\ c = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{10}{3}$.

6. Kết hợp với việc sử dụng Bổ đề.

❖ **Bài toán 69.** Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $x + y + z > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^3 + y^3 + 16z^3}{(x + y + z)^3}$

Bổ đề. Trước hết ta có: $x^3 + y^3 \geq \frac{(x + y)^3}{4}$ (chứng minh bằng cách biến đổi tương đương)

Lời giải. Đặt $x + y + z = a$. Khi đó $4P \geq \frac{(x + y)^3 + 64z^3}{a^3} = \frac{(a - z)^3 + 64z^3}{a^3} = (1 - t)^3 + 64t^3$

(với $t = \frac{z}{a}$, $0 \leq t \leq 1$);

Xét hàm số $f(t) = (1 - t)^3 + 64t^3$ với $t \in [0; 1]$.

có $f'(t) = 3[64t^2 - (1 - t)^2]$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{9} \in [0; 1]$

Lập bảng biến thiên $\Rightarrow \min_{t \in [0; 1]} f(t) = \frac{64}{81} \Rightarrow$

GTNN của P là $\frac{16}{81}$ đạt được khi $x = y = 4z > 0$.

❖ **Bài toán 70.** (Đề chọn đội tuyển QG dự thi IMO 2005). Cho $a, b, c > 0$.

Chứng minh rằng $\frac{a^3}{(a + b)^3} + \frac{b^3}{(b + c)^3} + \frac{c^3}{(c + a)^3} \geq \frac{3}{8}$

Lời giải: Đặt $\frac{b}{a} = x$, $\frac{c}{b} = y$, $\frac{a}{c} = z \Rightarrow xyz = 1$

Bất đẳng thức đã cho trở thành : $\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+y)^3} + \frac{1}{(1+z)^3} \geq \frac{3}{8}$

Áp dụng AM-GM ta có : $\frac{1}{(1+x)^3} + \frac{1}{(1+y)^3} + \frac{1}{8} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{8(1+x)^6}} = \frac{3}{2(1+x)^2}$

Ta cần CM bất đẳng thức : $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{3}{4}$

Bổ đề: $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy} \quad (x, y > 0)$

Bổ đề này được CM bằng cách biến đổi tương đương đưa về BĐT hiển nhiên :

$$xy(x-y)^2 + (1-xy)^2 \geq 0$$

$$\text{Do đó : } VT \geq \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{z}{z+1} + \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{z(z+1)+1}{(1+z)^2} = \frac{z^2+z+1}{z^2+2z+1}$$

Giả sử: $z = \max\{x, y, z\} \Rightarrow 1 = xyz \leq z^3 \Rightarrow z \geq 1$

Xét hàm số : $f(z) = \frac{z^2+z+1}{z^2+2z+1}$; $f'(z) = \frac{z^2-1}{(z+1)^4} \geq 0, \forall z \geq 1$

Suy ra : $f(z) \geq f(1) = \frac{3}{4}$.

❖ **Bài toán 71.** Cho $a, b, c > 0$.

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3$

Bổ đề : Với $x, y > 0$ thỏa mãn $xy \leq 1$. Ta có bất đẳng thức $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}$.

Chứng minh :

$$\text{Ta có } \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy} \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+2}{x^2y^2+x^2+y^2+1} \leq \frac{2}{1+xy}$$

$$\Leftrightarrow xy(x^2+y^2)+2xy+x^2+y^2+2 \leq 2x^2y^2+2(x^2+y^2)+2$$

$$\Leftrightarrow xy(x^2+y^2-2xy)-(x^2+y^2-2xy) \leq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2(xy-1) \leq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $xy=1$ hoặc $x=y>0$.

Lời giải.

$$\text{Đặt } x = \sqrt{\frac{b}{a}}; y = \sqrt{\frac{c}{b}}; z = \sqrt{\frac{a}{c}} \Rightarrow xyz = 1.$$

Do $x, y, z > 0; xyz = 1$ nên giả sử $z \geq 1 \Rightarrow xy \leq 1$

Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy-Shwarz ta có

$$VT = \sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq \sqrt{2\left(\frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{b+c}\right)} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}}$$

$$\text{Chứng minh } \sqrt{2\left(\frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{b+c}\right)} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}} + \sqrt{\frac{2}{1+z^2}} \leq 3$$

$$2\sqrt{\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2}} + \sqrt{\frac{2}{1+z^2}} \leq 2\sqrt{\frac{2}{1+xy}} + \sqrt{\frac{2}{1+z^2}} = \sqrt{2}\left(2\sqrt{\frac{z}{z+1}} + \sqrt{\frac{1}{z^2+1}}\right)$$

Ta chứng minh $2\sqrt{\frac{z}{z+1}} + \sqrt{\frac{1}{z^2+1}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$. Đặt $f(z) = 2\sqrt{\frac{z}{z+1}} + \sqrt{\frac{1}{z^2+1}}, z \geq 1$

$$f'(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2+z(z+1)}} - \frac{z}{(z^2+1)\sqrt{z^2+1}} \leq 0 \quad \forall z \geq 1 \Rightarrow f(z) \leq f(1) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$ hay $a = b = c$.

❖ **Bài toán 72.** Cho $a, b, c > 0$.

Chứng minh rằng : $\sqrt{\frac{a}{a+b}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{c+a}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$ (1)

Bổ đề : Với $x, y > 0$ thỏa mãn $xy \leq 1$. Ta có bất đẳng thức $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}$.

Chứng minh :

$$\text{Ta có } \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy} \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+2}{x^2y^2+x^2+y^2+1} \leq \frac{2}{1+xy}$$

$$\Leftrightarrow xy(x^2+y^2)+2xy+x^2+y^2+2 \leq 2x^2y^2+2(x^2+y^2)+2$$

$$\Leftrightarrow xy(x^2+y^2-2xy)-(x^2+y^2-2xy) \leq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2(xy-1) \leq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $xy = 1$ hoặc $x = y > 0$.

Lời giải. Đặt $x = \sqrt{\frac{b}{a}}, y = \sqrt{\frac{c}{b}}, z = \sqrt{\frac{a}{c}} \Rightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow VT(1) = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}} + \sqrt{\frac{1}{1+y^2}} + \sqrt{\frac{1}{1+z^2}}$$

Giả sử $xy \leq 1 \Rightarrow z \geq 1$

$$\text{Vì } xy \leq 1 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{1}{1+x^2}} + \sqrt{\frac{1}{1+y^2}} \right)^2 \leq 2 \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \right) \leq \frac{4}{1+xy} = \frac{4z}{1+z}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{1+x^2}} + \sqrt{\frac{1}{1+y^2}} \leq 2\sqrt{\frac{z}{1+z}}$$

$$\text{Mặt khác ta lại có: } \sqrt{\frac{1}{1+z^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{1+z}$$

$$\text{Nhu vậy ta có : } VT(1) \leq 2\sqrt{\frac{z}{1+z}} + \frac{\sqrt{2}}{1+z}$$

$$\text{Xét hàm số } F(z) = 2\sqrt{\frac{z}{1+z}} + \frac{\sqrt{2}}{1+z}, z \geq 1$$

$$\text{Ta có : } F'(z) = \frac{\sqrt{1+z} - \sqrt{2z}}{\sqrt{z}(1+z)^2} = 0 \Rightarrow \sqrt{1+z} - \sqrt{2z} = 0 \Rightarrow z = 1.$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta có : } \max F = F(1) = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow VT(1) \leq \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1 \Leftrightarrow a = b = c$.

❖ **Bài toán 73.** Cho $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

Bổ đề. Với $0 < xy \leq 1$ ta có bất đẳng thức $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \leq \frac{2}{1+\sqrt{xy}}$

Chứng minh. Ta có $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} = \frac{2}{1+\sqrt{xy}} + \frac{(\sqrt{xy}-1)(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(x+1)(y+1)(\sqrt{xy}+1)} \leq \frac{2}{1+\sqrt{xy}}$

Lời giải. Đặt $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c} \Rightarrow x, y, z \in \left[\frac{1}{9}, 9\right]$ và $xyz = 1$.

$$\text{Khi đó } P = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $\frac{1}{9} \leq x \leq y \leq z \leq 9$.

Do $xyz = 1$ nên $z \geq 1$; $xy \leq 1$. Khi đó áp dụng bất đẳng thức ta có $P \leq \frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{z}+1} + \frac{1}{1+z}$

Đặt $\sqrt{z} = t, t \geq 1$. Khảo sát hàm số $f(t) = \frac{2t}{t+1} + \frac{1}{1+t^2}, t \in [1; +\infty)$.

Ta tìm được $\max_{[1; +\infty)} f(t) = \frac{8}{5} \Leftrightarrow t = 3$ hay $\max P = \frac{8}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9c \\ b = 3c \end{cases}$.

❖ **Bài toán 74.** Cho các số thực dương a, b, c thỏa điều kiện

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{ab}{2+c^2} + \frac{bc}{2+a^2} \right)} - \frac{1}{64} \left(\frac{a^4b^4 + b^4c^4}{a^4c^4} \right).$$

Bổ đề. Ta có với mọi $x, y > 0$ thì $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$.

Dấu đẳng xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Chứng minh. Thật vậy, bất đẳng thức đã cho được biến đổi tương đương trở thành :

$$2(x^2 + y^2) \geq x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức ta có : $x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} \geq \frac{\left(\frac{(x+y)^2}{2}\right)^2}{2} = \frac{(x+y)^4}{8}$

$$\text{Do đó : } \frac{a^4b^4 + b^4c^4}{a^4c^4} = \left(\frac{b}{c}\right)^4 + \left(\frac{b}{a}\right)^4 \geq \frac{1}{8} \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a}\right)^4 \Leftrightarrow -\frac{1}{64} \left(\frac{a^4b^4 + b^4c^4}{a^4c^4}\right) \leq -\frac{1}{64} \cdot \frac{1}{8} \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a}\right)^4 \quad (1)$$

$$\text{Từ giả thiết ta có : } \frac{ab}{2+c^2} + \frac{bc}{2+a^2} = \frac{ab}{(a^2+c^2)+(b^2+c^2)} + \frac{bc}{(a^2+b^2)+(a^2+c^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM- GM ta có :

$$\begin{aligned} \frac{ab}{(a^2+c^2)+(b^2+c^2)} + \frac{bc}{(a^2+b^2)+(a^2+c^2)} &\leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a^2b^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}} + \sqrt{\frac{b^2c^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}} \right) \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} \right) \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{bc} + \frac{b^2}{ab} \right) \right) \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} \right) \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó ta có đánh giá : } \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{ab}{2+c^2} + \frac{bc}{2+a^2} \right)} \leq \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} \right) \right)}$$

$$\text{Do đó ta có : } P \leq \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} \right) \right)} - \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{8} \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} \right)^4$$

$$\text{Đặt } t = \frac{b}{c} + \frac{b}{a}, t > 0. \text{ Xét hàm số } f(t) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} t \right)} - \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{8} t^4, t > 0$$

$$\text{Ta có : } f'(t) = \frac{1}{32\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{16}t}} - \frac{t^3}{128}$$

$$f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t^3}{128} \leq \frac{1}{32\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{16}t}} \Leftrightarrow t^3 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}t} \leq 8 \Leftrightarrow t^7 + 2t^6 - 32 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t^6 + 4t^5 + 8t^4 + 16t^3 + 32t^2 + 64t + 16) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < t \leq 2.$$

Lập bảng biến thiên ta thấy GTLN của $P = \frac{15}{32}$ đạt được khi $t = 2$ và dấu bằng ở các đánh

giá (1),(2) xảy ra . Do đó ta có :

$$\begin{cases} \frac{b}{c} + \frac{b}{a} = 2 \\ a = b = c \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

❖ **Bài toán 75.** Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$ và $a \geq \max\{b, c\}$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \frac{11}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \right) + 2\sqrt{\frac{a+7(b+c)}{a}} > \frac{15}{2}$$

Lời giải.

Bổ đề: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$ và $a \geq \max\{b, c\}$.

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \sqrt{\frac{b+c}{a}}$ (1)

Chứng minh bổ đề:

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{ab}{(b+c)(a+c)}} + \sqrt{\frac{ac}{(b+c)(a+b)}} \geq 1$; mặt khác, ta lại có

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(a+c)}} = \frac{2ab}{2\sqrt{a(b+c)b(a+c)}} \geq \frac{2ab}{bc+ac+2ab}; \text{ tương tự } \sqrt{\frac{ac}{(b+c)(a+b)}} \geq \frac{2ac}{bc+ba+2ac}$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{\frac{ab}{(b+c)(a+c)}} + \sqrt{\frac{ac}{(b+c)(a+b)}} \geq \frac{2(ab+ac)}{bc+ba+2ac} \geq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \sqrt{\frac{b+c}{a}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$ hoặc $b = 0, a = c$ hoặc $c = 0, a = b$

Quay lại bài toán

Xét hàm số $g(t) = t + \frac{11}{2t} + 2\sqrt{1 + \frac{7}{t^2}}$ với $t > 0$. Ta có

$$g'(t) = 1 - \frac{11}{2t^2} + 2 \frac{\frac{t}{\sqrt{t^2+7}} - \sqrt{t^2+7}}{t^2} = \frac{(\sqrt{t^2+7}-4)(2t^2+8\sqrt{t^2+7}+21)}{2t^2\sqrt{t^2+7}}$$

Vậy $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$ vì $t > 0$.

Lập bảng biến thiên, ta được GTNN của $g(t)$ bằng $f(3) = \frac{15}{2}$. Từ đây ta được

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}}\right) &= \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \frac{11}{2} \sqrt{\frac{b+c}{a}} + 2\sqrt{1 + \frac{7(b+c)}{a}} \\ &\leq \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \frac{11}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \right) + 2\sqrt{\frac{a+7(b+c)}{a}} \end{aligned}$$

Vậy ta được $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \frac{11}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \right) + 2\sqrt{\frac{a+7(b+c)}{a}} \geq \frac{15}{2}$. Do dấu bằng không xảy ra nên ta có điều phải chứng minh.

7. Vận dụng kỹ thuật dồn biến cổ điển.

❖ **Bài toán 76. (Nghệ An MO TST – 2010).** Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 - 6(a+b+c)$$

Lời giải :

Ta sẽ chứng minh : $P(a,b,c) \geq P(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc})$. Thật vậy :

$$\begin{aligned} P(a,b,c) - P(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}) &= a^3b^3 + a^3c^3 - 6(b+c) - 2a^3(\sqrt{bc})^3 + 12\sqrt{bc} \\ &= a^3 \left[(\sqrt{b})^3 - (\sqrt{c})^3 \right]^2 - 6(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 = \\ &= (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \left[a^3(b + \sqrt{bc} + c)^2 - 6 \right] \geq (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 [9a^3 \cdot bc - 6] = \\ &= (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 (9a^2 - 6) \geq 0 \quad (\text{Với giả sử } a = \text{Max}\{a,b,c\} \Rightarrow a \geq 1) . \end{aligned}$$

Lại có :

$$P(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}) = P\left(a, \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}\right) = 2a\sqrt{a} + \frac{1}{a^3} - 6a - \frac{12}{\sqrt{a}} .$$

$$\text{Đặt } \sqrt{a} = t, (t \geq 1) . \text{ Ta có : } f(t) = 2t^3 + \frac{1}{t^6} - 6t^2 - \frac{12}{t}$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh : } 2t^3 + \frac{1}{t^6} - 6t^2 - \frac{12}{t} \geq -15, \forall t \geq 1 \quad (*)$$

$$\text{Thật vậy : } (*) \Leftrightarrow 2t^9 - 6t^8 + 15t^6 - 12t^5 + 1 \geq 0 .$$

Xét hàm số : $g(t) = 2t^9 - 6t^8 + 15t^6 - 12t^5 + 1$, ta có :

$$g'(t) = 18t^8 - 48t^7 + 90t^5 - 60t^4 = 6t^4(3t^4 - 8t^3 + 15t - 10) = 6t^4 \cdot h(t) .$$

Xét : $h(t) = 3t^4 - 8t^3 + 15t - 10, \forall t \geq 1$, có :

$$h'(t) = 12t^3 - 24t^2 + 15; h''(t) = 36t^2 - 48t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta thấy : $h'(t) \geq h'\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{7}{9} > 0$.

Do đó : $h(t) \geq h(1) = 0 \Rightarrow g'(t) \geq 0$ nên : $g(t) \geq g(1) = 0$.

❖ **Bài toán 77. (MOSP 2001).** Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$ Chứng minh bất đẳng thức $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 4(a+b+c-1)$

Lời giải :

$$\begin{aligned} \text{Đặt : } P(a,b,c) &= (a+b)(b+c)(c+a) - 4(a+b+c-1) = \\ &= ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) - 4(a+b+c) + 6 \end{aligned}$$

Ta sẽ CM : $P(a,b,c) \geq P(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc})$, thật vậy :

$$\begin{aligned} P(a,b,c) - P(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}) &= \\ &= ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) - 4(b+c) - 2a\sqrt{bc}(a+\sqrt{bc}) - bc(2\sqrt{bc}) + 8\sqrt{bc} \\ &= bc(b+c-2\sqrt{bc}) - 4(b+c-2\sqrt{bc}) + a^2(b-2\sqrt{bc}+c) + a(b^2-2bc+b^2) \\ &= (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 [bc+a^2-4] + a(b-c)^2 = (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 [bc+a^2+a(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-4] = \\ &= (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 [bc+a^2+a(b+c)+2\sqrt{a}-4] \\ &= (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 [(a+b)(a+c)+2\sqrt{a}-4] \end{aligned}$$

Giả sử : $a = \text{Max}\{a,b,c\} \Rightarrow a \geq 1$, và : $(a+b)(a+c) \geq 4\sqrt{a^2bc} = 4\sqrt{a} \geq 4$.

Vậy :

$$\begin{aligned} P(a,b,c) &\geq P(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}) = P\left(a, \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}\right) = 2a\sqrt{a} + 8 + \frac{2}{a\sqrt{a}} - 4a - \frac{8}{\sqrt{a}} = 2t^3 + \frac{2}{t^3} - 4t^2 - \frac{8}{t} + 8 = f(t), \text{ Với } \\ &\sqrt{a} = t \geq 1). \end{aligned}$$

Ta có : $f'(t) = \frac{2(t^3 - 1)}{t^4} (3t^3 + 3 - 4t^2)$,

lại có : $g(t) = 3t^3 - 4t^2 + 3$,

có : $g'(t) = 9t^2 - 8t = t(9t - 8) > 0, \forall t \geq 1 \Rightarrow g(t) \geq g(1) = 2 > 0$.

Do đó : $f'(t) > 0, \forall t \geq 1$. Hay : $f(t) \geq f(1) = 0$. BĐT được CM.

Chương III. TUYỂN CHỌN MỘT SỐ BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC

Nội dung cơ bản của chương gồm

- Lựa chọn và giới thiệu một số bài toán bất đẳng thức hay và khó, cùng với đó là quá trình phân tích các hướng tiếp cận bài toán và các lời giải độc đáo.
- Tuyển chọn và giới thiệu một số bài toán bất đẳng thức từ các đề thi học sinh giỏi môn Toán cấp THCS, THPT và một số bất đẳng thức từ các đề thi vào lớp 10 chuyên toán trong một số năm trở lại đây.
- Giới thiệu các bài tập tổng hợp để các em học sinh có thể tự rèn luyện.

Chủ đề 11

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC HAY VÀ KHÓ

Trong chủ đề này, chúng tôi đã tuyển chọn và giới thiệu một số bài toán bất đẳng thức hay và khó, cùng với đó là quá trình phân tích để đi đến hình thành lời giải cho bài toán bất đẳng thức đó. Từ các bài toán đó ta sẽ thấy được quá trình phân tích đặc điểm của giả thiết bài toán cũng như bất đẳng thức cần chứng minh, từ đó có những nhận định, định hướng để tìm tòi lời giải và cách trình bày lời giải cho một bài toán bất đẳng thức.

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a^2(b+c)} + \frac{ca}{b^2(c+a)} + \frac{ab}{c^2(a+b)} \geq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Có thể nói đây là một bất đẳng thức hay tuy nhiên nó không thực sự khó. Quan sát bất đẳng thức ta có một cách tiếp cận bài toán như sau

Cách 1: Từ chiều của bất đẳng thức, ý tưởng đầu tiên là sử dụng bất đẳng thức Cauchy để đánh giá.

Nhưng ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho bao nhiêu số? Để ý bên vế trái bất đẳng thức có chứa $\frac{1}{a^2}$ và

bên vế phải lại chứa $\frac{1}{a}$ nên ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số, ta cũng cần triệt tiêu các đại

lượng $\frac{bc}{b+c}$. Chú ý đến bảo toàn dấu đẳng thức ta có đánh giá sau

$$\frac{bc}{a^2(b+c)} + \frac{b+c}{4bc} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{a^2(b+c)} \cdot \frac{b+c}{4bc}} = \frac{1}{a}$$

Thực hiện tương tự ta có

$$\frac{ca}{b^2(c+a)} + \frac{c+a}{4ca} \geq \frac{1}{b}; \quad \frac{ab}{c^2(a+b)} + \frac{a+b}{4ab} \geq \frac{1}{c}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{bc}{a^2(b+c)} + \frac{ca}{b^2(c+a)} + \frac{ab}{c^2(a+b)} + \frac{b+c}{4bc} + \frac{c+a}{4ca} + \frac{a+b}{4ab} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Để ý là $\frac{b+c}{4bc} + \frac{c+a}{4ca} + \frac{a+b}{4ab} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$, lúc này ta thu được

$$\frac{bc}{a^2(b+c)} + \frac{ca}{b^2(c+a)} + \frac{ab}{c^2(a+b)} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Hay
$$\frac{bc}{a^2(b+c)} + \frac{ca}{b^2(c+a)} + \frac{ab}{c^2(a+b)} \geq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Ý tưởng thứ hai là áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{bc}{a^2(b+c)} + \frac{ca}{b^2(c+a)} + \frac{ab}{c^2(a+b)} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{abc[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)]}$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{abc[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)]} \geq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}$$

Biến đổi về trái ta được

$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{abc[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)]} = \frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(ab+bc+ca)} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}$$

Điều này có nghĩa là bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3: Ý tưởng tiếp theo là sử dụng phép biến đổi tương đương để chứng minh bài toán. Chú ý đến phép biến đổi $\frac{bc}{a^2(b+c)} + \frac{1}{a} = \frac{ab+bc+ca}{a^2(b+c)}$, khi đó ta thu được bất đẳng thức cần chứng sau

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2(b+c)} + \frac{ab+bc+ca}{b^2(c+a)} + \frac{ab+bc+ca}{c^2(a+b)} \geq \frac{3}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Biến đổi về trái ta lại được

$$\frac{3}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{3(ab+bc+ca)}{2abc}.$$

Đến lúc này ta đưa bài toán cần chứng minh thành

$$\frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)} \geq \frac{3}{2abc}$$

Đến đây ta biến đổi bất đẳng thức bằng cách nhân cả hai vế với tích abc ta được

$$\frac{bc}{ab+ca} + \frac{ca}{bc+ab} + \frac{ab}{ca+bc} \geq \frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức cuối cùng là bất đẳng thức Neibitz. Điều này đồng nghĩa với việc bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 4: Ta tiếp tục phân tích tìm lời giải với ý tưởng đổi biến, quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy

$$\frac{bc}{a^2(b+c)} = \frac{1}{a^2 \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)},$$

$$\frac{1}{a^2 \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} + \frac{1}{b^2 \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right)} + \frac{1}{c^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Đến đây ta đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$. Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$$

Bất đẳng thức cuối cùng làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 2. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$$

Phân tích và lời giải

Cũng như bài toán trên ta dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Với bất đẳng thức trên ta cũng có một số ý tưởng tiếp cận bài toán như sau

Cách 1: Ý tưởng đầu tiên là đánh giá bất đẳng thức trên theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Khi đó ta được

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} = \frac{a^2}{ab+2ca} + \frac{b^2}{bc+2ab} + \frac{c^2}{ca+2bc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}$$

Bài toán sẽ được hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq 1$, nhưng đánh giá này chính là

$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$. Đây là một bất đẳng thức quen thuộc.

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2: Ta tiếp tục đánh giá bất đẳng thức với ý tưởng đổi biến. Quan sát bất đẳng thức ta hướng đến việc đổi biến làm đơn giản mẫu các phân số. Cho nên rất tự nhiên ta thực hiện phép đặt $x = b+2c$; $y = c+2a$; $z = a+2b$, khi đó suy ra $x, y, z > 0$. Thực hiện biểu diễn các biến cũ theo

biến mới ta được $a = \frac{4y+z-2x}{9}$; $b = \frac{4z+x-2y}{9}$; $c = \frac{4x+y-2z}{9}$

Khi này bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{4y+z-2x}{9x} + \frac{4z+x-2y}{9y} + \frac{4x+y-2z}{9z} \geq 1$$

Hay
$$\frac{4}{9} \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \right) + \frac{1}{9} \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \right) - \frac{2}{3} \geq 1$$

Dễ dàng nhận ra $\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \geq 3$; $\frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \geq 3$ theo bất đẳng thức Cauchy. Do đó ta được

$$\frac{4}{9} \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \right) + \frac{1}{9} \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \right) - \frac{2}{3} \geq \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 3: Bây giờ ta thử đánh giá bất đẳng thức trên theo hướng đánh giá mẫu của các phân thức xem sau. Quan sát ta nhận thấy $b+2c + b+2a = 2(a+b+c)$, lại theo một bất đẳng thức Cauchy ta thấy

$(b+2c)(b+2a) \leq \frac{(2a+2b+2c)^2}{4} = (a+b+c)^2$ cho nên rất tự nhiên ta thực hiện phép đánh giá sau

$$\frac{a}{b+2c} = \frac{a(b+2a)}{(b+2c)(b+2a)} \geq \frac{a(b+2a)}{(a+b+c)^2}$$

Thực hiện tương tự ta được

$$\frac{b}{c+2a} \geq \frac{b(c+2b)}{(a+b+c)^2}; \quad \frac{c}{a+2b} \geq \frac{c(a+2c)}{(a+b+c)^2}$$

Lúc này ta thu được bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq \frac{a(b+2a) + b(c+2b) + c(a+2c)}{(a+b+c)^2}$$

Đề ý là

$$\frac{a(b+2a) + b(c+2b) + c(a+2c)}{(a+b+c)^2} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)}{(a+b+c)^2} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c} \geq 1$$

Phân tích và lời giải

Để dàng dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{1}{3}$. Trước hết ta áp dụng giả thiết viết lại

bất đẳng thức cần chứng minh thành $\frac{a}{c+2b} + \frac{b}{a+2c} + \frac{c}{b+2a} \geq 1$. Đây chính là bất đẳng thức trong bài 2, do đó ta có thể chứng minh bất đẳng thức theo các cách như trên. Ngoài ra ta còn có thêm giả thiết $a + b + c = 1$, ta thử phân tích xem còn có thêm ý tưởng nào khác không?

Cách 1: Đề ý là $a + b + c = 1$ ta có $(a + b + c)^2 = 1$. Khi đó ta cần biến đổi $a + b + c$ làm xuất hiện

các đại lượng $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c+2b}}; \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+2c}}; \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b+2a}}$. Với nhận định này ta biến đổi được như sau

$$a + b + c = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c+2b}} \sqrt{a(c+2b)} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+2c}} \sqrt{b(a+2c)} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b+2a}} \sqrt{c(b+2a)}$$

Khi đó ta sẽ được

$$(a + b + c)^2 = \left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c+2b}} \sqrt{a(c+2b)} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+2c}} \sqrt{b(a+2c)} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b+2a}} \sqrt{c(b+2a)} \right]^2$$

Đề ý là theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c+2b}} \sqrt{a(c+2b)} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+2c}} \sqrt{b(a+2c)} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b+2a}} \sqrt{c(b+2a)} \right]^2 \\ & \leq \left(\frac{a}{c+2b} + \frac{b}{a+2c} + \frac{c}{b+2a} \right) [a(c+2b) + b(a+2c) + c(b+2a)] \end{aligned}$$

Như vậy lúc này ta được $\frac{a}{c+2b} + \frac{b}{a+2c} + \frac{c}{b+2a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}$

Rõ ràng đây cũng là một đánh giá đúng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Điều này đồng nghĩa với bài toán được chứng minh.

Cách 2: Cũng từ giả thiết $a + b + c = 1$ ta được $1 + b - a > 0$, suy ra $\frac{a}{1 + b - a} > 0$.

Dễ thấy $1 - (a - b)^2 \leq 1$, do đó ta có $\frac{a}{1 + b - a} \geq \frac{a[1 - (a - b)^2]}{1 + b - a} = a(1 + a - b)$

Ta thực hiện tương tự được

$$\frac{b}{1 + c - b} \geq b(1 + b - c); \quad \frac{c}{1 + a - c} \geq c(1 + c - a)$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{1 + b - a} + \frac{b}{1 + c - b} + \frac{c}{1 + a - c} \geq a(1 + a - b) + b(1 + b - c) + c(1 + c - a)$$

Bài toán sẽ được hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$a(1 + a - b) + b(1 + b - c) + c(1 + c - a) \geq 1$$

$$\text{Hay} \quad a + b + c + a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \geq 1$$

Chú ý đến đánh giá $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ ta thấy đánh giá cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 4. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b + c - a} + \frac{b^2}{c + a - b} + \frac{c^2}{a + b - c} \geq a + b + c$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có $b + c - a > 0$; $c + a - b > 0$; $a + b - c > 0$. Chú ý đến hình thức phát biểu của bài toán ta có một số ý tưởng chứng minh như sau

Cách 1: Cách phát biểu về trái của bất đẳng thức làm ta liên tưởng đến áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức và ta có kết quả là

$$\frac{a^2}{b + c - a} + \frac{b^2}{c + a - b} + \frac{c^2}{a + b - c} \geq \frac{(a + b + c)^2}{b + c - a + c + a - b + a + b - c} = a + b + c$$

Đây chính là điều ta cần phải chứng minh.

Cách 2: Ý tưởng thứ hai là sử dụng bất đẳng thức Cauchy. Khi đó ta được

$$\frac{a^2}{b + c - a} + b + c - a \geq 2a; \quad \frac{b^2}{c + a - b} + c + a - b \geq 2b; \quad \frac{c^2}{a + b - c} + a + b - c \geq 2c$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^2}{b + c - a} + \frac{b^2}{c + a - b} + \frac{c^2}{a + b - c} + a + b + c \geq 2(a + b + c)$$

$$\text{Hay} \quad \frac{a^2}{b + c - a} + \frac{b^2}{c + a - b} + \frac{c^2}{a + b - c} \geq a + b + c$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3: Trước hết ta chứng minh $\frac{a^2}{b + c - a} \geq 3a - (b + c)$.

Thật vậy, với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên bất đẳng thức trên tương đương với

$$a^2 \geq (b+c-a)[3a-(b+c)]$$

$$\Leftrightarrow a^2 \geq -3a^2 + 4a(b+c) - (b+c)^2 \Leftrightarrow [2a-(b+c)]^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng, do đó bất đẳng thức trên được chứng minh.

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{b^2}{c+a-b} \geq 3b-(c+a); \frac{c^2}{a+b-c} \geq 3c-(a+b)$$

Do đó ta được

$$\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq 3(a+b+c) - 2(a+b+c) = a+b+c$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy có một số ý tưởng tiếp bài toán như sau

Cách 1: Ý tưởng đầu tiên là sử dụng bất đẳng thức Cauchy. Ở đây ta phân tích xem nên sử dụng cho mấy số. Đầu tiên ta chú ý đến đại lượng $\frac{1}{a^3}$ bên vế trái nên rất tự nhiên ta nghĩ đến bất đẳng thức Cauchy cho

ba số, ta cũng cần phải làm triệt tiêu $\frac{1}{b+c}$. Để ý đến bảo toàn dấu đẳng thức ta có đánh giá là

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{b+c}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2a}.$$

Áp dụng tương tự ta có

$$\frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{c+a}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2b}; \frac{1}{c^3(a+b)} + \frac{a+b}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2c}$$

Lúc này cộng theo vế các bất đẳng thức trên thì được

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2a} + \frac{3}{2b} + \frac{3}{2c}$$

Hay
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{3}{2}$$

Để ý tiếp ta lại thấy
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 3$$

Do đó ta được
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Như vậy bài toán được chứng minh.

Cũng sử dụng bất đẳng thức Cauchy nhưng với hai số dương ta có thể thực hiện được không? Ta

chú ý đến đại lượng $\frac{1}{a^3(b+c)}$ bên vế trái, nếu muốn đánh giá về $\frac{1}{a}$ ta cần khử được $\frac{1}{a(b+c)}$ và như

vậy chú ý đến bảo toàn dấu đẳng thức ta sẽ áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương đó là

$\frac{1}{a^3(b+c)}$ và $\frac{a(b+c)}{4}$. Khi đó ta được

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{a(b+c)}{4} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^3(b+c)} \cdot \frac{a(b+c)}{4}} = \frac{1}{a}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{b(c+a)}{4} \geq \frac{1}{b}; \quad \frac{1}{c^3(a+b)} + \frac{c(a+b)}{4} \geq \frac{1}{c}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} + \frac{ab+bc+ca}{2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Để ý đến giả thiết $abc = 1$ ta được

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Đến đây ta thực hiện tương tự như trên.

Cách 2: Chú ý đến giả thiết $abc = 1$ ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh

$$\frac{1}{\frac{a^3(b+c)}{abc}} + \frac{1}{\frac{b^3(c+a)}{abc}} + \frac{1}{\frac{c^3(a+b)}{abc}} \geq \frac{3}{2}$$

Hay

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}} + \frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \geq \frac{3}{2}$$

Đến đây để đơn giản hóa ta đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, suy ra $xyz = 1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

Đến đây ta có hai hướng xử lý bất đẳng thức trên.

Hướng 1: Áp dụng các bất đẳng thức Bunhiacopski dạng phân thức và bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2}$$

Hướng 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} &\geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z} \cdot \frac{y+z}{4}} = x \\ \frac{y^2}{z+x} + \frac{z+x}{4} &\geq 2\sqrt{\frac{y^2}{z+x} \cdot \frac{z+x}{4}} = y \\ \frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} &\geq 2\sqrt{\frac{z^2}{x+y} \cdot \frac{x+y}{4}} = z \end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y+z}{2} \geq x+y+z$$

Hay
$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 6. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^5}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^5}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát cách phát biểu của bài toán thì ý tưởng đầu tiên là sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski dạng phân thức và khi đó ta được

$$\frac{a^5}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^5}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^5}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2}$$

Như vậy ta cần chỉ ra được

$$\frac{(a^3+b^3+c^3)^2}{a^3+b^3+c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2} \geq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

Hay
$$2(a^3+b^3+c^3) \geq a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2$$

Dễ thấy $a^3+b^3 \geq ab(a+b)$; $b^3+c^3 \geq bc(b+c)$; $c^3+a^3 \geq ca(c+a)$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$2(a^3+b^3+c^3) \geq a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ý tưởng thứ hai là sử dụng bất đẳng thức Cauchy, để ý đến đại lượng $\frac{a^5}{a^2+ab+b^2}$ bên vế trái và đại lượng $\frac{a^3}{3}$ bên vế phải, ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương, để ý đến dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$ và cần triệt tiêu được a^2+ab+b^2 nên ta chọn hai số đó là

$$\frac{a^5}{a^2+ab+b^2}; \frac{a(a^2+ab+b^2)}{9}. \text{ Khi đó ta được}$$

$$\frac{a^5}{a^2+ab+b^2} + \frac{a(a^2+ab+b^2)}{9} \geq 2\sqrt{\frac{a^5}{a^2+ab+b^2} \cdot \frac{a(a^2+ab+b^2)}{9}} = \frac{2a^3}{3}$$

Áp dụng tương tự ta có

$$\frac{b^5}{b^2+bc+c^2} + \frac{b(b^2+bc+c^2)}{9} \geq \frac{2b^3}{3}; \frac{c^5}{c^2+ca+a^2} + \frac{c(c^2+ca+a^2)}{9} \geq \frac{2c^3}{3}$$

Để đơn giản hóa ta đặt
$$A = \frac{a^5}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^5}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^5}{c^2+ca+a^2}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$A + \frac{a(a^2+ab+b^2)}{9} + \frac{b(b^2+bc+c^2)}{9} + \frac{c(c^2+ca+a^2)}{9} \geq \frac{2(a^3+b^3+c^3)}{3}$$

Hay
$$A \geq \frac{5(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2)}{9}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{5(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2)}{9} \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2$$

Đến đây ta thực hiện tương tự như cách 1. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 7. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 30$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{1}{3}$. Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta nhận thấy các biến đều nằm dưới mẫu nên rất tự nhiên ta nghĩ đến các bất đẳng thức Cauchy, Bunhiacopxki dạng phân thức

Cách 1: Trước hết ta tiếp cận bất đẳng thức trên với ý tưởng đánh giá bằng bất đẳng thức Cauchy. Để ý đến bảo toàn dấu đẳng thức ta có $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ nên đầu tiên để tạo ra đại lượng

ab + bc + ca ta có đánh giá quen thuộc là $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab + bc + ca}$.

Do đó ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9}{ab + bc + ca}$$

Như vậy ta cần phải chứng minh được

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9}{ab + bc + ca} \geq 30$$

Lại chú ý đến đánh giá tương tự như trên nhưng ta cần cộng các mẫu sao cho có thể viết được thành $(a + b + c)^2$ điều này có nghĩa là ta cần đến $2(ab + bc + ca)$. Đến đây ta hai hướng là:

- Thứ nhất là đánh giá $\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2}{2(ab + bc + ca)} \geq \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{(a + b + c)^2} = (1 + \sqrt{2})^2$, Tuy nhiên

đánh giá này không xảy ra dấu đẳng thức.

- Thứ hai là đánh giá $\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca} \geq \frac{9}{(a + b + c)^2} = 9$.

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $\frac{7}{ab + bc + ca} \geq 21$

Tuy nhiên, dễ thấy $\frac{(a + b + c)^2}{3} \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}$

Do đó ta được $\frac{7}{ab + bc + ca} \geq 21$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra thì ta được

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{3ab} + \frac{1}{3bc} + \frac{1}{3ca} &\geq \frac{16}{a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)} \\ &\geq \frac{16}{(a + b + c)^2 + \frac{1}{3}(a + b + c)^2} = 12\end{aligned}$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$\frac{2}{3} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \geq 18$$

Để ý tiếp bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{2}{3} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \geq \frac{6}{ab + bc + ca} \geq \frac{6}{\frac{1}{3}(a + b + c)^2} = 18$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3: Theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab + bc + ca}$$

Do đó ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9}{ab + bc + ca}$$

Áp dụng tiếp đánh giá trên ta được

$$\left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca} \right) (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) \geq 9$$

Hay
$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2}{ab + bc + ca} \geq 9$$

Mặt khác ta lại có
$$\frac{7}{ab + bc + ca} \geq 21$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 30.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 8. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}} \geq 3$$

Phân tích và lời giải

Trước hết để mất dấu căn ta đặt $x = \sqrt{a}$; $y = \sqrt{b}$; $z = \sqrt{c}$, khi đó từ giả thiết ta có

$x^2 + y^2 + z^2 = 3$ và bất đẳng thức được viết lại thành $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq 3$. Quan sát bất đẳng thức và dự

đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $x = y = z = 1$, ta có một số ý tưởng tiếp cận bài toán như sau

Cách 1: Từ cách phát biểu về trái ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Tuy nhiên cần chú ý đến giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, khi đó ta có đánh giá

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} = \frac{x^4}{x^2y} + \frac{y^4}{y^2z} + \frac{z^4}{z^2x} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2y + y^2z + z^2x} = \frac{9}{x^2y + y^2z + z^2x}$$

Ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{9}{x^2y + y^2z + z^2x} \geq 3 \Leftrightarrow 3 \geq x^2y + y^2z + z^2x$$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$x^3 + xy^2 \geq 2x^2y; y^3 + yz^2 \geq 2y^2z; z^3 + zx^2 \geq 2z^2x$$

$$\text{Do đó ta có } x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 \geq 3(x^2y + y^2z + xz^2)$$

Mà ta có đẳng thức quen thuộc

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2$$

Do đó ta được

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z) \geq 3(x^2y + y^2z + xz^2)$$

Để ý tiếp đến giả thiết $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, ta có $x + y + z \geq x^2y + y^2z + xz^2$

Mà ta có $x + y + z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} = 3$ suy ra $3 \geq x^2y + y^2z + z^2x$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2: Cũng từ cách phát biểu về trái ta nghĩ đến đánh giá bằng bất đẳng thức Cauchy, tuy nhiên khi áp dụng trực tiếp ta cần chú ý làm triệt tiêu các mẫu số và đánh giá về bình phương của các biến. Do đó ta đánh giá như sau

$$\frac{x^2}{y} + x^2y \geq 2x^2; \frac{y^2}{z} + y^2z \geq 2y^2; \frac{z^2}{x} + z^2x \geq 2z^2$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + x^2y + y^2z + z^2x \geq 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 6$$

$$\text{Hay } \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq 6 - (x^2y + y^2z + z^2x)$$

Bài toán sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$6 - (x^2y + y^2z + z^2x) \geq 3 \text{ hay } 3 \geq x^2y + y^2z + z^2x$$

Đến đây ta làm như cách thứ 1.

Cách 3: Cũng áp dụng bất đẳng thức Cauchy, tuy nhiên trong tình huống này ta bình phương hai vế trước

Đặt $A = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}$, khi đó ta được

$$A^2 = \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \right)^2 = \frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{z^2} + \frac{z^4}{x^2} + 2 \left(\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} \right)$$

Đến đây ta chú ý đến cách ghép cặp sau

$$\begin{aligned} \frac{x^4}{y^2} + \frac{x^2y}{z} + \frac{x^2y}{z} + z^2 &\geq 4x^2 \\ \frac{y^4}{z^2} + \frac{y^2z}{x} + \frac{y^2z}{x} + x^2 &\geq 4y^2 \\ \frac{z^4}{x^2} + \frac{z^2x}{y} + \frac{z^2x}{y} + y^2 &\geq 4z^2 \end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$A^2 + (x^2 + y^2 + z^2) \geq 4(x^2 + y^2 + z^2) \Leftrightarrow A^2 \geq 9 \Leftrightarrow A \geq 3$$

Hay
$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Cách 4: Trong các hướng tiếp cận trên ta đều thực hiện đánh giá sau quá trình đổi biến mà quên đi một đánh giá quan trọng là $2\sqrt{b} \leq b + 1$, khi đó ta có $\frac{a}{\sqrt{b}} \geq \frac{2a}{b+1}$. Đây là một đánh giá cùng chiều mà vẫn

bảo toàn dấu đẳng thức, ta thử thực hiện tiếp xem sao

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}} \geq \frac{2a}{b+1} + \frac{2b}{c+1} + \frac{2c}{a+1}$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $\frac{2a}{b+1} + \frac{2b}{c+1} + \frac{2c}{a+1} \geq 3$. Nhìn cách phát biểu của bất đẳng thức ta nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{2a}{b+1} + \frac{2b}{c+1} + \frac{2c}{a+1} \geq \frac{2(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+3} \geq \frac{6(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+9}$$

Ta cần chứng minh được
$$\frac{6(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+9} = 3$$

Hay
$$2(a+b+c)^2 = (a+b+c)^2 + 9 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 = 9 \Leftrightarrow a+b+c = 3$$

Đẳng thức cuối cùng chính là giả thiết. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 9. Cho a, b, c là các số thực không âm bất kì. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$, quan sát bất đẳng thức ta nghĩ đến một số ý tưởng tiếp cận như Sử dụng nguyên lí Dirichlet, sử dụng tính chất của tam thức bậc hai, sử dụng bất đẳng thức Cauchy,..., bây giờ ta đi phân tích từng ý tưởng để tìm lời giải cho bài toán.

Cách 1: Trước hết ta thấy ta để ý đến đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$ điều này có nghĩa là khi đẳng thức xảy ra thì $a-1; b-1; c-1$ cùng bằng 0, ngoài ra trong bất đẳng thức chứa các đại lượng

$ac, bc, abc, \dots$ nên ta nghĩ đến tích $c(a-1)(b-1)$, tuy nhiên ta chưa thể khẳng định được tích đó có không âm hay không nên ta sử dụng nguyên lí Dirichlet.

Theo nguyên lí Dirichlet trong ba số $a-1; b-1; c-1$ luôn tồn tại hai số cùng dấu, không mất tính tổng quát ta giả sử hai đó là $a-1; b-1$, khi đó ta có

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow c(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow abc - ac - bc + c \geq 0$$

Khi đó ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 = (a-b)^2 + (1-c)^2 + 2(abc - ac - bc + c) + 2(ab + bc + ca)$$

Dễ thấy $(a-b)^2 + (1-c)^2 + 2(abc - ac - bc + c) \geq 0$ nên ta có

$$(a-b)^2 + 2ab + (1-c)^2 + 2c + 2abc - 2ac - 2bc + 2(bc + ca) \geq 2(ab + bc + ca)$$

$$\text{Suy ra } a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2: Để thấy bất đẳng thức có bậc hai đối với mỗi biến do đó ta có thể viết lại bất đẳng thức về dạng đa thức biến a , còn b và c đóng vai trò tham số

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh là

$$a^2 + 2(bc - b - c)a + b^2 + c^2 - 2bc + 1 \geq 0$$

Xét $f(a) = a^2 + 2(bc - b - c)a + b^2 + c^2 - 2bc + 1$

Quan sát đa thức $f(a)$ ta nhận thấy nếu $bc - b - c \geq 0$ thì khi đó ta luôn có $f(a) \geq 0$, tức là

$$a^2 + 2(bc - b - c)a + b^2 + c^2 - 2bc + 1 \geq 0.$$

Bây giờ ta xét trường hợp sau $bc - b - c \leq 0$

Khi đó ta có $\Delta'_a = (bc - b - c)^2 - (b^2 + c^2 - 2bc + 1)$

Để ý đến hệ số của hạng tử bậc hai là số dương nên để $f(a) \geq 0$ thì ta phải chỉ ra được

$$\Delta'_a = (bc - b - c)^2 - (b^2 + c^2 - 2bc + 1) \leq 0$$

Hay $bc(b - 2)(c - 2) - 1 \leq 0$

Để ý đến $bc - b - c \leq 0$ ta được $(b - 1)(c - 1) \leq 1$, lúc này xảy ra các khả năng sau

- Cả $(b - 1); (c - 1)$ cùng nhỏ hơn 1 hay cả b, c đều nhỏ hơn 2, khi đó theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$b(2 - b) \leq \frac{(b + 2 - b)^2}{4} = 1; \quad c(2 - c) \leq \frac{(c + 2 - c)^2}{4} = 1$$

Suy ra $bc(b - 2)(c - 2) \leq 1$ nên ta có $bc(b - 2)(c - 2) - 1 \leq 0$.

- Trong hai số $(b - 1); (c - 1)$ có một số lớn hơn 1 và một số nhỏ hơn 1 khi đó trong b, c có một số lớn hơn 2 và một số nhỏ hơn 2 suy ra $bc(b - 2)(c - 2) \leq 0$ nên ta cũng có $bc(b - 2)(c - 2) - 1 \leq 0$.

Như vậy cả hai khả năng đều cho $\Delta'_a \leq 0$ nên bất đẳng thức được chứng minh. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Cách 3: Để thấy theo bất đẳng thức Cauchy ta có đánh giá

$$2abc + 1 = abc + abc + 1 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Lúc này ta được bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.

Ta cần chỉ ra được $a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 2(ab + bc + ca)$. Để làm mất căn bậc 3 ta có thể đặt $a^2 = x^3; b^2 = y^3; c^2 = z^3$, khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2(\sqrt{x^3y^3} + \sqrt{y^3z^3} + \sqrt{z^3x^3})$$

Để ý đến đánh giá $2\sqrt{xy} \leq x + y$ khi đó ta viết được

$$2(\sqrt{x^3y^3} + \sqrt{y^3z^3} + \sqrt{z^3x^3}) \leq xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh xong nếu ta chỉ ra được

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)$$

Khai triển và phân tích ta được bất đẳng thức

$$xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$$

Đây là một đánh giá đúng quen thuộc. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 4: Ngoài các cách giải như trên ta cũng có thể tham khảo thêm cách giải sau:

Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh là

$$(a+b+c)^2 + 2abc + 1 \geq 4(ab+bc+ca)$$

Đặt $a+b+c = k$, khi đó ta cần phải chứng minh

$$k^2 + 2abc + 1 \geq 4(ab+bc+ca) \Leftrightarrow 4(ab+bc+ca) - k^2 \leq 2abc + 1$$

Ta dễ dàng chứng minh được $abc \leq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ hay

$$\begin{aligned} abc &\leq (k-2a)(k-2b)(k-2c) \Leftrightarrow 4k(ab+bc+ca) - k(a+b+c) \leq 8abc \\ &\Leftrightarrow 4(ab+bc+ca) - k^2 \leq \frac{9abc}{k} \end{aligned}$$

Như vậy để hoàn tất chứng minh ta chỉ cần chỉ ra được

$$\frac{9abc}{k} \leq 2abc + 1 \Leftrightarrow \frac{(9-2k)abc}{k} \leq 1$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{k^3}{27}$ nên cần chứng minh

$$\frac{(9-2k)abc}{k} \leq \frac{(9-2k)k^3}{27k} = \frac{(9-2k)k^2}{27} \leq 1$$

+ Nếu $9-2k < 0$, bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.

+ Nếu $9-2k \geq 0$, khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{(9-2k)k^2}{27} \leq \frac{1}{27} \left(\frac{9-2k+k+k}{3} \right)^3 = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 10. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{ab+3c} + \frac{b}{bc+3a} + \frac{c}{ca+3b} \geq \frac{3}{4}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát cách phát biểu của bài toán ta nghĩ đến sử dụng các bất đẳng thức Bunhiacopxki, Cauchy,... Chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta có các ý tưởng tiếp cận bài toán như sau

Cách 1: Ý tưởng đầu tiên là sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, khi đó ta được

$$\begin{aligned} \frac{a}{ab+3c} + \frac{b}{bc+3a} + \frac{c}{ca+3b} &= \frac{a^2}{a^2b+3ac} + \frac{b^2}{b^2c+3ab} + \frac{c^2}{c^2a+3bc} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2b+b^2c+c^2a+3(ab+bc+ca)} \end{aligned}$$

$$\text{Ta cần chứng minh } \frac{(a+b+c)^2}{a^2b+b^2c+c^2a+3(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{4}.$$

Hay ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} 4(a+b+c)^2 &\geq 3(a^2b+b^2c+c^2a) + 9(ab+bc+ca) \\ \Leftrightarrow 4(a^2+b^2+c^2) &\geq 3(a^2b+b^2c+c^2a) + ab+bc+ca \end{aligned}$$

Mà ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, do đó để hoàn tất chứng minh ta cần chỉ ra được

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Nhận thấy trong bất đẳng thức cần chứng minh, vế trái có bậc 2 và vế phải có bậc 3, do đó trước hết ta đồng bậc hai về. Chú ý đến giả thiết $a + b + c = 3$ ta có

$$\begin{aligned} 3(a^2 + b^2 + c^2) &\geq 3(a^2b + b^2c + c^2a) \\ \Leftrightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) &\geq 3(a^2b + b^2c + c^2a) \\ \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + ab^2 + bc^2 + ca^2 &\geq 2(a^2b + b^2c + c^2a) \\ \Leftrightarrow a(a - b)^2 + b(b - c)^2 + c(c - a)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng.

Hoặc ta có thể chứng minh theo bất đẳng thức Cauchy như sau

$$a^3 + ab^2 \geq a^2b; b^3 + bc^2 \geq b^2c; c^3 + ca^2 \geq c^2a$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta cũng được điều phải chứng minh.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Cách 2: Trong bài toán có giả thiết $a + b + c = 3$ và trong bất đẳng thức cũng xuất hiện các số 3. Vậy thì các số 3 đó ẩn ý gì hay không?

Để ý ta thấy $ab + 3c = ab + c(a + b + c) = (a + c)(b + c)$, áp dụng tương tự ta viết lại được bất đẳng thức cần chứng minh là

$$\frac{a}{(a + c)(b + c)} + \frac{b}{(a + b)(c + a)} + \frac{c}{(c + a)(a + b)} \geq \frac{3}{4}$$

Đến đây ta có các hướng xử lý bất đẳng thức trên

+ Hướng 1: Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \frac{a}{(a + c)(b + c)} + \frac{b}{(a + b)(c + a)} + \frac{c}{(c + a)(a + b)} &\geq \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow a(a + b) + b(b + c) + c(c + a) &\geq \frac{3}{4}(a + b)(b + c)(c + a) \\ \Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) &\geq 3(3 - a)(3 - b)(3 - c) \\ \Leftrightarrow 4(9 - ab - bc - ca) &\geq 3[27 - 9(a + b + c) + 3(ab + bc + ca) - abc] \\ \Leftrightarrow 36 - 4(ab + bc + ca) &\geq 9(ab + bc + ca) - 3abc \\ \Leftrightarrow 36 + 3abc &\geq 13(ab + bc + ca) \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng ta thấy có sự xuất hiện của các đại lượng $ab + bc + ca$; abc và chú ý đến chiều của bất đẳng thức ta để ý đến $abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$ hay

$$\begin{aligned} abc &\geq (3 - 2a)(3 - 2b)(3 - 2c) \Leftrightarrow 3abc + 9 \geq 4(ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow 3abc + 36 &\geq 4(ab + bc + ca) + 27 \end{aligned}$$

Đến đây để hoàn tất chứng minh ta cần chỉ ra được

$$4(ab + bc + ca) + 27 \geq 13(ab + bc + ca) \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 3$$

Vì $9 = (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \Rightarrow ab + bc + ca \leq 3$. Như vậy bài toán được chứng minh xong.

+ Hướng 2: Để đơn giản hóa bất đẳng thức ta đặt $x = b + c$; $y = c + a$; $z = a + b$, khi đó ta được $x + y + z = 6$.

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{y+z-x}{xy} + \frac{z+x-y}{yz} + \frac{x+y-z}{zx} \geq \frac{3}{2}$$

Hay
$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3xyz}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^3 = 8 \Rightarrow \frac{3xyz}{2} \leq 12 \text{ và } x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} = 12$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta có $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{3xyz}{2}$. Đến đây bài toán được chứng minh xong.

+ Hướng 3: Từ đại lượng $\frac{a}{(a+c)(b+c)}$ ta liên tưởng đến kỹ thuật thêm – bớt trong bất đẳng thức

Cauchy, ta được

$$\frac{a}{(a+c)(b+c)} + \frac{a(a+c)}{8} + \frac{a(b+c)}{8} \geq \frac{3a}{4} \Rightarrow \frac{a}{(a+c)(b+c)} + \frac{a^2 + ab + 2ac}{8} \geq \frac{3a}{4}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{b}{(a+b)(c+a)} + \frac{b^2 + bc + 2ab}{8} \geq \frac{3b}{4}; \quad \frac{c}{(b+c)(a+b)} + \frac{c^2 + ca + 2bc}{8} \geq \frac{3c}{4}$$

Gọi vế trái của bất đẳng thức là A, khi đó cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$A + \frac{a^2 + ab + 2ac}{8} + \frac{b^2 + bc + 2ab}{8} + \frac{c^2 + ca + 2bc}{8} \geq \frac{3(a+b+c)}{4}$$

$$\text{Hay } A \geq \frac{9}{4} - \frac{(a+b+c)^2 + (ab+bc+ca)}{8} \geq \frac{9}{4} - \frac{(a+b+c)^2 + \frac{(a+b+c)^2}{3}}{8} = \frac{3}{4}$$

Đến đây bài toán được chứng minh xong.

Bài 11. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$, quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy vế trái chứa các căn bậc hai, do đó ta hướng đến đánh giá làm mất các căn bậc hai. Tuy nhiên nếu ta sử dụng đánh giá $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$ thì sẽ thu được bất đẳng thức ngược chiều. Nên ta nghĩ đến bình phương hai vế, có điều nếu khai triển theo phép biến đổi tương đương thì vẫn còn căn bậc hai. Áp dụng một đánh giá quen thuộc ta có

$$3 \left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{c^2+a^2}{2} \right) \geq \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}} \right)^2$$

$$\text{Hay } \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$$

$$\text{Nhu vậy ta cần chỉ ra được } \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Chú ý bên về trái xuất hiện đại lượng $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$ nên ta sẽ đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, tuy nhiên ta cần đánh giá là xuất hiện $a^2 + b^2 + c^2$. Khi đó ta được

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = \frac{a^4}{a^2b} + \frac{b^4}{b^2c} + \frac{c^4}{c^2a} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b + b^2c + c^2a}$$

Đến đây ta cần chứng minh được

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Hay
$$(a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a)^2$$

Nhận thấy
$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Do đó ta được
$$(a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)(a^2 + b^2 + c^2)$$

Mà theo bất đẳng thức Bunhiacopxki thì

$$(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a^2b + b^2c + c^2a)^2$$

Do đó ta được
$$(a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a)^2$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Cách 2: Bây giờ ta thử đánh giá từ về trái sang về phải đồng thời làm xuất hiện các căn bậc hai như về phải xem sao? Để ý đến phép biến đổi $\frac{a^2}{b} + b = \frac{a^2 + b^2}{b}$, khi đó ta sẽ sử dụng bất đẳng thức Cauchy để đánh giá, chú ý đến đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$ nên để triệt tiêu b ở mẫu ta cộng thêm vào $2b$, như vậy ta sẽ được $\frac{a^2 + b^2}{b} + 2b \geq 2\sqrt{2(a^2 + b^2)}$. Do đó ta có đánh giá

$$\frac{a^2}{b} + 3b = \frac{a^2 + b^2}{b} + 2b \geq 2\sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

Thực hiện tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + 3(a + b + c) \geq 2\sqrt{2(a^2 + b^2)} + 2\sqrt{2(b^2 + c^2)} + 2\sqrt{2(c^2 + a^2)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{2(a^2 + b^2)} + 2\sqrt{2(b^2 + c^2)} + 2\sqrt{2(c^2 + a^2)} - 3(a + b + c) \\ & \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}} \end{aligned}$$

Hay
$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}} \geq a + b + c$$

Đến đây thì đơn giản hơn rồi, để ý đến bất đẳng thức quen thuộc $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$, khi đó ta được

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2}; \quad \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} \geq \frac{b + c}{2}; \quad \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}} \geq \frac{c + a}{2}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}} \geq a + b + c$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3: Chú ý là đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$ và trong các biến có các lũy thừa bậc 2, do đó ta thử biến đổi hai vế để làm xuất hiện các đại lượng kiểu $(a - b)^2$; $(b - c)^2$; $(c - a)^2$.

Trước hết ta biến đổi vế trái, để ý là $\frac{a^2}{b} - 2a + b = \frac{(a - b)^2}{b}$, như vậy ta sẽ được

$$\frac{a^2}{b} - 2a + b + \frac{b^2}{c} - 2b + c + \frac{c^2}{a} - 2c + a = \frac{(a - b)^2}{b} + \frac{(b - c)^2}{c} + \frac{(c - a)^2}{a}$$

Do đó suy ra $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = \frac{(a - b)^2}{b} + \frac{(b - c)^2}{c} + \frac{(c - a)^2}{a} - (a + b + c)$.

Như vậy để bất đẳng thức tương đương thì ta phải bớt ở vế phải đại lượng $(a + b + c)$ và lúc này ta

cần biến đổi biểu thức $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}} - (a + b + c)$ làm xuất hiện $(a - b)^2$; $(b - c)^2$; $(c - a)^2$.

Ta để ý đến phép biến đổi $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \frac{a + b}{2} = \frac{(a - b)^2}{2\sqrt{2(a^2 + b^2)} + 2(a + b)}$, hoàn toàn tương tự

thì vế phải trở thành

$$\frac{(a - b)^2}{2\sqrt{2(a^2 + b^2)} + 2(a + b)} + \frac{(b - c)^2}{2\sqrt{2(b^2 + c^2)} + 2(b + c)} + \frac{(c - a)^2}{2\sqrt{2(c^2 + a^2)} + 2(c + a)}$$

Đến đây ta chỉ cần chỉ ra được $\frac{1}{b} - \frac{1}{2\sqrt{2(a^2 + b^2)} + 2(a + b)} \geq 0$, rõ ràng đánh giá này hoàn

toàn đúng. Tương tự ta trình bày được lời giải như sau: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b} - 2a + b + \frac{b^2}{c} - 2b + c + \frac{c^2}{a} - 2c + a &\geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}} - (a + b + c) \\ \Leftrightarrow \frac{(a - b)^2}{b} + \frac{(b - c)^2}{c} + \frac{(c - a)^2}{a} &\geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \frac{a + b}{2} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} - \frac{b + c}{2} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{2}} - \frac{c + a}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{(a - b)^2}{b} + \frac{(b - c)^2}{c} + \frac{(c - a)^2}{a} &\geq \frac{(a - b)^2}{2\sqrt{2(a^2 + b^2)} + 2(a + b)} + \frac{(b - c)^2}{2\sqrt{2(b^2 + c^2)} + 2(b + c)} \\ &\quad + \frac{(c - a)^2}{2\sqrt{2(c^2 + a^2)} + 2(c + a)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{2\sqrt{2(a^2+b^2)}+2(a+b)} \right] + (b-c)^2 \left[\frac{1}{c} - \frac{1}{2\sqrt{2(b^2+c^2)}+2(b+c)} \right] + (c-a)^2 \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{2\sqrt{2(c^2+a^2)}+2(c+a)} \right] \geq 0$$

Đặt

$$A = \frac{1}{b} - \frac{1}{2\sqrt{2(a^2+b^2)}+2(a+b)}$$

$$B = \frac{1}{c} - \frac{1}{2\sqrt{2(b^2+c^2)}+2(b+c)}$$

$$C = \frac{1}{a} - \frac{1}{2\sqrt{2(c^2+a^2)}+2(c+a)}$$

Chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $A, B, C \geq 0$. Thật vậy

$$A = \frac{1}{b} - \frac{1}{2\sqrt{2(a^2+b^2)}+2(a+b)} = \frac{2\sqrt{2(a^2+b^2)}+2a+b}{2\sqrt{2(a^2+b^2)}+2(a+b)} > 0$$

Hoàn toàn tương tự ta có $B, C \geq 0$. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Cách 4: Bây giờ ta thử biến đổi từ vế phải sang vế trái xem sao, ở đây ta cần làm mất các căn bậc hai. Để thực hiện được biến đổi đó ta nghĩ đến đánh giá $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$ nhưng tiếc là đánh giá này lại ngược chiều. Một cách khác đó là sử dụng đánh giá kiểu $2\sqrt{xy} \leq x+y$, đánh giá này cùng chiều nên ta tập trung theo hướng này. Như vậy ta cần viết được $\frac{a^2+b^2}{2}$ sao cho xuất hiện tích của hai đại lượng và

sau khi đánh giá thì xuất hiện $\frac{a^2}{b}$. Để ý ta thấy

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{a^2+b^2 - \frac{a^2+b^2}{2}} \leq \sqrt{a^2+b^2-ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a^2+b^2-ab}{b} + b \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{b} + 2b-a \right)$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{c} + 2c-b \right); \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{a} + 2a-c \right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a+b+c \right) \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$$

$$\text{Hay} \quad \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a+b+c \geq 2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + 2\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} + 2\sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$$

Đến đây ta trình bày hoàn toàn tương tự như cách thứ nhất.

Cách 5: Để ý ta thấy $\frac{a^2-b^2}{a+b} + \frac{b^2-c^2}{b+c} + \frac{c^2-a^2}{c+a} = a-b+b-c+c-a = 0$ nên ta được

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} = \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a}$$

Suy ra
$$\frac{2a^2}{a+b} + \frac{2b^2}{b+c} + \frac{2c^2}{c+a} = \frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \right) \geq \frac{2a^2}{a+b} + \frac{2b^2}{b+c} + \frac{2c^2}{c+a}$$

Mà theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$

Do đó ta được
$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$$

Đến đây thì áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{\sqrt{(a^2+b^2)(a+b)^2}}{a+b} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Áp dụng tương tự ta thu được $\frac{b^2+c^2}{b+c} \geq \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}; \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta thu được

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{2}}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 12. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{a^2+b^2-ab} + \sqrt{b^2+c^2-bc} + \sqrt{c^2+a^2-ca}$$

Phân tích và lời giải

Bất đẳng thức trên đã được chứng minh bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy, bây giờ ta tìm hiểu xem ngoài cách làm đó thì còn cách chứng minh nào khác không?

Cách 1: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, khi đó ta được

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$a + b + c \geq \sqrt{a^2+b^2-ab} + \sqrt{b^2+c^2-bc} + \sqrt{c^2+a^2-ca}$$

Tuy nhiên đánh giá trên không đúng, nên ta sẽ đi sang hướng khác.

Nhớ lại cách đánh giá tạo ra đại lượng $\sqrt{a^2+b^2-ab}$ ta có

$$\frac{a^2}{b} - a + b + b = \left(\frac{a^2+b^2-ab}{b} + b \right) \geq 2\sqrt{a^2+b^2-ab}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \geq 2\sqrt{a^2 + b^2 - ab} + 2\sqrt{b^2 + c^2 - bc} + 2\sqrt{c^2 + a^2 - ca}$$

Như vậy ta cần chỉ ta được

$$2\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c$$

Và đây là một đánh giá hoàn toàn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2: Tương tự như bài toán trên ta nhận thấy bất đẳng thức có thể chứng minh được bằng phép biến

đổi tương đương, để ý ta thấy $\frac{a^2}{b} - 2a + b = \frac{(a-b)^2}{b}$

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} - \frac{a+b}{2} = \frac{a^2 - ab + b^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \frac{a+b}{2}} = \frac{3(a-b)^2}{4\sqrt{a^2 - ab + b^2} + 2a + 2b}$$

Do đó áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} &\geq \frac{3(a-b)^2}{4\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab} + 2(a+b)} + \frac{3(b-c)^2}{4\sqrt{b^2 + c^2 - bc} + 2(b+c)} \\ &\quad + \frac{3(c-a)^2}{4\sqrt{c^2 + a^2 - ca} + 2(c+a)} \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\frac{1}{b} - \frac{3}{4\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab} + 2(a+b)} \right] + (b-c)^2 \left[\frac{1}{c} - \frac{3}{4\sqrt{b^2 + c^2 - bc} + 2(b+c)} \right] \\ &\quad + (c-a)^2 \left[\frac{1}{a} - \frac{3}{4\sqrt{c^2 + a^2 - ca} + 2(c+a)} \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Đến đây ta đặt

$$A = \frac{1}{b} - \frac{3}{4\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab} + 2(a+b)}$$

$$B = \frac{1}{c} - \frac{3}{4\sqrt{b^2 + c^2 - bc} + 2(b+c)}$$

$$C = \frac{1}{a} - \frac{3}{4\sqrt{c^2 + a^2 - ca} + 2(c+a)}$$

Chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $A, B, C \geq 0$. Thật vậy

$$A = \frac{1}{b} - \frac{3}{4\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab} + 2(a+b)} = \frac{4\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab} + 2a + b}{4\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab} + 2(a+b)} > 0$$

Hoàn toàn tương tự ta có $B, C \geq 0$. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 13. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{bc}}{a + 3\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{b + 3\sqrt{ca}} + \frac{\sqrt{ab}}{c + 3\sqrt{ab}} \leq \frac{3}{4}$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$, suy nghĩ đầu tiên khi quan sát bất đẳng thức đó là tìm cách làm mất căn bậc hai ở các biểu thức, tuy nhiên để ý đến chiều bất đẳng thức ta thấy chỉ có thể làm mất căn ở các tử thức bằng bất đẳng thức Cauchy còn ở mẫu thì lại không thực hiện được.

Quan sát kỹ các đại lượng trong mỗi phân thức ta nhận thấy $\frac{\sqrt{bc}}{a + 3\sqrt{bc}} = \frac{1}{\frac{a}{\sqrt{bc}} + 3}$, điều này gợi ý

cho ta đặt ẩn phụ dạng $x = \frac{a}{\sqrt{bc}}$. Áp dụng tương tự bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{1}{\frac{a}{\sqrt{bc}} + 3} + \frac{1}{\frac{b}{\sqrt{ca}} + 3} + \frac{1}{\frac{c}{\sqrt{ab}} + 3} \leq \frac{3}{4}$$

Đến đây ta đặt $x = \frac{a}{\sqrt{bc}}$; $y = \frac{b}{\sqrt{ca}}$; $z = \frac{c}{\sqrt{ab}}$, khi đó ta được $xyz = 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{z+3} \leq \frac{3}{4}$

Quan sát bất đẳng thức được tạo thành ta có các hướng chứng minh bất đẳng thức trên
+ Hướng 1: Biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được

$$\begin{aligned} & 4(x+3)(y+3) + 4(y+3)(z+3) + 4(z+3)(x+3) \leq 3(x+3)(y+3)(z+3) \\ \Leftrightarrow & 4(xy + yz + zx) + 24(x + y + z) + 108 \leq 3(xyz + 3xy + 3yz + 3zx + 8x + 9y + 9z + 27) \\ \Leftrightarrow & 24 \leq 5(xy + yz + zx) + 3(x + y + z) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$5(xy + yz + zx) \geq 15 \cdot \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} = 15; \quad 3(x + y + z) \geq 9 \cdot \sqrt[3]{xyz} = 9$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được $5(xy + yz + zx) + 3(x + y + z) \geq 24$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

+ Hướng 2: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, nhưng trước hết ta cần đổi chiều bất đẳng thức

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{z+3} \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{x+3} + \frac{y}{y+3} + \frac{z}{z+3} \geq \frac{3}{4}$$

Khi đó áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{x}{x+3} + \frac{y}{y+3} + \frac{z}{z+3} \geq \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2}{x + y + z + 9}$$

Ta cần chứng minh $\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2}{x + y + z + 9} \geq \frac{3}{4}$ hay

$$\begin{aligned} & 4(x + y + z + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{zx}) \geq 3(x + y + z + 9) \\ \Leftrightarrow & x + y + z + 8(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}) \geq 27 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$8(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}) \geq 8 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{x^2 y^2 z^2}} = 24; \quad x + y + z \geq 3 \cdot \sqrt[3]{xyz} = 3$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$x + y + z + 8(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}) \geq 27$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Từ hướng thứ hai của cách 1, gợi ý cho ta đổi chiều bất đẳng thức như sau

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{a + 3\sqrt{bc}} + \frac{b}{b + 3\sqrt{ca}} + \frac{c}{c + 3\sqrt{ab}} \geq \frac{3}{4}$$

Đến đây ta có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $2\sqrt{xy} \leq x + y$ cho các căn thức ở mẫu, khi đó ta được

$$\frac{a}{a + 3\sqrt{bc}} + \frac{b}{b + 3\sqrt{ca}} + \frac{c}{c + 3\sqrt{ab}} \geq \frac{2a}{2a + 3b + 3c} + \frac{2b}{3a + 2b + 3c} + \frac{2c}{3 + 3b + 2c}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{2a}{2a + 3b + 3c} + \frac{2b}{3a + 2b + 3c} + \frac{2c}{3 + 3b + 2c} \geq \frac{3}{4}$$

Đặt
$$\begin{cases} x = 2a + 3b + 3c \\ y = 3a + 2b + 3c \\ z = 3a + 3b + 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = \frac{1}{4}(3y + 3z - 5x) \\ 2b = \frac{1}{4}(3z + 3x - 5y) \\ 2c = \frac{1}{4}(3x + 3y - 5z) \end{cases}$$

Khi đó bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$\frac{3y + 3z - 5x}{4x} + \frac{3z + 3x - 5y}{4y} + \frac{3x + 3y - 5z}{4z} \geq \frac{3}{4}$$

Hay
$$3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) - 15 \geq 3$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng theo bất đẳng thức Cauchy.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 14. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2 + 1} + \frac{b^2}{c^2 + 1} + \frac{c^2}{a^2 + 1} \geq \frac{3}{2}$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta thấy có đánh giá $b^2 + 1 \geq 2b$, tuy nhiên đánh giá này cho ta một bất đẳng thức ngược chiều. Chính điều này gợi ý cho ta sử dụng kỹ thuật Cauchy ngược dấu. Khi đó áp dụng ta đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^2}{b^2 + 1} = a^2 - \frac{a^2 b^2}{b^2 + 1} \geq a^2 - \frac{a^2 b^2}{2b} = a^2 - \frac{a^2 b}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được
$$\frac{b^2}{c^2 + 1} \geq b^2 - \frac{b^2 c}{2}; \quad \frac{c^2}{a^2 + 1} \geq c^2 - \frac{c^2 a}{2}$$

Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{b^2 + 1} + \frac{b^2}{c^2 + 1} + \frac{c^2}{a^2 + 1} \geq a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a^2 b + b^2 c + c^2 a}{2}$$

Ta cần chứng minh
$$a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a^2 b + b^2 c + c^2 a}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

Để ý đến $a + b + c = 3$ suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$, khi đó ta có

Khi đó ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \frac{3}{2}$

$$a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{2} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{2} + \frac{3}{2}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{2} + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2b + b^2c + c^2a$$

Đánh giá trên là một đánh giá ta đã từng gặp và có thể chứng minh được bằng phép biến đổi tương đương

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2b + b^2c + c^2a &\Leftrightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a) \\ &\Leftrightarrow a(a - b)^2 + b(b - c)^2 + c(c - a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Hoặc sử dụng bất đẳng thức Cauchy

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2b + b^2c + c^2a &\Leftrightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a) \\ &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a) \end{aligned}$$

Dễ thấy $a^3 + ab^2 \geq 2a^2b$; $b^3 + bc^2 \geq 2b^2c$; $c^3 + ca^2 \geq 2c^2a$. Cộng theo vế các bất đẳng thức ta được đánh giá như trên. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2: Về trái của bất đẳng thức gợi ý cho ta sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, do đó ta có đánh giá sau

$$\frac{a^2}{b^2 + 1} + \frac{b^2}{c^2 + 1} + \frac{c^2}{a^2 + 1} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 3}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 3} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4(ab + bc + ca) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 9$$

Mà $a + b + c = 3$ suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$ nên $a^2 + b^2 + c^2 + 9 \geq 12$, suy ra ta được $ab + bc + ca \geq 3$, đây là một đánh giá sai. Do vậy cách dùng trực tiếp không đem lại hiệu quả. Điều này có nghĩa là ta cần biến đổi trước rồi mới có thể sử dụng được bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Ta bắt đầu với giả thiết, như trên ta suy ra được $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$, cho nên khi áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta cần làm xuất hiện đại lượng $a^2 + b^2 + c^2$. Khi này ta được

$$\frac{a^2}{b^2 + 1} + \frac{b^2}{c^2 + 1} + \frac{c^2}{a^2 + 1} = \frac{a^4}{a^2b^2 + 1} + \frac{b^4}{b^2c^2 + 1} + \frac{c^4}{c^2a^2 + 1} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3}$$

$$\text{Bài toán quy về chứng minh } \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3} \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Hay } 2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3)$$

$$\text{Theo một đánh giá quen thuộc ta có } (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Và từ $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$ ta suy ra được $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 9$.

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3).$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3: Sau hai cách làm như trên, ta thử tiếp cận với bất đẳng thức với cách đổi biến xem sao. Để ý đến giả thiết $a + b + c = 3$ ta cần làm xuất hiện số 3 trong các phân số

$$\frac{a^2}{b^2 + 1} = \frac{3a^2}{3b^2 + 3} = \frac{3a^2}{3b^2 + a + b + c}$$

Nhìn phân số sau khi biến đổi ta không tìm thấy ý tưởng đổi biến.

Tuy nhiên từ $a + b + c = 3$ suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$, khi đó ta có

$$\frac{a^2}{b^2 + 1} \geq \frac{3a^2}{3b^2 + a^2 + b^2 + c^2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{a^2}{b^2 + 1} + \frac{b^2}{c^2 + 1} + \frac{c^2}{a^2 + 1} \geq \frac{3a^2}{3b^2 + a^2 + b^2 + c^2} + \frac{3b^2}{3c^2 + a^2 + b^2 + c^2} + \frac{3c^2}{3a^2 + a^2 + b^2 + c^2}$$

Đến đây ta thấy được ý tưởng đổi biến và cách đổi biến hợp lý nhất đó là

$$\text{Đặt } x = \frac{3a^2}{a^2 + b^2 + c^2}; y = \frac{3b^2}{a^2 + b^2 + c^2}; z = \frac{3c^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \text{ suy ra } x + y + z = 3$$

$$\text{Khi đó ta có } \frac{a^2}{b^2 + 1} + \frac{b^2}{c^2 + 1} + \frac{c^2}{a^2 + 1} \geq \frac{x}{y + 1} + \frac{y}{z + 1} + \frac{z}{x + 1}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{x}{y + 1} + \frac{y}{z + 1} + \frac{z}{x + 1} \geq \frac{3}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{x}{y + 1} + \frac{y}{z + 1} + \frac{z}{x + 1} \geq \frac{(x + y + z)^2}{xy + yz + zx + 3} \geq \frac{(x + y + z)^2}{\frac{1}{3}(x + y + z)^2 + 3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 15. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca)$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Theo một đánh giá quen thuộc ta có $9(ab + bc + ca) \leq 3(a + b + c)^2$. Như vậy ta cần chứng minh

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(a + b + c)^2$$

Quan sát bất đẳng thức trên ta nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki. Như vậy ta cần đánh giá từ $(a + b + c)^2$ làm xuất hiện $a^2 + 2$, để ý ta thấy

$$(a + b + c)^2 \leq (a^2 + 1 + 1)(1 + b^2 + c^2) = (a^2 + 2)(1 + b^2 + c^2)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\begin{aligned} 3(a^2 + 2)(1 + b^2 + c^2) &\leq (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \\ \Leftrightarrow 3(1 + b^2 + c^2) &\leq (b^2 + 2)(c^2 + 2) \end{aligned}$$

Biến đổi tương đương ta thu được

$$\begin{aligned} 3(1 + b^2 + c^2) &\leq (b^2 + 2)(c^2 + 2) \Leftrightarrow 3 + 3b^2 + 3c^2 \leq b^2c^2 + 2b^2 + 2c^2 + 4 \\ b^2c^2 - b^2 - c^2 + 1 &\geq 0 \Leftrightarrow (b^2 - 1)(c^2 - 1) \geq 0 \end{aligned}$$

Như vậy ta chỉ cần chỉ ra được $(b^2 - 1)(c^2 - 1) \geq 0$, tuy nhiên vì vai trò của a, b, c như nhau nên theo nguyên lí Dirichlet thì trong ba số $a^2 - 1$; $b^2 - 1$; $c^2 - 1$ luôn tồn tại hai số cùng dấu và ta hoàn toàn có thể giả sử hai số đó là $b^2 - 1$; $c^2 - 1$. Như vậy bài toán được chứng minh xong.

Ngoài ra ta cũng có thể đánh giá từ $(a + b + c)^2$ làm xuất hiện $a^2 + 2$ theo bất đẳng thức

$$\text{Bunhiacopxki như sau } (a + b + c)^2 \leq (a^2 + 2) \left(1 + \frac{(b + c)^2}{2} \right)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3 \left(1 + \frac{(b + c)^2}{2} \right)$$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$b^2 + c^2 + 2b^2c^2 - 6bc + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (b - c)^2 + 2(bc - 1)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Do vậy bài toán được chứng minh xong.

Cách 2: Với các bất đẳng thức khi mà ta không thể tìm ra được ngay cách đánh giá thì tốt nhất ta nên khai triển nó ra nếu có thể, với bài toán này khi khai triển ta được

$$a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 8 \geq 9(ab + bc + ca)$$

Chú ý bên vế phải có đại lượng $ab + bc + ca$ và nếu đánh giá về trái về $ab + bc + ca$ thì được $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$; $a^2b^2 + 1 + b^2c^2 + 1 + c^2a^2 + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$

Khi đó ta được

$$a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 8 \geq a^2b^2c^2 + 2 + 8(ab + bc + ca)$$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$a^2b^2c^2 + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \frac{9abc}{3\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{9abc}{a + b + c}$$

$$\text{Để ý đến đánh giá } (a + b + c)^3 + 9abc \geq 4(a + b + c)(ab + bc + ca)$$

$$\text{Ta được } \frac{9abc}{a + b + c} \geq 4(ab + bc + ca) - (a + b + c)^2, \text{ khi đó ta có}$$

$$a^2b^2c^2 + 1 + 1 \geq 4(ab + bc + ca) - (a + b + c)^2$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} & a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 8 \\ & \geq 4(ab + bc + ca) + 4(ab + bc + ca) + 4(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 \\ & \geq 4(ab + bc + ca) + 4(ab + bc + ca) + ab + bc + ca = 9(ab + bc + ca) \end{aligned}$$

Vậy phép chứng minh hoàn tất.

Cách 3: Ngoài các cách trên ta có thể tham khảo thêm cách sử dụng nguyên lí Dirichlet như sau:

Trong ba số $a^2 - 1$; $b^2 - 1$; $c^2 - 1$ luôn tồn tại hai số cùng dấu. Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là $a^2 - 1$; $b^2 - 1$, khi đó ta được

$$(a^2 - 1)(b^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 \geq 0$$

Ta có

$$\begin{aligned}(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) &= a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 8 \\&= c^2(a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1) + (2a^2b^2 + 2) + (3b^2c^2 + 3) \\&\quad + (3c^2a^2 + 3) + 3(a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2) \\&\geq (2a^2b^2 + 2) + (3b^2c^2 + 3) + (3c^2a^2 + 3) + 3(a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2)\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned}2a^2b^2 + 2 &\geq 4ab; \quad 3b^2c^2 + 3 \geq 6bc; \quad 3c^2a^2 + 3 \geq 6ca; \\a^2 + b^2 &\geq 2ab; \quad 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(ab + bc + ca)\end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$(2a^2b^2 + 2) + (3b^2c^2 + 3) + (3c^2a^2 + 3) + 3(a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2) \geq 9(ab + bc + ca)$$

Suy ra $(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 16. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{82}$$

Lời giải

Dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{1}{3}$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy bất

đẳng thức có chứa các căn bậc hai và biểu thức trong căn bậc hai lại chứa biến dưới mẫu. Do đó để tìm được lời giải cho bài toán ta có các định hướng sau:

- Loại bỏ các căn bậc hai bằng các bất đẳng thức phụ.
- Đưa toàn bộ các đại lượng trong căn vào cùng một căn thức.
- Bình phương hai vế.

Bây giờ ta đi tìm hiểu xem ta có thể tiếp cận bất đẳng thức trên như thế nào từ các định hướng trên.

Cách 1: Để loại bỏ các căn bậc hai trong trường hợp biểu thức dưới dấu căn được viết dạng tổng, ta thường dùng bất đẳng thức Bunhiacopski, rất may trong trường hợp này ta có đánh giá cùng chiều. Chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta được

$$\sqrt{82\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)} = \sqrt{(1+9^2)\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)} \geq \sqrt{\left(a + \frac{9}{a}\right)^2} = a + \frac{9}{a}$$

Áp dụng tương tự ta được $\sqrt{82\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)} \geq b + \frac{9}{b}; \quad \sqrt{82\left(c^2 + \frac{1}{c^2}\right)} \geq c + \frac{9}{c}$

Khi đó ta được

$$\sqrt{82\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)} + \sqrt{82\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)} + \sqrt{82\left(c^2 + \frac{1}{c^2}\right)} \geq a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Hay $\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{82}}\left(a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{1}{\sqrt{82}}\left(a + b + c + \frac{9}{a} + \frac{9}{b} + \frac{9}{c}\right) \geq \sqrt{82} \text{ hay } a + b + c + \frac{9}{a} + \frac{9}{b} + \frac{9}{c} \geq 82$$

Chú ý đến giả thiết $a + b + c = 1$ kết hợp với một đánh giá quen thuộc ta có

$$\frac{9}{a} + \frac{9}{b} + \frac{9}{c} \geq \frac{9.9}{a+b+c} = 81$$

Như vậy đánh giá cuối cùng đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Cách 2: Để đưa toàn bộ các biểu thức vào trong cùng một dấu căn ta chú ý đến bất đẳng thức phụ: Với a, b, x, y là các số thực dương ta luôn có:

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2} \geq \sqrt{(a+b)^2 + (x+y)^2}$$

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức phụ

Thật vậy, bình phương hai vế ta được

$$\begin{aligned} a^2 + x^2 + b^2 + y^2 + 2\sqrt{a^2 + x^2} \cdot \sqrt{b^2 + y^2} &\geq (a+b)^2 + (x+y)^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + y^2)} &\geq ab + xy \Leftrightarrow (a^2 + x^2)(b^2 + y^2) \geq (ab + xy)^2 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng là bất đẳng thức Bunhiacopxki, do đó bất đẳng thức trên đúng.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} &\geq \sqrt{(a+b)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \\ &\geq \sqrt{(a+b+c)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$(a+b+c)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \geq 82$$

Thật vậy, từ giả thiết $a+b+c=1$ suy ra $(a+b+c)^2=1$ và theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \left(\frac{9}{a+b+c}\right)^2 = 81$$

Do đó ta được

$$(a+b+c)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \geq 82$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ngoài ra ta cũng có thể chứng minh đánh giá trên theo cách sau

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 &\geq \left(3\sqrt[3]{abc}\right)^2 + \left(3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\right)^2 \\ &= 9 \left[\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\right)^2 + \frac{80}{81} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có.

$$\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\right)^2 \geq \frac{2}{9}; \quad \frac{80}{81}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\right)^2 = \frac{80}{9}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{abc}}\right)^2 \geq \frac{80}{9}\left(\frac{1}{a+b+c}\right)^2 = \frac{80}{9}$$

Do đó ta suy ra $(a+b+c)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \geq 9\left(\frac{2}{9} + \frac{80}{9}\right) = 82$

Đến đây bài toán được chứng minh.

Cách 3: Ngoài hai cách làm trên, ta thử bình phương hai vế của bất đẳng thức, tuy nhiên để ý rằng cách làm này không làm mất hết các dấu căn.

Đặt $A = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}}$, khi đó ta được

$$A^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b^2} + c^2 + \frac{1}{c^2} + 2\sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)} + 2\sqrt{\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(c^2 + \frac{1}{c^2}\right)} + 2\sqrt{\left(c^2 + \frac{1}{c^2}\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)}$$

Quan sát các tích dưới dấu căn ta liên tưởng đến bất đẳng thức Bunhiacopxki và chú ý đến đại lượng

$a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b^2} + c^2 + \frac{1}{c^2}$ ta có các đánh giá sau

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)} &\geq \sqrt{\left(ab + \frac{1}{ab}\right)^2} = ab + \frac{1}{ab} \\ \sqrt{\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(c^2 + \frac{1}{c^2}\right)} &\geq \sqrt{\left(bc + \frac{1}{bc}\right)^2} = bc + \frac{1}{bc} \\ \sqrt{\left(c^2 + \frac{1}{c^2}\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)} &\geq \sqrt{\left(ca + \frac{1}{ca}\right)^2} = ca + \frac{1}{ca} \end{aligned}$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned} A^2 &\geq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(ab + bc + ca + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) \\ &= (a+b+c)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \geq (a+b+c)^2 + \left(\frac{9}{a+b+c}\right)^2 = 82 \end{aligned}$$

Hay $A \geq \sqrt{82}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 17. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a(a+b+c) = 3bc$. Chứng minh rằng:

$$(a+b)^3 + (a+c)^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c) \leq 5(b+c)^3$$

Lời giải

Dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$, Quan sát bất đẳng thức trên ta có một số nhận xét như sau:

- Bất đẳng thức có ba biến nhưng chỉ có b, c có vai trò như nhau, do vậy ta cố gắng quy bất đẳng thức hai biến bằng phép đặt ẩn phụ.
- Bất đẳng thức có sự xuất hiện của các đại lượng $a+b$; $b+c$; $c+a$, cho nên ta cũng có thể đổi biến $x = a+b$; $y = b+c$; $z = c+a$.

- Giả thiết $a(a+b+c) = 3bc$ ta có thể viết được thành $(a+b)(a+c) = 4bc$, khi đó có thể sử dụng các bất đẳng thức Cauchy hoặc một số bất đẳng thức phụ để đánh giá

Từ các nhận xét đó ta có một số ý tưởng chứng minh bất đẳng thức như sau

Cách 1: Trước hết ta viết lại giả thiết

$$a(a+b+c) = 3bc \Leftrightarrow a^2 + ab + bc + ca = 4bc \Leftrightarrow (a+b)(a+c) = 4bc$$

Lúc này ta đặt $x = a+b$; $y = a+c$ thì được $xy = 4bc$

Để ý đến đánh giá

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)(x^2 - xy + y^2) \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} \cdot \left[(x-y)^2 + xy \right] \\ &= \sqrt{2 \left[(x-y)^2 + 2xy \right]} \cdot \left[(x-y)^2 + xy \right] = \sqrt{2 \left[(b-c)^2 + 8bc \right]} \cdot \left[(b-c)^2 + 4bc \right] \\ &= \sqrt{2 \left[(b+c)^2 + 4bc \right]} \cdot (b+c)^2 \leq \sqrt{4(b+c)^2} \cdot (b+c)^2 = 2(b+c)^3 \end{aligned}$$

Do đó ta được $(a+b)^3 + (a+c)^3 \leq 2(b+c)^3$

Ta cần chứng minh $(a+b)(a+c)(b+c) \leq (b+c)^3$.

Thật vậy $(a+b)(a+c)(b+c) = 4bc(b+c) \leq (b+c)^2(b+c) = (b+c)^3$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Đặt $x = b+c$; $y = c+a$; $z = a+b$, suy ra

$$a = \frac{b+c-a}{2}; \quad b = \frac{c+a-b}{2}; \quad z = \frac{a+b-c}{2}$$

Khi đó giả thiết được viết lại thành

$$\frac{(y+z)^2 - x^2}{4} = \frac{3 \left[x^2 - (y-z)^2 \right]}{4} \Leftrightarrow x^2 = y^2 + z^2 - yz$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$y^3 + z^3 + 3xyz \leq 5x^3 \Leftrightarrow (y+z)(y^2 + z^2 - yz) + 3xyz \leq 5x^3 \Leftrightarrow x(y+z) + 3yz \leq 5x^2$$

Từ giả thiết $x^2 = y^2 + z^2 - yz$ suy ra $x^2 \geq yz$ và $2x \geq y+z$

Điều này dẫn đến $3x^2 \geq 3yz$ và $2x^2 \geq x(y+z)$.

Cộng theo về hai bất đẳng thức trên ta được $5x^2 \geq x(y+z) + 3yz$.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Cách 3: Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{(a+b)^3}{(b+c)^3} + \frac{(a+c)^3}{(b+c)^3} + \frac{3(a+b)(a+c)(b+c)}{(b+c)^3} \leq 5$$

Đặt $x = \frac{a+b}{b+c}$; $y = \frac{a+c}{b+c}$, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^3 + y^3 + 3xy \leq 5$$

Ta có

$$xy = \frac{a+b}{b+c} \cdot \frac{a+c}{b+c} = \frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2} = \frac{a(a+b+c) + bc}{(b+c)^2} = \frac{2a(a+b+c) - 2bc}{(b+c)^2}$$

Do đó ta được
$$xy + 1 = \frac{(a+b)^2 + (a+c)^2}{(b+c)^2} = x^2 + y^2$$

Suy $x^3 + y^3 = x + y$ nên $x^3 + y^3 + 3xy \leq 5 \Leftrightarrow x + y + 3xy \leq 5$

Mà ta có
$$(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) = \frac{xy+1}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{(x+y)^2}{8} \Rightarrow x+y \leq 2 \Rightarrow xy \leq 1$$

Do đó ta được $x + y + 3xy \leq 5$. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Cách 4: Giả thiết được viết lại thành

$$a(a+b+c) = 3bc \Leftrightarrow a^2 + ab + bc + ca = 4bc \Leftrightarrow (a+b)(a+c) = 4bc$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$3bc = a(a+b+c) \geq 3a\sqrt{abc} \Rightarrow a \leq \sqrt{bc}$$

Ta có

$$\begin{aligned} (a+b)^3 + (a+c)^3 &= (a+b)(a+c)(2a+b+c) + (b-c)^2(2a+b+c) \\ &\leq 4bc(2\sqrt{bc} + b+c) + (b-c)^2(2\sqrt{bc} + b+c) \\ &= (2\sqrt{bc} + b+c) \left[(b-c)^2 + 4bc \right] = (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 (b+c)^2 \leq 2(b+c)^3 \end{aligned}$$

$$\text{Lại có } (a+b)(a+c)(b+c) = 4bc(b+c) \leq (b+c)^2(b+c) \leq (b+c)^3$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 18. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2(b+c)}{b\sqrt{b}+2c\sqrt{c}} + \frac{b^2(c+a)}{c\sqrt{c}+2a\sqrt{a}} + \frac{c^2(a+b)}{a\sqrt{a}+2b\sqrt{b}} \geq 2$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy, để đơn giản hóa ta cần thực hiện phép đổi biến $x = a\sqrt{a}$; $y = b\sqrt{b}$; $z = c\sqrt{c}$, tuy nhiên ta không thể đổi biến ở các tử số, do đó ta cần phải biến đổi tử số sao cho xuất hiện các đại lượng $a\sqrt{a}$; $b\sqrt{b}$; $c\sqrt{c}$, nhưng biến đổi theo cách nào đây? Chú ý đến chiều của bất đẳng thức ta có đánh giá $a^2(b+c) \geq 2a^2\sqrt{bc}$, để ý đến giả thiết $abc = 1$, nên ta thay $\sqrt{bc}$ bằng $\frac{1}{\sqrt{a}}$, khi đó ta được

$$a^2(b+c) \geq 2a^2\sqrt{bc} = 2a\sqrt{a} = 2x, \text{ áp dụng tương tự ta có bất đẳng thức}$$

$$\begin{aligned} \frac{a^2(b+c)}{b\sqrt{b}+2c\sqrt{c}} + \frac{b^2(c+a)}{c\sqrt{c}+2a\sqrt{a}} + \frac{c^2(a+b)}{a\sqrt{a}+2b\sqrt{b}} &\geq \frac{2a^2\sqrt{bc}}{b\sqrt{b}+2c\sqrt{c}} + \frac{2b^2\sqrt{ca}}{c\sqrt{c}+2a\sqrt{a}} + \frac{2c^2\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}+2b\sqrt{b}} \\ &= \frac{2a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}+2c\sqrt{c}} + \frac{2b\sqrt{b}}{c\sqrt{c}+2a\sqrt{a}} + \frac{2c\sqrt{c}}{a\sqrt{a}+2b\sqrt{b}} = \frac{2x}{y+2z} + \frac{2y}{z+2x} + \frac{2z}{x+2y} \end{aligned}$$

$$\text{Bây giờ ta cần chỉ ra được } \frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y} \geq 1.$$

Đến đây ta có hai hướng để chứng minh bất đẳng thức trên

+ **Hướng 1:** Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức.

Ta có

$$\frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y} = \frac{x^2}{x(y+2z)} + \frac{y^2}{y(z+2x)} + \frac{z^2}{z(x+2y)} \geq \frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta nhận thấy $\frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)} \geq 1$.

Do đó ta có $\frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y} \geq 1$, tức là bài toán được chứng minh.

+ Hướng 2: Tiếp tục đổi biến để đơn giản hóa các mẫu số

Đặt $m = y + 2z$; $n = z + 2x$; $p = x + 2y$ khi đó ta suy ra

$$x = \frac{4n + p - 2m}{9}; y = \frac{4p + m - 2n}{9}; z = \frac{4m + n - 2p}{9}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{4n + p - 2m}{9m} + \frac{4p + m - 2n}{9n} + \frac{4m + n - 2p}{9p} \geq 1$$

$$\text{Hay} \quad 4\left(\frac{n}{m} + \frac{p}{n} + \frac{m}{p}\right) + \left(\frac{p}{m} + \frac{n}{p} + \frac{m}{n}\right) \geq 15$$

Đánh giá cuối cùng luôn đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy ta luôn có

$$4\left(\frac{n}{m} + \frac{p}{n} + \frac{m}{p}\right) \geq 4 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{m} \cdot \frac{p}{n} \cdot \frac{m}{p}} = 12; \quad \frac{p}{m} + \frac{n}{p} + \frac{m}{n} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{p}{m} \cdot \frac{n}{p} \cdot \frac{m}{n}} = 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 19. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + c^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + a^2 + 2} \leq \frac{3}{4}$$

Phân tích và lời giải

Đầu tiên ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta có thấy dễ để đánh giá hơn ta cần đổi chiều bất đẳng thức, khi đó ta được bất đẳng thức sau

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 2} + \frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2 + 2} + \frac{c^2 + a^2}{c^2 + a^2 + 2} \geq \frac{3}{2}$$

Đến đây ta có các hướng tiếp cận bất đẳng thức trên như sau:

+ Hướng thứ nhất: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxi dạng phân thức. Tuy nhiên để sử dụng được đánh giá đó ta cần viết các tử số thành bình phương đúng. Như vậy cách thứ nhất là ta viết biểu thức

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + 2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2 + 2} \quad \text{hoặc} \quad \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 2} = \frac{\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2}{a^2 + b^2 + 2}.$$

Ta tiếp cận với từng trường hợp

- Trường hợp biến đổi biểu thức theo cách thứ nhất và áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxi ta thu được bất đẳng thức sau

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 2} + \frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2 + 2} + \frac{c^2 + a^2}{c^2 + a^2 + 2} \geq \frac{2(a+b+c)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2) + 6}$$

Bất đẳng sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$2(a+b+c)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2) + 9$$

Kết hợp với giả thiết $a+b+c=3$ thì bất đẳng thức trên trở thành $3 \geq a^2+b^2+c^2$, rõ ràng đánh giá trên là sai.

- Trường hợp biến đổi biểu thức theo cách thứ hai và áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta thu được bất đẳng thức sau

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2} + \frac{b^2+c^2}{b^2+c^2+2} + \frac{c^2+a^2}{c^2+a^2+2} \geq \frac{\left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}\right)^2}{2(a^2+b^2+c^2) + 6}$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$2\left(\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}\right)^2 \geq 6(a^2+b^2+c^2) + 18$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$2\left(\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)} + \sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)} + \sqrt{(c^2+a^2)(a^2+b^2)}\right) \geq a^2+b^2+c^2 + 9$$

Quan sát các đại lượng về trái ta nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki, tức là ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)} &\geq b^2+ca \\ \sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)} &\geq c^2+ab \\ \sqrt{(c^2+a^2)(a^2+b^2)} &\geq a^2+bc\end{aligned}$$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned}2\left(\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)} + \sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)} + \sqrt{(c^2+a^2)(a^2+b^2)}\right) \\ \geq 2(a^2+b^2+c^2 + ab+bc+ca) \\ = a^2+b^2+c^2 + (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 9\end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

+ Hướng thứ hai: Tiếp tục với bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức nhưng ta cần tạo ra bình phương đúng trên các tử số, khi đó ta có các cách sau

$$\text{Biến đổi biểu thức } \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2} = \frac{1}{1+\frac{2}{a^2+b^2}} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2 + \frac{2(a+b)^2}{a^2+b^2}}, \text{ áp dụng tương tự và sử}$$

dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được bất đẳng thức

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2} + \frac{b^2+c^2}{b^2+c^2+2} + \frac{c^2+a^2}{c^2+a^2+2} \\ \geq \frac{4(a+b+c)^2}{(a+b)^2 + \frac{2(a+b)^2}{a^2+b^2} + (b+c)^2 + \frac{2(b+c)^2}{b^2+c^2} + (c+a)^2 + \frac{2(c+a)^2}{c^2+a^2}}\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh được

$$8(a+b+c)^2 \geq 3 \left[(a+b)^2 + \frac{2(a+b)^2}{a^2+b^2} + (b+c)^2 + \frac{2(b+c)^2}{b^2+c^2} + (c+a)^2 + \frac{2(c+a)^2}{c^2+a^2} \right]$$

Hay
$$24 \geq (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 + \frac{2(a+b)^2}{a^2+b^2} + \frac{2(b+c)^2}{b^2+c^2} + \frac{2(c+a)^2}{c^2+a^2}$$

Biến đổi tương đương ta thu được

$$(a-b)^2 \left(\frac{6}{a^2+b^2} - 1 \right) + (b-c)^2 \left(\frac{6}{b^2+c^2} - 1 \right) + (c-a)^2 \left(\frac{6}{c^2+a^2} - 1 \right) \geq 0$$

Đến đây mà ta chỉ ra được $\frac{6}{a^2+b^2} - 1 \geq 0$; $\frac{6}{b^2+c^2} - 1 \geq 0$; $\frac{6}{c^2+a^2} - 1 \geq 0$ thì bài toán được chứng minh hoàn tất. Vì vai trò của a, b, c như nhau nên để đơn giản hóa ta nên sắp thứ tự các biến, khi đó chỉ cần chứng minh hiệu nhỏ nhất không âm là được.

Giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó ta được $\frac{6}{a^2+b^2} \leq \frac{6}{c^2+a^2} \leq \frac{6}{b^2+c^2}$. Khi đó xảy ra các trường hợp sau

- Nếu $a^2 + b^2 \leq 6$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
- Nếu $a^2 + b^2 \geq 6$, khi đó ta được $\frac{6}{a^2+b^2} - 1 \leq 0$, như vậy nhận định trên hoàn toàn sai và ta phải hướng khác. Tuy nhiên sau một quá trình biến văt vả mà dừng tại đây thì hơi phí, ta nên thử xem với $a^2 + b^2 \geq 6$, có khai thác được gì không?

Dễ thấy với $a^2 + b^2 \geq 6$ ta được $\frac{1}{a^2+b^2+2} \leq \frac{1}{8}$ và $a+b < 3 \Rightarrow b < \frac{3}{2}$, khi này ta được

$$\frac{1}{b^2+c^2+2} + \frac{1}{c^2+a^2+2} \leq \frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{b^2+2} \leq \frac{1}{8-b^2} + \frac{1}{b^2+2} = \frac{10}{16+b^2(6-b^2)} < \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

Do đó ta lại có $\frac{1}{a^2+b^2+2} + \frac{1}{b^2+c^2+2} + \frac{1}{c^2+a^2+2} \leq \frac{3}{4}$. Vậy trong trường hợp này bất đẳng thức cũng đúng. Nên bài toán cũng được chứng minh.

Bài 20. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy chưa thể sử dụng được ngay các bất đẳng thức Cauchy hay Bunhiacopxki. Với những bài toán như thế này thì ý tưởng đầu tiên có thể là biến đổi tương đương vì bất đẳng thức có hình thức không quá cồng kềnh phức tạp.

Cách 1: Đầu tiên với ý tưởng biến đổi tương đương, ta quy đồng và được bất đẳng thức sau:

$$\frac{a(a+b)(b+c)}{b} + \frac{b(a+b)(b+c)}{c} + \frac{c(a+b)(b+c)}{a} \geq (a+b)^2 + (b+c)^2 + (a+b)(b+c)$$

Khai triển các vế ta được

$$\frac{a(a+b)(b+c)}{b} + \frac{b(a+b)(b+c)}{c} + \frac{c(a+b)(b+c)}{a}$$

$$= \frac{a^2c}{b} + a^2 + ab + ac + \frac{ab^2}{c} + \frac{b^3}{c} + b^2 + ab + c^2 + \frac{bc^2}{a} + \frac{b^2c}{a}$$

Và $(a+b)^2 + (b+c)^2 + (a+b)(b+c) = a^2 + 3b^2 + c^2 + 3ab + 3bc$

Như vậy bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a^2c}{b} + \frac{ab^2}{c} + \frac{b^3}{c} + \frac{bc^2}{a} + \frac{b^2c}{a} \geq 2b^2 + 2ab + ab$$

Quan sát đánh giá trên ta nghĩ đến bất đẳng thức Cauchy

$$\frac{a^2c}{b} + \frac{b^3}{c} \geq 2ab; \quad \frac{b^2c}{a} + \frac{ab^2}{c} \geq 2b^2; \quad \frac{a^2c}{b} + \frac{c^2b}{a} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^2b}{a} \geq 4bc$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^2c}{b} + \frac{ab^2}{c} + \frac{b^3}{c} + \frac{bc^2}{a} + \frac{b^2c}{a} \geq 2b^2 + 2ab + ab$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2: Từ ý tưởng biến đổi tương đương như trên ta có nhận xét

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 2 = \frac{(a+b)^2 + (b+c)^2 + 2(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)} = \frac{(a+2b+c)^2}{ab+b^2+bc+ca}$$

Quan sát chiều bất đẳng thức ta liên tưởng đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Vấn đề là ta triển khai về trái như thế nào để khi áp dụng bất đẳng thức trên thì có về phải như trên. Để ý là trong phép biến đổi trên ta đã cộng thêm vào về trái với 1 và chú ý đến sự xuất hiện của $2b$ nên ta có đánh giá sau

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 1 = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{bc} + \frac{c^2}{ca} + \frac{b^2}{b^2} \geq \frac{(a+b)^2}{ab+bc} + \frac{(b+c)^2}{ca+b^2} \geq \frac{(a+2b+c)^2}{ab+bc+ca+b^2}$$

Từ hai kết quả trên ta được $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 1 \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 2$

Hay $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1$. Điều này có nghĩa là bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy theo bất đẳng thức Cauchy thì

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3; \quad \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1 \geq 3$$

Và lại thấy

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} - 2 = \frac{(a+b)^2 + (b+c)^2 - 2(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)} = \frac{(a-c)^2}{(a+b)(b+c)}$$

Nên ta sẽ chứng minh $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 3 \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} - 2$. Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{a-b}{b} + \frac{b-c}{c} + \frac{c-a}{a} \geq \frac{(a-c)^2}{(a+b)(b+c)}$$

Để ý rằng $b-c = b-a+a-c$, do đó ta viết lại được bất đẳng thức trên thành

$$\frac{a-b}{b} - \frac{a-b}{c} + \frac{c-a}{a} - \frac{c-a}{c} \geq \frac{(a-c)^2}{(a+b)(b+c)}$$

Hay
$$\frac{(a-b)(c-b)}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} \geq \frac{(a-c)^2}{(a+b)(b+c)}$$

Tiếp tục khai triển và thu gọn ta được

$$\Leftrightarrow b(c-a)^2(b^2+ab+bc) \geq a(a-b)(b-c)(a+b)(b+c) \Leftrightarrow (b-ac)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng hay bài toán được chứng minh xong.

Bài 21. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+ca+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2} \geq 2$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Có thể nói đây là một bất đẳng thức khó, ngay cả bước đầu dự đoán dấu đẳng thức xảy ra. Bất đẳng thức trên xảy ra dấu đẳng thức không chỉ tại $a = b = c$ mà còn tại $a = b, c = 0$ và các hoán vị.

Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy không thể đánh trực tiếp được mẫu vì các đại lượng $a^2; b^2; c^2$ trội hơn các đại lượng $ab; bc; ca$. Do đó để có thể đưa ra các đánh giá hợp lý ta cần biến đổi các phân thức trước. Chú ý là ta có thể đưa một trong hai thừa số trên tử xuống mẫu, nhưng ta chọn đưa $b+c$ vì dưới mẫu có $b^2+bc+c^2 = (b+c)^2 - bc$. Khi này ta được

$$\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2} = \frac{a(b+c)}{(b+c)^2 - bc} = \frac{a}{(b+c) - \frac{bc}{b+c}}$$

Đến đây ta thấy có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức được nên ta lại biến đổi như sau

$$\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2} = \frac{a^2(b+c)}{a(b+c)^2 - abc} = \frac{a^2}{a(b+c) - \frac{abc}{b+c}}$$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{b(c+a)}{c^2+ca+a^2} = \frac{b^2}{b(c+a) - \frac{abc}{c+a}}; \quad \frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2} = \frac{c^2}{c(a+b) - \frac{abc}{a+b}}$$

Khi đó theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+ca+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2} \\ &= \frac{\frac{a^2}{a(b+c) - \frac{abc}{b+c}}}{\frac{a^2}{a^2}} + \frac{\frac{b^2}{b(c+a) - \frac{abc}{c+a}}}{\frac{b^2}{b^2}} + \frac{\frac{c^2}{c(a+b) - \frac{abc}{a+b}}}{\frac{c^2}{c^2}} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca) - abc \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)} \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\begin{aligned} & \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca) - abc\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right)} \geq 2 \\ \Leftrightarrow & (a+b+c)^2 \geq 4(ab+bc+ca) - 2abc\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \\ \Leftrightarrow & a^2 + b^2 + c^2 + 2abc\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq 2(ab+bc+ca) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức dạng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$ ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c}$$

Ta cần chỉ ra được $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca)$, bất đẳng thức này tương đương

$$\text{với } a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a(b+c) + b(c+a) + c(a+b).$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & (a-b)^2(a+b-c) + c(a-c)(b-c) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a(b+c) + b(c+a) + c(a+b) \end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh có các đại lượng bậc hai liên quan đến $a^2 + b^2 + c^2$ hoặc $ab + bc + ca$, do đó ta thử tìm mối liên hệ với các đại lượng này xem sao. Để ý là ta sẽ chỉ tìm mối liên hệ $ab + bc + ca$ thôi vì như cách 1 thì $a^2 + b^2 + c^2$ trội hơn nên muốn đánh giá theo chiều tăng lên là rất khó. Để ý ta nhận thấy

$$b^2 + bc + c^2 + ab + ca + ca = (b+c)(a+b+c)$$

Như vậy ý tưởng là làm dưới mẫu xuất hiện tổng $b^2 + bc + c^2 + ab + c + ca$, điều này có thể thực hiện được bằng cách nhân cả tử và mẫu với $ab + bc + ca$ rồi sử dụng đánh giá Cauchy. Như vậy ta sẽ làm như sau

$$\begin{aligned} \frac{a(b+c)}{b^2 + bc + c^2} &= \frac{a(b+c)(ab+bc+ca)}{(b^2 + bc + c^2)(ab+bc+ca)} \geq \frac{4a(b+c)(ab+bc+ca)}{(b^2 + bc + c^2 + ab + bc + ca)^2} \\ &= \frac{4a(ab+bc+ca)}{(b+c)(a+b+c)^2} \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a(b+c)}{b^2 + bc + c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2 + ca + a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2 + ab + b^2} \\ & \geq \frac{4a(ab+bc+ca)}{(b+c)(a+b+c)^2} + \frac{4b(ab+bc+ca)}{(c+a)(a+b+c)^2} + \frac{4c(ab+bc+ca)}{(a+b)(a+b+c)^2} \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{4a(ab+bc+ca)}{(b+c)(a+b+c)^2} + \frac{4b(ab+bc+ca)}{(c+a)(a+b+c)^2} + \frac{4c(ab+bc+ca)}{(a+b)(a+b+c)^2} \geq 2$$

Để ý ta viết lại bất đẳng thức trên thành

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$$

Đánh giá trên đúng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức.

Do vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 22. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right)^2 \geq 4(ab+bc+ca) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$

Phân tích và lời giải

Ta nhận thấy cách phát biểu của bất đẳng thức có dạng $A^2 \geq 4BC$, với

$$A = \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right); B = (ab+bc+ca); C = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$

Nhận xét này khá đặc biệt, nó giúp ta liên hệ với đánh giá quen thuộc của bất đẳng thức Cauchy dạng $(x+y)^2 \geq 4xy$ với $x, y \geq 0$. Do đó một cách tự nhiên ta đưa ra các hướng tiếp cận bất đẳng thức trên là:

+ Thứ nhất: Biểu diễn $A = X + Y$, với X, Y là hai đại lượng thích hợp để có được bất đẳng thức $A^2 \geq 4XY$, từ đó chứng minh $XY \geq BC$. Trước hết ta triển khai A và BC như sau

$$A = \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = X + Y; BC = \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} + \frac{a}{c} + \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2}$$

Để ý thấy trong BC có các hạng tử $\frac{ab}{c^2}; \frac{bc}{a^2}; \frac{ac}{b^2}$ và trong $X + Y$ có $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}; \frac{c}{a}, \frac{b}{a}; \frac{c}{b}, \frac{a}{b}$. Do đó ta chọn

X và Y sao cho tích XY có chứa các hạng tử $\frac{ab}{c^2}; \frac{bc}{a^2}; \frac{ac}{b^2}$, ta có thể chọn như sau

$$X = \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} \right); Y = \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right). \text{ Từ các nhận xét trên ta có các lời giải như dưới đây}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right)^2 = \left[\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) \right]^2 \geq 4 \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} \right) \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) \text{ Ta cần}$$

$$\text{chứng minh } \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} \right) \left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) \geq (ab+bc+ca) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{ab}{c^2} + \frac{b}{c} + \frac{a^2}{bc} + \frac{b}{a} + \frac{bc}{a^2} + \frac{c}{b} + 1 + \frac{c}{a} + \frac{ac}{b^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{c}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{ac}{b^2} + \frac{a}{c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{bc} + 1 \geq \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \Leftrightarrow \frac{a^2 + bc - ac - ab}{bc} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)(a-c)}{bc} \geq 0$$

Vì vai trò của a, b, c trong bất đẳng thức như nhau, nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b, a \geq c$. Do đó bất đẳng thức cuối cùng đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

+ Thứ hai: Biểu diễn $BC = \frac{B}{D} \cdot CD$ với D là một đại lượng thích hợp để có được bất đẳng thức

$4BC \leq \left(\frac{B}{D} + CD \right)^2$, từ đó chứng minh $\frac{B}{D} + CD \leq A$. Ta tìm D như sau:

$$\text{Xét hiệu } A - \frac{B}{D} - CD = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} - \frac{ab+bc+ca}{D} - D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$

Đề ý là khi xem b là một biến thì hệ số của b là $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{a+c}{D}$, như vậy để thu biểu thức ta có thể cho hệ số của b bằng 0 hay chọn $D = ac$. Từ các nhận xét trên ta có các lời giải như dưới đây
Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$4(ab+bc+ca) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \leq \left[\frac{ab+bc+ca}{ca} + ca \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \right]^2$$

$$\text{Ta cần chứng minh } \frac{ab+bc+ca}{ca} + ca \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \leq \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được $\frac{(a-b)(b-c)}{b^2} \geq 0$, Vì vai trò của a, b, c trong bất đẳng thức như nhau, nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$. Do đó bất đẳng thức cuối cùng đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 23. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 16(a+b+c)$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3} + \frac{1}{\left(b+c+\sqrt{2(b+a)}\right)^3} + \frac{1}{\left(c+a+\sqrt{2(c+b)}\right)^3} \leq \frac{8}{9}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$, nên khi đó từ giả thiết ta thấy được

$$\frac{1}{a} = 16a \Rightarrow a = \frac{1}{4}, \text{ do đó đẳng thức xảy ra tại } a = b = c = \frac{1}{4}.$$

Đầu tiên ta bắt đầu với giả thiết $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 16(a+b+c)$. Thật vậy, theo một đánh giá quen thuộc ta được

$$16(a+b+c) \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{(ab+bc+ca)^2}{abc(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(a+b+c)}{(ab+bc+ca)}$$

Hay $\frac{1}{6(ab+bc+ca)} \leq \frac{8}{9}$. Như vậy ta có gắng chứng minh được

$$\frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3} + \frac{1}{\left(b+c+\sqrt{2(b+a)}\right)^3} + \frac{1}{\left(c+a+\sqrt{2(c+b)}\right)^3} \leq \frac{1}{6(ab+bc+ca)}$$

Để chứng minh được điều đó ta cần chỉ ra được $\left(a + b + \sqrt{2(a+c)}\right)^3 \geq A$ và ta phải xác định được A. Điều này làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức Cauchy theo hướng từ trung bình cộng sang trung bình nhân.

Để ý đến dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{1}{4}$ khi đó ta thấy $a + b = \sqrt{\frac{a+c}{2}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}}$

Do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương trên ta có

$$a + b + \sqrt{2(a+c)} = a + b + \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a+c}{2}} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)(a+c)}{2}}$$

Hay

$$\left(a + b + 2\sqrt{\frac{a+c}{2}}\right)^3 \geq \frac{27(a+b)(a+c)}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(a + b + \sqrt{2(a+c)}\right)^3} \leq \frac{2}{27(a+b)(a+c)}$$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{1}{\left(b + c + \sqrt{2(b+a)}\right)^3} \leq \frac{2}{27(b+c)(b+a)}; \quad \frac{1}{\left(c + a + \sqrt{2(c+b)}\right)^3} \leq \frac{2}{27(c+a)(c+b)}$$

Cộng theo các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{\left(a + b + \sqrt{2(a+c)}\right)^3} + \frac{1}{\left(b + c + \sqrt{2(b+a)}\right)^3} + \frac{1}{\left(c + a + \sqrt{2(c+b)}\right)^3} \leq \frac{4(a+b+c)}{27(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\text{Mặt khác ta dễ dàng chứng minh được } \frac{4(a+b+c)}{27(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{1}{6(ab+bc+ca)}$$

$$\text{Hay } 8(a+b+c)(ab+bc+ca) \leq 9(a+b)(b+c)(c+a)$$

Đánh giá trên ta một đánh giá đúng

Do đó

$$\frac{1}{\left(a + b + \sqrt{2(a+c)}\right)^3} + \frac{1}{\left(b + c + \sqrt{2(b+a)}\right)^3} + \frac{1}{\left(c + a + \sqrt{2(c+b)}\right)^3} \leq \frac{1}{6(ab+bc+ca)}$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{4}$.

Bài 24. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} \leq \frac{(a+b+c)^3}{18}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$, quan sát đại lượng vế trái và chiều bất đẳng thức ta nghĩ đến việc đổi chiều bất đẳng thức. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$3 - \frac{a^3}{1+a^3} + \frac{b^3}{1+b^3} + \frac{c^3}{1+c^3} \leq \frac{(a+b+c)^3}{18} \Leftrightarrow 18\left(\frac{a^3}{1+a^3} + \frac{b^3}{1+b^3} + \frac{c^3}{1+c^3}\right) + (a+b+c)^3 \geq 54$$

Đề ý rằng $abc = 1$ thì $\frac{a^3}{1+a^3} = \frac{a^3}{abc+a^3} = \frac{a^2}{bc+a^2}$ nên bất đẳng thức trên trở thành

$$18\left(\frac{a^2}{bc+a^2} + \frac{b^2}{ca+b^2} + \frac{c^2}{ab+c^2}\right) + (a+b+c)^3 \geq 54$$

Lại cũng từ $abc = 1$ ta có $(a+b+c)^3 \geq 27abc = 27$, do đó phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu

ta chỉ ra được
$$\frac{a^2}{bc+a^2} + \frac{b^2}{ca+b^2} + \frac{c^2}{ab+c^2} \geq \frac{3}{2}$$

Về trái của đánh giá trên có dấu hiệu áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Lúc này ta được

$$\frac{a^2}{bc+a^2} + \frac{b^2}{ca+b^2} + \frac{c^2}{ab+c^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}$$

Và ta cần chỉ ra được $\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} \geq \frac{3}{2}$ hay $ab+bc+ca \geq a^2+b^2+c^2$, đây là

một đánh giá sai. Do đó ta không thể tách ra chứng minh như trên được.

Tuy nhiên đề ý đến khi $a = b = c = 1$ thì

$$\frac{18(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} = (a+b+c)^3 = 27$$

Điều này gợi ý cho ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $x+y \geq 2\sqrt{xy}$.

Khi đó ta được

$$\frac{18(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} + (a+b+c)^3 \geq 2\sqrt{\frac{18(a+b+c)^5}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2\sqrt{\frac{18(a+b+c)^5}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}} \geq 54 \Leftrightarrow (a+b+c)^5 \geq \frac{81}{2}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} (a+b+c)^6 &= \left[(a^2+b^2+c^2) + (ab+bc+ca) + (ab+bc+ca) \right]^3 \\ &\geq 27(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2 \geq 81abc(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) \\ &= 81(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) \end{aligned}$$

Khi đó ta được

$$(a+b+c)^5 \geq 81(a^2+b^2+c^2).$$

Như vậy ta chỉ cần chỉ ra rằng $2(a^2+b^2+c^2) \geq a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$

Bất đẳng thức trên tương đương với $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$, là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 25. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b+4} + \frac{1}{b+c+4} + \frac{1}{c+a+4} \leq \frac{1}{2}$$

Phân tích và lời giải

Để dàng dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Từ giả thiết và bất đẳng cần chứng minh đều gợi ý cho ta phép đổi biến

+ Ý tưởng thứ nhất là $a = x^3$; $b = y^3$; $c = z^3$ để sử dụng một đánh giá quen thuộc là

$$x^3 + y^3 + 4 \geq xy(x + y) + 4xyz \geq xy(x + y + 4z)$$

+ Ý tưởng thứ hai ta đổi biến dạng $a = \frac{x}{y}$; $b = \frac{y}{z}$; $c = \frac{z}{x}$ hoặc $a = \frac{x^2}{yz}$; $b = \frac{y^2}{zx}$; $c = \frac{z^2}{xy}$,...

Cách 1: Đặt $a = x^3$; $b = y^3$; $c = z^3$, từ giả thiết $abc = 1$ suy ra $xyz = 1$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{x^3 + y^3 + 4} + \frac{1}{y^3 + z^3 + 4} + \frac{1}{z^3 + x^3 + 4} \leq \frac{1}{2}$$

Để ý ta thấy $x^3 + y^3 + 4 \geq xy(x + y) + 4xyz \geq xy(x + y + 4z)$, áp dụng tương tự ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{1}{xy(x + y + 4z)} + \frac{1}{yz(y + z + 4x)} + \frac{1}{zx(z + x + 4y)} \leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{z}{x + y + 4z} + \frac{x}{y + z + 4x} + \frac{y}{z + x + 4y} \leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{4z}{x + y + 4z} + \frac{4x}{y + z + 4x} + \frac{4y}{z + x + 4y} \leq 2 \\ \Leftrightarrow & 3 - \frac{4z}{x + y + 4z} + \frac{4x}{y + z + 4x} + \frac{4y}{z + x + 4y} \geq 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{x + y}{x + y + 4z} + \frac{y + z}{y + z + 4x} + \frac{z + x}{z + x + 4y} \geq 1 \end{aligned}$$

Đặt $A = \frac{x + y}{x + y + 4z} + \frac{y + z}{y + z + 4x} + \frac{z + x}{z + x + 4y}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} A & \geq \frac{4(x + y + z)^2}{(x + y)(x + y + 4z) + (y + z)(y + z + 4x) + (z + x)(z + x + 4y)} \\ & = \frac{4(x + y + z)^2}{2(x^2 + y^2 + z^2) + 10(xy + yz + zx)} \end{aligned}$$

Để chứng minh $A \geq 1$, ta cần chứng minh

$$4(x + y + z)^2 \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) + 10(xy + yz + zx) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng với mọi $x, y, z > 0$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Đặt $a = \frac{x}{y}$; $b = \frac{y}{z}$; $c = \frac{z}{x}$ khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{yz}{xz + y^2 + 4yz} + \frac{zx}{xy + z^2 + 4zx} + \frac{xy}{yz + x^2 + 4xy} \leq \frac{1}{2}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{xz + y^2}{xz + y^2 + 4yz} + \frac{xy + z^2}{xy + z^2 + 4zx} + \frac{yz + x^2}{yz + x^2 + 4xy} \geq 1$$

Ta tách ra chứng minh hai bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{xz + y^2 + 4yz} + \frac{z^2}{xy + z^2 + 4zx} + \frac{x^2}{yz + x^2 + 4xy} &\geq \frac{1}{2} \\ \frac{zx}{xz + y^2 + 4yz} + \frac{xy}{xy + z^2 + 4zx} + \frac{yz}{yz + x^2 + 4xy} &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức thứ nhất

Để thấy theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{y^2}{xz + y^2 + 4yz} + \frac{z^2}{xy + z^2 + 4zx} + \frac{x^2}{yz + x^2 + 4xy} \geq \frac{(x + y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 5(xy + yz + zx)}$$

Ta cần chỉ ra được $\frac{(x + y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 5(xy + yz + zx)} \geq \frac{1}{2}$ hay

$$\begin{aligned} 2(x + y + z)^2 &\geq x^2 + y^2 + z^2 + 5(xy + yz + zx) \\ \Leftrightarrow (x + y + z)^2 &\geq 3(xy + yz + zx) \end{aligned}$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng, do vậy bất đẳng thức thứ nhất được chứng minh.

Cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\begin{aligned} \frac{zx}{xz + y^2 + 4yz} + \frac{xy}{xy + z^2 + 4zx} + \frac{yz}{yz + x^2 + 4xy} \\ \geq \frac{(xy + yz + zx)^2}{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 5(x^2yz + xy^2z + xyz^2)} \end{aligned}$$

Ta cần chỉ ra được

$$\begin{aligned} 2(xy + yz + zx)^2 &\geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 5(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \\ \Leftrightarrow (xy + yz + zx)^2 &\geq 3(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \end{aligned}$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng, do vậy bất đẳng thức thứ hai được chứng minh.

Vậy bài toán được chứng minh xong

Bài 26. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Chứng minh rằng: $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq 1$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức nhận thấy nếu vế trái là một số âm thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Như vậy ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp vế trái dương là được.

Bài toán có giả thiết rất phức tạp nên trước hết ta đánh giá giả thiết trước. Quan sát hai vế của giả thiết ta nghĩ đến đánh giá $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$. Do đó ta nhân hai vế của giả thiết với

$(a + b + c)$ và áp dụng đánh giá trên ta suy ra được $a + b + c \geq 3$. Bây giờ ta cần chứng minh được $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq 1$. Để đơn giản hóa bài toán ta có thể đặt

$x = b + c - a$; $y = c + a - b$; $z = a + b - c$ và khi này ta cần chứng minh $xyz \leq 1$ với giả thiết mới là $x + y + z \geq 3$

Với giả thiết và kết luận như vậy ta thấy khó có thể đưa ra được các đánh giá hợp lí, do đó ta nghĩ đến việc sử dụng tiếp giả thiết ban đầu và với cách đổi biến như trên ta viết lại được giả thiết là

$$x + y + z = \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x}. \text{ Sử dụng bất đẳng thức Cauchy để đánh giá ta được}$$

$$x + y + z = \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}$$

Hay $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq \sqrt{xyz} (x + y + z)$. Đến đây ta cũng chưa thể chỉ ra được $xyz \leq 1$

Đề ý đến đẳng thức xảy ra tại $x = y = z = 1$ nên theo đánh giá Cauchy ta có

$$\frac{x + y + z + 3}{2} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

Kết hợp với trên ta được

$$\frac{x + y + z + 3}{2} \geq \sqrt{xyz} (x + y + z) \Leftrightarrow x + y + z + 3 \geq 2\sqrt{xyz} (x + y + z)$$

Đề ý lại có $x + y + z \geq 3$ nên $2(x + y + z) \geq x + y + z + 3$ nên ta được

$$2(x + y + z) \geq 2\sqrt{xyz} (x + y + z) \Rightarrow 2 \geq 2\sqrt{xyz} \Leftrightarrow xyz \leq 1$$

Đến đây bài toán được chứng minh

Ngoài ra cũng từ cách phân tích như trên ta có thể chứng minh theo phương pháp phản chứng như sau

Giả sử $xyz > 1$. Khi đó theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$x + y + z = \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}$$

Hay $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq \sqrt{xyz} (x + y + z)$, vì $xyz > 1$ nên $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} > x + y + z$

Tuy nhiên cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$, thiết lập các đánh giá tương tự ta có

$$\frac{x + y + z + 3}{2} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} > x + y + z \Rightarrow x + y + z < 3$$

Mặt khác $x + y + z = \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z} \Rightarrow x + y + z \geq 3$

Mâu thuẫn này chứng tỏ điều giả sử trên là sai, do vậy $xyz \geq 1$. Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét: Ta có thể sử dụng phương pháp phản chứng theo hướng như sau

Giả sử $xyz < 1$, khi đó từ giả thiết của bài toán suy ra

$$(x + y + z)^2 (xy + yz + zx) = 2(x + y + z) + 2(xy + yz + zx) + xyz(x + y + z)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy và kết hợp với giả sử ta lại có

$$xy + yz + zx \geq 3\sqrt{x^2 y^2 z^2} > 3; x + y + z > 3$$

Do đó

$$\frac{2(x+y+z)^2(xy+yz+zx)}{3} > 2(x+y+z)^2$$

$$\frac{2(x+y+z)^2(xy+yz+zx)}{9} > 2(xy+yz+zx)$$

$$\frac{2(x+y+z)^2(xy+yz+zx)}{9} > xyz(x+y+z)$$

Cộng theo vế a bất đẳng thức trên ta được

$$(x+y+z)^2(xy+yz+zx) > 2(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) + xyz(x+y+z)$$

Điều này mâu thuẫn với đẳng thức trên, do đó điều giả sử là sai. Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh.

Bài 27. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

Phân tích và lời giải

Bất đẳng thức trên đã được chứng minh bằng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Bây giờ ta đi phân tích xem có thêm cách chứng minh nào khác nữa hay không?

Cách 1: Nhận thấy bất đẳng thức có chứa căn bậc hai, do đó nên ta có thể đánh giá làm mất các dấu căn bậc hai thì cơ hội sẽ cao hơn. Tuy nhiên các đánh giá mẫu thức đều không đem lại hiệu quả. Do đó một cách tự nhiên ta nghĩ đến phép đổi biến. Chú ý là ta có thể đổi biến các mẫu thức cũng có thể đổi biến các phân thức. Ở đây ta chọn cách đổi biến cả phân thức.

$$\text{Đặt } x = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}; y = \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}; z = \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}. \text{ Khi đó được}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{a^2+8bc} \Rightarrow \frac{a^2}{8bc} = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\text{Hoàn toàn tương tự ta được } \frac{b^2}{8ca} = \frac{y^2}{1-y^2}; \frac{c^2}{8ab} = \frac{z^2}{1-z^2}.$$

$$\text{Khi đó ta được } \frac{x^2}{1-x^2} \cdot \frac{y^2}{1-y^2} \cdot \frac{z^2}{1-z^2} = \frac{1}{512} \Leftrightarrow (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) = 512x^2y^2z^2$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $x+y+z \geq 1$.

Với giả thiết và bất đẳng thức như trên, để chứng minh được bài toán ta cần khai thác được tổng $x+y+z$, do đó ta nghĩ đến phương pháp phản chứng.

Giả sử $0 < x+y+z < 1$. Khi đó ta được

$$(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) > \left[(x+y+z)^2 - x^2 \right] \left[(x+y+z)^2 - y^2 \right] \left[(x+y+z)^2 - z^2 \right]$$

$$\text{Hay } (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) > (x+y)(y+z)(z+x)(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)$$

Dễ thấy

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$$

$$(x+y+z+x)(x+y+z+y)(x+y+z+z) \geq 64xyz$$

$$\text{Do đó ta được } (x+y)(y+z)(z+x)(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z) \geq 512x^2y^2z^2$$

Suy ra $(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) > 512x^2y^2z^2$, điều này trái với giả thiết.

Vậy không thể có $0 < x+y+z < 1$, tức là $x+y+z \geq 1$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2: Để ý ta thấy $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{8bc}{a^2}}}$, hoàn toàn tương tự ta nghĩ đến đặt ẩn phụ

$$x = \frac{bc}{a^2}; y = \frac{ca}{b^2}; z = \frac{ab}{c^2} \Rightarrow xyz = 1$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{1}{\sqrt{1+8x}} + \frac{1}{\sqrt{1+8y}} + \frac{1}{\sqrt{1+8z}} \geq 1$

Dễ thấy $(1+8x)(1+8y)(1+8z) = 1+8(x+y+z)+64(xy+yz+zx)+512xyz$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta suy ra được $(1+8x)(1+8y)(1+8z) \geq 3^6$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{1+8x} \cdot \sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8y} \cdot \sqrt{1+8z} + \sqrt{1+8z} \cdot \sqrt{1+8x} \right)^2 \geq (1+8x)(1+8y)(1+8z) \\ \Leftrightarrow & 8(x+y+z) + 2\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)} \left(\sqrt{1+8x} + \sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8z} \right) \geq 510 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} 8(x+y+z) & \geq 8; \quad \sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)} \geq 3^3 \\ \sqrt{1+8x} + \sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8z} & \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{1+8x} \cdot \sqrt{1+8y} \cdot \sqrt{1+8z}} \geq 9 \end{aligned}$$

Do đó ta được

$$8(x+y+z) + 2\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)} \left(\sqrt{1+8x} + \sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8z} \right) \geq 510$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3: Để ý theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} & (a+b+c)^2 \\ & \leq \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \right) \left(a\sqrt{a^2+8bc} + b\sqrt{b^2+8ca} + c\sqrt{c^2+8ab} \right) \end{aligned}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} a\sqrt{a^2+8bc} + b\sqrt{b^2+8ca} + c\sqrt{c^2+8ab} & = \sqrt{a}\sqrt{a^3+8abc} + \sqrt{b}\sqrt{b^3+8abc} + \sqrt{c}\sqrt{c^3+8abc} \\ & \leq \sqrt{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+24abc)} \end{aligned}$$

Ta chứng minh được $(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+24abc$ nên ta được

$$a\sqrt{a^2+8bc} + b\sqrt{b^2+8ca} + c\sqrt{c^2+8ab} \leq (a+b+c)^2$$

$$\text{Suy ra} \quad (a+b+c)^2 \leq \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \right) (a+b+c)^2$$

$$\text{Hay} \quad \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 28. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}$$

Phân tích và lời giải

Bất đẳng thức này đã được trình bày trong chủ đề kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức Cauchy. Trong phép chứng minh đó ta chưa hiểu được tại sao lại nhân thêm một đại lượng vào biểu thức vế trái. Thực chất cách đổi biến đó xuất phát từ cách chứng minh thứ nhất dưới đây

Cách 1: Đặt $P = \frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)}$

Đề ý là $\frac{abc+1}{a(b+1)} = \frac{bc}{b+1} + \frac{1}{a(b+1)} = \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{a+1}{a(b+1)} - 1$

Nhân thêm vào biểu thức P đại lượng $abc+1$ và áp dụng tương tự ta được

$$P(1+abc) = \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1} + \frac{a+1}{a(b+1)} + \frac{b+1}{b(c+1)} + \frac{c+1}{c(a+1)} - 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1} &\geq 3\sqrt[3]{abc} \\ \frac{a+1}{a(b+1)} + \frac{b+1}{b(c+1)} + \frac{c+1}{c(a+1)} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \end{aligned}$$

Do đó ta được

$$(abc+1)P \geq 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} - 3 = \frac{3\left(\sqrt[3]{(abc)^2} - \sqrt[3]{abc} + 1\right)}{\sqrt[3]{abc}} \Leftrightarrow P \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}(\sqrt[3]{abc} + 1)}$$

Do đó ta được $\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Cách 2: Đặt $abc = k^3$, khi đó tồn tại các số thực dương x, y, z sao cho

$$a = \frac{ky}{x}; b = \frac{kz}{y}; c = \frac{kx}{z}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\frac{ky}{x}\left(\frac{kz}{y}+1\right)} + \frac{1}{\frac{kz}{y}\left(\frac{kx}{z}+1\right)} + \frac{1}{\frac{kx}{z}\left(\frac{ky}{x}+1\right)} \geq \frac{3}{k(k+1)}$$

Hay $\frac{x}{y+kz} + \frac{y}{z+kx} + \frac{z}{x+ky} \geq \frac{3}{k+1}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned}\frac{x}{y+kz} + \frac{y}{z+kx} + \frac{z}{x+ky} &= \frac{x^2}{x(y+kz)} + \frac{y^2}{y(z+kx)} + \frac{z^2}{z(x+ky)} \\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{x(y+kz) + y(z+kx) + z(x+ky)} \\ &= \frac{(x+y+z)^2}{(k+1)(xy+yz+zx)} \geq \frac{3}{k+1}\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 29. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b+2c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c+2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+2b}\right)^2 \geq \frac{1}{3}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Quan sát về trái của bất đẳng thức là ta liên tưởng đến một đánh giá quen thuộc là $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x+y+z)^2$, khi đó ta được

$$\left(\frac{a}{b+2c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c+2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+2b}\right)^2 \geq \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b}\right)^2$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$

Để chứng minh được bất đẳng thức trên ta có cách hướng sau đây

+ Hướng 1: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta được $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, do đó ta được

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$$

Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

+ Hướng 2: Thực hiện đổi biến như sau: Đặt $x = a + 2b$; $y = b + 2c$; $z = c + 2a$, khi đó ta được

$$a = \frac{x-2y+4z}{9}; \quad b = \frac{y-2z+4x}{9}; \quad c = \frac{z-2x+4y}{9}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x-2y+4z}{9y} + \frac{y-2z+4x}{9z} + \frac{z-2x+4y}{9x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{4z}{y} + \frac{y}{z} + \frac{4x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{4y}{x} \geq 15$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2; \quad \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2; \quad \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 2; \quad 3\left(\frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x}\right) \geq 9$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được đánh giá cuối cùng.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 30. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^3 + b^3 = c^3$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 - c^2 > 6(c-a)(c-b)$$

Phân tích và lời giải

Quan sát giả thiết và bất đẳng thức cần chứng minh ta nhận thấy vai trò như nhau của hai biến a, b . Hơn nữa từ giả thiết $a^3 + b^3 = c^3$, ta thu được $\frac{a^3}{c^3} + \frac{b^3}{c^3} = 1$. Đến đây để đơn giản hóa ta có thể đặt $x = \frac{a}{c}; y = \frac{b}{c}$ và như vậy giả thiết được viết thành $x^3 + y^3 = 1$ với $0 < x, y < 1$.

Ta biến đổi để viết lại bất đẳng thức theo biến mới như sau

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} - 1 > 6\left(1 - \frac{a}{c}\right)\left(1 - \frac{b}{c}\right)$, lúc này ta được bất đẳng thức cần chứng minh là $x^2 + y^2 - 1 > 6(1 - x)(1 - y)$.

Từ giả thiết ta cần làm xuất hiện tích $(1 - x)(1 - y)$

Đề ý từ giả thiết ta được $x^3 y^3 = (1 - y^3)(1 - x^3) = (1 - x)(1 - y)(1 + x + x^2)(1 + y + y^2)$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $1 + x + x^2 \geq 3x; 1 + y + y^2 \geq 3y$, do đó

$$x^3 y^3 \geq 9xy(1 - x)(1 - y) \Leftrightarrow xy \geq 3\sqrt{(1 - x)(1 - y)}$$

Lại từ giả thiết ta được

$$x^2 + y^2 - 1 = x^2(1 - x) + y^2(1 - y) \geq 2xy\sqrt{(1 - x)(1 - y)} \geq 6(1 - x)(1 - y)$$

Hay $x^2 + y^2 - 1 \geq 6(1 - x)(1 - y)$, vì dấu đẳng thức không xảy ra nên ta được bất đẳng thức

$$x^2 + y^2 - 1 > 6(1 - x)(1 - y).$$

Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh.

Bài 31. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3) \geq 2\sqrt{2(2 + a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 + a^3 + b^3 + c^3)}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta thấy các biến đều có lũy thừa bậc ba nên để đơn giản ta có thể đổi biến

Đặt $x = a^3; y = b^3; z = c^3$, khi đó ta có $xyz = 1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq 2\sqrt{2(2 + xy + yz + zx + x + y + z)}$$

Đề ý đến giả thiết $xyz = 1$ ta viết lại được bất đẳng thức như sau

$$\begin{aligned} (x + y)(y + z)(z + x) &\geq 2\sqrt{2(xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1)} \\ \Leftrightarrow (x + y)(y + z)(z + x) &\geq 2\sqrt{2(x + 1)(y + 1)(z + 1)} \end{aligned}$$

Bình phương hai vế ta được $[(x + y)(y + z)(z + x)]^2 \geq 8(x + 1)(y + 1)(z + 1)$

Đến đây ta nghĩ đến việc ghép theo cặp để chứng minh. Đề ý bên vế trái có đại lượng $x + y$ và ta cần biến đổi làm xuất hiện $x + 1$, nên ta sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được $(x + y)^2 \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 \geq (x + 1)^4$ hay ta được bất đẳng

$$\text{thức } (x + y)^2 (x + xz)^2 \geq (x + 1)^4 \Leftrightarrow x^2 (x + y)^2 (1 + z)^2 \geq (x + 1)^4$$

Tương tự ta được các bất đẳng thức

$$y^2 (y + z)^2 (1 + x)^2 \geq (y + 1)^4; z^2 (z + x)^2 (1 + y)^2 \geq (z + 1)^4$$

Nhân theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$x^2 y^2 z^2 (x+y)^2 (y+z)^2 (z+x)^2 (1+x)^2 (1+y)^2 (1+z)^2 \geq (x+1)^4 (y+1)^4 (z+1)^4$$

Hay
$$(x+y)^2 (y+z)^2 (z+x)^2 \geq (1+x)^2 (1+y)^2 (1+z)^2$$

Mặt khác ta lại có

$$(1+x)^2 (1+y)^2 (1+z)^2 \geq (1+x)(1+y)(1+z) \cdot 8\sqrt{xyz} = 8(1+x)(1+y)(1+z)$$

Do đó ta được bất đẳng thức $\left[(x+y)(y+z)(z+x) \right]^2 \geq 8(x+1)(y+1)(z+1)$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 32. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)} \geq 1$$

Phân tích và lời giải

Để dàng dự đoán được bất đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy không thể đánh trực tiếp bằng bất đẳng thức Cauchy hay Bunhiacopxki được. Do đó ta tính đến phương án biến đổi bất đẳng thức trước. Từ giả thiết gợi ý cho ta các cách đổi biến như

$$a = \frac{x}{y}; b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x} \text{ hoặc } a = \frac{x^2}{yz}; b = \frac{y^2}{zx}; c = \frac{z^2}{xy} \text{ hoặc } a = \frac{yz}{x^2}; b = \frac{zx}{y^2}; c = \frac{xy}{z^2}$$

Để ý đến tính đối xứng của bất đẳng thức ta loại cách đổi biến thứ nhất vì nó biến bất đẳng thức đối xứng thành bất đẳng thức hoán vị sẽ gây khó khăn hơn. Trong hai cách đổi biến còn lại ta ưu tiên chọn cách thứ ba vì các biến đều nằm dưới mẫu nên khi biến đổi thì các lũy thừa sẽ được đưa lên tử và cơ hội sẽ rõ ràng hơn. Hy vọng ta sẽ gặp may mắn với nhận định này.

Đặt $a = \frac{xy}{z^2}; b = \frac{yz}{x^2}; c = \frac{zx}{y^2}$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{z^4}{(xy + z^2)^2} + \frac{y^4}{(zx + y^2)^2} + \frac{x^4}{(yz + x^2)^2} + \frac{2x^2 y^2 z^2}{(xy + z^2)(zx + y^2)(yz + x^2)} \geq 1$$

Để ý đến bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có $(xy + z^2)^2 \leq (x^2 + z^2)(y^2 + z^2)$

Suy ra $\frac{z^4}{(xy + z^2)^2} \geq \frac{z^4}{(x^2 + z^2)(y^2 + z^2)}$. Hoàn toàn tương tự ta được

$$\begin{aligned} & \frac{z^4}{(xy + z^2)^2} + \frac{y^4}{(zx + y^2)^2} + \frac{x^4}{(yz + x^2)^2} \\ & \geq \frac{z^4}{(x^2 + z^2)(y^2 + z^2)} + \frac{y^4}{(x^2 + y^2)(z^2 + y^2)} + \frac{x^4}{(y^2 + x^2)(z^2 + x^2)} \\ & = \frac{x^4(y^2 + z^2) + y^4(z^2 + x^2) + z^4(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)(y^2 + z^2)} \end{aligned}$$

Cũng theo đánh giá như trên

$$(xy + z^2)(zx + y^2)(yz + x^2) \leq (x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2)$$

Khi đó ta có
$$\frac{2x^2y^2z^2}{(xy+z^2)(zx+y^2)(yz+x^2)} \geq \frac{2x^2y^2z^2}{(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)}$$

Do đó ta được bất đẳng thức

$$\begin{aligned} & \frac{z^4}{(xy+z^2)^2} + \frac{y^4}{(zx+y^2)^2} + \frac{x^4}{(yz+x^2)^2} + \frac{2x^2y^2z^2}{(xy+z^2)(zx+y^2)(yz+x^2)} \\ & \geq \frac{x^4(y^2+z^2) + y^4(z^2+x^2) + z^4(x^2+y^2) + 2x^2y^2z^2}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2)} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{x^4(y^2+z^2) + y^4(z^2+x^2) + z^4(x^2+y^2) + 2x^2y^2z^2}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2)} \geq 1.$$

Để ý ta phân tích được

$$x^4(y^2+z^2) + y^4(z^2+x^2) + z^4(x^2+y^2) + 2x^2y^2z^2 = (x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2)$$

Do đó
$$\frac{x^4(y^2+z^2) + y^4(z^2+x^2) + z^4(x^2+y^2) + 2x^2y^2z^2}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)(y^2+z^2)} = 1.$$

Như vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét: Đây thực sự là một bất đẳng thức khó và quá trình phân tích tìm lời giải cũng có phần may mắn. Tuy nhiên nếu ta không giám suy nghĩ đến các khả năng có thể xảy ra thì may mắn đó sẽ không đến với bản thân.

Ngoài ra các bạn có thể tham khảo thêm cách giải khác sau

Vì $abc = 1$ nên trong ba số a, b, c luôn có hai số nằm cùng phía so với 1.

Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là a và b .

Khi đó ta có
$$(1-a)(1-b) \geq 0 \Leftrightarrow a+b \leq 1+ab = \frac{c+1}{c}$$

Do đó ta được

$$(a+1)(b+1)(c+1) = (1+a+b+ab)(c+1) = 2(1+ab)(1+c) \leq \frac{2(c+1)^2}{c}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} & \geq \frac{1}{(1+ab)\left(1+\frac{a}{b}\right)} + \frac{1}{(1+ab)\left(1+\frac{b}{a}\right)} \\ & = \frac{b}{(1+ab)(a+b)} + \frac{a}{(1+ab)(a+b)} = \frac{1}{1+ab} = \frac{c}{c+1} \end{aligned}$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)} \\ \geq \frac{c}{c+1} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{c}{(c+1)^2} = \frac{c(c+1)+1+c}{(c+1)^2} = 1 \end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$

Bài 33. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3b}{a^4 + a^2b^2 + b^4} + \frac{b^3c}{b^4 + b^2c^2 + c^4} + \frac{c^3a}{c^4 + c^2a^2 + a^4} \leq 1$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy có thể rút gọn được các biến có bậc 1 ở tử mỗi phân số sau khi đánh giá mẫu số bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương

$$a^4 + a^2b^2 \geq 2a^3b$$

Do đó
$$\frac{a^3b}{a^4 + a^2b^2 + b^4} \leq \frac{a^3b}{2a^3b + b^4} = \frac{a^3}{2a^3 + b^3}$$

Tương tự ta được

$$\frac{a^3b}{a^4 + a^2b^2 + b^4} + \frac{b^3c}{b^4 + b^2c^2 + c^4} + \frac{c^3a}{c^4 + c^2a^2 + a^4} \leq \frac{a^3}{2a^3 + b^3} + \frac{b^3}{2b^3 + c^3} + \frac{ac^3}{2c^3 + a^3}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a^3}{2a^3 + b^3} + \frac{b^3}{2b^3 + c^3} + \frac{c^3}{2c^3 + a^3} \leq 1$$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3}{2a^3 + b^3} + \frac{b^3}{2b^3 + c^3} + \frac{c^3}{2c^3 + a^3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{b^3}{2a^3 + b^3} + \frac{c^3}{2b^3 + c^3} + \frac{a^3}{2c^3 + a^3} \geq 1$$

Đến đây ta có hai hướng để chứng minh bất đẳng thức như sau

+ Hướng 1: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{b^3}{2a^3 + b^3} + \frac{c^3}{2b^3 + c^3} + \frac{a^3}{2c^3 + a^3} &= \frac{b^6}{2a^3b^3 + b^6} + \frac{c^6}{2b^3c^3 + c^6} + \frac{a^6}{2c^3a^3 + a^6} \\ &\geq \frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2}{a^6 + b^6 + c^6 + 2a^3b^3 + 2b^3c^3 + 2c^3a^3} = 1 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

+ Hướng 2: Ta đơn giản hóa bất đẳng thức bằng cách đặt $x = a^3$; $y = b^3$; $z = c^3$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{y}{2x + y} + \frac{z}{2y + z} + \frac{x}{2z + x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{2x}{y} + 1} + \frac{1}{\frac{2y}{z} + 1} + \frac{1}{\frac{2z}{x} + 1} \geq 1$$

Đặt $m = \frac{x}{y}$; $n = \frac{y}{z}$; $p = \frac{z}{x} \Rightarrow mnp = 1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{2m + 1} + \frac{1}{2n + 1} + \frac{1}{2p + 1} \geq 1$$

Hay ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} (2m + 1)(2n + 1) + (2n + 1)(2p + 1) + (2p + 1)(2m + 1) &\geq (2m + 1)(2n + 1)(2p + 1) \\ \Leftrightarrow 2(a + b + c) &\geq 6 \end{aligned}$$

Đánh giá cuối cùng luôn đúng theo bất đẳng thức Cauchy và $mnp = 1$.

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 34. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a + b + c)^3}{abc} + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 28$$

Phân tích và lời giải

Dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Quan sát bất đẳng thức bất đẳng thức có đại lượng $(a + b + c)^3$ làm ta liên tưởng đến hằng đẳng thức

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

Để dàng chứng minh được $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

Do đó ta được $(a + b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$.

Khi đó ta được bất đẳng thức

$$\frac{(a + b + c)^3}{abc} + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3 + 24abc}{abc} + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 24abc}{abc} + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 28 \Leftrightarrow \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 4$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \geq \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + 2$$

Để hoàn thành chứng minh ta cần chỉ ra được

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + 2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 2$$

Theo bất đẳng thức Cauchy thì bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng.

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Bài 35. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3(a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4)}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{8a^3}{(bc + a)^3} + \frac{8b^3}{(ca + b)^3} + \frac{8c^3}{(ab + c)^3} \geq 6$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức nhận thấy đại lượng $a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4$ có bậc 8 nên ta cần đánh giá đại lượng đó về đại lượng bậc thấp hơn. Theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 \geq a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) = a^2 + b^2 + c^2$$

Do đó ta có

$$\frac{3(a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 3$$

Như vậy bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$\frac{8a^3}{(bc + a)^3} + \frac{8b^3}{(ca + b)^3} + \frac{8c^3}{(ab + c)^3} \geq 3$$

Hay

$$\frac{a^3}{(bc + a)^3} + \frac{b^3}{(ca + b)^3} + \frac{c^3}{(ab + c)^3} \geq \frac{3}{8}$$

Để ý đến $abc = 1$, ta viết bất đẳng thức trên thành

$$\frac{a^3}{\left(\frac{1}{a} + a\right)^3} + \frac{b^3}{\left(\frac{1}{b} + b\right)^3} + \frac{c^3}{\left(\frac{1}{c} + c\right)^3} \geq \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{a^6}{(1 + a^2)^3} + \frac{b^6}{(1 + b^2)^3} + \frac{c^6}{(1 + c^2)^3} \geq \frac{3}{8}$$

Đặt $x = a^2$; $y = b^2$; $z = c^2 \Rightarrow xyz = 1$, khi đó bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{x^3}{(1+x)^3} + \frac{y^3}{(1+y)^3} + \frac{z^3}{(1+z)^3} \geq \frac{3}{8}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cachy ta được

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{(1+x)^3} + \frac{x^3}{(1+x)^3} + \frac{1}{8} &\geq \frac{3}{2} \frac{x^2}{(1+x)^2} \\ \frac{y^3}{(1+y)^3} + \frac{y^3}{(1+y)^3} + \frac{1}{8} &\geq \frac{3}{2} \frac{y^2}{(1+y)^2} \\ \frac{z^3}{(1+z)^3} + \frac{z^3}{(1+z)^3} + \frac{1}{8} &\geq \frac{3}{2} \frac{z^2}{(1+z)^2} \end{aligned}$$

Do đó ta được
$$\frac{2x^3}{(1+x)^3} + \frac{2y^3}{(1+y)^3} + \frac{2z^3}{(1+z)^3} + \frac{3}{8} \geq \frac{3}{2} \left[\frac{x^2}{(1+x)^2} + \frac{y^2}{(1+y)^2} + \frac{z^2}{(1+z)^2} \right]$$

Như vậy phép chứng minh hoàn sẽ hoàn tất nếu ta chứng minh được

$$\frac{x^2}{(1+x)^2} + \frac{y^2}{(1+y)^2} + \frac{z^2}{(1+z)^2} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{(yz+1)^2} + \frac{1}{(zx+1)^2} + \frac{1}{(xy+1)^2} \geq \frac{3}{4}$$

Đặt $m = xy$; $n = yz$; $p = zx \Rightarrow mnp = 1$, bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \geq \frac{3}{4}$$

Ta có
$$\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{1}{(mn+1)\left(\frac{m}{n}+1\right)} + \frac{1}{(mn+1)\left(\frac{n}{m}+1\right)} = \frac{1}{mn+1}$$

Mặt khác ta lại có

$$\frac{1}{mn+1} + \frac{1}{(p+1)^2} = \frac{p}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} = \frac{(p-1)^2}{4(p+1)^2} + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

Do đó
$$\frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \geq \frac{3}{4}$$
 là bất đẳng thức đúng

Suy ra bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Bài 36. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a + \sqrt{a+bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{b+ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{c+ab}} \leq 1$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{1}{3}$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy các hạng tử trong căn chưa đồng bậc, do đó chú ý đến giả thiết $a + b + c = 1$ ta có thể viết được $a + bc = a(a + b + c) + bc = (a + b)(c + a)$. Để khử được căn bậc hai dưới các mẫu số ta chú ý đến bất đẳng thức Cauchy hoặc Bunhiacopxki. Tuy nhiên để ý đến chiều bất đẳng thức ta chọn cách sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki

Trước hết ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh là

$$\frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(c+a)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(b+c)(a+b)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(c+a)(b+c)}} \leq 1$$

Đến đây ta áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki thì được các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: $\sqrt{(a+b)(c+a)} \geq a + \sqrt{bc} \Rightarrow a + \sqrt{(a+b)(c+a)} \geq 2a + \sqrt{bc}$

+ Trường hợp 2: $\sqrt{(a+b)(c+a)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{ac} \Rightarrow a + \sqrt{(a+b)(c+a)} \geq a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac}$

Ta đi kiểm tra xem trong hai trường hợp trên thì trường hợp nào có đánh giá hợp lí

- Với đánh giá $a + \sqrt{(a+b)(c+a)} \geq 2a + \sqrt{bc}$, áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{a}{a + \sqrt{a+bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{b+ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{c+ab}} \leq \frac{a}{2a + \sqrt{bc}} + \frac{b}{2b + \sqrt{ca}} + \frac{c}{2c + \sqrt{ab}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a}{2a + \sqrt{bc}} + \frac{b}{2b + \sqrt{ca}} + \frac{c}{2c + \sqrt{ab}} \leq 1$$

Đến đây để đơn giản hóa bài toán ta có thể đặt $x = \sqrt{a}$; $y = \sqrt{b}$; $z = \sqrt{c}$, khi quy bài toán về chứng minh

$$\frac{x^2}{2x^2 + yz} + \frac{y^2}{2y^2 + zx} + \frac{z^2}{2z^2 + xy} \leq 1$$

Để có những đánh giá tiếp theo ta nghĩ đến đổi chiều bất đẳng thức thành

$$\frac{yz}{2x^2 + yz} + \frac{zx}{2y^2 + zx} + \frac{xy}{2z^2 + xy} \geq 1$$

Đến đây ta lại áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{yz}{2x^2 + yz} + \frac{zx}{2y^2 + zx} + \frac{xy}{2z^2 + xy} \geq \frac{(xy + yz + zx)^2}{2(x^2yz + xy^2z + xyz^2) + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2} = 1$$

Điều này cho thấy bất đẳng thức trên được chứng minh.

- Với đánh giá $\sqrt{(a+b)(c+a)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{ac} \Rightarrow a + \sqrt{(a+b)(c+a)} \geq a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac}$, khi đó ta

được
$$\frac{a}{a + \sqrt{a+bc}} \leq \frac{a}{a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{b}{b + \sqrt{b+ca}} \leq \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}; \quad \frac{c}{c + \sqrt{c+ab}} \leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

Như vậy cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 37. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{\sqrt{bc(b^2+c^2)}} + \frac{b(c+a)}{\sqrt{ca(c^2+a^2)}} + \frac{c(a+b)}{\sqrt{ab(a^2+b^2)}} \geq 3\sqrt{2}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy có các hướng đánh giá bất đẳng thức như sau.

- Đánh giá mỗi phân số bằng cách thay tử số bằng đại lượng nhỏ hơn
- Đánh giá mẫu bằng cách thay các mẫu bởi các đại lượng lớn hơn

- Đánh giá đồng thời cả tử và mẫu

Cách thứ nhất ta chú ý đến đánh $b + c \geq 2\sqrt{bc}$ biến đổi bất đẳng thức thành

$$\frac{a(b+c)}{\sqrt{bc(b^2+c^2)}} + \frac{b(c+a)}{\sqrt{ca(c^2+a^2)}} + \frac{c(a+b)}{\sqrt{ab(a^2+b^2)}} \geq \frac{2a}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{2b}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{2c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{2a}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{2b}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{2c}{\sqrt{a^2+b^2}} \geq 3\sqrt{2} \text{ hay } \frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Tuy nhiên đây lại là một đánh giá sai

Đề ý là ta cần phải đánh giá làm sao bất đẳng thức thu được càng đơn giản càng tốt, do đó ta ưu tiên đánh giá làm mất đi các căn bậc hai dưới mẫu. Như vậy ta chọn cách đánh giá thứ hai trước. Chú ý là ta cần phải thay mẫu bởi một đại lượng lớn hơn, do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến bất đẳng thức Cauchy dạng

$2\sqrt{xy} \leq x + y$ và cần phải bảo toàn dấu đẳng thức nên ta sẽ áp dụng cho hai số $2bc$; $b^2 + c^2$, cách

đánh giá này có cảm giác hợp lí vì vế phải có số $\sqrt{2}$. Như vậy lúc này ta sẽ được

$2\sqrt{2bc(b^2+c^2)} \leq 2bc + b^2 + c^2 = (b+c)^2$. Áp dụng tương tự ta thu được bất đẳng thức

$$\frac{a(b+c)}{\sqrt{2bc(b^2+c^2)}} + \frac{b(c+a)}{\sqrt{2ca(c^2+a^2)}} + \frac{c(a+b)}{\sqrt{2ab(a^2+b^2)}} \geq \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b}$$

Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \geq 3 \text{ hay } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Đề ý đánh giá cuối cùng là bất đẳng thức Neibizt quen thuộc và việc chứng minh nó hoàn toàn đơn giản.

Bài 38. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab^2 + bc^2 + ca^2 + 9 \geq 5(a + b + c)$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy đây là một bất đẳng thức hoán vị do đại lượng $ab^2 + bc^2 + ca^2$. Rõ ràng bất đẳng thức hoán vị bao giờ cũng khó xử lý hơn bất đẳng thức đối xứng. Cho nên nếu đối xứng hóa được đại lượng $ab^2 + bc^2 + ca^2$ thì cơ hội chứng minh bài toán sẽ lớn hơn.

Đề ý là theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 = \frac{a^2b^2}{a} + \frac{b^2c^2}{b} + \frac{c^2a^2}{c} \geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{a + b + c}$$

Như vậy sau đánh giá này ta có bất đẳng thức

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab^2 + bc^2 + ca^2 + 9 \geq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{(ab + bc + ca)^2}{a + b + c} + 9$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{(ab + bc + ca)^2}{a + b + c} + 9 \geq 5(a + b + c)$$

Bất đẳng thức trên chứa các đại lượng $a^2 + b^2 + c^2$; $ab + bc + ca$; $a + b + c$ và chúng liên hệ với nhau bởi hằng đẳng thức $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ do đó để đơn giản hóa ta đặt

$x = a + b + c$; $y = ab + bc + ca$ khi đó $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 - 2y$ và lúc này bất đẳng thức được viết lại thành

$$x^2 - 2y + \frac{y^2}{x} + 9 = 5x \Leftrightarrow (x-3)^2 + \frac{(y-x)^2}{x} \geq 0$$

Đánh giá cuối cùng luôn đúng do x là số dương. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Nhân xét: Ngoài cách chứng minh như trên ta có thể tham khảo thêm các sau đây

Đặt $x = a - 1$; $y = b - 1$; $z = c - 1$, khi đó ta có $x, y, z \geq -1$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) + xy^2 + yz^2 + zx^2 \geq 0$$

Để ý là

$$\begin{aligned} & 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) + xy^2 + yz^2 + zx^2 \\ &= (x + y + z)^2 + y^2(x+1) + z^2(y+1) + x^2(z+1) \end{aligned}$$

Vì $x, y, z > -1$ nên $x+1, y+1, z+1 > 0$ do đó

$$(x + y + z)^2 + y^2(x+1) + z^2(y+1) + x^2(z+1) \geq 0$$

Hay bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 39. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab^2}{c} + \frac{bc^2}{a} + \frac{ca^2}{b} + a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{(ab^3 + bc^3 + ca^3)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Quan sát bất đẳng thức ta thấy vế phải chứa căn bậc hai nên ta cần phải đánh giá làm mất căn bậc hai trước, chú ý đến chiều của bất đẳng thức ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $2\sqrt{xy} \leq x + y$. Như vậy nếu ta sử dụng ngay bất đẳng thức Cauchy thì được

$$2\sqrt{(ab^3 + bc^3 + ca^3)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)} \leq ab^3 + bc^3 + ca^3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

Có điều khi đánh giá bằng bất đẳng thức Cauchy thì các đại lượng đưa ra cần phải đồng bậc. Do đó đánh giá như trên không được hợp lý.

Như vậy để đánh giá được ta cần phải biến đổi bất đẳng thức trước, chú ý là hai đại lượng trong căn có bậc 4 và 0, do đó ta cố đưa về cùng bậc 2 bằng một phép biến đổi, chẳng hạn

$$2\sqrt{(ab^3 + bc^3 + ca^3)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)} = 2\sqrt{\frac{(ab^3 + bc^3 + ca^3)}{bc} \cdot bc\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)}. \text{ Khi này ta có đánh giá}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{(ab^3 + bc^3 + ca^3)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)} &= 2\sqrt{\frac{(ab^3 + bc^3 + ca^3)}{bc} \cdot bc\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)} \\ &\leq \frac{(ab^3 + bc^3 + ca^3)}{bc} + bc\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(ab^3 + bc^3 + ca^3)}{bc} + bc\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \leq \frac{ab^2}{c} + \frac{bc^2}{a} + \frac{ca^2}{b} + a^2 + b^2 + c^2$$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{ab^2}{c} + c^2 + \frac{a^3}{b} + ca + b^2 + \frac{bc^2}{a} \leq \frac{ab^2}{c} + \frac{bc^2}{a} + \frac{ca^2}{b} + a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - \frac{a^3}{b} + \frac{ca^2}{b} - ca \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a(b-a)(a-c)}{b} \geq 0$$

Đến đây ta hoàn toàn có thể giả sử trong ba số a, b, c thì a là số nằm giữa. Do đó bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 40. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 8$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a+b+6} + \frac{1}{2b+c+6} + \frac{1}{2c+a+6} \leq \frac{1}{4}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết quan sát kỹ giả thiết $abc = 8$, nhìn có vẻ thấy hơi lạ mắt vì ta thường gặp giả thiết kiểu $abc = 1$. Do đó suy nghĩ đầu tiên đó là tìm cách đưa về giả thiết $abc = 1$ và vì thế ta sử dụng cách đổi biến $a = 2x$; $b = 2y$; $c = 2z$, khi đó ta được $xyz = 1$ và lúc này bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{1}{2x+y+3} + \frac{1}{2y+z+3} + \frac{1}{2z+x+3} \leq \frac{1}{2}$$

Đến đây ta có một số ý tưởng tiếp cận bài toán trên.

Cách 1: Đầu tiên ta dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $x = y = z = 1$. Để ý đến chiều của bất đẳng thức ta liên tưởng đến bất đẳng thức Cauchy hoặc Bunhiacopxki dạng phân thức. Tuy nhiên ở đây ta nên áp dụng cho mấy số?

Chú ý là với $x = y = z = 1$ thì $2x + y + 3 = (x + y + 1) + (x + 2)$, do đó ta có thể đánh giá như sau

$$\frac{1}{2x+y+3} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{x+2} \right)$$

Hoàn toàn tương tự ta thu được bất đẳng thức

$$\frac{1}{2x+y+3} + \frac{1}{2y+z+3} + \frac{1}{2z+x+3} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2} \right)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2} \leq 2$$

Đến đây ta tách ra chứng minh hai bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} \leq 1 \text{ và } \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2} \leq 1$$

Với giả thiết $xyz = 1$ thì bất đẳng thức $\frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} \leq 1$ được chứng minh bằng phép đổi biến.

$$\text{Bây giờ ta tập trung chứng minh bất đẳng thức } \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2} \leq 1$$

Bất đẳng thức trên tương đương với $\frac{x}{x+2} + \frac{x}{y+2} + \frac{x}{z+2} \geq 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng phân thức ta được

$$\frac{x}{x+2} + \frac{y}{y+2} + \frac{z}{z+2} \geq \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2}{x+y+z+6}$$

Và ta cần chỉ ra được $(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \geq x+y+z+6 \Leftrightarrow \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \geq 3$

Rõ ràng đánh giá cuối cùng đúng theo bất đẳng thức Cauchy. Do đó bài toán được chứng minh.

Cách 2: Cách phát biểu của bất đẳng thức cần chứng minh làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức

$$\frac{1}{2x^2 + y^2 + 3} + \frac{1}{2y^2 + z^2 + 3} + \frac{1}{2z^2 + x^2 + 3} \leq \frac{1}{2}$$

Do đó để đưa về dạng như trên ta có thể đặt $x = m^2$; $y = n^2$; $z = p^2$ khi đó từ $xyz = 1$ ta suy ra được $mnp = 1$ và bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{1}{2m^2 + n^2 + 3} + \frac{1}{2n^2 + p^2 + 3} + \frac{1}{2p^2 + m^2 + 3} \leq \frac{1}{2}$$

Bất đẳng thức này đã được chứng minh trong chủ đề thứ hai.

Bài 41. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4b}{a^2+1} + \frac{b^4c}{b^2+1} + \frac{c^4a}{c^2+1} \geq \frac{3}{2}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy trên tử mỗi phân số có chứa các lũy thừa bậc chẵn. Do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Tuy nhiên trước khi áp dụng ta cần khử thừa số bậc lẻ trước.

Cách 1: Chú ý đến giả thiết $abc = 1$, ta viết lại được bất đẳng thức như sau

$$\frac{a^4}{a^3c + ac} + \frac{b^4}{b^3a + ab} + \frac{c^4}{c^3b + bc} \geq \frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{a^4}{a^3c + ac} + \frac{b^4}{b^3a + ab} + \frac{c^4}{c^3b + bc} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^3c + b^3a + c^2b + ab + bc + ca}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^3c + b^3a + c^2b + ab + bc + ca} \leq \frac{3}{2}$$

Hay $2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3c + b^3a + c^3b + ab + bc + ca)$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$2(a^4 + b^4 + c^4) + 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 3(a^3c + b^3a + c^3b) + 3(ab + bc + ca)$$

Dễ thấy theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$\begin{aligned} a^2b^2 + 1 &\geq 2ab; \quad b^2c^2 + 1 \geq 2bc; \quad c^2a^2 + 1 \geq 2ca \\ \Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3 &\geq 2(ab + bc + ca) \end{aligned}$$

Mà $ab + bc + ca \geq 3\sqrt{a^2b^2c^2} = 3$ suy ra $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab + bc + ca$

Do đó ta được $3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 3(ab + bc + ca)$

Chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2(a^4 + b^4 + c^4) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 3(a^3c + b^3a + c^3b)$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a^4 + a^4 + a^4 + b^4 \geq 4a^3b; b^4 + b^4 + b^4 + c^4 \geq 4b^3c; c^4 + c^4 + c^4 + a^4 \geq 4c^3a$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + b^4 \geq a^3b + b^3c + c^3a$$

Và

$$a^4 + a^2b^2 \geq 2a^3b; b^4 + b^2c^2 \geq 2b^3c; c^4 + c^2a^2 \geq 2c^3a$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 2a^3b + 2b^3c + 2c^3a$$

Cộng theo vế hai kết quả trên ta được

$$2(a^4 + b^4 + c^4) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a)$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Cách 2: Khi quan sát bất đẳng thức ta nghĩ đến là đánh giá $\frac{a^4b}{a^2+1} \leq \frac{a^4b}{2a}$, đáng tiếc là đánh giá này cho một bất đẳng thức ngược chiều. Chính điều này gợi ý cho ta sử dụng kỹ thuật Cauchy ngược dấu. Biến đổi và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^4b}{a^2+1} = a^2b - \frac{a^2b}{a^2+1} \geq a^2b - \frac{a^2b}{2a} = a^2b - \frac{ab}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{b^4c}{b^2+1} \geq b^2c - \frac{bc}{2}; \frac{c^4a}{c^2+1} \geq c^2a - \frac{ca}{2}$

Khi đó ta được $\frac{a^4}{a^3c+ac} + \frac{b^4}{b^3a+ab} + \frac{c^4}{c^3b+bc} \geq a^2b + b^2c + c^2a - \frac{ab+bc+ca}{2}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$a^2b + b^2c + c^2a - \frac{ab+bc+ca}{2} \geq \frac{3}{2}$$

Hay $2(a^2b + b^2c + c^2a) \geq 3 + ab + bc + ca$

Dễ thấy $a^2b + b^2c + c^2a \geq 3\sqrt[3]{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a} = 3$

Và ta cần chỉ ra được $a^2b + b^2c + c^2a \geq ab + bc + ca$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $a^2b + a^2b + b^2c \geq 3\sqrt[3]{a^4b^4c} = 3ab$

Thiết lập các bất đẳng thức tương tự và cộng theo vế ta được

$$3(a^2b + b^2c + c^2a) \geq 3(ab + bc + ca)$$

Hay $a^2b + b^2c + c^2a \geq ab + bc + ca$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 42. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{(b+c)(b^2+c^2)} + \frac{b^4}{(c+a)(c^2+a^2)} + \frac{c^4}{(a+b)(a^2+b^2)} \geq \frac{3}{4}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy các dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, sử dụng kỹ thuật đánh giá mẫu,....

Cách 1: Suy nghĩ đầu tiên khi quan sát bất đẳng thức đó là dấu hiệu áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Như vậy khi đó ta được

$$\frac{a^4}{(b+c)(b^2+c^2)} + \frac{b^4}{(c+a)(c^2+a^2)} + \frac{c^4}{(a+b)(a^2+b^2)}$$

$$\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(b+c)(b^2+c^2) + (c+a)(c^2+a^2) + (a+b)(a^2+b^2)}$$

Như vậy ta cần chỉ ra được

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(b+c)(b^2+c^2) + (c+a)(c^2+a^2) + (a+b)(a^2+b^2)} \geq \frac{3}{4}$$

Để ý ta thấy khi khai triển mẫu thì xuất hiện đại lượng $a^3 + b^3 + c^3$ và đánh giá đại lượng đó theo kiểu $a^3 + b^3 + c^3 \leq ?$ rất phức tạp. Do đó đánh giá một cách trực tiếp như vậy có vẻ không đem lại hiệu quả. Như vậy để áp dụng có hiệu quả ta nên biến đổi bất đẳng thức về một dạng khác.

Chú ý là tại các mẫu xuất hiện tích của hai đại lượng do đó ta sẽ đưa một đại lượng lên trên tử số. Khi đó ta có các cách biến đổi là

$$\frac{a^4}{(b+c)(b^2+c^2)} = \frac{\left(\frac{a^2}{\sqrt{b+c}}\right)^2}{b^2+c^2} \text{ hoặc là } \frac{a^4}{(b+c)(b^2+c^2)} = \frac{\left(\frac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}}\right)^2}{b+c}$$

Để ý rằng sau khi áp dụng thì ta thu được biểu thức là tổng các mẫu số, do đó chú ý đến giả thiết $a+b+c=3$ thì ta chọn cách biến đổi thứ hai. Khi này bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{\left(\frac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}}\right)^2}{b+c} + \frac{\left(\frac{b^2}{\sqrt{c^2+a^2}}\right)^2}{c+a} + \frac{\left(\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2}{a+b} \geq \frac{3}{4}$$

Đến đây áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{\left(\frac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}}\right)^2}{b+c} + \frac{\left(\frac{b^2}{\sqrt{c^2+a^2}}\right)^2}{c+a} + \frac{\left(\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2}{a+b} \geq \frac{\left(\frac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2}{2(a+b+c)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Như vậy sau một số bước đánh giá ta đưa được về một bất đẳng thức có vẻ đơn giản hơn và bất đẳng thức cần chứng minh lúc này cũng có dấu hiệu áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, khi đó ta được

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{a^2+b^2}}$$

Và ta cần chứng minh được $\sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{a^2+b^2} \leq 3\sqrt{2}$, tuy nhiên đánh giá này lại sai vì

$$\sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{a^2+b^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b+b+c+c+a) = 3\sqrt{2}.$$

Như vậy để đảm bảo các đánh giá đúng chiều ta cần nâng lũy thừa của các phân số lên, do đó ta có đánh giá

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2\sqrt{b^2+c^2} + b^2\sqrt{a^2+c^2} + c^2\sqrt{a^2+b^2}}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned}
& a^2\sqrt{b^2+c^2} + b^2\sqrt{a^2+c^2} + c^2\sqrt{a^2+b^2} \\
& \leq \sqrt{(a^2+b^2+c^2)\left[a^2(b^2+c^2) + b^2(c^2+a^2) + c^2(a^2+b^2)\right]} \\
& = \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}
\end{aligned}$$

Do đó ta được

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2\sqrt{b^2+c^2} + b^2\sqrt{a^2+c^2} + c^2\sqrt{a^2+b^2}} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}}$$

Ta cần chỉ ra được
$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Hay
$$(a^2+b^2+c^2)\sqrt{(a^2+b^2+c^2)} \geq 3\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

Để ý ta nhận thấy

$$a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}; \sqrt{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

Cách 2: Có thể thấy bài toán trên đã được chứng minh xong, tuy nhiên lại quá vất vả trong việc tìm lời giải. Có một điều dễ nhận ra là nếu bài này được ra trong một kì thi mà thời gian có hạn thì cách như trên sẽ lấy hết thời gian của các bài toán khác. Có phải đang có một cách giải khác ngắn gọn hơn hay không? Ta thử quan sát kỹ lại bất đẳng thức một lần nữa xem sao? Ta nhận thấy trong mỗi phân thức thì tử có bậc 4 và mẫu có bậc 3, chú ý đến giả thiết $a+b+c=1$ thì ta có thể đồng bậc như sau

$$\frac{a^4}{(b+c)(b^2+c^2)} + \frac{b^4}{(c+a)(c^2+a^2)} + \frac{c^4}{(a+b)(a^2+b^2)} \geq \frac{a+b+c}{4}$$

Do đó ta hướng đến đơn giản hóa các mẫu số, điều này làm ta nghĩ đến chứng minh một đánh giá kiểu $(x+y)(x^2+y^2) \leq 2(x^3+y^3)$. Đây là một đánh giá chứng minh được bằng phép biến đổi tương đương. Bây giờ ta thử áp dụng đánh giá đó xem sao

$$\begin{aligned}
& \frac{a^4}{(b+c)(b^2+c^2)} + \frac{b^4}{(c+a)(c^2+a^2)} + \frac{c^4}{(a+b)(a^2+b^2)} \\
& \geq \frac{a^4}{2(b^3+c^3)} + \frac{b^4}{2(c^3+a^3)} + \frac{c^4}{2(a^3+b^3)}
\end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a^4}{2(b^3+c^3)} + \frac{b^4}{2(c^3+a^3)} + \frac{c^4}{2(a^3+b^3)} \geq \frac{a+b+c}{4}$$

Bất đẳng thức này có thể chứng minh được bằng cách áp dụng đồng thời bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức và bất đẳng thức Cauchy.

Bài 43. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^3}{5a^2+(b+c)^2}} + \sqrt{\frac{b^3}{5b^2+(c+a)^2}} + \sqrt{\frac{c^3}{5c^2+(a+b)^2}} \leq \sqrt{\frac{a+b+c}{3}}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$. Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta thấy được sự phức tạp của bài toán. Suy nghĩ đầu tiên khi đọc bài toán đó là khử được các căn bậc hai

bên vế trái, tuy nhiên ở đây ta không nên bình phương vì biểu thức trong căn tương đối công kênh. Như vậy ta cần một đánh giá để có thể khử hết các căn bậc hai hoặc một đánh giá mà đưa về chỉ một căn thức. Chú ý đến chiều của bất đẳng thức cần chứng minh ta nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki. Mặt khác chú ý đến tổng $a + b + c$ bên vế phải vì thế ta cần đánh giá sao cho có thể rút gọn được $a + b + c$. Từ các nhận xét đó ta có:

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki thì

$$\sqrt{\frac{a^3}{5a^2 + (b+c)^2}} + \sqrt{\frac{b^3}{5b^2 + (c+a)^2}} + \sqrt{\frac{c^3}{5c^2 + (a+b)^2}} \leq \sqrt{(a+b+c) \left(\frac{a^2}{5a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{5b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2}{5c^2 + (a+b)^2} \right)}$$

Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a^2}{5a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{5b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2}{5c^2 + (a+b)^2} \leq \frac{1}{3}$$

Đến đây ta để ý lại thấy $5a^2 + (b+c)^2 = 5a^2 + b^2 + c^2 + 2bc$ và chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta có $5a^2 + (b+c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + (2a^2 + bc) + (2a^2 + bc)$, khi này ta nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Như vậy ta cần có trên tử $(3a)^2$, điều này ta hoàn toàn có thể làm được. Khi này ta sẽ được

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{5a^2 + (b+c)^2} &= \frac{1}{9} \cdot \frac{(3a)^2}{(a^2 + b^2 + c^2) + (2a^2 + bc) + (2a^2 + bc)} \\ &\leq \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2a^2}{2a^2 + bc} \right) \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta thu được

$$\frac{b^2}{5b^2 + (c+a)^2} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2b^2}{2b^2 + ac} \right); \quad \frac{c^2}{5c^2 + (a+b)^2} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2c^2}{2c^2 + ab} \right) \text{ Do đó ta có}$$

$$\frac{a^2}{5a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{5b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2}{5c^2 + (a+b)^2} \leq \frac{1}{9} \left(1 + \frac{2a^2}{2a^2 + bc} + \frac{2b^2}{2b^2 + ca} + \frac{2c^2}{2c^2 + ab} \right)$$

$$\text{Bây giờ ta cần phải chứng minh được } \frac{1}{9} \left(1 + \frac{2a^2}{2a^2 + bc} + \frac{2b^2}{2b^2 + ca} + \frac{2c^2}{2c^2 + ab} \right) \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{Bất đẳng thức đó tương đương với } \frac{2a^2}{2a^2 + bc} + \frac{2b^2}{2b^2 + ca} + \frac{2c^2}{2c^2 + ab} \leq 2$$

$$\text{Đến đây ta đổi chiều bất đẳng thức và được } \frac{bc}{2a^2 + bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab} \geq 1$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức thì

$$\frac{bc}{2a^2 + bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab} \geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c)} = 1$$

Như vậy đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng.

Do đó bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Bài 44. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$(a + b^2)(b + c^2)(c + a^2) \geq 8$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta thấy bên vế phải có các đại lượng $a + b^2$; $b + c^2$; $c + a^2$ và ta cần tìm được một đại lượng trung gian mà các đánh giá phải cùng chiều, do đó suy nghĩ đầu tiên là đồng bậc các hạng tử trong mỗi đại lượng trên. Để thực hiện được việc này ta để ý đến bất đẳng thức Bunhiacopxki. Lúc này ta được ta

$$(a + b^2)(a + 1) \geq (a + b)^2; (b + c^2)(b + 1) \geq (b + c)^2; (c + a^2)(c + 1) \geq (c + a)^2$$

Nhân theo vế ta được

$$(a + b^2)(b + c^2)(c + a^2)(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq [(a + b)(b + c)(c + a)]^2$$

$$\text{Hay} \quad (a + b^2)(b + c^2)(c + a^2) \geq \frac{[(a + b)(b + c)(c + a)]^2}{(a + 1)(b + 1)(c + 1)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{[(a + b)(b + c)(c + a)]^2}{(a + 1)(b + 1)(c + 1)} \geq 8$$

Trong các đánh giá trên ta chưa sử dụng đến giả thiết. Ta cần phải sử dụng giả thiết cho các đánh giá tiếp theo. Nhận thấy ta chưa thể sử dụng ngay được giả thiết nên ta cần biến đổi giả thiết về một dạng khác trước. Thật vậy, từ giả thiết $ab + bc + ca = 3$ ta dễ dàng suy ra $a + b + c \geq 3$ và $abc \leq 1$.

Dễ thấy

$$(a + b)(b + c)(c + a) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = 3(a + b + c) - abc \geq 8$$

Do đó từ giả thiết ta suy ra được $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8$

$$\text{Nhu vậy ta cần chỉ ra được} \quad \frac{(a + b)(b + c)(c + a)}{(a + 1)(b + 1)(c + 1)} \geq 1$$

$$\text{Hay} \quad (a + b)(b + c)(c + a) \geq (a + 1)(b + 1)(c + 1)$$

Để ý đến các phép biến đổi

$$\begin{aligned} (a + b)(b + c)(c + a) &= 3(a + b + c) - abc \geq 8 \\ (a + 1)(b + 1)(c + 1) &= abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} &(a + b)(b + c)(c + a) - (a + 1)(b + 1)(c + 1) \\ &= 3(a + b + c) - abc - (abc + bc + bc + ca + a + b + c + 1) \\ &= 2(a + b + c) - 2abc - 4 \geq 2 - 2abc \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó suy ra} \quad (a + b)(b + c)(c + a) \geq (a + 1)(b + 1)(c + 1)$$

Nhu vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Bài 45. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b}{a\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{c}{b\sqrt{c^2 + 1}} + \frac{a}{c\sqrt{a^2 + 1}} \geq \frac{3}{2}$$

Phân tích và lời giải

Từ giả thiết của bài toán là $a + b + c = abc$ suy ra $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$. Khi này suy nghĩ hết sức

tự nhiên là đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$. Do đó giả thiết của bài toán trở thành $xy + yz + zx = 1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại là

$$\frac{x}{\sqrt{y^2 + 1}} + \frac{y}{\sqrt{z^2 + 1}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq \frac{3}{2}$$

Với giả thiết $xy + yz + zx = 1$ ta thấy được

$$\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + xy + yz + zx} = \sqrt{(x + y)(x + z)}$$

Tương tự ta được $\sqrt{y^2 + 1} = \sqrt{(y + z)(y + x)}$; $\sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{(z + x)(z + y)}$

Để ý tiếp ta lại có theo bất đẳng thức Cauchy thì $\frac{x}{\sqrt{(y + x)(y + z)}} \geq \frac{2x}{x + 2y + z}$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{y^2 + 1}} + \frac{y}{\sqrt{z^2 + 1}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \frac{x}{\sqrt{(y + x)(y + z)}} + \frac{y}{\sqrt{(z + x)(z + y)}} + \frac{z}{\sqrt{(x + y)(x + z)}} \\ &\geq \frac{2x}{x + 2y + z} + \frac{2y}{x + y + 2z} + \frac{2z}{2x + y + z} \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{2x}{x + 2y + z} + \frac{2y}{x + y + 2z} + \frac{2z}{2x + y + z} \geq \frac{3}{2}$$

Với bất đẳng thức trên thì sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski dạng phân thức là hợp lý nhất. Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x + 2y + z} + \frac{2y}{x + y + 2z} + \frac{2z}{2x + y + z} &= \frac{2x^2}{x(x + 2y + z)} + \frac{2y^2}{y(x + y + 2z)} + \frac{2z^2}{z(2x + y + z)} \\ &\geq \frac{2(x + y + z)^2}{(x + y + z)^2 + xy + yz + zx} \geq \frac{2(x + y + z)^2}{(x + y + z)^2 + \frac{(x + y + z)^2}{3}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Như vậy bài toán được chứng minh xong. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \sqrt{3}$.

Bài 46. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a, b, c \geq 1$; $a^2 + b^2 + c^2 = 4$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{9}{2(\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{b^2 - 1} + \sqrt{c^2 - 1})}$

Phân tích và lời giải

Khi quan sát bất đẳng thức cần chứng minh thì suy nghĩ đầu tiên là đổi biến làm mất các căn bậc hai. Từ suy nghĩ đó ta đặt $x = \sqrt{a^2 - 1}$; $y = \sqrt{b^2 - 1}$; $z = \sqrt{c^2 - 1}$. Khi đó ta suy ra

$$a = \sqrt{x^2 + 1}; b = \sqrt{y^2 + 1}; c = \sqrt{z^2 + 1}.$$

Giả thiết của bài toán được viết lại thành $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} \leq \frac{9}{2(x+y+z)}$$

Hay

$$(x+y+z) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} \right) \leq \frac{9}{2}$$

Ta viết vế trái của bất đẳng thức trên thành

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} \right) + \left(\frac{y+z}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{z+x}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{x+y}{\sqrt{z^2+1}} \right)$$

Lúc này ta dự đoán

$$\frac{y+z}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{z+x}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{x+y}{\sqrt{z^2+1}} \leq 3 \text{ và } \frac{y+z}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{z+x}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{x+y}{\sqrt{z^2+1}} \leq 3$$

Quan sát kĩ các biểu thức trên và chú ý đến chiều của bất đẳng thức ta nghĩ đến đánh giá có thể đưa các đại lượng vào trong cùng một căn bậc hai. Để thực hiện điều này ta liên tưởng đến bất đẳng thức

Bunhiacopxki dạng $a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Khi đó ta được

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} \leq \sqrt{\frac{3x^2}{2x^2+y^2+z^2} + \frac{3y^2}{x^2+2y^2+z^2} + \frac{3z^2}{x^2+y^2+2z^2}}$$

Mặt khác ta lại có $\frac{3x^2}{2x^2+y^2+z^2} \leq \frac{3}{4} \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{x^2+z^2} \right)$, áp dụng tương tự ta được

$$\sqrt{\frac{3x^2}{2x^2+y^2+z^2} + \frac{3y^2}{x^2+2y^2+z^2} + \frac{3z^2}{x^2+y^2+2z^2}} \leq \frac{3}{2}$$

Do đó

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} \leq \frac{3}{2}$$

Như vậy bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$\frac{y+z}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{z+x}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{x+y}{\sqrt{z^2+1}} \leq 3$$

Điều này có thể thực hiện hoàn toàn tương tự như trên

$$\frac{y+z}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{z+x}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{x+y}{\sqrt{z^2+1}} \leq \sqrt{\frac{3(y+z)^2}{2x^2+y^2+z^2} + \frac{3(z+x)^2}{x^2+2y^2+z^2} + \frac{3(x+y)^2}{x^2+y^2+2z^2}}$$

Dễ dàng chứng minh được $\frac{3(y+z)^2}{2x^2+y^2+z^2} \leq 3 \left(\frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{z^2}{x^2+z^2} \right)$

Tương tự ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{3(y+z)^2}{2x^2+y^2+z^2} + \frac{3(z+x)^2}{x^2+2y^2+z^2} + \frac{3(x+y)^2}{x^2+y^2+2z^2}} \\ & \leq \sqrt{3 \left(\frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{z^2}{x^2+z^2} + \frac{z^2}{z^2+y^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{x^2+z^2} + \frac{y^2}{y^2+z^2} \right)} = 3 \end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Bài 47. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a(b+1)} + \sqrt{b(c+1)} + \sqrt{c(a+1)} \leq \frac{3(a+1)(b+1)(c+1)}{2}$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Trước hết ta dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy cả hai vế đều chứa các đại lượng $a+1$; $b+1$; $c+1$, do đó ta biến đổi bất đẳng thức bằng cách chia cả hai vế cho $(a+1)(b+1)(c+1)$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\sqrt{\frac{a}{(a+1)(c+1)}} + \sqrt{\frac{b}{(a+1)(b+1)}} + \sqrt{\frac{c}{(c+1)(b+1)}} \leq \frac{3}{2}$$

Đến đây ta thấy có hai hướng đánh giá là

- Hướng thứ nhất ta sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki đưa các đại lượng trong căn bên vế trái vào trong cùng một căn bậc hai thì được

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a}{(a+1)(c+1)}} + \sqrt{\frac{b}{(a+1)(b+1)}} + \sqrt{\frac{c}{(c+1)(b+1)}} \\ \leq \sqrt{\frac{3a}{(a+1)(c+1)} + \frac{3b}{(a+1)(b+1)} + \frac{3c}{(c+1)(b+1)}} \end{aligned}$$

Như vậy ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{a}{(a+1)(c+1)} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(c+1)(b+1)} \leq \frac{3}{4}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} 4[a(b+1) + b(c+1) + c(a+1)] &\leq 3(a+1)(b+1)(c+1) \\ \Leftrightarrow 3abc + 3 &\geq ab + bc + ca + a + b + c \end{aligned}$$

Nhận thấy đánh giá trên không đúng.

- Hướng thứ hai là áp dụng bất đẳng thức Cauchy theo chiều từ trung bình nhân sang trung bình cộng. Chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$ ta có

$$\sqrt{\frac{a}{(a+1)(c+1)}} = \sqrt{\frac{a \cdot 1}{(a+1)(c+1)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+1} + \frac{1}{c+1} \right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\sqrt{\frac{b}{(a+1)(b+1)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right); \quad \sqrt{\frac{c}{(c+1)(b+1)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{c+1} + \frac{1}{b+1} \right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{a}{(a+1)(c+1)}} + \sqrt{\frac{b}{(a+1)(b+1)}} + \sqrt{\frac{c}{(c+1)(b+1)}} \leq \frac{3}{2}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Cách 2: Nhận xét tương tự như trên nhưng ta hướng theo đánh giá làm vế trái xuất hiện nhân tử chung là 1 trong trong 3 đại lượng đó với mong muốn có thể giảm xuống còn hai biến. Chú ý đến chiều bất đẳng thức ta có

$$\sqrt{a(b+1)} + \sqrt{b(c+1)} \leq \sqrt{(a+1)[b+1+b(c+1)]}$$

Khi đó ta được

$$\sqrt{a(b+1)} + \sqrt{b(c+1)} + \sqrt{c(a+1)} \leq \sqrt{(a+1)[b+1+b(c+1)]} + \sqrt{c(a+1)}$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$\sqrt{bc+2b+1} + \sqrt{c} \leq \frac{3\sqrt{(b+1)(c+1)}}{2}$$

Đến đây nếu ta đưa được các đại lượng dưới dấu căn bên trái vào trong một căn thức thì cơ hội sẽ cao hơn, tuy nhiên cũng tương tự như trên ta thử làm xuất hiện thêm nhân tử chung để rút gọn xem sao. Chú ý là bên vế phải chứa hai đại lượng $b+1$; $c+1$ nên ta sẽ cố đánh giá vế trái về một trong hai đại lượng trên.

- Trước hết ta đánh giá về $b+1$, để ý là $(bc+2b+1) + (c+1) = (b+1)(c+2)$, do đó ta cần làm xuất hiện $c+1$ để khi bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được $(bc+2b+1) + (c+1)$.

Để ý là $\sqrt{c} = \sqrt{c+1} \cdot \sqrt{\frac{c}{c+1}}$, khi đó ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{bc+2b+1} + \sqrt{c+1} \cdot \sqrt{\frac{c}{c+1}} &\leq \sqrt{[(bc+2b+1) + (c+1)] \left(1 + \frac{c}{c+1}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{(b+1)(c+2)(2c+1)}{c+1}} \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\sqrt{\frac{(c+2)(2c+1)}{c+1}} \leq \frac{3\sqrt{c+1}}{2} \Leftrightarrow 4(c+2)(2c+1) \leq 9(c+1)^2$$

Đánh giá cuối cùng luôn đúng theo bất đẳng thức Cauchy. Vậy bài toán được chứng minh xong.

- Bây giờ ta thử đánh giá về $c+1$, khi đó theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\sqrt{bc+2b+1} + \sqrt{c} = 1 \cdot \sqrt{bc+2b+1} + 1 \cdot \sqrt{c} \leq \sqrt{(1+c)(bc+2b+1+1)}$$

Và ta cần chỉ ra được $\sqrt{bc+2b+2} \leq \frac{3\sqrt{b+1}}{2} \Leftrightarrow bc \leq b+1$. Tuy nhiên đánh giá cuối cùng không đúng, do đó hướng đánh giá này không hợp lý.

Bài 48. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2} + \frac{1}{b^2+bc+c^2} + \frac{1}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{9}{(a+b+c)^2}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$. Quan sát bất đẳng thức trên ta nghĩ đến đánh giá quen thuộc

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2} + \frac{1}{b^2+bc+c^2} + \frac{1}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca}$$

Và ta cần chỉ ra được

$$2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca \leq (a+b+c)^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \leq ab+bc+ca$$

Đáng tiếc đánh giá cuối cùng lại là một đánh giá sai. Nên ta phải tìm hướng đánh giá khác.

Quan sát kỹ bất đẳng thức trên ta thấy được sự liên quan giữa các mẫu số với các đại lượng $a^2+b^2+c^2$; $ab+bc+ca$, ta thử xem có mối liên hệ nào hay không?

Để ý ta thấy $(a^2 + ab + b^2) + (c^2 + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$, điều này dẫn đến

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{a^2 + ab + b^2} = \frac{a^2 + ab + b^2 + c^2 + bc + ca}{a^2 + ab + b^2} = 1 + \frac{c(a + b + c)}{a^2 + ab + b^2}$$

Hoàn toàn tương tự thì ta được

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) & \left(\frac{1}{a^2 + ab + b^2} + \frac{1}{b^2 + bc + c^2} + \frac{1}{c^2 + ca + a^2} \right) \\ & = 3 + (a + b + c) \left(\frac{c}{a^2 + ab + b^2} + \frac{a}{b^2 + bc + c^2} + \frac{b}{c^2 + ca + a^2} \right) \end{aligned}$$

Như vậy bây giờ ta cần chứng minh được

$$\begin{aligned} 3 + (a + b + c) & \left(\frac{c}{a^2 + ab + b^2} + \frac{a}{b^2 + bc + c^2} + \frac{b}{c^2 + ca + a^2} \right) \\ & \geq \frac{9(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)}{(a + b + c)^2} \end{aligned}$$

Để ý tiếp đại lượng $\frac{c}{a^2 + ab + b^2} + \frac{a}{b^2 + bc + c^2} + \frac{b}{c^2 + ca + a^2}$, theo bất đẳng thức

Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\frac{c}{a^2 + ab + b^2} + \frac{a}{b^2 + bc + c^2} + \frac{b}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{(a + b + c)^2}{(a + b + c)(ab + bc + ca)} = \frac{a + b + c}{ab + bc + ca}$$

Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$3 + \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca} \geq \frac{9(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)}{(a + b + c)^2}$$

Hay

$$\frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca} \geq \frac{6(a^2 + b^2 + c^2) + 3(ab + bc + ca)}{(a + b + c)^2}$$

Hay

$$(a + b + c)^4 \geq 3[2(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca)](ab + bc + ca)$$

Đến đây thì ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Cauchy để đánh giá. Để ý là khi dấu đẳng thức xảy ra thì $2(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca = 3(ab + bc + ca)$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} 3(ab + bc + ca) & [2(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca)] \\ & \leq \frac{[3(ab + bc + ca) + 2(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca)]^2}{4} = (a + b + c)^4 \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 49. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a^2 + abc}}{c + ab} + \frac{\sqrt{b^2 + abc}}{a + bc} + \frac{\sqrt{c^2 + abc}}{b + ac} \leq \frac{1}{2\sqrt{abc}}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. Nhận thấy các đại

lượng trong căn và ở các mẫu chưa đồng bậc nên suy nghĩ đầu tiên đó là đồng bậc các đại lượng đó. Để ý đến giả thiết $a + b + c = 1$ ta thấy

$$\begin{aligned}a^2 + abc &= a^2(a + b + c) + abc = a(a + b)(a + c) \\c + ab &= c(a + b + c) + ab = (a + c)(b + c)\end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự

$$\begin{aligned}b^2 + abc &= b(a + b)(b + c); \quad c^2 + abc = c(a + c)(b + c) \\b + ac &= (a + b)(b + c); \quad a + bc = (a + b)(a + c)\end{aligned}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{\sqrt{a(a+b)(a+c)}}{(c+a)(c+b)} + \frac{\sqrt{b(b+c)(a+b)}}{(a+b)(a+c)} + \frac{\sqrt{c(a+c)(b+c)}}{(a+b)(b+c)} \leq \frac{1}{2\sqrt{abc}}$$

Hay

$$\frac{a\sqrt{bc(a+b)(a+c)}}{(c+a)(c+b)} + \frac{b\sqrt{ac(b+c)(a+b)}}{(a+b)(a+c)} + \frac{c\sqrt{ab(a+c)(b+c)}}{(a+b)(b+c)} \leq \frac{1}{2}$$

Quan sát bất đẳng thức trên ta liên tưởng đến bất đẳng thức Cauchy, để ý là

$$bc(a+b)(a+c) = c(a+b).b(a+c) = b(a+b).c(a+c)$$

Trong hai cách viết trên ta chọn cách viết thứ nhất vì khi sử dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $2\sqrt{xy} \leq x + y$ thì không tạo ra các đại lượng có chứa các bình phương (Nên nhớ là các bình phương bao giờ cũng trội nhất trong các đại lượng bậc 2). Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{bc(a+b)(a+c)} \leq \frac{b(a+c) + c(a+b)}{2} = \frac{ab + 2bc + ca}{2}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned}\frac{a\sqrt{bc(a+b)(a+c)}}{(c+a)(c+b)} + \frac{b\sqrt{ac(b+c)(a+b)}}{(a+b)(a+c)} + \frac{c\sqrt{ab(a+c)(b+c)}}{(a+b)(b+c)} \\ \leq \frac{a(ab + 2bc + ca)}{2(c+a)(c+b)} + \frac{b(ab + bc + 2ca)}{2(a+b)(a+c)} + \frac{c(2ab + bc + ca)}{2(a+b)(b+c)}\end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a(ab + 2bc + ca)}{(c+a)(c+b)} + \frac{b(ab + bc + 2ca)}{(a+b)(a+c)} + \frac{c(2ab + bc + ca)}{(a+b)(b+c)} \leq 1$$

Hay

$$\begin{aligned}a(a+b)(ab + 2bc + ca) + b(b+c)(ab + bc + 2ca) + c(c+a)(2ab + bc + ca) \\ \leq (a+b)(b+c)(c+a)\end{aligned}$$

Vế trái của bất đẳng thức có bậc 4 còn vế phải có bậc ba nên ta có thể đồng bậc là

$$\begin{aligned}a(a+b)(ab + 2bc + ca) + b(b+c)(ab + bc + 2ca) + c(c+a)(2ab + bc + ca) \\ \leq (a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)\end{aligned}$$

Triển khai và rút gọn ta được

$$a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 5(a^2bc + ab^2c + abc^2) \\ \leq a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2bc + ab^2c + abc^2)$$

Hay $abc(a+b+c) \leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$, đây là một đánh giá đúng

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 50. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)^3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq 27a^2b^2c^2$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Đầu tiên ta nhận thấy nếu về trái của bất đẳng thức âm thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Như vậy ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp về trái không âm là được.

Xét trường hợp $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \geq 0$, khi đó dễ dàng chứng minh được $(a+b-c) \geq 0; (b+c-a) \geq 0; (c+a-b) \geq 0$.

Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh thì ý tưởng tiếp cận đầu tiên là đổi biến, ta có thể đặt $x = a+b-c; y = b+c-a; z = c+a-b$ suy ra ta được

$$a = \frac{x+z}{2}; b = \frac{x+y}{2}; c = \frac{y+z}{2} \quad (x, y, z \geq 0)$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$64xyz(x+y+z)^3 \leq 27(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có $3xyx(x+y+z) \leq (xy+yz+zx)^2$

Do đó ta được $64.3xyz(x+y+z)^3 \leq 64(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$64(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2 \leq 3.27(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$$

Lấy căn bậc hai hai vế ta được $9(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8(x+y+z)(xy+yz+zx)$

Đây là một đánh giá đúng quen thuộc. Do đó bài toán được chứng minh

Cách 2: Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta liên tưởng đến bất đẳng thức Cauchy, khi đó nếu áp dụng trực tiếp thì ta có $27(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq (a+b+c)^3$ nên bài toán quy về chứng minh $(a+b+c)^6 \leq 27^2a^2b^2c^2$, tuy nhiên đánh giá đó là một đánh giá sai. Do đó ta không thể sử dụng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy như vậy được mà cần biến đổi bất đẳng thức trước.

Để ý ta thấy khi đẳng thức xảy ra thì $a(b+c-a) = b(c+a-b) = c(a+b-c)$ và lại có $a(b+c-a) + b(c+a-b) + c(a+b-c) = 2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)$

Do đó ta nghĩ đến áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số trên, khi đó ta được

$$27abc(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq [a(b+c-a) + b(c+a-b) + c(a+b-c)]^3$$

Hay $27abc(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq [2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)]^3$

Khi đó ta được

$$27abc(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b+c)^3 \\ \leq \left[2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2) \right]^3 (a+b+c)^3$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\left[2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2) \right]^3 (a+b+c)^3 \leq 9^3 a^3 b^3 c^3$$

Lấy căn bậc ba hai vế ta được $(a+b+c) \left[2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2) \right] \leq 9abc$

Khai triển và rút gọn ta được

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \\ \Leftrightarrow abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng.

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Bài 51. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a-b-c)^2}{2a^2 + (b+c)^2} + \frac{(b-c-a)^2}{2b^2 + (a+c)^2} + \frac{(c-a-b)^2}{2c^2 + (a+b)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Lời giải

Trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Quan sát bất đẳng thức ta thấy có thể tiếp cận theo hướng sử dụng các bất đẳng thức Cauchy, Bunhiacopxki,...

Cách 1: Đầu tiên ta nhận thấy tại các mẫu số của các phân thức có chứa các đại lượng bình phương $(a+b)^2, (b+c)^2, (c+a)^2$. Chú ý đến chiều của bất đẳng thức ta có đánh giá quen thuộc $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ khi đó mẫu sẽ trở thành $2(a^2+b^2+c^2)$. Hoàn toàn tương tự ta thu được bất đẳng thức

$$\frac{(a-b-c)^2}{2a^2 + (b+c)^2} + \frac{(b-c-a)^2}{2b^2 + (a+c)^2} + \frac{(c-a-b)^2}{2c^2 + (a+b)^2} \geq \frac{(a-b-c)^2 + (b-c-a)^2 + (c-a-b)^2}{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a-b-c)^2 + (b-c-a)^2 + (c-a-b)^2}{2a^2 + 2b^2 + 2c^2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Hay} \quad (a-b-c)^2 + (b-c-a)^2 + (c-a-b)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Triển khai và thu gọn ta được $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Đánh giá cuối cùng đúng với mọi a, b, c . Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Cách 2: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, khi đó ta có

$$\frac{(a-b-c)^2}{2a^2 + (b+c)^2} + \frac{(b-c-a)^2}{2b^2 + (a+c)^2} + \frac{(c-a-b)^2}{2c^2 + (a+b)^2} \\ \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2) + (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2}$$

Ta cần chứng minh được

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Hay $2(a+b+c)^2 \geq 2(a^2+b^2+c^2)+(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$

Khai triển và thu gọn ta được $ab+bc+ca \geq a^2+b^2+c^2$, đây là một đánh giá sai nên ta dừng chứng minh theo cách này ở đây.

Do không thể sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki trực tiếp nên ta cần biến đổi bất đẳng thức trước xem có thể sử dụng được hay không? Tuy nhiên ta sẽ biến đổi cách như thế nào đây? Trước hết ta tìm mối liên hệ của các đại lượng trong mỗi phân thức thì thấy rằng

$$\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2} = \frac{a^2+(b+c)^2-2a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2}$$

Như vậy ta sẽ có

$$\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2} - 1 = \frac{a^2+(b+c)^2-2a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2} - 1 = -\frac{a^2+2a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2}$$

Và nếu áp dụng tương tự thì ta thu được

$$\begin{aligned} & \frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(b-c-a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2} - 3 \\ &= -\left[\frac{a^2+2a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{b^2+2b(c+a)}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{c^2+2c(a+b)}{2c^2+(a+b)^2} \right] \geq \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Hay
$$\frac{a^2+2a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{b^2+2b(c+a)}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{c^2+2c(a+b)}{2c^2+(a+b)^2} \leq \frac{5}{2}$$

Để ý đến chiều bất đẳng thức ta thấy không thể sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức được. Cũng chú ý đến chiều của bất đẳng thức ta nghĩ đến một đánh giá kiểu $2a^2+(b+c)^2 \geq ?$.

Vì khi dấu đẳng thức xảy ra thì $2a^2 \neq (b+c)^2$ nên ta không sử dụng bất đẳng thức Cauchy mà nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cơ bản. Khi đó chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta có đánh giá

$$\left[2a^2+(b+c)^2 \right] (2+4) \geq \left[2a+2(b+c) \right]^2 = 4(a+b+c)^2.$$

Và áp dụng hoàn toàn tương tự ta thu được

$$\begin{aligned} & \frac{a^2+2a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{b^2+2b(c+a)}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{c^2+2c(a+b)}{2c^2+(a+b)^2} \\ & \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{a^2+2a(b+c)+b^2+2b(c+a)+c^2+2c(a+b)}{(a+b+c)^2} \\ & = \frac{3}{2} \cdot \frac{(a+b+c)^2+2(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{3}{2} \cdot \frac{(a+b+c)^2 + 2(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \leq \frac{5}{2}$

Hay
$$\frac{(a+b+c)^2 + 2(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \leq \frac{5}{3}$$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

Đánh giá cuối cùng đúng với mọi a, b, c . Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 52. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a, b, c \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Chứng minh rằng:

$$2 \leq \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{c+a}{1+b} \leq 3$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được bất đẳng thức bên trái xảy ra dấu bằng tại $a = b = c = \frac{1}{2}$ và bất đẳng thức bên phải xảy ra dấu bằng tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta thấy có thể đơn giản hóa bằng cách đổi biến và ta có thể đổi biến bằng cách sau

Đặt $x = a + 1; y = b + 1; c = z + 1$, khi đó ta được $x, y, z \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại là

$$2 \leq \frac{x+y-2}{z} + \frac{y+z-2}{x} + \frac{z+x-2}{y} \leq 3$$

Bây giờ ta đi chứng minh từng bất đẳng thức

+ Trước hết ta chứng minh $2 \leq \frac{x+y-2}{z} + \frac{y+z-2}{x} + \frac{z+x-2}{y}$

Đề ý là $\frac{x+y-2}{z} + 1 = \frac{x+y+z-2}{z}$, do đó hoàn toàn tương tự ta viết lại bất đẳng thức trên như sau

$$5 \leq \frac{x+y-2}{z} + 1 + \frac{y+z-2}{x} + 1 + \frac{z+x-2}{y} + 1$$

Hay
$$5 \leq (x+y+z-2) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

Đặt $t = x + y + z$, theo một đánh giá quen thuộc thì

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} = \frac{9}{t}$$

Như vậy ta được
$$(x+y+z-2) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq (t-2) \cdot \frac{9}{t}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được
$$\frac{9(t-2)}{t} \geq 5 \Leftrightarrow t \geq \frac{9}{2}$$

Tuy nhiên đây là một đánh giá đúng vì $t = x + y + z \geq \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

Vậy bất đẳng thức bên trái được chứng minh.

+ Chứng minh $\frac{x+y-2}{z} + \frac{y+z-2}{x} + \frac{z+x-2}{y} \leq 3$

Ta viết lại bất đẳng thức như sau

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) \leq 3 + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}$$

Rõ ràng ta không thể sử dụng các bất đẳng thức Cauchy hay Bunhiacopski. Trong tình huống này ta để ý đến phép sắp thứ tự các biến để quy bất đẳng thức về bất đẳng thức ít biến hơn.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\frac{3}{2} \leq x \leq y \leq z \leq 2$. Khi đó ta sẽ có

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) = \frac{(2-y)(x^2-2y)}{2xy} \leq 0$$

Do đó ta được $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$. Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \leq \frac{y}{2} + \frac{2}{y} \text{ và } \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \leq \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) \leq x + \frac{4}{x} + \frac{y}{2} + \frac{2}{y}$$

Ta cần chứng minh $x + \frac{4}{x} + \frac{y}{2} + \frac{2}{y} \leq 3 + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \Leftrightarrow x + \frac{2}{x} + \frac{y}{2} \leq 3 + \frac{2}{z}$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng vì

$$\begin{cases} x + \frac{2}{x} - 3 = \frac{(x-1)(x-2)}{x} \leq 0 \Leftrightarrow x + \frac{2}{x} \leq 3 \\ \frac{y}{2} \leq 1 \leq \frac{2}{z} \end{cases}$$

Vậy bất đẳng thức bên phải được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Bài 53. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(a+2b+c)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Quan sát kỹ bất đẳng thức ta có một số nhận xét như sau

- Bất đẳng thức đồng bậc 0.
- Bất đẳng thức có các phân thức liên quan đến các đại lượng bình phương.
- Trong mỗi phân thức ta thấy ở các tử và mẫu có sự lặp lại của các đại lượng.

Từ những nhận xét trên ta có cách hướng tiếp cận bài toán như sau.

Cách 1: Bất đẳng thức đồng bậc 0, nên ý tưởng đầu tiên là đổi biến theo hướng chuẩn hóa

Đặt $x = \frac{3a}{a+b+c}$; $y = \frac{3b}{a+b+c}$; $z = \frac{3c}{a+b+c}$, khi đó ta có $x+y+z=3$.

Khi đó ta được

$$\frac{(2a + b + c)^2}{2a^2 + (b + c)^2} = \frac{\left(\frac{2.3a}{a + b + c} + \frac{3b}{a + b + c} + \frac{3c}{a + b + c}\right)^2}{2\left(\frac{3a}{a + b + c}\right)^2 + \left(\frac{3b}{a + b + c} + \frac{3b}{a + b + c}\right)^2} = \frac{(2x + y + z)^2}{2x^2 + (y + z)^2}$$

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{(2x + y + z)^2}{2x^2 + (y + z)^2} + \frac{(x + 2y + z)^2}{2y^2 + (z + x)^2} + \frac{(x + y + 2z)^2}{2z^2 + (x + y)^2} \leq 8$$

Hay

$$\frac{(3 + x)^2}{2x^2 + (3 - x)^2} + \frac{(3 + y)^2}{2y^2 + (3 - y)^2} + \frac{(3 + z)^2}{2z^2 + (3 - z)^2} \leq 8$$

Hay

$$\frac{x^2 + 6x + 9}{3x^2 - 6x + 9} + \frac{y^2 + 6y + 9}{3y^2 - 6y + 9} + \frac{z^2 + 6z + 9}{3z^2 - 6z + 9} \leq 8$$

Đến đây ta thấy các phân thức có dạng như nhau đối với mỗi biến nên ta dự đoán là

$$\frac{x^2 + 6x + 9}{3x^2 - 6x + 9} \leq mx + n$$

Để tìm m và n ta có thể sử dụng phương pháp hệ số bất định hoặc là cách sau đây

$$\frac{x^2 + 6x + 9}{3x^2 - 6x + 9} = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{2(2x + 3)}{2 + (x - 1)^2} \right] \leq \frac{4(x + 1)}{3}$$

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{x^2 + 6x + 9}{3x^2 - 6x + 9} + \frac{y^2 + 6y + 9}{3y^2 - 6y + 9} + \frac{z^2 + 6z + 9}{3z^2 - 6z + 9} \leq \frac{4(x + y + z + 3)}{3} = 8$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2: Từ nhận xét các phân thức liên quan đến các đại lượng bình phương nên ta thử phân tích các tử ra xem có mối liên hệ gì với mẫu không? Khai triển tử số ta được

$$(2a + b + c)^2 = 4a^2 + 4a(b + c) + (b + c)^2$$

Mặt khác quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy cần phải đổi chiều bất đẳng thức trước, nên ta nghĩ

đến phép biến đổi $k - \frac{(2a + b + c)^2}{2a^2 + (b + c)^2}$, khi đó để đổi chiều bất đẳng thức ta cần tìm k sao cho

$3k - 8 \geq 0$ và đây ta chọn k nguyên thì càng tốt.

Trước hết ta thử với $k = 3$ thì được

$$3 - \frac{(2a + b + c)^2}{2a^2 + (b + c)^2} = \frac{6a^2 + 3(b + c)^2 - (2a + b + c)^2}{2a^2 + (b + c)^2} = \frac{2(a - b - c)^2}{2a^2 + (b + c)^2}$$

Như vậy ta thấy $k = 3$ thì phép biến đổi tương đối đẹp, ta cần thực hiện tiếp các phân thức còn lại để xem có đánh giá được gì hay không? Để ý là nếu không thể đánh giá được thì ta thử tiếp với các số khác lớn hơn.

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(b-a-c)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Đây chính là bất đẳng thức đã được chứng minh trong bài 51, ta có thể trình bày lại một cách như sau

Áp dụng bất đẳng thức cơ bản $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$, ta được

$$\frac{(a-b-c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(b-c-a)^2}{2b^2+(a+c)^2} + \frac{(c-a-b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \geq \frac{(a-b-c)^2 + (b-c-a)^2 + (b-c-a)^2}{2a^2+2b^2+2c^2}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{(a-b-c)^2 + (b-c-a)^2 + (b-c-a)^2}{2a^2+2b^2+2c^2} \geq \frac{1}{2}$$

Hay
$$(a-b-c)^2 + (b-c-a)^2 + (b-c-a)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Triển khai và thu gọn ta được $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, đánh giá cuối cùng đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3: Chú ý đến sự lặp lại của các đại lượng $a, b+c$ trong cả phân thức thứ nhất nên ta có thể viết lại được

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} = \frac{\left(2+\frac{b+c}{a}\right)^2}{2+\left(\frac{b+c}{a}\right)^2} \text{ hoặc } \frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} = \frac{\left(\frac{2a}{b+c}+1\right)^2}{2\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+1}$$

Nên để đơn giản hóa ta có thể đặt $x = \frac{b+c}{a}$ hoặc $x = \frac{a}{b+c}$. Trước hết ta tiếp cận với cách đặt thứ nhất.

Hoàn toàn tương tự ta đặt được $x = \frac{b+c}{a}$; $y = \frac{c+a}{b}$; $z = \frac{a+b}{c}$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{(x+2)^2}{x^2+2} + \frac{(y+2)^2}{y^2+2} + \frac{(z+2)^2}{z^2+2} \leq 8$$

Hay
$$\frac{(x-1)^2}{x^2+2} + \frac{(y-1)^2}{y^2+2} + \frac{(z-1)^2}{z^2+2} \geq \frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{(x-1)^2}{x^2+2} + \frac{(y-1)^2}{y^2+2} + \frac{(z-1)^2}{z^2+2} \geq \frac{(x+y+z-3)^2}{x^2+y^2+z^2+6}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{(x+y+z-3)^2}{x^2+y^2+z^2+6} \geq \frac{1}{2}$$

Hay
$$2(x+y+z-3) \geq x^2+y^2+z^2+6$$

Hay
$$(x+y+z-6)^2 + 2(xy+yz+zx-12) \geq 0 \quad (*)$$

Dễ thấy, theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$xy + yz + zx = \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} + \frac{c+a}{b} \cdot \frac{a+b}{c} + \frac{a+b}{c} \cdot \frac{b+c}{a}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{[(a+b)(b+c)(c+a)]^2}{abc}} \geq 12$$

Do đó bất đẳng thức (*) là bất đẳng thức đúng

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Với cách đặt thứ hai, hoàn toàn tương tự ta viết được bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1} + \frac{(2y+1)^2}{2y^2+1} + \frac{(2z+1)^2}{2z^2+1} \leq 8 \text{ hay } \frac{2(x-1)^2}{2x^2+1} + \frac{2(y-1)^2}{2y^2+1} + \frac{2(z-1)^2}{z^2+2} \geq 1.$$

Tuy nhiên với cách đổi biến này, sau các đánh giá ta thu được $xy + yz + xz \leq 12$. Bạn đọc tự kiểm tra xem đánh giá ta thu được có đúng không.

Bài 54. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+1}{\sqrt{a^4+b+c}} + \frac{b^3+1}{\sqrt{b^4+c+a}} + \frac{c^3+1}{\sqrt{c^4+a+c}} \leq 2\sqrt{ab+bc+ca}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy các đại lượng trong căn bậc hai dưới các mẫu chưa đồng bậc, chú ý đến giả thiết $abc = 1$ ta có thể đồng bậc là $a^4 + b + c = a^4 + abc(b+c) = a(a^3 + b^2c + bc^2)$. Tức là khi đó ta được

$\sqrt{a^4 + b + c} = \sqrt{a(a^3 + b^2c + bc^2)}$. Lại thấy bất đẳng thức chứa căn dưới mẫu, nên ta cần đánh giá làm mất căn bậc hai, Chú ý đến chiều bất đẳng thức làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức Cauchy dạng $2\sqrt{xy} \leq x + y$. Như vậy dưới mẫu cần có một tích hai đại lượng đồng bậc, để ý tiếp bên vế phải có $2\sqrt{ab+bc+ca}$ nên ta có thể đưa xuống dưới mẫu, do đó ta sẽ có tích $2\sqrt{(a^3 + b^2c + bc^2)(a^2b + abc + ca^2)}$. Đến đây áp dụng bất đẳng thức Cauchy thì ta được

$$\frac{a^3+1}{2\sqrt{a^4+b+c}\sqrt{ab+bc+ca}} = \frac{a^3+1}{2\sqrt{(a^3+b^2c+bc^2)(a^2b+abc+ca^2)}}$$

$$\geq \frac{a^3+1}{a^3+b^2c+bc^2+a^2b+abc+ca^2}$$

Để ý tiếp ta thấy

$$a^3+1 = a^3+abc = a(a^2+bc)$$

$$a^3+b^2c+bc^2+a^2b+abc+ca^2 = (a^2+bc)(a+b+c)$$

Do đó ta được
$$\frac{a^3+1}{2\sqrt{a^4+b+c}\sqrt{ab+bc+ca}} \geq \frac{a^3+abc}{(a^2+bc)(a+b+c)} = \frac{a}{a+b+c}$$

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{b^3+1}{2\sqrt{b^4+c+a}\sqrt{ab+bc+ca}} \geq \frac{b}{a+b+c}; \quad \frac{c^3+1}{2\sqrt{c^4+a+c}\sqrt{ab+bc+ca}} \geq \frac{c}{a+b+c}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3+1}{2\sqrt{a^4+b+c}\sqrt{ab+bc+ca}} + \frac{b^3+1}{2\sqrt{b^4+c+a}\sqrt{ab+bc+ca}} + \frac{c^3+1}{2\sqrt{c^4+a+c}\sqrt{ab+bc+ca}} \geq 1$$

Hay
$$\frac{a^3 + 1}{\sqrt{a^4 + b + c}} + \frac{b^3 + 1}{\sqrt{b^4 + c + a}} + \frac{c^3 + 1}{\sqrt{c^4 + a + b}} \leq 2\sqrt{ab + bc + ca}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Bài 55. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a+3}{a+bc}} + \sqrt{\frac{b+3}{b+ca}} + \sqrt{\frac{c+3}{c+ab}} \geq 3\sqrt{2}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy bất đẳng thức có chứa căn bậc hai nên suy nghĩ đầu tiên đó là tìm cách loại bỏ các dấu căn, để làm điều này ta có thể bình phương hai vế, nhưng cách làm này không làm mất hết các dấu căn mà còn làm cho bất đẳng thức thêm phức tạp, ta cũng không thể đưa các phân thức dưới dấu căn vào cùng một căn bằng bất đẳng thức Bunhiacopxki vì sẽ tạo ra một bất đẳng thức ngược chiều. Do đó ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Cauchy để đánh giá, khi đó ta được

$$\sqrt{\frac{a+3}{a+bc}} + \sqrt{\frac{b+3}{b+ca}} + \sqrt{\frac{c+3}{c+ab}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(a+3)(b+3)(c+3)}{(a+bc)(b+ca)(c+ab)}}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a+3)(b+3)(c+3)}{(a+bc)(b+ca)(c+ab)} \geq 8$$

Hay $(a+3)(b+3)(c+3) \geq 8(a+bc)(b+ca)(c+ab)$. Tuy nhiên để chứng minh được đánh giá này lại hơi khó, nên ta tạm dừng ý tưởng này tại đây.

Như vậy để chứng minh bất đẳng thức trên ta cần phải có những biến đổi trước. Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\sqrt{\frac{2(a+3)}{a+bc}} + \sqrt{\frac{2(b+3)}{b+ca}} + \sqrt{\frac{2(c+3)}{c+ab}} \geq 6$$

Để ý đến giả thiết $a + b + c = 3$, khi đó ta viết được $a + 3 = (a + b) + (a + c)$ do đó ta sẽ được

$$\sqrt{\frac{2(a+3)}{a+bc}} = \sqrt{\frac{2(a+a+b+c)}{a+bc}} = \sqrt{2\left(\frac{a+b}{a+bc} + \frac{a+c}{a+bc}\right)}$$

Đến đây áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $\sqrt{2(x+y)} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$, ta được

$$\sqrt{\frac{2(a+3)}{a+bc}} = \sqrt{\frac{2(a+a+b+c)}{a+bc}} = \sqrt{2\left(\frac{a+b}{a+bc} + \frac{a+c}{a+bc}\right)} \geq \sqrt{\frac{a+b}{a+bc}} + \sqrt{\frac{a+c}{a+bc}}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\sqrt{\frac{2(b+3)}{b+ca}} \geq \sqrt{\frac{b+a}{b+ca}} + \sqrt{\frac{b+c}{b+ca}}; \quad \sqrt{\frac{2(c+3)}{c+ab}} \geq \sqrt{\frac{c+a}{c+ab}} + \sqrt{\frac{c+b}{c+ab}}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2(a+3)}{a+bc}} + \sqrt{\frac{2(b+3)}{b+ca}} + \sqrt{\frac{2(c+3)}{c+ab}} \\ \geq \sqrt{\frac{a+b}{a+bc}} + \sqrt{\frac{a+c}{a+bc}} + \sqrt{\frac{b+a}{b+ca}} + \sqrt{\frac{b+c}{b+ca}} + \sqrt{\frac{c+a}{c+ab}} + \sqrt{\frac{c+b}{c+ab}} \end{aligned}$$

Lúc này xuất hiện các phân thức trong căn có cùng tử số nên ta ghép lại theo nhóm, khi đó ta sẽ được

$$\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+bc}} + \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{b+ca}} \geq \frac{4\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca}} \geq \frac{2\sqrt{2}\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+bc+b+ca}} = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{a+b}}{\sqrt{(a+b)(1+c)}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c+1}}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{\sqrt{b+c}}{\sqrt{b+ca}} + \frac{\sqrt{b+c}}{\sqrt{c+ab}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a+1}}; \quad \frac{\sqrt{c+a}}{\sqrt{a+bc}} + \frac{\sqrt{c+a}}{\sqrt{c+ab}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{b+1}}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+bc}} + \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{b+ca}} + \frac{\sqrt{b+c}}{\sqrt{b+ca}} + \frac{\sqrt{b+c}}{\sqrt{c+ab}} + \frac{\sqrt{c+a}}{\sqrt{a+bc}} + \frac{\sqrt{c+a}}{\sqrt{c+ab}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c+1}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a+1}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{b+1}} \text{ Đó}$$

$$\text{đó ta có } \sqrt{\frac{2(a+3)}{a+bc}} + \sqrt{\frac{2(b+3)}{b+ca}} + \sqrt{\frac{2(c+3)}{c+ab}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c+1}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a+1}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{b+1}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c+1}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a+1}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{b+1}} \geq 6 \text{ hay } \frac{1}{\sqrt{c+1}} + \frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{b+1}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{1}{\sqrt{c+1}} + \frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{b+1}} \geq \frac{9}{\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1}} \geq \frac{9}{\sqrt{3(a+b+c+3)}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Bài 56. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+2b}{2a+4b+3c^2} + \frac{b+2c}{2b+4c+3a^2} + \frac{c+2a}{2c+4a+3b^2} \leq 1$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức thì suy nghĩ đầu tiên đó là đổi chiều bất đẳng thức và để thực hiện điều này ta có phép biến đổi tương đương sau

$$\begin{aligned} & \frac{2(a+2b)}{2a+4b+3c^2} + \frac{2(b+2c)}{2b+4c+3a^2} + \frac{2(c+2a)}{2c+4a+3b^2} \leq 2 \\ \text{Hay} \quad & 1 - \frac{2(a+2b)}{2a+4b+3c^2} - 1 + \frac{2(b+2c)}{2b+4c+3a^2} + 1 - \frac{2(c+2a)}{2c+4a+3b^2} \geq 1 \end{aligned}$$

$$\text{Hay} \quad \frac{c^2}{2a+4b+3c^2} + \frac{a^2}{2b+4c+3a^2} + \frac{b^2}{2c+4a+3b^2} \geq \frac{1}{3}$$

Bất đẳng thức có dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức nên trước hết ta áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức thì được

$$\begin{aligned} & \frac{c^2}{2a+4b+3c^2} + \frac{a^2}{2b+4c+3a^2} + \frac{b^2}{2c+4a+3b^2} \\ &= \frac{c^2}{c(2a+4b+3c^2)} + \frac{a^2}{a(2b+4c+3a^2)} + \frac{b^2}{b(2c+4a+3b^2)} \\ & \geq \frac{(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3})^2}{3(a^3 + b^3 + c^3) + 6(ab + bc + ca)} \end{aligned}$$

Phép chứng minh minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3})^2}{3(a^3 + b^3 + c^3) + 6(ab + bc + ca)} \geq \frac{1}{3}$$

Hay $\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{b^3c^3} + \sqrt{c^3a^3} \geq ab + bc + ca$

Để chứng minh bất đẳng thức trên ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy và để ý đến giả thiết $ab + bc + ca = 3$ thì được

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^3b^3} + \sqrt{b^3c^3} + \sqrt{c^3a^3} \\ &= (\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{ab}) + (\sqrt{b^3c^3} + \sqrt{bc}) + (\sqrt{c^3a^3} + \sqrt{ca}) - (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \\ &\geq 2(ab + bc + ca) - (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \\ &\geq ab + bc + ca + 3 - \sqrt{3(ab + bc + ca)} = ab + bc + ca \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Bài 57. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq a^2b^2c^2$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2b^2}{c^3(a^2 + b^2)} + \frac{b^2c^2}{a^3(b^2 + c^2)} + \frac{c^2a^2}{b^3(c^2 + a^2)} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Phân tích và lời giải

Dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \sqrt{3}$. Trước hết ta viết lại giả thiết thành $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$, do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến phép đổi biến.

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$. Khi đó giả thiết được viết lại là $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$ và bất đẳng thức

được viết lại thành $\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{z^2 + x^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Quan sát bất đẳng thức trên ta nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, khi đó ta được.

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{z^2 + x^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2)}$$

Ta cần chứng minh được $\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2)} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Hay } 2(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq \sqrt{3} [x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2)]$$

Đến đây ta cần đánh giá vế phải sao cho xuất hiện $x^2 + y^2 + z^2$, sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} x(y^2 + z^2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2x^2(y^2 + z^2)(y^2 + z^2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{2x^2 + y^2 + z^2 + y^2 + z^2}{3} \right)^3} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có

$$y(z^2 + x^2) \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$z(x^2 + y^2) \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Cuối cùng ta cần chứng minh được

$$\frac{2}{3} \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 2(x^2 + y^2 + z^2)^2 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 + y^2 + z^2$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 58: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{a+c}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$, Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy có một số nhận xét sau

- Bất đẳng thức có dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức
- Bất đẳng thức chứa các căn bậc hai nên ta nghĩ đến bất đẳng thức Cauchy
- Đây là bất đẳng thức đồng bậc nên ta nghĩ đến phép đổi biến

Từ những nhận xét trên ta đi tìm hiểu các hướng tiếp cận bài toán như sau

Cách 1: Trước hết ta bắt đầu với bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức thì được đánh giá

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{a+c}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2}{\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}}$$

Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2}{\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

Hay $\sqrt{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}$

Tuy nhiên đánh giá cuối cùng lại là một đánh giá sai, do đó ta không thể dụng được trực tiếp như vậy, điều này làm ta nghĩ đến việc biến đổi bất đẳng thức trước.

Đề ý là $\frac{a}{\sqrt{b+c}} = \frac{a+b+c}{\sqrt{b+c}} - \sqrt{b+c}$, hoàn toàn tương tự ta viết về trái của bất đẳng thức trên là

$$\begin{aligned} & \frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{a+c}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \\ &= (a+b+c) \left(\frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{a+c}} \right) - (\sqrt{b+c} + \sqrt{a+c} + \sqrt{a+b}) \end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{a+c}} \right) - (\sqrt{b+c} + \sqrt{a+c} + \sqrt{a+b}) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

Đến đây theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{a+c}}\right) \geq \frac{9(a+b+c)}{\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{9(a+b+c)}{\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}} - (\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

Để ý là theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{3.2.(a+b+c)}$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{9(a+b+c)}{\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}} &\geq \frac{9(a+b+c)}{\sqrt{3.2.(a+b+c)}} - \sqrt{3.2.(a+b+c)} \\ &= \frac{\sqrt{3}(a+b+c)}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \end{aligned}$$

Suy ra ta được $\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{a+c}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Cách 2: Bây giờ ta thử áp dụng bất đẳng thức Cauchy xem có chứng minh được bài toán không. Để ý ta thấy các phân số có mẫu chứa các căn bậc hai và ta phải đánh giá sao cho bất đẳng thức thu được cùng chiều với bất đẳng thức cần chứng minh. Điều này làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức Cauchy dạng $2\sqrt{xy} \leq x + y$. Chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{1}{\sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c}} \left(\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{a+c}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \right) \geq \frac{1}{2}$$

Lúc này ta cần đánh giá các mẫu theo kiểu $(\sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c})\sqrt{b+c} \leq ?$. Để ý là khi khai triển thì $(\sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c})\sqrt{b+c} = \sqrt{2a}.\sqrt{b+c} + (\sqrt{2b} + \sqrt{2c})\sqrt{b+c}$. Do đó theo bất đẳng thức $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$ và bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{2b} + \sqrt{2c} \leq 2\sqrt{b+c}; \quad \sqrt{2a}.\sqrt{b+c} \leq \frac{2a+b+c}{2}$$

Nên ta có

$$\begin{aligned} (\sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c})\sqrt{b+c} &= \sqrt{2a}.\sqrt{b+c} + (\sqrt{2b} + \sqrt{2c})\sqrt{b+c} \\ &\leq \frac{2a+b+c}{2} + 2\sqrt{b+c}.\sqrt{b+c} = \frac{2a+5b+5c}{2} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{a}{(\sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c})\sqrt{b+c}} \geq \frac{2a}{2a+5b+5c}$$

Áp dụng tương tự ta có

$$\frac{b}{(\sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c})\sqrt{c+a}} \geq \frac{2b}{2b+5c+5a}; \quad \frac{c}{(\sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c})\sqrt{a+b}} \geq \frac{2c}{2c+5a+5b}$$

Đến đây cộng theo vế của các bất đẳng thức trên thì được

$$\frac{1}{\sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c}} \left(\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{a+c}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \right) \geq \frac{2a}{2a+5b+5c} + \frac{2b}{2b+5a+5c} + \frac{2c}{2c+5a+5b}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{2a}{2a+5b+5c} + \frac{2b}{2b+5a+5c} + \frac{2c}{2c+5a+5b} \geq \frac{1}{2}$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{2a}{2a+5b+5c} + \frac{2b}{2b+5a+5c} + \frac{2c}{2c+5a+5b} &\geq \frac{2(a+b+c)^2}{2a^2+2b^2+2c^2+10ab+10bc+10ca} \geq 2 \cdot \frac{(a+b+c)^2}{4(a+b+c)^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Cách 3: Bất đẳng thức cần chứng minh là bất đẳng thức đồng bậc $\frac{1}{2}$ do đó ta sử dụng phép đổi biến

$$x = \frac{3a}{a+b+c}; y = \frac{3b}{a+b+c}; z = \frac{3c}{a+b+c}. \text{ Khi đó ta được } x+y+z=3$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{3}{\sqrt{\frac{a+b+c}{3}}} \left(\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{a+c}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{a+b+c}} \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

$$\text{Hay } \frac{x}{\sqrt{y+z}} + \frac{y}{\sqrt{z+x}} + \frac{z}{\sqrt{x+y}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})$$

Kết hợp với điều kiện $x+y+z=3$, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{x}{\sqrt{3-x}} + \frac{y}{\sqrt{3-x}} + \frac{z}{\sqrt{3-x}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})$$

$$\text{Dễ dàng chứng minh được } \frac{t}{\sqrt{3-t}} \geq \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4\sqrt{2}}(t-1) \text{ với } 0 < t < 3$$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{3-x}} + \frac{y}{\sqrt{3-y}} + \frac{z}{\sqrt{3-z}} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) + \frac{3}{4\sqrt{2}} (x+y+z-3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 59. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq 3 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được bất đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=3$. Quan sát giả thiết bài toán ta có thể viết $ab+bc+ca=abc$ lại thành $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Điều này gợi ý cho ta phép đổi biến

$x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$, từ đó suy ra $x + y + z = 1$. Lúc này bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} \geq 3(x^2 + y^2 + z^2)$. Đến đây ta có các cách chứng minh như sau

Cách 1: Ý tưởng thứ nhất là sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, tuy nhiên ta không nên sử dụng trực tiếp vì bên vế phải có $x^2 + y^2 + z^2$ trội hơn $(x + y + z)^2$. Do đó ta sẽ biến đổi vế trái sao cho khi áp dụng có thể rút gọn được đại lượng $x^2 + y^2 + z^2$. Từ nhận định đó ta được

$$\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} = \frac{x^4}{x^2z} + \frac{y^4}{y^2x} + \frac{z^4}{z^2y} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2z + y^2x + z^2y}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2z + y^2x + z^2y} \geq 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

Hay
$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3(x^2z + y^2x + z^2y)$$

Để đồng bậc hóa bất đẳng thức ta chú ý đến $x + y + z = 1$, nên bất đẳng thức trên trở thành

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \geq 3(x^2z + y^2x + z^2y)$$

Hay
$$x^3 + y^3 + z^3 + xz^2 + yx^2 + zy^2 \geq 2(x^2z + y^2x + z^2y)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$x^3 + xz^2 \geq 2x^2z; y^3 + yx^2 \geq 2y^2x; z^3 + zy^2 \geq 2z^2y$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$x^3 + y^3 + z^3 + xz^2 + yx^2 + zy^2 \geq 2(x^2z + y^2x + z^2y)$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$.

Cách 2: Biến đổi tương đương bất đẳng thức và chú ý đến $x + y + z = 1$ ta được

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} \geq 3(x^2 + y^2 + z^2) \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} - (x + y + z)^2 \geq 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} - (x + y + z) \geq 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 \\ \Leftrightarrow & \frac{(x - z)^2}{z} + \frac{(y - x)^2}{x} + \frac{(z - y)^2}{y} \geq (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \\ \Leftrightarrow & (x - y)^2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + (y - z)^2 \left(\frac{1}{y} - 1 \right) + (z - x)^2 \left(\frac{1}{z} - 1 \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Vì $x + y + z = 1$ nên $\frac{1}{x}; \frac{1}{y}; \frac{1}{z} > 1$. Do đó bất đẳng thức cuối cùng đúng.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$.

Bài 60: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + 2b + 3} + \frac{b}{b^2 + 2c + 3} + \frac{c}{c^2 + 2a + 3} \leq \frac{1}{2}$$

Phân tích và lời giải

Để dàng dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta liên tưởng đến đánh giá quen thuộc $a^2 + 2b + 3 = a^2 + 1 + 2b + 2 \geq 2a + 2b + 2$
 Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a}{a^2 + 2b + 3} + \frac{b}{b^2 + 2c + 3} + \frac{c}{c^2 + 2a + 3} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a + b + 1} + \frac{b}{b + c + 1} + \frac{c}{c + a + 1} \right)$$

Như vậy ta cần chứng minh $\frac{a}{a + b + 1} + \frac{b}{b + c + 1} + \frac{c}{c + a + 1} \leq 1$

Để có các đánh giá hợp lý trước hết ta đổi chiều bất đẳng thức

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$1 - \frac{a}{a + b + 1} + 1 - \frac{b}{b + c + 1} + 1 - \frac{c}{c + a + 1} \geq 3 - 1 = 2$$

Hay
$$\frac{b + 1}{a + b + 1} + \frac{c + 1}{b + c + 1} + \frac{a + 1}{c + a + 1} \geq 2$$

Bất đẳng thức trên làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

$$\begin{aligned} \frac{b + 1}{a + b + 1} + \frac{c + 1}{b + c + 1} + \frac{a + 1}{c + a + 1} &= \frac{(b + 1)^2}{(b + 1)(a + b + 1)} + \frac{(c + 1)^2}{(c + 1)(b + c + 1)} + \frac{(a + 1)^2}{(a + 1)(c + a + 1)} \\ &\geq \frac{(a + b + c + 3)^2}{(a + 1)(a + c + 1) + (b + 1)(b + a + 1) + (c + 1)(c + b + 1)} \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a + b + c + 3)^2}{(a + 1)(a + c + 1) + (b + 1)(b + a + 1) + (c + 1)(c + b + 1)} \geq 2$$

Để ý đến giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ ta có

$$\begin{aligned} &(a + 1)(a + c + 1) + (b + 1)(b + a + 1) + (c + 1)(c + b + 1) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca + 3(a + b + c) + 3 \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca + 3(a + b + c) + \frac{9}{2} = \frac{1}{2}(a + b + c + 3)^2 \end{aligned}$$

Khi đó ta được

$$\frac{(a + b + c + 3)^2}{(a + 1)(a + c + 1) + (b + 1)(b + a + 1) + (c + 1)(c + b + 1)} = \frac{(a + b + c + 3)^2}{\frac{1}{2}(a + b + c + 3)^2} = 2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 61. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{ab + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{bc + c^2}} + \frac{c}{\sqrt{ca + a^2}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy ý tưởng sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức để đánh biểu thức về trái hoặc là sử dụng bất đẳng thức Cauchy để đánh giá mẫu, nhưng trước hết để có những đánh giá đảm bảo dấu đẳng thức ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Đầu tiên ta tiếp cận với bất đẳng thức Bunhiacopsxki dạng phân thức. Để ý là ta không nên sử dụng trực tiếp vì khi đó dưới mẫu có các đại lượng mũ 2 nên sẽ trội hơn. Do đó ta sẽ đánh giá như sau

$$\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{bc+c^2}} + \frac{a}{\sqrt{ca+a^2}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{ab+b^2} + b\sqrt{bc+c^2} + c\sqrt{ca+a^2}}$$

Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{ab+b^2} + b\sqrt{bc+c^2} + c\sqrt{ca+a^2}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Để dễ dàng hơn ta chú ý đến đánh giá mẫu trước. Chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra thì ta có $2b = a + b$. Do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{2b(a+b)} \leq \frac{2b + (a+b)}{2} = \frac{a+3b}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$a\sqrt{ab+b^2} + b\sqrt{bc+c^2} + c\sqrt{ca+a^2} \leq \frac{a^2+3ab}{2\sqrt{2}} + \frac{b^2+3bc}{2\sqrt{2}} + \frac{c^2+3ca}{2\sqrt{2}}$$

Khi đó ta sẽ được

$$\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{ab+b^2} + b\sqrt{bc+c^2} + c\sqrt{ca+a^2}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\frac{a^2+3ab}{2\sqrt{2}} + \frac{b^2+3bc}{2\sqrt{2}} + \frac{c^2+3ca}{2\sqrt{2}}}$$

Và như vậy ta cần phải chứng minh được $\frac{(a+b+c)^2}{a^2+3ab+b^2+3bc+c^2+3ca} \geq \frac{3}{4}$. Hay

$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, đánh giá này là một đánh giá đúng, do đó bất đẳng thức được chứng minh.

Bây giờ ta thử tiếp cận với bất đẳng thức Cauchy với đánh giá các mẫu xem sao. Đề ý là $\sqrt{a^2+ab} = \sqrt{a(a+b)}$, tích này làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức Cauchy dạng quen thuộc

$2\sqrt{xy} \leq x+y$. Chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta được

$$\sqrt{2b(a+b)} \leq \frac{2b + (a+b)}{2} = \frac{a+3b}{2}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{bc+c^2}} + \frac{a}{\sqrt{ca+a^2}} \geq \frac{2a\sqrt{2}}{a+3b} + \frac{2b\sqrt{2}}{b+3c} + \frac{2c\sqrt{2}}{c+3a}.$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{2a\sqrt{2}}{a+3b} + \frac{2b\sqrt{2}}{b+3c} + \frac{2c\sqrt{2}}{c+3a} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ hay } \frac{a}{a+3b} + \frac{b}{b+3c} + \frac{c}{c+3a} \geq \frac{3}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{a+3b} + \frac{b}{b+3c} + \frac{c}{c+3a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca}.$$

Ta cần phải chứng minh được $\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca} \geq \frac{3}{4}$

$$\text{Hay } 4(a+b+c)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca)$$

Khai triển và thu gọn ta được $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, đây là một đánh giá đúng. Vậy bài toán cũng được chứng minh

Nhận xét: Trong bài toán trên thì hai ý tưởng tiếp cận là như nhau, chỉ khác nhau ở chỗ là dùng công cụ gì trước thôi. Ngoài ra ta có thể dùng phương pháp đổi biến để chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{a+3b} + \frac{b}{b+3c} + \frac{c}{c+3a} \geq \frac{3}{4}$$

Đặt $x = a + 3b$; $y = b + 3c$; $z = c + 3a$. Từ đó suy ra

$$a = \frac{x - 3y + 9z}{28}; b = \frac{y - 3z + 9x}{28}; c = \frac{z - 3x + 9y}{28}$$

Bất đẳng thức trên được viết lại thành $3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) - \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \right) \geq 6$. Các bạn thử chứng minh tiếp xem sao?

Bài 62: Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)^2 \geq (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta thấy có các ý tưởng tiếp cận là sử dụng bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Bunhiacopski,...

Cách 1: Trước hết ta bắt đầu với bất đẳng thức Cauchy, tuy nhiên ta không thể sử dụng trực tiếp để đánh giá về trái hay về phải vì sẽ tạo ra một đánh giá sai, do đó ta biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh trước

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)^2 \geq (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq 3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

Đến đây ta quan sát thấy bên vế trái có $\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$ và bên vế phải có số 3 nên ta có

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq 3$$

Mặt khác ta lại thấy vế trái có $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}$ và vế phải lại có $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ nên cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^2}{b^2} + 1 \geq \frac{2a}{b}; \frac{b^2}{c^2} + 1 \geq \frac{2b}{c}; \frac{c^2}{a^2} + 1 \geq \frac{2c}{a}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 3 \geq 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại thấy $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$

Do đó ta có $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 3 \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 3$

Hay $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$

Kết hợp với bất đẳng thức $\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq 3$ ta được

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq 3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Cũng như trên ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{a^2c + b^2a + c^2a}{abc} \right)^2 \geq (a + b + c) \left(\frac{ab + bc + ca}{abc} \right)$$

Hay
$$(a^2c + b^2a + c^2b)^2 \geq abc(a + b + c)(ab + bc + ca)$$

Đến đây từ $(a^2c + b^2a + c^2b)$ đánh giá về $(a + b + c)$; $(ab + bc + ca)$ thì ta sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, khi đó ta có

$$\begin{aligned} (a^2c + b^2a + c^2b)(c + b + a) &\geq (ab + bc + ca)^2 \\ (a^2c + b^2a + c^2b) \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) &\geq (a + b + c)^2 \end{aligned}$$

Nhân vế với vế 2 bất đẳng thức này ta được

$$(a^2c + b^2a + c^2a)^2 (a + b + c) \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq (ab + bc + ca)^2 (a + b + c)^2$$

Hay
$$(a^2c + b^2a + c^2a)^2 \cdot (a + b + c) \left(\frac{ab + bc + ca}{abc} \right) \geq (ab + bc + ca)^2 (a + b + c)^2$$

Hay
$$(a^2c + b^2a + c^2a)^2 \geq abc(ab + bc + ca)(a + b + c)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 55. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + 3)(b^2 + 3)(c^2 + 3) \geq 4(a + b + c + 1)^2$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$, quan sát bất đẳng thức ta thấy dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Cách 1: Để ý là $a^2 + 3 = a^2 + 1 + 1 + 1$, Do đó áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} (a^2 + 1 + 1 + 1) \left[1 + \left(\frac{b+c}{2} \right)^2 + \left(\frac{b+c}{2} \right)^2 + 1 \right] &\geq \left(1.a + \frac{b+c}{2}.1 + \frac{b+c}{2}.1 + 1.1 \right)^2 \\ &= (a + b + c + 1)^2 \end{aligned}$$

Hay
$$4(a^2 + 3) \left(2 + \frac{(b+c)^2}{2} \right) \geq 4(a + b + c + 1)^2$$

Bài toán quy về chứng minh
$$(b^2 + 3)(c^2 + 3) \geq 4 \left(2 + \frac{(b+c)^2}{2} \right)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\begin{aligned}(b^3 + 3)(c^3 + 3) &= 3b^2 + 3c^2 + b^2c^2 + 9 = 2b^2 + 2c^2 + (b^2 + c^2) + (b^2c^2 + 1) + 8 \\ &\geq 2b^2 + 2c^2 + 2bc + 2bc + 8 = 2(b + c)^2 + 8 = 4\left(\frac{(b + c)^2}{2} + 2\right)\end{aligned}$$

Như vậy ta được

$$(a^2 + 3)(b^2 + 3)(c^2 + 3) \geq 4\left(\frac{(b + c)^2}{2} + 4\right)(a^2 + 3) \geq 4(a + b + c + 1)^2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2: Ngoài ra ta cũng có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki như sau

$$\begin{aligned}(a^2 + 1 + 1 + 1)\left[1 + \left(\frac{b + c + 1}{3}\right)^2 + \left(\frac{b + c + 1}{3}\right)^2 + \left(\frac{b + c + 1}{3}\right)^2\right] \\ \geq \left(1 \cdot a + \frac{b + c + 1}{3} + \frac{b + c + 1}{3} + \frac{b + c + 1}{3}\right)^2\end{aligned}$$

$$\text{Hay} \quad 4(a^2 + 3)\left(1 + \frac{(b + c + 1)^2}{3}\right) \geq 4(a + b + c + 1)^2$$

$$\text{Ta cần chứng minh} \quad (b^2 + 3)(c^2 + 3) \geq 4\left[1 + \frac{(b + c + 1)^2}{3}\right]$$

Thật vậy, biến đổi tương đương ta được

$$\begin{aligned}(b^2 + 3)(c^2 + 3) \geq 4\left[1 + \frac{(b + c + 1)^2}{3}\right] &\Leftrightarrow 3b^2c^2 + 5(b^2 + c^2) - 8(b + c) - 8bc + 11 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2(b + c - 2)^2 + (b - c)^2 + 3(bc - 1)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng, do đó ta có

$$(a^2 + 3)(b^2 + 3)(c^2 + 3) \geq 4\left(\frac{(b + c)^2}{2} + 4\right)(a^2 + 3) \geq 4(a + b + c + 1)^2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 56. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 9$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3 + b^3}{ab + 9} + \frac{b^3 + c^3}{bc + 9} + \frac{c^3 + a^3}{ca + 9} \geq 9$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy tử của các phân thức chứa các đại lượng $a^3 + b^3$, $b^3 + c^3$, $c^3 + a^3$. Chú ý đến chiều của bất đẳng thức, các đại lượng đó làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức $4(x^3 + y^3) \geq (x + y)^3$, ngoài ra chú ý đến tích ab có thể đánh giá về $(a + b)^2$. Bây giờ ta thử xem các phân tích đó có thể giải quyết được bài toán không?

Cách 1: Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $4(x^3 + y^3) \geq (x + y)^3$ ta có

$$\frac{a^3 + b^3}{ab + 9} = \frac{4(a^3 + b^3)}{4ab + 36} \geq \frac{(a + b)^3}{4ab + 36}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$4ab \leq (a + b)^2 \text{ và } (a + b)^2 + 36 \geq 12(a + b)$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^3 + b^3}{ab + 9} &= \frac{4(a^3 + b^3)}{4ab + 36} \geq \frac{(a + b)^3}{(a + b)^2 + 36} = a + b - \frac{36(a + b)}{(a + b)^2 + 36} \\ &\geq a + b - \frac{36(a + b)}{12(a + b)} = a + b - 3 \end{aligned}$$

Áp dụng tương tự ta có $\frac{b^3 + c^3}{bc + 9} \geq b + c - 3$; $\frac{c^3 + a^3}{ca + 9} \geq c + a - 3$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên, ta được

$$\frac{a^3 + b^3}{ab + 9} + \frac{b^3 + c^3}{bc + 9} + \frac{c^3 + a^3}{ca + 9} \geq 2(a + b + c) - 9 = 9$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$.

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $4(x^3 + y^3) \geq (x + y)^3$ ta có

$$\frac{a^3 + b^3}{ab + 9} \geq \frac{(a + b)^3}{4ab + 36} = \left[\frac{(a + b)^3}{4ab + 36} + \frac{4ab + 6}{24} + 3 \right] - \frac{ab}{6} - \frac{9}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{(a + b)^3}{4ab + 36} + \frac{4ab + 6}{24} + 3 \geq 3\sqrt[3]{3 \cdot \frac{(a + b)^3}{4ab + 36} \cdot \frac{4ab + 6}{24}} = 3 \cdot \frac{a + b}{2}$$

Do đó ta được $\frac{a^3 + b^3}{bc + 9} \geq \frac{3(a + b)}{2} - \frac{ab}{6} - \frac{9}{2}$

Tương tự ta có $\frac{b^3 + c^3}{bc + 9} \geq \frac{3(b + c)}{2} - \frac{bc}{6} - \frac{9}{2}$; $\frac{c^3 + a^3}{ca + 9} \geq \frac{3(c + a)}{2} - \frac{ca}{6} - \frac{9}{2}$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên và kết hợp với đánh giá quen thuộc, ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^3 + b^3}{ab + 9} + \frac{b^3 + c^3}{bc + 9} + \frac{c^3 + a^3}{ca + 9} &\geq 3(a + b + c) - \frac{ab + bc + ca}{6} - \frac{27}{2} \\ &\geq 3(a + b + c) - \frac{(a + b + c)^2}{18} - \frac{27}{2} = 9 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$.

Bài 57. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + b + 1 = 3ab$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3a}{b(a + 1)} + \frac{3b}{a(b + 1)} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \leq 1$$

Lời giải

Biến đổi biểu thức vế trái ta được

$$P = \frac{3ab}{b^2(a+1)} + \frac{3ab}{a^2(b+1)} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{b+(a+1)}{b^2(a+1)} + \frac{a+(b+1)}{a^2(b+1)} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$$

Hay
$$P = \frac{b}{b^2(a+1)} + \frac{a}{a^2(b+1)} = \frac{1}{b(a+1)} + \frac{1}{a(b+1)}$$

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$, từ giả thiết ta suy ra $x + y + xy = 3$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$3 = x + y + xy \geq xy + 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow xy + 2\sqrt{xy} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{xy} - 1)(\sqrt{xy} + 3) \leq 0$$

Từ đó ta suy ra $xy \leq 1$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{xy}{x+1} + \frac{xy}{y+1} = xy \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \right) = xy \cdot \frac{x+y+2}{(x+1)(y+1)} = xy \cdot \frac{(3-xy)+2}{(xy+x+y)+1} \\ &= \frac{xy(5-xy)}{4} = \frac{-(xy)^2 + 5xy}{4} = \frac{[-(xy)^2 + 2xy - 1] + 3xy + 1}{4} \\ &= \frac{-(xy-1)^2 + 3xy + 1}{4} \leq \frac{3+1}{4} \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$ hay $a = b = 1$

Bài 58. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{9}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Quan sát bất đẳng thức trên ta nhận thấy các dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức hoặc kỹ thuật thêm bớt trong bất đẳng thức Cauchy. Bây giờ ta đi tìm lời giải theo các định hướng nêu trên

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} = \frac{a^4}{ab+2ca} + \frac{b^4}{bc+2ab} + \frac{c^4}{ca+2bc} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3(ab+bc+ca)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{9}$$

Thật vậy, ta cần chú ý hai bất đẳng thức quen thuộc

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \geq ab+bc+ca$$

Từ đó ta có

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3(ab+bc+ca)} = \frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)^2}{9(ab+bc+ca)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{9}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{b+2c} + \frac{a^3}{b+2c} + \frac{(b+2c)^2}{27} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b+2c} \cdot \frac{a^3}{b+2c} \cdot \frac{(b+2c)^2}{27}} = a^2 \\ \frac{b^3}{c+2a} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{(c+2a)^2}{27} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{c+2a} \cdot \frac{b^3}{c+2a} \cdot \frac{(c+2a)^2}{27}} = b^2 \\ \frac{c^3}{a+2b} + \frac{c^3}{a+2b} + \frac{(a+2b)^2}{27} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{a+2b} \cdot \frac{c^3}{a+2b} \cdot \frac{(a+2b)^2}{27}} = c^2\end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{2a^3}{b+2c} + \frac{2b^3}{c+2a} + \frac{2c^3}{a+2b} + \frac{(b+2c)^2}{27} + \frac{(c+2a)^2}{27} + \frac{(a+2b)^2}{27} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Hay

$$\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geq \frac{11(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)}{27}$$

Ta cần chứng minh được

$$\frac{11(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)}{27} \geq \frac{(a+b+c)^2}{9}$$

Hay

$$11(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) \geq 3(a+b+c)^2$$

Triển khai và thu gọn ta được $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Bài 59. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Bất đẳng thức này đã được chứng minh bằng kỹ thuật thêm bớt trong chủ đề về bất đẳng thức Cauchy. Ở đây ta trình bày thêm cách sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \\ \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a(1+b)(1+c) + b(1+c)(1+a) + c(1+a)(1+b)} \\ = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2(ab + bc + ca) + a + b + c + 3abc}\end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2(ab + bc + ca) + a + b + c + 3abc} \geq \frac{3}{4}$$

Hay

$$4(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 6(ab + bc + ca) + 3(a + b + c) + 9abc$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq (ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c) = 3(a + b + c)$$

Do đó ta có

$$6(ab + bc + ca) + 3(a + b + c) + 9 \leq 6(ab + bc + ca) + (ab + bc + ca)^2 + 9$$

Ta cần chứng minh được

$$6(ab + bc + ca) + (ab + bc + ca)^2 + 9 \leq 4(ab + bc + ca)^2$$

Hay $(ab + bc + ca)^2 - 2(ab + bc + ca) - 3 \geq 0$

Hay $(ab + bc + ca + 1)(ab + bc + ca - 3) \geq 0$

Đánh giá cuối cùng luôn đúng vì $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$.

Bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 60. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1 + \sqrt{(a+b)^3 + abc}} + \frac{1}{1 + \sqrt{(b+c)^3 + abc}} + \frac{1}{1 + \sqrt{(c+a)^3 + abc}} \leq \frac{3}{4}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy được sự phức tạp của bài toán. Để chứng minh được bất đẳng thức trên ta cần phải đơn giản hóa được các căn thức ở các mẫu số, đồng thời khai thác thật khéo léo các giả thiết của bài toán. Quan sát kỹ giả thiết

và bất đẳng thức cần chứng minh ta nhận thấy nếu ta đánh giá được về trái về đại lượng $\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}$ thì

xem như bài toán được giải quyết. Dễ thấy từ giả thiết ta có thể suy ra được $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3; abc \geq 1$.

Bây giờ ta đi tìm cách đánh giá các mẫu

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy vào giả thiết ta được

$$3 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} \Rightarrow abc \geq 1$$

Do đó
$$\frac{1}{1 + \sqrt{(a+b)^3 + abc}} \leq \frac{1}{1 + \sqrt{(a+b)^3 + 1}} = \frac{\sqrt{(a+b)^3 + 1} - 1}{(a+b)^3}$$

Đề ý là khi $a = b = 1$ thì $(1 + a + b) = \left[1 - (a + b) + (a + b)^2\right]$, do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{(a+b)^3 + 1} &= \sqrt{(1+a+b)\left[1 - (a+b) + (a+b)^2\right]} \\ &\leq \frac{(1+a+b) + \left[1 - (a+b) + (a+b)^2\right]}{2} = 1 + \frac{(a+b)^2}{2} \end{aligned}$$

Suy ra
$$\sqrt{(a+b)^3 + 1} - 1 \leq \frac{(a+b)^2}{2}$$

Hay
$$\frac{\sqrt{(a+b)^3+1}-1}{(a+b)^3} \leq \frac{1}{2(a+b)}$$

Do đó ta được
$$\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}} \leq \frac{1}{2(a+b)}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}} + \frac{1}{1+\sqrt{(b+c)^3+abc}} + \frac{1}{1+\sqrt{(c+a)^3+abc}} \\ \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{3}{2}$$

Thật vậy, theo một đánh giá quen thuộc kết hợp với giả thiết ta được

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq \frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2: Để ý thấy có số 1 ở dưới mẫu nên để dễ đánh mẫu hơn ta có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski dạng phân thức để tách số một ra khỏi mẫu số. Chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta được

$$\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{(1+3)^2}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}} \leq \frac{1}{16} \left(1 + \frac{9}{\sqrt{(a+b)^3+abc}} \right)$$

Để ý lại thấy trong mẫu số có chứa đại lượng abc nên nếu ta đánh giá được $(a+b)^3$ về ab thì có thể đặt được nhân tử chung. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $(a+b)^2 \geq 4ab$, khi đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt{(a+b)^3+abc}} \leq \frac{1}{\sqrt{(a+b)4ab+abc}} = \frac{1}{\sqrt{ab(4a+4b+c)}}$$

Bây giờ để triệt tiêu căn bậc hai ta để ý đến bất đẳng thức Cauchy dạng $2\sqrt{xy} \leq x+y$. Chú ý là cần bảo toàn dấu đẳng thức nên ta có

$$\frac{1}{\sqrt{ab(4a+4b+c)}} = \frac{3}{\sqrt{9ab(4a+4b+c)}} \leq \frac{2}{3} \left(\frac{1}{9ab} + \frac{1}{4a+4b+c} \right)$$

Mặt khác lại theo bất đẳng thức Bunhiacopski dạng phân thức ta có

$$\frac{1}{4a+4b+c} = \frac{1}{81} \cdot \frac{(4+4+1)^2}{4a+4b+c} \leq \frac{1}{81} \cdot \left(\frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Do đó ta được
$$\frac{1}{1+\sqrt{(a+b)^3+abc}} \leq \frac{1}{16} + \frac{3}{32ab} + \frac{1}{96} \left(\frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{1}{1 + \sqrt{(a+b)^3 + abc}} + \frac{1}{1 + \sqrt{(b+c)^3 + abc}} + \frac{1}{1 + \sqrt{(c+a)^3 + abc}} \leq \frac{3}{16} + \frac{3}{32} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) + \frac{9}{96} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Ta cần chứng minh $\frac{3}{16} + \frac{3}{32} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) + \frac{9}{96} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq \frac{3}{4}$

Thật vậy, Áp dụng hai bất đẳng thức quen thuộc ta được

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \sqrt{3 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)} = 3; \quad \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 3$$

Từ đó suy ra $\frac{3}{16} + \frac{3}{32} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) + \frac{9}{96} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq \frac{3}{16} + \frac{9}{32} + \frac{27}{96} = \frac{3}{4}$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 61. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2 + 2}{a + b - ab} + \frac{b^2 + c^2 + 2}{b + c - bc} + \frac{c^2 + a^2 + 2}{c + a - ca} \geq 12$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy các mẫu số không đồng bậc, chú ý đến giả thiết của bài toán ta viết lại được

$$\frac{a^2 + b^2 + 2}{(a+b)(a+b+c) - ab} = \frac{a^2 + b^2 + 2}{a^2 + b^2 + ab + bc + ca}$$

Để ý là $\frac{a^2 + b^2 + 2}{a^2 + b^2 + ab + bc + ca} - 1 = \frac{2 - ab - bc - ca}{a^2 + b^2 + ab + bc + ca}$

Khi đó áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{2 - ab - bc - ca}{a^2 + b^2 + ab + bc + ca} + \frac{2 - ab - bc - ca}{b^2 + c^2 + ab + bc + ca} + \frac{2 - ab - bc - ca}{c^2 + a^2 + ab + bc + ca} \geq 9$$

Bất đẳng thức có các tử giống nhau nên áp dụng một đánh giá quen thuộc ta được

$$\begin{aligned} \frac{2 - ab - bc - ca}{a^2 + b^2 + ab + bc + ca} + \frac{2 - ab - bc - ca}{b^2 + c^2 + ab + bc + ca} + \frac{2 - ab - bc - ca}{c^2 + a^2 + ab + bc + ca} \\ \geq \frac{9(2 - ab - bc - ca)}{2(a^2 + b^2 + c^2) + 3(ab + bc + ca)} \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{2 - ab - bc - ca}{2(a^2 + b^2 + c^2) + 3(ab + bc + ca)} = 1$$

Để dễ triệt tiêu các đại lượng âm trên tử số ta chú ý đến $(a + b + c)^2 = 1$, khi đó ta có

$$\frac{2 - ab - bc - ca}{2(a^2 + b^2 + c^2) + 3(ab + bc + ca)} = \frac{2(a + b + c)^2 - ab - bc - ca}{2(a^2 + b^2 + c^2) + 3(ab + bc + ca)} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Cách 2: Kết hợp với giả thiết ta có biến đổi như sau

$$a + b - ab = (a + b)(a + b + c) - ab = a^2 + b^2 + ab + bc + ca$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + 2}{a + b - ab} &= \frac{a^2 + b^2 + 2}{a^2 + b^2 + ab + bc + ca} \\ &= \frac{a^2 + 1}{a^2 + b^2 + ab + bc + ca} + \frac{b^2 + 1}{a^2 + b^2 + ab + bc + ca} \end{aligned}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned} \frac{b^2 + c^2 + 2}{b + c - bc} &= \frac{b^2 + 1}{b^2 + c^2 + ab + bc + ca} + \frac{c^2 + 1}{b^2 + c^2 + ab + bc + ca} \\ \frac{c^2 + ba + 2}{c + a - ca} &= \frac{c^2 + 1}{c^2 + a^2 + ab + bc + ca} + \frac{a^2 + 1}{c^2 + a^2 + ab + bc + ca} \end{aligned}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + 1}{a^2 + b^2 + ab + bc + ca} + \frac{a^2 + 1}{c^2 + a^2 + ab + bc + ca} \\ \geq \frac{4(a^2 + 1)}{2a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)} = \frac{4(a^2 + 1)}{a^2 + (a + b + c)^2} = 4 \end{aligned}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned} \frac{b^2 + 1}{b^2 + c^2 + ab + bc + ca} + \frac{b^2 + 1}{b^2 + a^2 + ab + bc + ca} &\geq 4 \\ \frac{c^2 + 1}{b^2 + c^2 + ab + bc + ca} + \frac{c^2 + 1}{c^2 + a^2 + ab + bc + ca} &\geq 4 \end{aligned}$$

Cộng theo về các kết quả trên ta được

$$\frac{a^2 + b^2 + 2}{a + b - ab} + \frac{b^2 + c^2 + 2}{b + c - bc} + \frac{c^2 + ba + 2}{c + a - ca} \geq 12$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 62. Cho các số thực thỏa mãn $a, b, c \in (0; 1)$ và $abc = (1 - a)(1 - b)(1 - c)$.

Chứng minh rằng:
$$\frac{a^2 + b^4}{b} + \frac{b^2 + c^4}{c} + \frac{c^2 + a^4}{a} \geq \frac{15}{8}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy cần phải đổi biến để làm mất đi các dấu trừ bên vế phải, do đó rất tự nhiên ta nghĩ đến phép đổi biến $x = a - b$; $y = b - 1$; $z = c - 1$, tuy nhiên quan sát kỹ giả thiết thì ta có thể biến đổi

$$abc = (1 - a)(1 - b)(1 - c) \Leftrightarrow \frac{(1 - a)(1 - b)(1 - c)}{abc} = 1$$

Đến đây ta đặt $x = \frac{1 - a}{a}$; $y = \frac{1 - b}{b}$; $z = \frac{1 - c}{c}$.

Khi đó ta có $xyz = 1$ và $a = \frac{1}{1 + x}$; $b = \frac{1}{1 + y}$; $c = \frac{1}{1 + z}$

Do $xyz = 1$ nên trong các số x, y, z có hai số nằm cùng phía so với 1, giả sử hai số đó là x và y .

Khi đó ta có $(x - 1)(y - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x + y \leq 1 + xy = \frac{1 + z}{z}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} &\geq \frac{1}{(1+xy)\left(1+\frac{x}{y}\right)} + \frac{1}{(1+xy)\left(1+\frac{y}{x}\right)} \\ &= \frac{y}{(1+xy)(x+y)} + \frac{x}{(1+xy)(x+y)} = \frac{1}{1+xy} = \frac{z}{1+z}\end{aligned}$$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + c^2 &= \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \\ &\geq \frac{z}{1+z} + \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{z(1+z)+1}{(1+z)^2} = \frac{(2z-1)^2}{4(1+z)^2} + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên viết lại được thành

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{15}{8}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = \frac{a^4}{a^2b} + \frac{b^4}{b^2c} + \frac{c^4}{c^2a} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b + b^2c + c^2a}$$

Mà cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned}a^2b + b^2c + c^2a &\leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)^2}\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{\sqrt{\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)^2}} = \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \geq \frac{3}{2}$$

Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned}(a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c) &\geq (a^2 + b^2 + c^2)^2 \\ 3(a^2 + b^2 + c^2) &\geq (a + b + c)^2\end{aligned}$$

Do đó ta được

$$3(a^3 + b^3 + c^3)^2 \geq (a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq \left(\frac{3}{4}\right)^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{3}{8}$$

$$\text{Từ các kết quả trên ta được } \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{3}{2} + \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Bài 63. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $0 < a, b, c < 1$ và $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2}{(1 - a^2)(1 - b^2)} + \frac{b^2 + c^2}{(1 - b^2)(1 - c^2)} + \frac{c^2 + a^2}{(1 - c^2)(1 - a^2)} \geq \frac{9}{2}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy được sự phức tạp của bài toán, để có các đánh giá hợp lý trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Bất đẳng thức có tính đối xứng nên ta sẽ đi phân tích một biểu thức rồi áp dụng tương tự

Quan sát biểu thức $\frac{a^2 + b^2}{(1 - a^2)(1 - b^2)}$ ta thấy được dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức quen thuộc

$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$, như vậy trên tử xuất hiện bình phương đúng nên rất tự nhiên ta nghĩ đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Tuy nhiên đề ý là ta viết mẫu số thành $1 - a^2 - b^2 + a^2b^2$ lại trội hơn nên muốn đánh giá về đại lượng lớn hơn sẽ rất khó khăn. Từ đó ta nghĩ đến việc tìm ra mối liên hệ giữa tử và mẫu. Đề ý là ta chứng minh được $(1 - a^2)(1 - b^2) \leq (1 - ab)^2$, nên ta cần đánh giá tử số

về $(1 - ab)^2$ hoặc $(1 + ab)^2$. Nhận thấy $\frac{a^2 + b^2}{(1 - a^2)(1 - b^2)} + \frac{1}{2} = \frac{(1 + a^2)(1 + b^2)}{2(1 - a^2)(1 - b^2)}$, nên chú ý đến bất

đẳng thức Bunhiacopxki ta lại có $(1 + a^2)(1 + b^2) \geq (1 + ab)^2$ suy ra $\frac{(1 + a^2)(1 + b^2)}{(1 - a^2)(1 - b^2)} \geq \frac{(1 + ab)^2}{(1 - ab)^2}$.

Bây giờ ta biến đổi tương tự xem ta sẽ thu được kết quả như thế nào?
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 + b^2}{(1 - a^2)(1 - b^2)} + \frac{b^2 + c^2}{(1 - b^2)(1 - c^2)} + \frac{c^2 + a^2}{(1 - c^2)(1 - a^2)} + \frac{3}{2} \geq 6 \\ \Leftrightarrow & \frac{(1 + a^2)(1 + b^2)}{(1 - a^2)(1 - b^2)} + \frac{(1 + b^2)(1 + c^2)}{(1 - b^2)(1 - c^2)} + \frac{(1 + c^2)(1 + a^2)}{(1 - c^2)(1 - a^2)} \geq 12 \end{aligned}$$

Theo phân tích như trên ta có $\frac{(1 + a^2)(1 + b^2)}{(1 - a^2)(1 - b^2)} \geq \frac{(1 + ab)^2}{(1 - ab)^2}$

Áp dụng tương tự ta được $\frac{(1 + b^2)(1 + c^2)}{(1 - b^2)(1 - c^2)} \geq \frac{(1 + bc)^2}{(1 - bc)^2}; \frac{(1 + c^2)(1 + a^2)}{(1 - c^2)(1 - a^2)} \geq \frac{(1 + ca)^2}{(1 - ca)^2}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{(1 + a^2)(1 + b^2)}{(1 - a^2)(1 - b^2)} + \frac{(1 + b^2)(1 + c^2)}{(1 - b^2)(1 - c^2)} + \frac{(1 + c^2)(1 + a^2)}{(1 - c^2)(1 - a^2)} \geq \frac{(1 + ab)^2}{(1 - ab)^2} + \frac{(1 + bc)^2}{(1 - bc)^2} + \frac{(1 + ca)^2}{(1 - ca)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{(1 + ab)^2}{(1 - ab)^2} + \frac{(1 + bc)^2}{(1 - bc)^2} + \frac{(1 + ca)^2}{(1 - ca)^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{(1 + ab)^2 (1 + bc)^2 (1 + ca)^2}{(1 - ab)^2 (1 - bc)^2 (1 - ca)^2}}$$

Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(1+ab)^2 (1+bc)^2 (1+ca)^2}{(1-ab)^2 (1-bc)^2 (1-ca)^2} \geq 64$$

Hay ta cần chứng minh $(1+ab)(1+bc)(1+ca) \geq 8(1-ab)(1-bc)(1-ca)$.

Đặt $x = ab; y = bc; z = ca$, khi đó $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $(1+x)(1+y)(1+z) \geq 8(1-x)(1-y)(1-z)$, tương đương với bất đẳng thức sau $9xyz \geq 7(xy + yz + zx) - 2$

Ta dễ dàng chứng minh được $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9xyz}{x+y+z} \geq 2(xy + yz + zx)$.

Mà $x + y + z = 1$ nên ta suy ra được $9xyz \geq 4(xy + yz + zx) - 1$. Vì $x + y + z = 1$ nên $3(xy + yz + zx) \leq 1$, do đó $4(xy + yz + zx) - 1 \geq 7(xy + yz + zx) - 2$

Điều này dẫn tới $9xyz \geq 7(xy + yz + zx) - 2$.

Như vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh xong.

Bài 64. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a, b, c \in [1; 2]$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq 5abc$$

Lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh có tính đối xứng giữa các biến, do đó ta không mất tính tổng quát, ta giả sử $1 \leq c \leq b \leq a \leq 2$. Khi đó dễ thấy

$$(b-a)(b-c) \leq 0$$

Hay $b^2 \leq b(a+c) - ac$. Từ đây ta suy ra

$$b^3 \leq b^2(a+c) - abc \leq [b(a+c) - ac](a+c) - abc = b(a+c)^2 - ac(a+c) - abc$$

Như vậy ta cần chứng minh

$$a^3 + c^3 + b(a+c)^2 - ac(a+c) - abc \leq 5abc$$

$$\text{Hay } (a-c)^2(a+c) + b(a+c)^2 \leq 6abc$$

Đề ý rằng do $a, b, c \in [1; 2]$ nên $a \leq 2 \leq 2c \leq b+c$, từ đó dẫn đến $0 \leq a-c \leq b$

Như vậy ta có

$$\begin{aligned} (a-c)^2(a+c) + b(a+c)^2 &\leq b(a-c)(a+c) + b(a+c)^2 \\ &= 2ab(a+c) \leq 2ab(2c+c) = 6abc \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = 2; b = c = 1$ và các hoán vị của nó.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \leq 5$$

Bất đẳng thức cần chứng minh có tính đối xứng giữa các biến, do đó ta không mất tính tổng quát, ta giả sử $1 \leq c \leq b \leq a \leq 2$. Khi đó dễ thấy

$$(c-b)(b^2 - a^2) \geq 0$$

$$\text{Từ đó suy ra } b^3 \leq cb^2 + ba^2 - a^2c \text{ hay } \frac{b^2}{ac} \leq \frac{b}{a} + \frac{a}{c} - \frac{a}{b}$$

Mặt khác ta cũng có $\frac{c^2}{ab} \leq \frac{c^2}{ac} = \frac{c}{a}$ và $\frac{a^2}{bc} \leq \frac{2a}{bc} \leq \frac{2c}{b}$

Từ các đánh giá trên ta thu được

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \leq \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)$$

Vì $b \leq a \leq 2$ nên $\frac{2b}{a} \geq 1$ và $\frac{a}{b} \geq 1 > \frac{1}{2}$. Do vậy $\left(\frac{2b}{a} - 1\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\right) \geq 0$ hay $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq \frac{5}{2}$.

Chứng minh tương tự ta được $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{5}{2}$

Từ hai đánh giá trên ta được $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \leq \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \leq \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = 2; b = c = 1$ và các hoán vị của nó.

Bài 65. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1$.

Chứng minh rằng: $a + b + c \geq ab + bc + ca$

Lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta thấy giả thiết là một bất đẳng thức nên để có các đánh giá hợp lý ta cần nghĩ đến việc đánh giá lại bất đẳng thức giả thiết trước. Quan sát giả thiết ta thấy có dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacpxki nên ta thử xem có đánh giá được hay không.

Cách 1: Trước hết ta để ý đến các mẫu số, để đồng bậc ta áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki thì được

$(a+b+1)(a+b+c^2) \geq (a+b+c)^2$, hoàn toàn tương tự ta được

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \\ &= \frac{(a+b+c^2)}{(a+b+c^2)(a+b+1)} + \frac{(b+c+a^2)}{(b+c+a^2)(b+c+1)} + \frac{(c+a+b^2)}{(c+a+b^2)(c+a+1)} \\ &\leq \frac{(a+b+c^2)}{(a+b+c)^2} + \frac{(b+c+a^2)}{(a+b+c)^2} + \frac{(c+a+b^2)}{(a+b+c)^2} = \frac{(a+b+c^2) + (b+c+a^2) + (c+a+b^2)}{(a+b+c)^2} \end{aligned}$$

Do đó ta được $1 \leq \frac{(a+b+c^2) + (b+c+a^2) + (c+a+b^2)}{(a+b+c)^2}$

Hay $(a+b+c)^2 \leq (a+b+c^2) + (b+c+a^2) + (c+a+b^2)$

Hay $a + b + c \geq ab + bc + ca$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Cách 2: Cũng bắt đầu với giả thiết nhưng ta biến đổi tương đương điều kiện ta được

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1 \\ \Leftrightarrow & 1 - \frac{1}{a+b+1} + 1 - \frac{1}{b+c+1} + 1 - \frac{1}{c+a+1} \leq 2 \\ \Leftrightarrow & \frac{a+b}{a+b+1} + \frac{b+c}{b+c+1} + \frac{c+a}{c+a+1} \leq 2 \end{aligned}$$

Về trái của giả thiết làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{a+b+1} + \frac{b+c}{b+c+1} + \frac{c+a}{c+a+1} \\ &= \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a+b+1)} + \frac{(b+c)^2}{(b+c)(b+c+1)} + \frac{(c+a)^2}{(c+a)(c+a+1)} \\ &\geq \frac{(a+b+b+c+c+a)^2}{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 + 2(a+b+c)} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{(a+b+b+c+c+a)^2}{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 + 2(a+b+c)} \leq 2$$

Hay $(a+b+b+c+c+a)^2 \leq 2[(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 + 2(a+b+c)]$

Biến đổi tương đương và thu gọn ta được

$$ab + bc + ca \leq a + b + c$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Nhận xét: Ngoài hai cách như trên ta có thể tham khảo thêm cách chứng minh phản chứng sau đây: Giả sử tồn tại các số dương a, b, c thỏa mãn

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1 \text{ và } a+b+c < ab+bc+ca$$

Từ đó suy ra

$$1 < \frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$$

Khi đó ta có

$$\frac{1}{a+b+1} < \frac{\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}}{a+b+\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}} = \frac{ab+bc+ca}{(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned} & \frac{ab+bc+ca}{(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca} + \frac{ab+bc+ca}{(b+c)(a+b+c)+ab+bc+ca} \\ & \quad + \frac{ab+bc+ca}{(c+a)(a+b+c)+ab+bc+ca} > 1 \end{aligned}$$

Hay

$$\begin{aligned} & \frac{a^2+ab+b^2}{(a+b)(a+b+c)+ab+bc+ca} + \frac{b^2+bc+c^2}{(b+c)(a+b+c)+ab+bc+ca} \\ & \quad + \frac{c^2+ca+a^2}{(c+a)(a+b+c)+ab+bc+ca} < 1 \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
& \frac{a^2 + ab + b^2}{(a+b)(a+b+c) + ab + bc + ca} + \frac{b^2 + bc + c^2}{(b+c)(a+b+c) + ab + bc + ca} \\
& + \frac{c^2 + ca + a^2}{(c+a)(a+b+c) + ab + bc + ca} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a+b+c) + ab + bc + ca} \\
& + \frac{3}{4} \cdot \frac{(b+c)^2}{(b+c)(a+b+c) + ab + bc + ca} + \frac{3}{4} \cdot \frac{(c+a)^2}{(c+a)(a+b+c) + ab + bc + ca} \\
& \geq \frac{3(a+b+c)^2}{2(a+b+c)^2 + 3(ab+bc+ca)} \geq 1
\end{aligned}$$

Từ đó ta được $1 > 1$ (vô lí). Vậy điều giả sử là sai.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Bài 66. Cho a, b, c thỏa mãn $a \geq 4; b \geq 5; 7 \geq c \geq 6; a^2 + b^2 + c^2 = 90$. Chứng minh rằng:

$$a + b + c \geq 16$$

Phân tích và lời giải

Quan sát giả thiết của bài toán thì ý suy nghĩ đầu tiên là đổi biến, khi đó ta thực hiện đặt $a = x + 4, b = y + 5, c = z + 6$, suy ra ta được $x, y, z \geq 0$.

Từ giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 = 90$, ta được

$$(x+4)^2 + (y+5)^2 + (z+6)^2 = 90 \text{ hay } x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 12z = 13$$

Giả sử ta có $x + y + z < 1$, mà $x, y, z \geq 0$ suy ra $x^2 + y^2 + z^2 < 1$

Ta có:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 10y + 12z &= (x^2 + y^2 + z^2) + 8(x + y + z) + 2(y + z) + 2z \\
&< 1 + (8 + 2 + 2)(x + y + z) < 1 + 8 + 2 + 2 = 13
\end{aligned}$$

Điều này vô lí, vì vậy $x + y + z \geq 1$

Do đó ta có $a + b + c = 4 + x + 5 + y + 6 + z \geq 15 + x + y + z \geq 16$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 4; b = 5; c = 7$.

Ngoài ra từ giả thiết $a \geq 4; b \geq 5; 7 \geq c \geq 6; a^2 + b^2 + c^2 = 90$, nên ta sẽ có các điều kiện $4 \leq a < 9; 5 \leq b < 8; 6 \leq c \leq 7$. Từ các điều kiện trên ta có

$$\begin{aligned}
4 \leq a < 9 &\Rightarrow (a-4)(9-a) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{a^2 + 36}{13} \\
5 \leq b < 8 &\Rightarrow (b-5)(8-b) \geq 0 \Leftrightarrow b \geq \frac{b^2 + 40}{13} \\
6 \leq c \leq 7 &\Rightarrow (c-6)(7-c) \geq 0 \Leftrightarrow c \geq \frac{c^2 + 42}{13}
\end{aligned}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$a + b + c \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 42 + 36 + 40}{13} = 16$$

Bài toán được chứng minh xong.

Bài 67. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki vào giả thiết ta được

$$1 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \sqrt{3}$$

Mặt khác ta có $5a^2 + 2ab + 2b^2 = (2a + b)^2 + (a - b)^2 \geq (2a + b)^2$

Suy ra $\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2} = 2a + b$

Do đó ta được $\frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} \leq \frac{1}{2a + b} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \right)$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{c} \right); \quad \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}} \geq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{c} + \frac{2}{a} \right)$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \sqrt{3}$.

Bài 68. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1}}{a + b + c} \leq \sqrt{2}$$

Phân tích: Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} \leq \sqrt{2} (a + b + c)$$

$$\text{Chú ý đến đánh giá } \sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{2a} \leq \sqrt{2(a^2 + 1 + 2a)} = \sqrt{2}(a + 1)$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có $\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{2a} \leq \sqrt{2(a^2 + 1 + 2a)} = \sqrt{2}(a + 1)$

Áp dụng tương tự ta có $\sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{2b} \leq \sqrt{2}(b + 1); \quad \sqrt{c^2 + 1} + \sqrt{2c} \leq \sqrt{2}(c + 1)$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} + \sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c} \leq \sqrt{2}(a + b + c + 3)$$

$$\text{Hay } \sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} \leq \sqrt{2}(a + b + c + 3) - \sqrt{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{abc}} = 3$

Nên

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(a + b + c + 3) - \sqrt{2}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) &\leq \sqrt{2}(a + b + c + 3) - 3\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}(a + b + c) \end{aligned}$$

Do vậy ta được $\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} \leq \sqrt{2}(a + b + c)$

Suy ra ta được $\frac{\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1}}{a + b + c} \leq \frac{\sqrt{2}(a + b + c)}{a + b + c} = \sqrt{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 69. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3 + 8}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^3 + 8}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^3 + 8}} \geq 1$$

Phân tích: Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Khi đó chú ý đến đánh giá theo bất đẳng thức

$$\text{Cauchy } \sqrt{b^3 + 8} = \sqrt{(b+2)(b^2 - 2b + 4)} \leq \frac{b^2 - b + 6}{2}$$

Lời giải

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có } \sqrt{b^3 + 8} = \sqrt{(b+2)(b^2 - 2b + 4)} \leq \frac{b^2 - b + 6}{2}$$

$$\text{Tương tự ta có } a^3 + 8 \leq \frac{a^2 - a + 6}{2}; \quad c^3 + 8 \leq \frac{c^2 - c + 6}{2}$$

Khi đó ta được bất đẳng thức sau

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3 + 8}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^3 + 8}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^3 + 8}} \geq \frac{2a^2}{b^2 - b + 6} + \frac{2b^2}{c^2 - c + 6} + \frac{2c^2}{a^2 - a + 6}$$

$$\text{Ta cần chứng minh } \frac{a^2}{b^2 - b + 6} + \frac{b^2}{c^2 - c + 6} + \frac{c^2}{a^2 - a + 6} \geq \frac{1}{2}$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{b^2 - b + 6} + \frac{b^2}{c^2 - c + 6} + \frac{c^2}{a^2 - a + 6} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 - (a + b + c) + 18}$$

$$\text{Ta cần chỉ ra được } \frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 - (a + b + c) + 18} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Hay } 2(a + b + c)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 - (a + b + c) + 18$$

$$\text{Hay } (a + b + c)^2 + (a + b + c) - 12 \geq 0$$

$$\text{Hay } (a + b + c + 4)(a + b + c - 3) \geq 0$$

$$\text{Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì } (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) = 9 \Rightarrow a + b + c \geq 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 70. Cho các số thực $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3abc$

Phân tích: Để ý đến đánh giá $a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow 2a - a^2 \leq 1 \Leftrightarrow a(2 - a) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2-a} \geq a$, do đó bài toán quy về chứng minh $a + b + c \geq 3abc$. Với giả thiết $a, b, c \in [0; 1]$ ta thu được đánh giá $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$ nên $3(a + b + c) \geq (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \geq 9abc$.

Lời giải

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow 2a - a^2 \leq 1 \Leftrightarrow a(2 - a) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2-a} \geq a$$

$$\text{Áp dụng tương tự được } \frac{1}{2-b} \geq b; \quad \frac{1}{2-c} \geq c$$

Do đó ta được $\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq a + b + c$

Ta cần chứng minh $a + b + c \geq 3abc$

Thật vậy, do $a, b, c \in [0;1]$ nên ta có $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta suy ra

$$3(a + b + c) \geq (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \geq 3\sqrt{a^2b^2c^2} \cdot 3\sqrt{abc} = 9abc$$

Hay $a + b + c \geq 3abc$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 71. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{27}{8}$$

Lời giải

Từ giả thiết $a + b + c = 1$ ta suy ra $abc \leq \frac{1}{27}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(1-ab)(1-bc) + (1-bc)(1-ca) + (1-ca)(1-ab)}{(1-ab)(1-bc)(1-ca)} \leq \frac{27}{8}$$

Hay
$$\frac{3 - 2(ab + bc + ca) + abc(a + b + c)}{1 - (ab + bc + ca) + abc(a + b + c) - a^2b^2c^2} \leq \frac{27}{8}$$

Hay
$$8[3 - 2(ab + bc + ca) + abc] \leq 27[1 - (ab + bc + ca) + abc - a^2b^2c^2]$$

Hay

$$\begin{aligned} 3 - 11(ab + bc + ca) + 19abc - 27a^2b^2c^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 4[3 + 19abc - 27a^2b^2c^2] &\geq 11.4(ab + bc + ca) \end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức quen thuộc $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc$ suy ra

$$(1 - 2a)(1 - 2b)(1 - 2c) \leq abc$$

Hay
$$11.4(ab + bc + ca) \leq 11(1 + 9abc)$$

Ta cần chứng minh
$$4[3 + 19abc - 27a^2b^2c^2] \geq 11(1 + 9abc)$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$(1 - 27abc)(1 + 4abc) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do $abc \leq \frac{1}{27}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 72. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 \leq a + b$. Chứng minh rằng:

$$a + 2b \leq \frac{\sqrt{10} + 3}{2}$$

Phân tích: Để ý là $a^2 + b^2 \leq a + b \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$ và khi đó phân tích $a + 2b$ theo $a - \frac{1}{2}$; $b - \frac{1}{2}$ như sau $a + 2b = \left(a - \frac{1}{2}\right) + 2\left(b - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta biến đổi giả thiết như sau

$$a^2 + b^2 \leq a + b \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$$

Biểu thức vế trái được viết lại như sau

$$a + 2b = \left(a - \frac{1}{2}\right) + 2\left(b - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\left[\left(a - \frac{1}{2}\right) + 2\left(b - \frac{1}{2}\right)\right]^2 \leq (1 + 2^2) \left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2\right] \leq 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Do đó ta được
$$\left(a - \frac{1}{2}\right) + 2\left(b - \frac{1}{2}\right) \leq \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Suy ra
$$a + 2b \leq \sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{10} + 3}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a = \frac{5 + \sqrt{10}}{5}; b = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{5}.$$

Bài 73. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + b \geq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3a^2 + 4}{4a} + \frac{b^3 + 2}{b^2} \geq \frac{9}{2}$$

Phân tích: Để ý là $\frac{3a^2 + 4}{4a} + \frac{b^3 + 2}{b^2} = \frac{3a}{4} + \frac{1}{a} + b + \frac{2}{b^2}$, đến đây ta nghĩ đến sử dụng bất đẳng thức Cauchy.

Lời giải

Biểu thức P được viết lại như sau

$$\frac{3a^2 + 4}{4a} + \frac{b^3 + 2}{b^2} = \frac{3a}{4} + \frac{1}{a} + b + \frac{2}{b^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và giả thiết ta được

$$\frac{a}{4} + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{4} \cdot \frac{1}{a}} = 1; \frac{2}{b^2} + \frac{b}{4} + \frac{b}{4} \geq 3\sqrt{\frac{2}{b^2} \cdot \frac{b}{4} \cdot \frac{b}{4}} = \frac{3}{2}; \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2} \geq 2$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{4} + \frac{1}{a} + \frac{2}{b^2} + \frac{b}{4} + \frac{b}{4} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \geq 1 + \frac{3}{2} + 2 = \frac{9}{2}$$

Hay

$$\frac{3a^2 + 4}{4a} + \frac{b^3 + 2}{b^2} \geq \frac{9}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} \frac{a}{4} = \frac{1}{a} \\ a + b = 4 \\ \frac{2}{b^2} = \frac{b}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

Bài 74. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4 \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2}}{\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)^3} + \frac{1}{(b+c)^3} + \frac{1}{(c+a)^3}}} \leq 2\sqrt{2}\sqrt[3]{9}$$

Phân tích: Chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra, ta quy bài toán về chứng minh hai bất đẳng thức sau

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \leq 3\sqrt{2} \quad \text{và} \quad \sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)^3} + \frac{1}{(b+c)^3} + \frac{1}{(c+a)^3}} \geq \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \leq \sqrt{6(a^2 + b^2 + c^2)} \leq \sqrt{6\sqrt{3(a^4 + b^4 + c^4)}} \leq 3\sqrt{2}$$

Mặt khác ta lại có

$$\left[(x^3 + y^3 + z^3)(x + y + z) \right]^2 \geq (x^2 + y^2 + z^2)^4; \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)^2}{3}$$

Do đó ta được
$$(x^3 + y^3 + z^3)^2 \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^3}{3}$$

Áp dụng kết quả trên ta được

$$\left[\frac{1}{(a+b)^3} + \frac{1}{(b+c)^3} + \frac{1}{(c+a)^3} \right]^2 \geq \frac{1}{3} \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right]^3$$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} &\geq \frac{1}{2(a^2 + b^2)} + \frac{1}{2(b^2 + c^2)} + \frac{1}{2(c^2 + a^2)} \\ &\geq \frac{9}{4(a^2 + b^2 + c^2)} \geq \frac{9}{4\sqrt{3(a^4 + b^4 + c^4)}} \geq \frac{9}{4\sqrt{9}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Do đó ta có
$$\left[\frac{1}{(a+b)^3} + \frac{1}{(b+c)^3} + \frac{1}{(c+a)^3} \right]^2 \geq \frac{1}{3} \left[\frac{3}{4} \right]^3 = \frac{9}{64}$$

Suy ra
$$\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)^3} + \frac{1}{(b+c)^3} + \frac{1}{(c+a)^3}} \geq \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$$

Từ các kết quả trên ta được

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2}}{\sqrt[3]{\frac{1}{(a+b)^3} + \frac{1}{(b+c)^3} + \frac{1}{(c+a)^3}}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}} = 2\sqrt{2}\sqrt[3]{9}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 75. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(a+c)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{1}{abc}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho giả thiết ta được

$$3 = ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \Rightarrow abc \leq 1$$

Khi đó ta có
$$\frac{1}{1+a^2(b+c)} \leq \frac{1}{abc+a^2(b+c)} = \frac{1}{a(ab+bc+ca)}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{1}{1+b^2(c+a)} \leq \frac{1}{b(ab+bc+ca)}; \quad \frac{1}{1+c^2(a+b)} \leq \frac{1}{c(ab+bc+ca)}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+a^2(b+c)} + \frac{1}{1+b^2(a+c)} + \frac{1}{1+c^2(a+b)} \\ & \leq \frac{1}{ab+bc+ca} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{ab+bc+ca} \cdot \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{abc} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 76. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{(a^2+1)^2+b^4+1} + \frac{2}{(b^2+1)^2+c^4+1} + \frac{2}{(c^2+1)^2+a^4+1} \leq 1$$

Phân tích: Để ý đến đánh giá $(a^2+1)^2+b^4+1 = a^4+b^4+2a^2+2 \geq 2a^2b^2+2a^2+2$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$(a^2+1)^2+b^4+1 = a^4+b^4+2a^2+2 \geq 2a^2b^2+2a^2+2$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(a^2+1)^2+b^4+1} + \frac{2}{(b^2+1)^2+c^4+1} + \frac{2}{(c^2+1)^2+a^4+1} \\ & \leq \frac{1}{a^2b^2+a^2+1} + \frac{1}{b^2c^2+b^2+1} + \frac{1}{c^2a^2+c^2+1} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{1}{a^2b^2+a^2+1} + \frac{1}{b^2c^2+b^2+1} + \frac{1}{c^2a^2+c^2+1} = 1$$

Cách 1: Do $abc = 1 \Rightarrow a^2b^2c^2 = 1$, nên ta đặt $a^2 = \frac{x}{y}$; $b^2 = \frac{y}{z}$; $c^2 = \frac{z}{x}$ ($x, y, z > 0$)

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2b^2+a^2+1} + \frac{1}{b^2c^2+b^2+1} + \frac{1}{c^2a^2+c^2+1} &= \frac{1}{\frac{x}{z} + \frac{x}{y} + 1} + \frac{1}{\frac{y}{x} + \frac{y}{z} + 1} + \frac{1}{\frac{z}{y} + \frac{z}{x} + 1} \\ &= \frac{yz}{xy + yz + zx} + \frac{xz}{xy + yz + zx} + \frac{xy}{xy + yz + zx} = 1\end{aligned}$$

Cách 2: Do $abc = 1 \Rightarrow a^2b^2c^2 = 1$, nên ta được

$$\begin{aligned}\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} &= \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+a^2+a^2b^2c^2} + \frac{1}{b^2c^2+b^2+1} + \frac{b}{c^2a^2b^2+b^2c^2+b^2} \quad \text{Bất đẳng} \\ &= \frac{1}{b^2c^2+b^2+1} + \frac{1}{b^2c^2+b^2+1} + \frac{b^2}{1+b^2c^2+b^2} = 1\end{aligned}$$

thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 77. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(2b+c)(2c+b)} + \frac{b^2}{(2c+a)(2a+c)} + \frac{c^2}{(2a+b)(2b+a)} \geq \frac{1}{3}$$

Phân tích và lời giải

Dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Để ý đến chiều của bất đẳng thức và các mẫu số ta liên tưởng đến bất đẳng thức Cauchy dạng $4xy \leq (x+y)^2$. Khi đó ta được

$$(2b+c)(2c+b) \leq \frac{(3b+3c)^2}{4} = \frac{9(b+c)^2}{4}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$(2c+a)(2a+c) \leq \frac{9(c+a)^2}{4}; \quad (2a+b)(2b+a) \leq \frac{9(a+b)^2}{4}$$

Khi đó ta được bất đẳng thức

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{(2b+c)(2c+b)} + \frac{b^2}{(2c+a)(2a+c)} + \frac{c^2}{(2a+b)(2b+a)} \\ \geq \frac{4}{9} \left[\left(\frac{a}{b+c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c+a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a+b} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\left(\frac{a}{b+c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c+a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a+b} \right)^2 \geq \frac{3}{4}$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\left(\frac{a}{b+c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c+a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a+b} \right)^2 \geq \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)^2$$

Mà ta dễ dàng chứng minh được $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

$$\text{Do đó} \quad \left(\frac{a}{b+c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c+a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a+b} \right)^2 \geq \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 78. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{\sqrt{3+c}} + \frac{bc}{\sqrt{3+a}} + \frac{ca}{\sqrt{3+b}} \leq \frac{3}{2}$$

Phân tích và lời giải

Dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Để ý ta không thể thay 3 bởi đại lượng $a^3 + b^3 + c^3$ vì đại lượng này có số mũ cao sẽ gây khó khăn cho các đánh giá tiếp theo. Do đó trước hết ta cần đơn giản hóa giả thiết. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$3(a+b+c) \leq (a^3+b^3+c^3)+6 \leq 9 \Rightarrow a+b+c \leq 3$$

Và
$$ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \leq 3$$

Để đơn giản hóa bất đẳng thức ta cần khử các căn bậc hai, chú ý đến chiều bất đẳng thức ta liên tưởng đến bất đẳng thức Bunhiacopxki

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab}{\sqrt{3+c}} + \frac{bc}{\sqrt{3+a}} + \frac{ca}{\sqrt{3+b}} \right)^2 &\leq (ab+bc+ca) \left(\frac{ab}{3+c} + \frac{bc}{3+a} + \frac{ca}{3+b} \right) \\ &\leq 3 \left[\frac{ab}{(a+c)+(b+c)} + \frac{bc}{(b+a)+(c+a)} + \frac{ca}{(b+c)+(b+a)} \right] \end{aligned}$$

Đến đây áp dụng một đánh giá quen thuộc ta được

$$\begin{aligned} \frac{ab}{(a+c)+(b+c)} + \frac{bc}{(b+a)+(c+a)} + \frac{ca}{(b+c)+(b+a)} \\ \leq \frac{1}{4} \left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{bc}{b+a} + \frac{bc}{c+a} + \frac{ca}{b+c} + \frac{ca}{b+a} \right) \\ = \frac{1}{4}(a+b+c) \leq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Do đó ta được $\left(\frac{ab}{\sqrt{3+c}} + \frac{bc}{\sqrt{3+a}} + \frac{ca}{\sqrt{3+b}} \right)^2 \leq \frac{9}{4}$ hay $\frac{ab}{\sqrt{3+c}} + \frac{bc}{\sqrt{3+a}} + \frac{ca}{\sqrt{3+b}} \leq \frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 79. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2(a^3+1)+b^3+c^3} + \frac{1}{2(b^3+1)+c^3+a^3} + \frac{1}{2(c^3+1)+a^3+b^3} \leq \frac{1}{2}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh thì suy nghĩ đầu tiên là đổi biến nhằm đơn giản hóa bất đẳng thức. Tuy nhiên ở đây ta không dựa vào giả thiết $abc = 1$ để đổi biến, mà ta chú ý đến các đại lượng $2(a^3+1)$; b^3+c^3 , có nghĩa là ta nghĩ đến đánh giá theo bất đẳng thức Cauchy cho hai số, nên để đánh giá không xuất hiện các căn bậc hai thì ta đổi biến theo cách đặt $a^3 = x^2$, $b^3 = y^2$, $c^3 = z^2$, từ giả thiết suy ra $xyz = 1$. Lúc này áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$y^2 + z^2 \geq 2yz; \quad x^3 + x \geq 2x^2; \quad x^2 + 1 \geq 2x$$

Do đó ta thu được

$$\frac{1}{2(a^3+1)+b^3+c^3} = \frac{1}{2(x^2+1)+y^2+z^2} \leq \frac{1}{2(x^2+1+yz)}$$

Để ý đến giả thiết $xyz = 1$, ta có

$$\frac{1}{2(x^2 + 1 + yz)} = \frac{x}{2(x^3 + x + 1)} \leq \frac{x}{2(2x^2 + 1)} \leq \frac{x}{2(x^2 + 2x)} = \frac{1}{2(x + 2)}$$

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức cần chứng minh $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2} \leq 1$

Do $xyz = 1$ nên ta đặt $x = \frac{m}{n}$; $y = \frac{n}{p}$; $z = \frac{p}{m}$

Khi đó bất đẳng thức trên trở thành $\frac{n}{m+2n} + \frac{p}{n+2p} + \frac{m}{p+2m} \leq 1$

Biến đổi tương đương ta được bất đẳng thức $\frac{m}{m+2n} + \frac{n}{n+2p} + \frac{p}{p+2m} \geq 1$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} \frac{m}{m+2n} + \frac{n}{n+2p} + \frac{p}{p+2m} &= \frac{m^2}{m^2+2nm} + \frac{n^2}{n^2+2pn} + \frac{p^2}{p^2+2mp} \\ &\geq \frac{(m+n+p)^2}{m^2+n^2+p^2+2nm+2pn+2mp} = 1 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 80. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b^2+7}{(a+b)^2} + \frac{b^2c^2+7}{(b+c)^2} + \frac{c^2a^2+7}{(c+a)^2} \geq 6$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta thấy có số 7, vậy thì số 7 này có ý nghĩa gì trong bài toán. Để ý đến giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ và các đại lượng bậc hai trong bất đẳng thức, ta có thể viết được $7 = 1 + 2(a^2 + b^2 + c^2)$. Khi đó ta có

$$\frac{a^2b^2+7}{(a+b)^2} = \frac{a^2b^2+1+2(a^2+b^2+c^2)}{(a+b)^2}$$

Chú ý là nếu trên tử có đại lượng $2ab$ thì ta có thể kết hợp với $a^2 + b^2$ để tạo ra $(a+b)^2$, để ý đến chiều bất đẳng thức thì theo bất đẳng thức Cauchy ta sẽ được

$$\frac{a^2b^2+1+2(a^2+b^2+c^2)}{(a+b)^2} \geq \frac{2ab+2(a^2+b^2+c^2)}{(a+b)^2} = 1 + \frac{a^2+b^2+2c^2}{(a+b)^2}$$

Lại để ý ta thấy $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ nên ta được

$$1 + \frac{a^2+b^2+2c^2}{(a+b)^2} \geq 1 + \frac{a^2+b^2+2c^2}{2(a^2+b^2)} = \frac{3}{2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}$$

Do đó ta có $\frac{a^2b^2+7}{(a+b)^2} \geq \frac{3}{2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}$

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức cần chứng minh

$$\frac{a^2b^2 + 7}{(a+b)^2} + \frac{b^2c^2 + 7}{(b+c)^2} + \frac{c^2a^2 + 7}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{a^2}{b^2 + c^2}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{c^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{a^2}{b^2 + c^2} \geq \frac{3}{2}$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{c^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{c^2 + a^2} + \frac{a^2}{b^2 + c^2} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} \geq \frac{3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} = \frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét: Ngoài ra ta có thể quy bài toán về chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^2 + b^2 + 2c^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2 + c^2 + 2a^2}{(b+c)^2} + \frac{c^2 + a^2 + 2b^2}{(c+a)^2} \geq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + 2c^2}{(a+b)^2} + \frac{b^2 + c^2 + 2a^2}{(b+c)^2} + \frac{c^2 + a^2 + 2b^2}{(c+a)^2} \\ \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{(2a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + 2b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + 2c^2)}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}} \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(2a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + 2b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + 2c^2)}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$ ta được

$$8(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geq (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$$

Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned} 4(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) &\leq (a^2 + 2b^2 + c^2)^2 \\ 4(a^2 + b^2)(a^2 + c^2) &\leq (2a^2 + b^2 + c^2)^2 \\ 4(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) &\leq (a^2 + b^2 + 2c^2)^2 \end{aligned}$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$64(a^2 + b^2)^2(b^2 + c^2)^2(c^2 + a^2)^2 \leq (2a^2 + b^2 + c^2)^2(a^2 + 2b^2 + c^2)^2(a^2 + b^2 + 2c^2)^2$$

$$\text{Hay } 8(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \leq (2a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + 2b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + 2c^2)$$

Từ đó dẫn đến

$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \leq (2a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + 2b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + 2c^2)$$

$$\text{Hay } \frac{(2a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + 2b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + 2c^2)}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} \geq 1$$

Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh.

Bài 81. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3+8}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^3+8}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^3+8}} \leq 1$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$, Khi đó để ý đến phép biến đổi $b^3 + 8 = (b+2)(b^2 - 2b + 4)$ và cả chiều của bất đẳng thức ta có đánh giá $b^2 - 2b + 4 = (b-1)^2 + 3 \geq 3$, do đó ta được $(b+2)(b^2 - 2b + 4) \geq 3(b+2)$.

Suy ra
$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3+8}} = \frac{a^2}{\sqrt{(b+2)(b^2-2b+4)}} \leq \frac{a^2}{\sqrt{3(b+2)}}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3+8}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^3+8}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^3+8}} \leq \frac{a^2}{\sqrt{3(b+2)}} + \frac{b^2}{\sqrt{3(c+2)}} + \frac{c^2}{\sqrt{3(a+2)}}$$

Bây giờ để tạo ra đại lượng $a^3 + b^3 + c^3$ và chú ý đến chiều bất đẳng thức ta áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki thì được

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^2}{\sqrt{b^3+8}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^3+8}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^3+8}} \right)^2 &= \left(\frac{a^2}{\sqrt{3(b+2)}} + \frac{b^2}{\sqrt{3(c+2)}} + \frac{c^2}{\sqrt{3(a+2)}} \right)^2 \\ &\leq (a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{a}{3(b+2)} + \frac{b}{3(c+2)} + \frac{c}{3(a+2)} \right) \\ &= \frac{a}{b+2} + \frac{b}{c+2} + \frac{c}{a+2} \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{a}{b+2} + \frac{b}{c+2} + \frac{c}{a+2} \leq 1$

Hay
$$a^2c + b^2a + c^2b + 2(a^2 + b^2 + c^2) \leq abc + 8$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a^3 + a^3 + 1 \geq 3a^2; b^3 + b^3 + 1 \geq 3b^2; c^3 + c^3 + 1 \geq 3c^2$$

Do đó ta được $2(a^3 + b^3 + c^3) + 3 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ hay $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $a^2c + b^2a + c^2b - 2 - abc \leq 0$

Không mất tính tổng quát ta giả sử b là số ở giữa hai số a và c , khi đó ta có

$$\begin{aligned} a^2c + b^2a + c^2b - 2 - abc &\leq 0 \Leftrightarrow a^2c + b^2a + b(3 - a^2 - b^2) - 2 - abc \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -(b-1)^2(b+2) - a(b-c)(a-b) \leq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng, do đó bài toán được chứng minh.

Bài 82. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b+c)^3}{3abc} + \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{a^3 + b^3 + c^3} \geq 10$$

Phân tích và lời giải

Để dàng dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy có đại lượng $(a + b + c)^3$; $a^3 + b^3 + c^3$ và đại lượng $ab^2 + bc^2 + ca^2$ ta cần tìm đánh giá liên hệ giữa các đại lượng đó. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$$

$$\text{Và } a^3 + b^3 + b^3 \geq 3ab^2; b^3 + c^3 + c^3 \geq 3bc^2; c^3 + a^3 + a^3 \geq 3ca^2$$

Nên ta được $a^3 + b^3 + c^3 \geq ab^2 + bc^2 + ca^2$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} \frac{(a + b + c)^3}{3abc} + \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{a^3 + b^3 + c^3} &\geq \frac{a^3 + b^3 + c^3 + 24abc}{3abc} + \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{a^3 + b^3 + c^3} \\ &= \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3abc} + \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{a^3 + b^3 + c^3} + 8 \end{aligned}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3abc} + \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{a^3 + b^3 + c^3} \geq 2\sqrt{\frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{3abc}} \geq 2\sqrt{\frac{3abc}{3abc}} = 2$$

$$\text{Do vậy } \frac{(a + b + c)^3}{3abc} + \frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{a^3 + b^3 + c^3} \geq 10$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 83. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3 + 1}{\sqrt{a^4 + b + c}} + \frac{b^3 + 1}{\sqrt{b^4 + c + a}} + \frac{c^3 + 1}{\sqrt{c^4 + a + b}} \geq 2\sqrt{ab + bc + ca}$$

Phân tích và lời giải

Nhận thấy biểu thức dưới các dấu căn không đồng bậc nên chú ý đến giả thiết $abc = 1$ ta có thể viết được $\sqrt{a^4 + b + c} = \sqrt{a^4 + abc(b + c)}$. Để ý đến chiều của bất đẳng thức ta nghĩ đến một tích dưới

mẫu để có thể áp dụng được bất đẳng thức Cauchy $2\sqrt{xy} \leq x + y$ khi đó ta được

$$\begin{aligned} 2\sqrt{(a^4 + b + c)(ab + bc + ca)} &= 2\sqrt{[a^4 + abc(b + c)](ab + bc + ca)} \\ &= 2\sqrt{(a^3 + b^2c + bc^2)(a^2b + a^2c + abc)} \leq a^3 + b^2c + bc^2 + a^2b + a^2c + abc \\ &= (a + b + c)(a^2 + bc) = \frac{(a + b + c)(a^3 + 1)}{a} \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{a^3 + 1}{\sqrt{a^4 + b + c}} \geq \frac{2a\sqrt{ab + bc + ca}}{a + b + c}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{b^3 + 1}{\sqrt{b^4 + c + a}} \geq \frac{2b\sqrt{ab + bc + ca}}{a + b + c}; \quad \frac{c^3 + 1}{\sqrt{c^4 + a + b}} \geq \frac{2c\sqrt{ab + bc + ca}}{a + b + c}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3 + 1}{\sqrt{a^4 + b + c}} + \frac{b^3 + 1}{\sqrt{b^4 + c + a}} + \frac{c^3 + 1}{\sqrt{c^4 + a + b}} \geq 2\sqrt{ab + bc + ca}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 84. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b+c)^2}{abc} + \frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{81}{a+b+c}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta thấy có các đại lượng $(a+b+c)^2$; $a^2+b^2+c^2$, ta cần đánh giá đại lượng abc về $ab+bc+ca$ để tìm xem có mối liên hệ nào với các đại lượng trên hay không. Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc sau

$$3abc(a+b+c) \leq (ab+bc+ca)^2$$

Suy ra
$$\frac{(a+b+c)^2}{abc} = \frac{3(a+b+c)^3}{3abc(a+b+c)} \geq \frac{3(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^2}$$

Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{3(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^2} + \frac{18\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{81}{a+b+c}$$

Đề ý là khi $a=b=c$ thì
$$\frac{3(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^2} = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{3(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^2} + \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + \frac{9\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{27(a+b+c)}{\sqrt[3]{(ab+bc+ca)^2(a^2+b^2+c^2)}}$$

Mà cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt[3]{(ab+bc+ca)^2(a^2+b^2+c^2)} \leq \frac{(ab+bc+ca) + (ab+bc+ca) + (a^2+b^2+c^2)}{3}$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} \frac{27(a+b+c)}{\sqrt[3]{(ab+bc+ca)^2(a^2+b^2+c^2)}} &\geq \frac{3 \cdot 27(a+b+c)}{(ab+bc+ca) + (ab+bc+ca) + (a^2+b^2+c^2)} \\ &= \frac{81}{a+b+c} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 85. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+\sqrt{ab})^2} + \frac{1}{(1+\sqrt{bc})^2} + \frac{1}{(1+\sqrt{ca})^2} \geq \frac{3}{4}$$

Phân tích và lời giải

Để dễ tìm ra các đánh giá hợp lý ta tìm cách đưa các đại lượng về trái vào trong cùng một bình phương. Chú ý đến chiều bất đẳng thức ta có

$$3 \left[\frac{1}{(1+\sqrt{ab})^2} + \frac{1}{(1+\sqrt{bc})^2} + \frac{1}{(1+\sqrt{ca})^2} \right] \geq \left(\frac{1}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+\sqrt{bc}} + \frac{1}{1+\sqrt{ca}} \right)^2$$

Ta cần chứng minh $\left(\frac{1}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+\sqrt{bc}} + \frac{1}{1+\sqrt{ca}} \right)^2 \geq \frac{9}{4}$

Hay $\frac{1}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+\sqrt{bc}} + \frac{1}{1+\sqrt{ca}} \geq \frac{3}{2}$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức và một đánh giá quen thuộc, ta được

$$\frac{1}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+\sqrt{bc}} + \frac{1}{1+\sqrt{ca}} \geq \frac{9}{3+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}} \geq \frac{9}{3+a+b+c} \geq \frac{3}{2}$$

Do đó ta được $\frac{1}{(1+\sqrt{ab})^2} + \frac{1}{(1+\sqrt{bc})^2} + \frac{1}{(1+\sqrt{ca})^2} \geq \frac{3}{4}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 86. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(b+c)^4} + \frac{b}{(c+a)^4} + \frac{c}{(a+b)^4} \geq \frac{3}{16}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy không thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức được vì khi đó các mẫu số sẽ có số mũ lớn, cũng không thể đánh giá mẫu theo chiều trội hơn vì lúc này mẫu cũng sẽ có số mũ lớn. Do đó ta hướng đến các đánh giá làm giảm bậc của các mẫu số hoặc là biến đổi lại giả thiết theo chiều số mũ nhỏ hơn

Cách 1: Trước hết ta tiếp cận bất đẳng thức theo hướng làm giảm số mũ ở các mẫu số, điều này làm ta liên tưởng đến kỹ thuật thêm bớt trong bất đẳng thức Cauchy, Chú ý để dấu đẳng thức xảy ra và giả thiết $a^3 + b^3 + c^3 = 3$ ta được

$$\begin{aligned} \frac{a}{(b+c)^4} + \frac{a^3}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} &\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b+c} \\ \frac{b}{(c+a)^4} + \frac{b^3}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} &\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{c+a} \\ \frac{c}{(a+b)^4} + \frac{c^3}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} &\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{a+b} \end{aligned}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \frac{a}{(b+c)^4} + \frac{b}{(c+a)^4} + \frac{c}{(a+b)^4} &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) - \frac{a^3 + b^3 + c^3}{16} - \frac{3}{8} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) - \frac{9}{16} \end{aligned}$$

Dễ dàng chứng minh được $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Suy ra $\frac{a}{(b+c)^4} + \frac{b}{(c+a)^4} + \frac{c}{(a+b)^4} \geq \frac{3}{16}$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Cách 2: Chú ý đến giả thiết $a^3 + b^3 + c^3 = 3$, ta sẽ đánh giá làm giảm bậc của các hạng tử trong giả thiết, chú ý đến lũy thừa bậc 4 của các mẫu, ta chọn các đánh giá theo bất đẳng thức Cauchy là

$$a^3 + a^3 + 1 \geq 3a^2; \quad b^3 + b^3 + 1 \geq 3b^2; \quad c^3 + c^3 + 1 \geq 3c^2$$

Do đó ta được $2(a^3 + b^3 + c^3) + 3 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ hay $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$

Bây giờ ta cần làm trội các mẫu số làm sao cho xuất hiện $a^2; b^2; c^2$. Khi đó ta chú ý đến đánh giá

$$(a+b)^4 \leq 4(a^2 + b^2)^2 \text{ thì được}$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{(b+c)^4} &\geq \frac{a}{4(b^2 + c^2)^2} = \frac{a}{4(3-a^2)^2} = \frac{a^3}{2 \cdot 2a^2 \cdot (3-a^2) \cdot (3-a^2)} \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{27a^3}{[2a^2 + (3-a^2) + (3-a^2)]^3} = \frac{a^3}{16} \end{aligned}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a}{(b+c)^4} + \frac{b}{(c+a)^4} + \frac{c}{(a+b)^4} \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{16} = \frac{3}{16}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 87. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[4]{\left(1 + \frac{1}{a}\right)^4 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^4 + \left(1 + \frac{1}{c}\right)^4} - \sqrt[4]{3} \geq \frac{\sqrt[4]{243}}{2 + abc}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng ta nhận thấy bất đẳng thức có các căn bậc cao và các đại lượng lại có lũy thừa bậc cao. Do đó ta cần đánh giá để đưa tổng các lũy thừa về cùng một lũy thừa để có thể khử căn. Trước hết ta biến đổi bất đẳng thức thành

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)^4 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^4 + \left(1 + \frac{1}{c}\right)^4 \geq 3 \left(1 + \frac{3}{2 + abc}\right)^4$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)^4 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^4 + \left(1 + \frac{1}{c}\right)^4 \geq 3 \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{a}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{b}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{c}\right)^4}$$

Ta quy bài toán về chứng minh $\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{a}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{b}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{c}\right)^4} \geq \left(1 + \frac{3}{2 + abc}\right)^4$

Hay
$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq \left(1 + \frac{3}{2 + abc}\right)^3$$

Đề ý là $1 + 1 + abc \geq 3\sqrt[3]{abc}$ nên $\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3 = \left(1 + \frac{3}{3\sqrt[3]{abc}}\right)^3 \geq \left(1 + \frac{3}{2 + abc}\right)^3$

Do đó phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3$$

Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$ thì bất đẳng thức trên trở thành

$$(1+x)(1+y)(1+z) \geq (1+\sqrt[3]{xyz})^3$$

Đây là một đánh giá đúng đã được chứng minh.

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 88. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{4}} + \sqrt{b + \frac{(a-c)^2}{4}} + \sqrt{c + \frac{(a-b)^2}{4}} \leq 2$$

Phân tích và lời giải

Bất đẳng thức này không xảy ra dấu bằng tại $a = b = c$, cũng không xảy ra tại $a = b; c = 0$ mà đẳng thức xảy ra tại $a = 1; b = c = 0$ và các hoán vị của nó. Do đó ta nghĩ đến việc sắp thứ tự biến. Tuy nhiên ta cần tiết tiêu được các dấu căn bậc hai bên vế trái. Ngoài ra để ý là với dấu đẳng thức xảy ra như

trên thì ta dự đoán $b - c \leq b + c$. Do đó ta dự đoán là $a + \frac{(b-c)^2}{4} \leq \left(a + \frac{b+c}{2}\right)^2$. Nếu chứng minh

được đánh giá đó thì xem như bài toán được giải quyết xong.

Ta xét

$$\begin{aligned} a + \frac{(b-c)^2}{4} - \left(a + \frac{b+c}{2}\right)^2 &= a(a+b+c) + \frac{(b-c)^2}{4} - \left(a + \frac{b+c}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(b-c)^2}{4} - \frac{(b+c)^2}{4} = -bc \leq 0 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra
$$a + \frac{(b-c)^2}{4} \leq \left(a + \frac{b+c}{2}\right)^2$$

Hay
$$\sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{4}} \leq a + \frac{b+c}{2}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\sqrt{b + \frac{(a-c)^2}{4}} \leq b + \frac{a+c}{2}; \quad \sqrt{c + \frac{(a-b)^2}{4}} \leq c + \frac{a+b}{2}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{4}} + \sqrt{b + \frac{(a-c)^2}{4}} + \sqrt{c + \frac{(a-b)^2}{4}} \leq 2(a+b+c) = 2$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 89. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{a+b+c} \geq 4 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

Phân tích và lời giải

Bất đẳng thức trên là bất đẳng thức có các đại lượng đồng bậc nên ta nghĩ đến phép đổi biến

$x = \frac{a}{a+b+c}; y = \frac{b}{a+b+c}; z = \frac{c}{a+b+c}$. Từ đó suy ra $x + y + z = 1$. Khi đó nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $a+b+c$, khi đó bất đẳng trở thành

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+9 \geq 4(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\frac{a}{a+b+c}}+\frac{1}{\frac{b}{a+b+c}}+\frac{1}{\frac{c}{a+b+c}}\right)+9 \geq 4\left(\frac{1}{\frac{a+b}{a+b+c}}+\frac{1}{\frac{b+c}{a+b+c}}+\frac{1}{\frac{c+a}{a+b+c}}\right)$$

Hay
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+9 \geq 4\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)$$

Hay
$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+9 \geq 4(x+y+z)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)$$

Hay
$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y} \geq 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{z} \geq \frac{4x}{y+z}; \quad \frac{y}{z}+\frac{y}{x} \geq \frac{4y}{x+z}; \quad \frac{z}{x}+\frac{z}{y} \geq \frac{4z}{x+y}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được

$$\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y} \geq \frac{4x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{4z}{x+y}$$

Hay
$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y} \geq 4\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 90. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{b+c}}{a}+\frac{\sqrt{c+a}}{b}+\frac{\sqrt{a+b}}{c} \geq \frac{4(a+b+c)}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy cần phải khử các căn bậc hai, do đó ta nghĩ đến bất đẳng thức Cauchy hoặc bất đẳng thức Bunhiacopxki. Tuy nhiên để áp dụng các bất đẳng thức này ta cần tạo ra tích các đại lượng. Do đó ta biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$\frac{(b+c)\sqrt{(a+b)(c+a)}}{a}+\frac{(c+a)\sqrt{(a+b)(b+c)}}{b}+\frac{(a+b)\sqrt{(b+c)(c+a)}}{c} \geq 4(a+b+c)$$

Chú ý đến chiều của bất đẳng thức cần chứng minh thì áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có $\sqrt{(a+b)(a+c)} \geq a+\sqrt{bc}$ hoặc $\sqrt{(a+b)(a+c)} \geq \sqrt{ac}+\sqrt{ab}$, tuy nhiên để ý đến mẫu số ta chọn đánh giá thứ nhất. Khi đó ta được

$$\frac{(b+c)\sqrt{(a+b)(a+c)}}{a} \geq \frac{(b+c)(a+\sqrt{bc})}{a} = b+c+\frac{(b+c)\sqrt{bc}}{a}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có
$$\frac{(b+c)\sqrt{bc}}{2} \geq \frac{2bc}{a}$$

Do đó ta được
$$\frac{(b+c)\sqrt{(a+b)(a+c)}}{a} \geq b+c+\frac{bc}{2}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{(b+c)\sqrt{(a+b)(c+a)}}{a} + \frac{(c+a)\sqrt{(a+b)(b+c)}}{b} + \frac{(a+b)\sqrt{(b+c)(c+a)}}{c} \geq 2(a+b+c) + 2\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right)$$

Ta cần chứng minh $2(a+b+c) + 2\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) \geq 4(a+b+c)$

Hay
$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a+b+c$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\left(\frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} + \frac{ca}{b}\right)^2 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2 \Rightarrow \frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} + \frac{ca}{b} \geq a+b+c$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 91. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=1$. Quan sát bất đẳng thức ta liên tưởng đến một đánh giá quen thuộc

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{a+b+c}{abc}$$

Và lại có $3abc(a+b+c) \leq (ab+bc+ca)^2$

Do đó ta có
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{a+b+c}{abc} = \frac{(a+b+c)^2}{abc(a+b+c)} \geq \frac{3(a+b+c)^2}{(ab+bc+ca)^2}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{3(a+b+c)^2}{(ab+bc+ca)^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Hay
$$3(a+b+c)^2 \geq (a^2 + b^2 + c^2)(ab+bc+ca)^2$$

Dễ thấy theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$(a+b+c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + (ab+bc+ca) + (ab+bc+ca) \geq 3\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(ab+bc+ca)^2}$$

Hay
$$(a+b+c)^6 \geq 27(a^2 + b^2 + c^2)(ab+bc+ca)^2$$

Mà $a+b+c=3$ nên ta có $(a+b+c)^6 = 81(a+b+c)^2$

Suy ra $3(a+b+c)^2 \geq (a^2 + b^2 + c^2)(ab+bc+ca)^2$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Nhận xét: Ngoài cách chứng minh trên ta có thể tham khảo thêm các cách chứng minh sau đây

Cách 1: Do $a, b, c > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < (a + b + c)^2 = 9$

+ Trường hợp 1: Giả sử 1 trong 3 số a, b, c nhỏ hơn $\frac{1}{3}$

Khi đó tổng $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} > 9$, bất đẳng thức luôn đúng trong trường hợp này.

+ Trường hợp 2: Giả sử cả 3 số a, b, c đều lớn hơn $\frac{1}{3}$.

Do $a + b + c = 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < a, b, c \leq \frac{7}{3}$

Từ đó ta có $\frac{1}{a^2} - a^2 - (-4a + 4) = \frac{-(a-1)^2(a^2 - 2a - 1)}{a^2}$

Suy ra $\frac{1}{a^2} - a^2 \geq -4a + 4$

Tương tự ta có $\frac{1}{b^2} - b^2 \geq -4b + 4; \frac{1}{c^2} - c^2 \geq -4c + 4$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - a^2 - b^2 - c^2 \geq 4(3 - a - b - c) = 0$$

Hay $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2:

+ Trường hợp 1: Với $a, b, c \in (0; 1 + \sqrt{2})$. Khi đó ta có

$$(a-1)^2 \left[2 - (a-1)^2 \right] \geq 0 \Leftrightarrow -a^4 + 4a^3 - 4a^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} - a^2 \geq -4a + 4$$

Áp dụng tương tự ta được $\frac{1}{b^2} - b^2 \geq -4b + 4; \frac{1}{c^2} - c^2 \geq -4c + 4$

Cộng theo vế của 3 bất đẳng thức ta được

$$\frac{1}{a^2} - a^2 + \frac{1}{b^2} - b^2 + \frac{1}{c^2} - c^2 \geq 12 - 4(a + b + c) = 0$$

Hay $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$

+ Trường hợp 2: Nếu có một trong 3 số a, b, c lớn hơn hoặc bằng $1 + \sqrt{2}$.

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó suy ra:

$$a \geq 1 + \sqrt{2} \Rightarrow b + c \leq 2 - \sqrt{2} \Rightarrow c \leq \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{c^2} \geq 6 + 4\sqrt{2}$$

Khi đó ta được $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 6 + 4\sqrt{2}$. Trong khi đó $a^2 + b^2 + c^2 < (a + b + c)^2 = 9$

Từ đó suy ra $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 92. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}} \geq a + b + c$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta thấy có dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, do đó áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}} = \frac{a^2}{a\sqrt{b}} + \frac{b^2}{b\sqrt{c}} + \frac{c^2}{c\sqrt{a}} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a}}$$

Ta quy bài toán về chứng minh $\frac{(a + b + c)^2}{a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a}} \geq a + b + c$

Hay $a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq a + b + c$

Để ý đến dấu đẳng thức xảy ra và chiều của bất đẳng thức ta có đánh giá theo bất đẳng thức Cauchy là

$$a\sqrt{b} \leq \frac{a(b+1)}{2}; b\sqrt{c} \leq \frac{b(c+1)}{2}; c\sqrt{a} \leq \frac{c(b+1)}{2}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(a + b + c + ab + bc + ca)$$

Mà lại có $a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow a + b + c \leq 3$

Mặt khác $(a + b + c)(a + b + c) \geq 3(ab + bc + ca) \geq (a + b + c)(ab + bc + ca)$

Hay $a + b + c \geq ab + bc + ca$

Do đó ta có $a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(a + b + c + a + b + c) \Leftrightarrow a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} \leq a + b + c$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 93. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{b(a+c)}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{c(a+b)}{(a+b)^2 + c^2} \leq \frac{6}{5}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Quan sát biểu thức thứ nhất bên vế trái ta thấy cả tử và mẫu cùng chứa đại các đại lượng $a; b + c$, tuy nhiên dưới mẫu lại là tổng nên nếu đánh giá mẫu được về tích thì có cơ hội rút gọn được. Chú ý đến chiều bất đẳng thức và dấu đẳng thức xảy ra ta có đánh giá theo bất đẳng thức Cauchy là

$$\begin{aligned} a^2 + (b+c)^2 &= \left[a^2 + \frac{(b+c)^2}{4} \right] + \frac{3}{4}(b+c)^2 \geq a(b+c) + \frac{3}{4}(b+c)^2 \\ &= \frac{(b+c)(4a + 3b + 3c)}{4} \end{aligned}$$

Suy ra ta được $\frac{a(b+c)}{a^2 + (b+c)^2} \leq \frac{4a(b+c)}{(4a + 3b + 3c)(b+c)} = \frac{4a}{4a + 3b + 3c}$

Đại lượng thu được trong đánh giá trên làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, Chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta có

$$\frac{4a}{4a + 3b + 3c} = \frac{a}{25} \frac{(9+1)^2}{4a + 3b + 3c} \leq \frac{a}{25} \left(\frac{9^2}{3(a+b+c)} + \frac{1}{a} \right).$$

Suy ra ta được

$$\frac{a(b+c)}{a^2 + (b+c)} \leq \frac{27a}{25(a+b+c)} + \frac{1}{25}$$

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{b(c+a)}{b^2 + (c+a)^2} \leq \frac{27b}{25(a+b+c)} + \frac{1}{25}; \quad \frac{c(c+a)}{c^2 + (c+a)^2} \leq \frac{27c}{25(a+b+c)} + \frac{1}{25}$$

Cộng về theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{b(a+c)}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{c(a+b)}{(a+b)^2 + c^2} \leq \frac{27(a+b+c)}{25(a+b+c)} + \frac{3}{25} = \frac{6}{5}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Nhận xét: Cũng nhận định như trên, nhưng ta chú ý đến các phép biến đổi sau

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2 + a^2} = \frac{\frac{b+c}{a}}{1 + \left(\frac{b+c}{a}\right)^2} \quad \text{hoặc} \quad \frac{a(b+c)}{(b+c)^2 + a^2} = \frac{\frac{a}{b+c}}{1 + \left(\frac{a}{b+c}\right)^2}$$

+ Nếu ta đặt $x = \frac{b+c}{a}$; $y = \frac{c+a}{b}$; $z = \frac{a+b}{c}$, khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{6}{5}$$

Để ý đến dấu đẳng thức xảy ra tại $x = y = z = 2$, do đó ta có đánh giá

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{4x}{4+x^2+3x^2} \leq \frac{4x}{4x+3x^2} = \frac{4}{3x+4}$$

Hoàn toàn tương tự ta thu được $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{4}{3x+4} + \frac{4}{3y+4} + \frac{4}{3z+4}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{4}{3x+4} + \frac{4}{3y+4} + \frac{4}{3z+4} \leq \frac{6}{5}$

Đến đây ta thay lại $x = \frac{b+c}{a}$; $y = \frac{c+a}{b}$; $z = \frac{a+b}{c}$ vào bất đẳng thức thì được

$$\frac{4a}{3b+3c+4a} + \frac{4b}{3c+3a+4b} + \frac{4c}{3a+3b+4c} \leq \frac{6}{5}$$

Và ta chứng minh hoàn toàn như trên.

+ Nếu ta đặt $x = \frac{a}{b+c}$; $y = \frac{b}{c+a}$; $z = \frac{c}{a+b}$, khi đó bất đẳng thức trên được viết lại là

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{6}{5}$$

Và ta chứng minh hoàn toàn tương tự.

Bài 94. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 2$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b+c} + b\sqrt{a+c} + c\sqrt{a+b}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \sqrt[3]{2}$. Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh ta có một số nhận xét như sau: Vế trái chứa các lũy thừa bậc ba nhưng vế phải lại chứa căn bậc hai, ngoài ra với dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \sqrt[3]{2}$ thì $c^3 = \frac{a+b}{c}$. Do đó ta nghĩ đến bất đẳng thức Cauchy cho hai số, tuy nhiên để có được đánh giá $c^3 + \frac{a+b}{c} \geq 2c\sqrt{a+b}$ ta cần tạo ra được đại lượng $\frac{a+b}{c}$. Chú ý đến giả thiết và một đánh giá quen thuộc ta có

$$\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \frac{ab(a+b)}{2} = \frac{ab(a+b)}{abc} = \frac{a+b}{c}$$

Từ đó ta có
$$c^3 + \frac{a^3 + b^3}{2} \geq c^3 + \frac{a+b}{c} \geq 2c\sqrt{a+b}$$

Tương tự ta có

$$b^3 + \frac{a^3 + c^3}{2} \geq b^3 + \frac{a+c}{b} \geq 2b\sqrt{a+c}; \quad a^3 + \frac{b^3 + c^3}{2} \geq a^3 + \frac{b+c}{a} \geq 2a\sqrt{b+c}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b+c} + b\sqrt{a+c} + c\sqrt{a+b}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Ngoài cách chứng minh như trên ta có thể chứng minh bài toán bằng cách áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki như sau:

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} \left(a\sqrt{b+c} + b\sqrt{a+c} + c\sqrt{a+b}\right)^2 &\leq 2(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= abc(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

Theo một bất đẳng thức quen thuộc ta có
$$abc(a+b+c) \leq \frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2$$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned} abc(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) &\leq (a^2 + b^2 + c^2)(ab+bc+ca)^2 \\ &\leq \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + ab+bc+ca + ab+bc+ca)^3}{3^4} \\ &= \frac{(a+b+c)^6}{3^4} \end{aligned}$$

Do đó ta có
$$\left(a\sqrt{b+c} + b\sqrt{a+c} + c\sqrt{a+b}\right)^2 \leq \frac{(a+b+c)^6}{3^4}$$

Hay
$$a\sqrt{b+c} + b\sqrt{a+c} + c\sqrt{a+b} \leq \frac{(a+b+c)^3}{3^2}$$

Để dàng chứng minh được
$$(a^3 + b^3 + c^3) \geq \frac{(a+b+c)^3}{9}$$

Từ đó ta được bất đẳng thức sau

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b+c} + b\sqrt{a+c} + c\sqrt{a+b}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 95. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (a+c)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (b+a)^3}} \geq 1$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Quan sát bất đẳng thức ta chú ý đến phép biến đổi $\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{(b+c)^3}{a^3}}}$. Khi đó ta nghĩ đến phép đổi biến $x = \frac{b+c}{a}$ và

biểu thức trên được viết lại thành $\sqrt{\frac{1}{1+x^3}}$. Chú ý là khi $a = b = c$ thì $x = 2$, ta có đánh giá

$$\sqrt{\frac{1}{1+x^3}} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}} \geq \frac{2}{x+1+x^2-x+1} = \frac{2}{x^2+2}$$

Khi này thay lại $x = \frac{b+c}{a}$ vào bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} \geq \frac{2}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + 2} = \frac{2a^2}{2a^2 + (b+c)^2}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta được $(b+c)^2 \leq 2(b^2 + c^2)$, khi đó ta suy ra được

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} \geq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Hoàn toàn tương tự ta có $\sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (a+c)^3}} \geq \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$; $\sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (b+a)^3}} \geq \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (a+c)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (b+a)^3}} \geq 1$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Nhận xét: Ngoài cách làm như trên ta có thể chứng minh bài toán như sau: Thực hiện biến đổi như trên và chứng minh

$$\sqrt{1 + \left(\frac{b+c}{a}\right)^3} \leq 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\left(\frac{b+c}{a}\right)^3 \leq \left(\frac{b+c}{a}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{b+c}{a}\right)^4 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 \left[\left(\frac{b+c}{a}\right) - 2\right]^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng, do vậy bất đẳng thức trên được chứng minh.

Áp dụng tương tự ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{c+a}{b}\right)^2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{c}\right)^2} \geq 1$$

Thật vậy, áp dụng đánh giá quen thuộc $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ ta có

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + (b+c)^2} \geq \frac{2a^2}{2a^2 + 2(b^2+c^2)} = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Hoàn toàn tương tự ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh

Bài 96. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3 \left[1 + \sqrt[3]{\frac{(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)^2}} \right]$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$. Để có những đánh giá hợp lý ta viết bất đẳng thức cần chứng minh lại thành

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)^2}}$$

Quan sát bất đẳng thức trên ta viết được vế trái thành

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = \frac{a^2c + b^2a + c^2a}{abc} + \frac{b^2c + c^2a + a^2b}{abc}$$

Quan sát vế phải ta nhận thấy cần đánh giá đại lượng $a^2c + b^2a + c^2a$ về đại lượng $a + b + c$ để có thể thu gọn được hai vế, chú ý đến chiều bất đẳng thức ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy thì được

$$a^2c + a^2c + b^2a \geq 3\sqrt[3]{a^5b^2c^2} = 3a\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

$$a^2c + c^2b + c^2b \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^5} = 3c\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

$$b^2a + b^2a + bc^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^5c^2} = 3a\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được

$$a^2c + b^2a + c^2b \geq (a+b+c)\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Do đó ta có
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{(a+b+c)\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{abc} = \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$$

Hoàn toàn tương tự ta có
$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$$

Suy ra
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)^2}}$$

Hay
$$\frac{8(a+b+c)^3}{abc} \geq \frac{81(a+b+c)(a+b)(b+c)(c+a)}{(ab+bc+ca)^2}$$

Khai triển và thu gọn ta được

$$8(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2 \geq 81(ac+bc)(ca+ab)(ab+bc)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$81(ab+bc)(bc+ca)(ca+ab) \leq 81 \cdot \frac{8(ab+bc+ca)^3}{27} = 24(ab+bc+ca)^3$$

Mặt khác ta lại có $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$. Do đó ta được

$$24(ab+bc+ca)^3 = 8(ab+bc+ca)^2 \cdot 3(ab+bc+ca) \leq 8(ab+bc+ca)^2(a+b+c)^2$$

Hay
$$81abc(a+b)(b+c)(c+a) \leq 8(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 97. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2+ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2+ab}{a\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{2}$$

Phân tích và lời giải

Để có các đánh giá hợp lý ta viết lại vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{a^2}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2}{a\sqrt{a+b}} + \frac{bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{ab}{a\sqrt{a+b}}$$

Để ý ta thấy các nhóm trên có dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki nên ta tách ra và áp dụng thì được

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2}{a\sqrt{a+b}} &\geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a}\sqrt{ab+ac} + \sqrt{b}\sqrt{bc+ab} + \sqrt{c}\sqrt{ca+bc}} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{2(a+b+c)(ab+bc+ca)}} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{2(a+b+c)(ab+bc+ca)}} \end{aligned}$$

Mà theo một đánh giá quen thuộc thì $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$ nên ta được

$$\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{2(a+b+c)(ab+bc+ca)}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)\sqrt{\frac{2}{3}(a+b+c)}} = \sqrt{\frac{3(a+b+c)}{2}}$$

Do đó ta được
$$\frac{a^2}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2}{a\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{\frac{3(a+b+c)}{2}}$$

Cũng như trên ta áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki thì được

$$\begin{aligned} \frac{bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{ab}{a\sqrt{a+b}} &= \frac{(bc)^2}{abc\sqrt{b+c}} + \frac{(ca)^2}{abc\sqrt{c+a}} + \frac{(ab)^2}{abc\sqrt{a+b}} \\ &\geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{abc(\sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} + \sqrt{a+b})} \geq \frac{3abc(a+b+c)}{abc\sqrt{6(a+b+c)}} = \sqrt{\frac{3(a+b+c)}{2}} \end{aligned}$$

Do đó ta được
$$\frac{a^2 + bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2 + ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2 + ab}{a\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{6(a+b+c)}$$

Lại có $a+b+c \geq \frac{1}{3}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = \frac{1}{3}$ nên $\sqrt{6(a+b+c)} \geq \sqrt{2}$

Hay
$$\frac{a^2 + bc}{a\sqrt{b+c}} + \frac{b^2 + ca}{b\sqrt{c+a}} + \frac{c^2 + ab}{a\sqrt{a+b}} \geq \sqrt{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{9}$

Bài 98. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{\sqrt{(1-c)^3(1+c)}} + \frac{bc}{\sqrt{(1-a)^3(1+a)}} + \frac{ca}{\sqrt{(1-b)^3(1+b)}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh thì suy nghĩ đầu tiên là cố gắng đơn giản hóa các đại lượng dưới dấu căn rồi tiến tới loại bỏ căn bậc hai. Trước hết ta biến đổi đơn giản hóa các biểu thức trong căn. Chú ý đến giả thiết $a + b + c = 1$ ta viết được

$$\begin{aligned} \frac{ab}{\sqrt{(1-c)^3(1+c)}} &= \frac{ab}{(a+b)\sqrt{1-c^2}} = \frac{ab}{(a+b)\sqrt{(a+b+c)^2 - c^2}} \\ &= \frac{ab}{(a+b)\sqrt{(a+b+c)^2 - c^2}} = \frac{ab}{(a+b)\sqrt{a^2 + b^2 + 2(ab+bc+ca)}} \end{aligned}$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a^2 + b^2 + 2(ab+bc+ca) \geq (ab+bc) + 2(ab+ca) \text{ và } a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

Do đó theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$\frac{ab}{(a+b)\sqrt{a^2 + b^2 + 2(ab+bc+ca)}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{ab}{2(ab+bc) + 2(ab+ca)}}$$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\sqrt{\frac{ab}{2(ab+bc) + 2(ab+ca)}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{ab}{ab+bc} + \frac{ab}{ab+ca}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c}}$$

Từ đó ta được
$$\frac{ab}{\sqrt{(1-c)^3(1+c)}} \leq \frac{1}{4\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c}}$$

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$\begin{aligned} &\frac{ab}{\sqrt{(1-c)^3(1+c)}} + \frac{bc}{\sqrt{(1-a)^3(1+a)}} + \frac{ca}{\sqrt{(1-b)^3(1+b)}} \\ &\leq \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{c+b} + \frac{a}{a+b}} \right) \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{c+b} + \frac{a}{a+b}} \right) \leq \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

Hay

$$\sqrt{\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{c+b} + \frac{a}{a+b}} \leq 3$$

Đến đây ta chú ý đến bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{c+b} + \frac{a}{a+b}} \\ & \leq \sqrt{3 \left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b} + \frac{a}{a+b} \right)} = \sqrt{3 \cdot 3} = 3 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 99. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab(a+b)} + \frac{1}{cb(c+b)} + \frac{1}{ac(a+c)} \geq \frac{87}{2}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy vế trái có ba phân thức phía sau đồng bậc nên ta đánh giá ba phân thức đó trước. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{1}{ab(a+b)} + \frac{1}{cb(c+b)} + \frac{1}{ac(a+c)} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2(a+b)(c+b)(a+c)}}$$

Trong biểu thức dưới dấu căn ta chú ý đến đại lượng $(a+b)(b+c)(c+a)$ có thể đánh giá về $a+b+c$. Như vậy theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$(a+b)(b+c)(c+a) \leq \frac{8(a+b+c)^3}{27} \leq \frac{8}{27}$$

Ngoài ra chú ý đến đại lượng $a^2 + b^2 + c^2$ ở dưới mẫu của phân thức thứ nhất, để đánh giá được vế trái về $(a+b+c)^2$ thì ta cần đánh giá đại lượng $a^2b^2c^2$ và $ab+bc+ca$. Do đó cũng theo bất đẳng

tức Cauchy ta có $a^2b^2c^2 \leq \frac{(ab+bc+ca)^3}{27}$.

Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta được

$$a^2b^2c^2(a+b)(b+c)(c+a) \leq \frac{8(ab+bc+ca)^3}{27^2}$$

Suy ra ta được $\frac{1}{ab(a+b)} + \frac{1}{cb(c+b)} + \frac{1}{ac(a+c)} \geq \frac{27}{2(ab+bc+ca)}$

Khi đó ta được bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab(a+b)} + \frac{1}{cb(c+b)} + \frac{1}{ac(a+c)} \geq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{27}{2(ab+bc+ca)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} \geq \frac{9}{(a+b+c)^2} \geq 9$$

Và ta lại có
$$\frac{1}{ab+bc+ac} \geq \frac{3}{(a+b+c)^2} \geq 3$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab(a+b)} + \frac{1}{cb(c+b)} + \frac{1}{ac(a+c)} &\geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{27}{2(ab+bc+ca)} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2}{ab+bc+ca} + \frac{23}{2(ab+bc+ca)} \geq 9 + \frac{23 \cdot 3}{2} = \frac{87}{2} \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong, đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 100. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} \geq 10$$

Phân tích và lời giải

Bất đẳng thức không xảy ra dấu bằng tại $a = b = c$, do đó ta dự đoán xảy ra tại một biến bằng không và hai biến còn lại bằng nhau. Thay vào bất đẳng thức ta có dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = \frac{1}{2}; c = 0$. Trong tình huống này ta nghĩ đến sắp thứ tự các biến và đánh giá làm sao bảo toàn được dấu đẳng thức. Vì vai trò của các biến như nhau nên ta giả sử c là số nhỏ nhất trong các số a, b, c .

Như vậy khi đánh giá ta cần chú ý sao cho dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = \frac{1}{2}; c = 0$. Trong các đánh giá ta cần xem vai trò của a, b như nhau so với c . Từ những phân tích trên ta có các đánh giá sau

$$a^2 + b^2 \leq \left(a^2 + ac + \frac{c^2}{4}\right) + \left(b^2 + bc + \frac{c^2}{4}\right) = \left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{c}{2}\right)^2$$

Tương tự ta có
$$b^2 + c^2 \leq \left(b + \frac{c}{2}\right)^2; \quad a^2 + c^2 \leq \left(a + \frac{c}{2}\right)^2$$

Do đó ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{b^2+c^2} + \frac{1}{c^2+a^2} \geq \frac{1}{\left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{c}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(b + \frac{c}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(a + \frac{c}{2}\right)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được
$$\frac{1}{\left(b + \frac{c}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(a + \frac{c}{2}\right)^2} \geq \frac{2}{\left(b + \frac{c}{2}\right)\left(a + \frac{c}{2}\right)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta lại có

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{c}{2}\right)^2} + \frac{1}{2\left(b + \frac{c}{2}\right)\left(a + \frac{c}{2}\right)} \\ &\geq \frac{4}{\left(a + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{c}{2}\right)^2 + 2\left(b + \frac{c}{2}\right)\left(a + \frac{c}{2}\right)} = \frac{4}{\left(a + b + \frac{c}{2} + \frac{c}{2}\right)^2} = 4 \end{aligned}$$

Và
$$\frac{3}{2\left(b + \frac{c}{2}\right)\left(a + \frac{c}{2}\right)} = \frac{6}{4\left(b + \frac{c}{2}\right)\left(a + \frac{c}{2}\right)} \geq \frac{6}{\left(a + b + \frac{c}{2} + \frac{c}{2}\right)^2} = 6$$

Kết hợp lại ta được
$$\frac{1}{\left(a + \frac{c}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(b + \frac{c}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(a + \frac{c}{2}\right)^2} \geq 10$$

Suy ra
$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \geq 10$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a; b; c) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ và các hoán vị của nó.

Bài 101. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{a + b + c}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức trên ta chú ý đến bất đẳng thức Bunhiacopski dạng phân thức. Tuy nhiên để áp dụng được ta cần để ý đến phép biến đổi $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{a^2}{a + b} + \frac{b^2}{a + b}$ hoặc đánh giá quen thuộc

$$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2.$$

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a + b} + \frac{b^2}{b + c} + \frac{c^2}{c + a} &\geq \frac{(a + b + c)^2}{2(a + b + c)} \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{2(a + b + c)} \\ \frac{b^2}{a + b} + \frac{c^2}{b + c} + \frac{a^2}{c + a} &\geq \frac{(a + b + c)^2}{2(a + b + c)} \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{2(a + b + c)} \end{aligned}$$

Cộng theo về hai bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{a + b + c}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} &\geq \frac{(a + b)^2}{2(a + b)} + \frac{(b + c)^2}{2(b + c)} + \frac{(c + a)^2}{2(c + a)} \\ &\geq \frac{(2a + 2b + 2c)^2}{4(a + b + c)} \geq \frac{12(ab + bc + ca)}{4(a + b + c)} = \frac{3(ab + bc + ca)}{a + b + c} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Chủ đề 12

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC TRONG CÁC ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI VÀ TUYỂN SINH ĐH-THPT QUỐC GIA VÀ LỚP 10 CHUYÊN TOÁN

Trong các kì thi học sinh giỏi môn Toán THCS, THPT và các kì thi tuyển sinh lớp 10 chuyên, nội dung về bất đẳng thức và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất xuất hiện một cách đều đặn trong các đề thi với các bài toán ngày càng khó hơn. Trong chủ đề này, chúng tôi đã tuyển chọn và giới thiệu một số bài toán về bất đẳng thức và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất được trích trong các đề thi học sinh giỏi môn toán cấp tỉnh và các đề thi chuyên toán các năm gần đây.

Bài 1. a) Cho các số dương a, b, c tùy ý. Chứng minh rằng: $(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$

b) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2009}{ab + bc + ca} \geq 670$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hải Phòng năm 2009 - 2010

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số dương $a + b + c \geq \sqrt[3]{abc}$; $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}$

Suy ra
$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

b) Ta có $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} \leq 3$

Suy ra
$$\frac{2009}{ab + bc + ca} \geq 669$$

Áp dụng bất đẳng thức trong câu a, ta có

$$\left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca} \right) (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) \geq 9$$

Suy ra
$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} \geq \frac{9}{(a + b + c)^2} \geq 1$$

Do đó ta được
$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2009}{ab + bc + ca} \geq 670.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 2. Với số tự nhiên $n \geq 3$. Chứng minh rằng $S_n < \frac{1}{2}$.

$$\text{Với } S_n = \frac{1}{3(1 + \sqrt{2})} + \frac{1}{5(\sqrt{2} + \sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{(2n + 1)(\sqrt{n} + \sqrt{n + 1})}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bình Định năm 2009-2010

Lời giải

Với $n \geq 3$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n+1} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n+1}} \\ &< \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+4n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)\end{aligned}$$

Do đó ta được

$$S_n < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) < \frac{1}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 3. Chứng minh rằng $\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}$, với mọi số nguyên m, n .

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bình năm 2009-2010

Lời giải

Vì m, n là các số nguyên nên $\frac{m}{n}$ là số hữu tỉ và $\sqrt{2}$ là số vô tỉ nên $\frac{m}{n} - \sqrt{2} \neq 0$.

Ta xét hai trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Với $\frac{m}{n} > \sqrt{2}$, khi đó ta được

$$m^2 > 2n^2 \Rightarrow m^2 \geq 2n^2 + 1 \text{ hay } m \geq \sqrt{2n^2 + 1}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| &\geq \frac{\sqrt{2n^2 + 1}}{n} - \sqrt{2} = \sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{2} \\ &= \frac{2 + \frac{1}{n^2} - 2}{\sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{2}} = \frac{1}{n^2 \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{2} \right)} \geq \frac{1}{n^2 (\sqrt{3} + \sqrt{2})}\end{aligned}$$

+ Trường hợp 2: Với $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$, khi đó ta được

$$m^2 < 2n^2 \Rightarrow m^2 \leq 2n^2 - 1 \text{ hay } m \leq \sqrt{2n^2 - 1}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| &= \sqrt{2} - \frac{m}{n} \geq \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2n^2 - 1}}{n} = \sqrt{2} - \sqrt{2 - \frac{1}{n^2}} = \frac{2 - 2 + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 - \frac{1}{n^2}}} \\ &= \frac{1}{n^2 \left(\sqrt{2} + \sqrt{2 - \frac{1}{n^2}} \right)} \geq \frac{1}{n^2 (\sqrt{3} + \sqrt{2})}\end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 4. Cho ba số thực a, b, c đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} \geq 2$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2009-2010

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right)^2 \geq 2 + 2 \left(\frac{ab}{(b-c)(c-a)} + \frac{bc}{(c-a)(a-b)} + \frac{ca}{(a-b)(b-c)} \right)$$

Mà ta lại có

$$\begin{aligned} & \frac{ab}{(b-c)(c-a)} + \frac{bc}{(c-a)(a-b)} + \frac{ca}{(a-b)(b-c)} \\ &= \frac{ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -1 \end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức trên trở thành $\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right)^2 \geq 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nghệ An năm 2009-2010

Lời giải

Dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$ và giá trị nhỏ nhất của P là 4. Ta quy bài toán về chứng minh bất đẳng thức

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq 4$$

Thật vậy, kết hợp với giả thiết ta có

$$\begin{aligned} 3(a^2 + b^2 + c^2) &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^3 + ab^2 \geq 2a^2b; b^3 + bc^2 \geq 2b^2c; c^3 + ca^2 \geq 2c^2a$$

Suy ra $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a) > 0$

Do đó ta được $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 4$$

$$\text{Hay} \quad a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \geq 4$$

Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2$.

Từ giả thiết $a + b + c = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$, do đó ta được $t \geq 3$

Bất đẳng thức trên trở thành

$$t + \frac{9-t}{2t} \geq 4 \Leftrightarrow 2t^2 + 9 - t \geq 8t \Leftrightarrow (t-3)(2t-3) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $t \geq 3$. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 6. Cho biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd$, trong đó $ad - bc = 1$.

Chứng minh rằng: $P \geq \sqrt{3}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thanh Hóa năm 2009-2010

Lời giải

Cách 1: Ta có

$$\begin{aligned} (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 &= a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \\ &= a^2(c^2 + d^2) + b^2(d^2 + c^2) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } ad - bc = 1 \text{ nên } 1 + (ac + bd)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd \geq 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + ac + bd$$

Suy ta $P \geq 2\sqrt{1 + (ac + bd)^2} + ac + bd$. Rõ ràng $P > 0$ vì $2\sqrt{1 + (ac + bd)^2} > |ac + bd|^2$

Đặt $x = ac + bd$, khi đó ta được

$$P \geq 2\sqrt{1 + x^2} + x \Leftrightarrow P^2 \geq 4(1 + x^2) + 4x\sqrt{1 + x^2} + x^2 = (1 + x^2) + 4x\sqrt{1 + x^2} + 4x^2 + 3$$

Hay $P^2 \geq (\sqrt{1 + x^2} + 2x)^2 + 3 \geq 3$. Do đó ta được $P \geq \sqrt{3}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} ad - bc = 1 \\ 2a = \sqrt{3}d - c \\ 2b = -\sqrt{3}c - d \end{cases}$$

Cách 2: Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd \geq \sqrt{3}(ad - bc)$$

$$\text{Hay } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd \geq a(\sqrt{3}d - c) + b(-\sqrt{3}c - d)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} a(\sqrt{3}d - c) &\leq a^2 + \frac{(\sqrt{3}d - c)^2}{4} = a^2 + \frac{3d^2 - 2\sqrt{3}cd + c^2}{4} \\ b(-\sqrt{3}c - d) &\leq b^2 + \frac{(-\sqrt{3}c - d)^2}{4} = b^2 + \frac{3d^2 + 2\sqrt{3}cd + c^2}{4} \end{aligned}$$

Cộng theo về hai bất đẳng thức trên ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd \geq a(\sqrt{3}d - c) + b(-\sqrt{3}c - d)$$

Bài toán được chứng minh xong.

Bài 7. Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z ta luôn có:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} > \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thanh Hóa năm 2009-2010

Lời giải

Cách 1: Vì $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ nên ta có

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \\ &= x^2 \left(2 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2} \right) + y^2 \left(2 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2} \right) + z^2 \left(2 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2} \right) \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x^2 \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2} \right) + y^2 \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2} \right) + z^2 \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2} \right) \end{aligned}$$

Giả sử $a \leq b \leq c$, khi đó $c^2 - a^2 \geq 0$; $c^2 - b^2 \geq 0$. Với c là cạnh lớn nhất và các góc đều nhọn nên $c^2 < a^2 + b^2$. Do đó ta có

$$b^2 + c^2 - a^2 > 0; a^2 + c^2 - b^2 > 0; a^2 + b^2 - c^2 > 0$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x^2 \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2} \right) + y^2 \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2} \right) + z^2 \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2} \right) \\ & > 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \end{aligned}$$

Hay
$$(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) > 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$$

Hay $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} > \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{a^2 + b^2 + c^2}$. Bài toán được chứng minh xong

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{a^2} - \frac{2x^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2y^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{2z^2}{a^2 + b^2 + c^2} > 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2(b^2 + c^2 - a^2)}{a^2(a^2 + b^2 + c^2)} + \frac{y^2(a^2 + c^2 - b^2)}{b^2(a^2 + b^2 + c^2)} + \frac{z^2(a^2 + b^2 - c^2)}{c^2(a^2 + b^2 + c^2)} > 0 \end{aligned}$$

Do a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác nhọn nên

$$a^2 + b^2 > c^2; b^2 + c^2 > a^2; c^2 + a^2 > b^2$$

Nên ta được $b^2 + c^2 - a^2 > 0; a^2 + c^2 - b^2 > 0; a^2 + b^2 - c^2 > 0$

Do vậy bất đẳng thức trên luôn đúng. Bài toán được chứng minh xong.

Bài 8. a) Cho k là số nguyên dương bất kì. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2 \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$$

b) Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2010\sqrt{2009}} < \frac{88}{45}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thái Bình năm 2009-2010

Lời giải

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < \frac{2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} \Leftrightarrow 2k+1 - 2\sqrt{k(k+1)} > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})^2 > 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng với mọi k nguyên dương.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

b) Áp dụng kết quả câu a ta có

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2010\sqrt{2009}} \\ &< 2\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2009}} - \frac{1}{\sqrt{2010}}\right) \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2010}}\right) < 2\left(1 - \frac{1}{45}\right) = \frac{88}{45} = VP \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 9. Với a, b, c là những số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{3b^2 + 8c^2 + 14bc}} + \frac{c^2}{\sqrt{3c^2 + 8a^2 + 14ca}} \geq \frac{a+b+c}{5}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHKHTN Hà Nội năm 2009-2010

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$3a^2 + 8b^2 + 14ab = 3a^2 + 8b^2 + 12ab + 2ab \leq 4a^2 + 9b^2 + 12ab = (2a + 3b)^2$$

Suy ra
$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab}} \geq \frac{a^2}{(2a + 3b)^2} = \frac{a^2}{2a + 3b}$$

Áp dụng tương tự ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{3b^2 + 8c^2 + 14bc}} + \frac{c^2}{\sqrt{3c^2 + 8a^2 + 14ca}} \\ \geq \frac{a^2}{2a + 3b} + \frac{b^2}{2b + 3c} + \frac{c^2}{2c + 3a} \end{aligned}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{2a + 3b} + \frac{b^2}{2b + 3c} + \frac{c^2}{2c + 3a} \geq \frac{(a + b + c)^2}{5(a + b + c)} = \frac{a + b + c}{5}$$

Do đó ta được

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2 + 8b^2 + 14ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{3b^2 + 8c^2 + 14bc}} + \frac{c^2}{\sqrt{3c^2 + 8a^2 + 14ca}} \geq \frac{a + b + c}{5}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c

Bài 10. Giả sử x, y, z là những số thực thỏa mãn điều kiện $0 \leq x, y, z \leq 2$ và $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức:

$$M = x^4 + y^4 + z^4 + 12(1-x)(1-y)(1-z)$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHKHTN Hà Nội năm 2009-2010

Lời giải

Đặt $a = x - 1$; $b = y - 1$; $c = z - 1$, ta được $-1 \leq a$; b ; $c \leq 1$ và $a + b + c = 0$. Biểu thức M được viết lại thành

$$M = a^4 + b^4 + c^4 + 4(a^3 + b^3 + c^3) + 6(a^2 + b^2 + c^2) + 4(a + b + c) + 3 - 12abc$$

Đề ý là khi $a + b + c = 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ nên biểu thức trên trở thành

$$M = a^4 + b^4 + c^4 + 6(a^2 + b^2 + c^2) + 3$$

Theo một đánh giá quen thuộc thì

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c) = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = 0$$

Do đó suy ra $M \geq 3$ hay giá trị nhỏ nhất của M là 3.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 0$ hay $x = y = z = 1$.

Mặt khác do $-1 \leq a; b; c \leq 1$ nên ta có $|a|; |b|; |c| \leq 1$. Từ đó ta có

$$a^4 \leq a^2 \leq |a|; b^4 \leq b^2 \leq |b|; c^4 \leq c^2 \leq |c|$$

$$\text{Suy ra } M = a^4 + b^4 + c^4 + 6(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \leq 7(|a| + |b| + |c|) + 3$$

Mà ta lại có $a + b + c = 0$ nên trong ba số a, b, c có một hoặc hai số âm, tức là luôn tồn tại hai số cùng dấu. Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là b và c . Khi đó ta được

$$|b| + |c| = |b + c| = |a|$$

Đến đây ta có $M \leq 14|a| + 3 \leq 17$ hay giá trị lớn nhất của M là 17. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1; b = -1; c = 0$ và các hoán vị hay $x = 2; y = 0; z = 1$ và các hoán vị

Bài 11. a) Cho 3 số thực a, b, c bất kì. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca + \frac{(a-b)^2}{26} + \frac{(b-c)^2}{6} + \frac{(c-a)^2}{2009}$$

b) Cho $a > 0; b < 0$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a} \geq \frac{2}{b} + \frac{8}{2a-b}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hồ Chí Minh năm 2009-2010

Lời giải

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(b-c)^2}{2} + \frac{(c-a)^2}{2} \geq \frac{(a-b)^2}{26} + \frac{(b-c)^2}{6} + \frac{(c-a)^2}{2009}$$

$$\text{Hay } \frac{12(a-b)^2}{13} + \frac{(b-c)^2}{3} + \frac{2007(c-a)^2}{2} \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

b) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{-b} \geq \frac{8}{2a-b}$$

Đặt $c = -b$, do $b < 0$ nên ta được $c > 0$, khi đó bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{c} \geq \frac{8}{2a+c}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta được

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{c} = \frac{2}{2a} + \frac{2}{c} \geq \frac{2.4}{2a+c} = \frac{8}{2a+c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2a = -b$.

Bài 12. Cho a, b là các số dương thỏa mãn $\frac{a}{1+a} + \frac{2b}{1+b} = 1$. Chứng minh $ab^2 \leq \frac{1}{8}$.

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Quảng Bình năm 2015-2016

Lời giải

Từ giả thiết $\frac{a}{1+a} + \frac{2b}{1+b} = 1$. Đặt $x = \frac{a}{1+a}$; $y = \frac{b}{1+b}$ Suy ra $a = \frac{x}{1-x}$; $b = \frac{y}{1-y}$.

Khi đó ta được $x + 2y = 1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{xy^2}{(1-x)(1-y)^2} \leq \frac{1}{8}$$

Từ giả thiết ta suy ra $1-x = 2y$; $1-y = x+y$ nên lại viết bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{xy^2}{2y(x+y)^2} \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow 4xy \leq (x+y)^2$$

Đánh giá cuối cùng là một bất đẳng thức đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Bài 13. Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $xyz = x + y + z + 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \leq \frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2009-2010

Lời giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1$.

Đặt $a = \frac{1}{x+1}$; $b = \frac{1}{y+1}$; $c = \frac{1}{z+1}$. Khi đó ta được $a + b + c = 1$. Từ đó suy ra

$$x = \frac{1-a}{a} = \frac{b+c}{a}; y = \frac{1-b}{b} = \frac{c+a}{b}; z = \frac{1-c}{c} = \frac{a+b}{a}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}} + \sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}} + \sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}} \leq \frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{b}{b+c} + \frac{a}{c+a} \right) \\ \sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{c+a} + \frac{b}{a+b} \right) \\ \sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{c}{b+c} \right) \end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}} + \sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}} + \sqrt{\frac{ca}{(a+b)(b+c)}} \leq \frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 2$

Bài 14. Cho các số thực không âm a, b, c sao cho $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \leq 1$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2009-2010

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2}{a^2 + 2} + \frac{b^2}{b^2 + 2} + \frac{c^2}{c^2 + 2} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{a^2 + 2} + \frac{b^2}{b^2 + 2} + \frac{c^2}{c^2 + 2} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 6} = \frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 15. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + 2y + 3z = 18$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2y + 3z + 5}{1 + x} + \frac{3z + x + 5}{1 + 2y} + \frac{x + 2y + 5}{1 + 3z} \geq \frac{51}{7}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên toán Đại học Vinh, 2009 – 2010

Lời giải

Đặt $a = x$; $b = 2y$; $c = 3z$, khi đó giả thiết trở thành $a + b + c = 18$ và bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{b + c + 5}{1 + a} + \frac{c + a + 5}{1 + b} + \frac{a + b + 5}{1 + c} \geq \frac{51}{7}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{b + c + 5}{1 + a} + 1 + \frac{c + a + 5}{1 + b} + 1 + \frac{a + b + 5}{1 + c} + 1 \geq \frac{51}{7} + 3$$

Hay

$$(a + b + c + 6) \left(\frac{1}{1 + a} + \frac{1}{1 + b} + \frac{1}{1 + c} \right) \geq \frac{72}{7}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{1}{1 + a} + \frac{1}{1 + b} + \frac{1}{1 + c} \geq \frac{3}{7}$$

Thật vậy theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{1 + a} + \frac{1}{1 + b} + \frac{1}{1 + c} \geq \frac{9}{3 + a + b + c} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 6$ hay $x = 6$; $y = 3$; $z = 2$.

Bài 16. Giả sử x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{xy + z} + \sqrt{2x^2 + 2y^2}}{1 + \sqrt{xy}} \geq 1$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH KHTN Hà Nội năm 2010-2011

Lời giải

Ta sẽ quy bài toán về việc chứng minh bất đẳng thức cùng bậc là

$$\frac{\sqrt{xy + z}(x + y + z) + \sqrt{2x^2 + 2y^2}}{x + y + z + \sqrt{xy}} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + z)(y + z)} + \sqrt{2x^2 + 2y^2} \geq x + y + z + \sqrt{xy}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\sqrt{2x^2 + 2y^2} \geq x + y$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq z + \sqrt{xy}$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$z^2 + xy + z(x+y) \geq z^2 + xy + 2z\sqrt{xy} \Leftrightarrow z(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$; $z = 0$.

Bài 17. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c + ab + bc + ca = 6$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHNN Hà Nội năm 2010-2011

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{ab + bc + ac}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

Do đó ta được $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq (a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)$

Nên ta có $\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{ab + bc + ac} \geq a^2 + b^2 + c^2$

Do đó ta suy ra $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2$

+ Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$.

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^2 + b^2 \geq 2ab; b^2 + c^2 \geq 2bc; c^2 + a^2 \geq 2ca; a^2 + 1 \geq 2a; b^2 + 1 \geq 2b; c^2 + 1 \geq 2c$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \geq 2(ab + bc + ca + a + b + c) = 12$$

Hay $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$

Kết hợp hai kết quả trên ta được $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 18. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a}{\sqrt{bc(1+a^2)}} + \frac{b}{\sqrt{ca(1+b^2)}} + \frac{c}{\sqrt{ab(1+c^2)}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2010-2011

Lời giải

Cách 1: Kết hợp với giả thiết ta có

$$\sqrt{bc(1+a^2)} = \sqrt{bc + a^2bc} = \sqrt{bc + a(a+b+c)} = \sqrt{(a+b)(a+c)}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\sqrt{ca(1+b^2)} = \sqrt{(a+b)(b+c)}; \sqrt{ba(1+c^2)} = \sqrt{(a+c)(b+c)};$$

Nên

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(a+c)(b+c)}} \\ &= \sqrt{\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+c}} + \sqrt{\frac{b}{b+c} \cdot \frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{c+b} \cdot \frac{c}{a+c}} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+c}} \leq \frac{1}{2} \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$S \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c} + \frac{c}{b+c} \right) = \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \sqrt{3}$.

Cách 2: Ta viết lại giả thiết thành $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$.

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, khi đó giả thiết trở thành $xy + yz + zx = 1$

Ta viết lại biểu thức S thành

$$S = \sqrt{\frac{yz}{x^2+1}} + \sqrt{\frac{zx}{y^2+1}} + \sqrt{\frac{xy}{z^2+1}}$$

Để ý đến giả thiết $xy + yz + zx = 1$ ta được

$$S = \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{\frac{zx}{(y+z)(x+z)}} + \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(y+z)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta chứng minh được

$$\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{\frac{zx}{(y+z)(x+z)}} + \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(y+z)}} \leq \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\frac{3}{2}$.

Bài 19. Cho các số dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{c(ab+1)^2}{b^2(bc+1)} + \frac{a(bc+1)^2}{c^2(ca+1)} + \frac{b(ca+1)^2}{a^2(ab+1)}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2010-2011

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ ta được

$$\begin{aligned} S &\geq 3\sqrt[3]{\frac{c(ab+1)^2 \cdot a(bc+1)^2 \cdot b(ca+1)^2}{b^2(bc+1) \cdot c^2(ca+1) \cdot a^2(ab+1)}} = 3\sqrt[3]{\frac{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}{abc}} \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca}}{abc}} = 6 \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 6, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Cách 2: Đặt $x = \frac{ab+1}{b}$; $y = \frac{bc+1}{c}$; $z = \frac{ca+1}{a}$

Khi đó biểu thức được viết lại thành $S = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$S = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z} = x+y+z$$

Do đó ta được

$$S \geq \frac{ab+1}{b} + \frac{bc+1}{c} + \frac{ca+1}{a} = \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right) \geq 6$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 6, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 20. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = 18\sqrt{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x(y+z)}} + \frac{1}{\sqrt{y(z+x)}} + \frac{1}{\sqrt{z(x+y)}} \geq \frac{1}{4}$$

Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên toán Đại học Vinh, 2010 – 2011

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{2x(y+z)}} + \frac{1}{\sqrt{2y(z+x)}} + \frac{1}{\sqrt{2z(x+y)}} \geq \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $2\sqrt{2x(y+z)} \leq 2x + y + z$, do đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt{2x(y+z)}} \geq \frac{2}{2x + y + z}$$

Hoàn toàn tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{1}{\sqrt{2x(y+z)}} + \frac{1}{\sqrt{2y(z+x)}} + \frac{1}{\sqrt{2z(x+y)}} \geq 2 \left(\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z} \right)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z} \geq \frac{1}{8\sqrt{2}}$$

Thật vậy theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z} \geq \frac{9}{4(x + y + z)} = \frac{9}{4 \cdot 18\sqrt{2}} = \frac{1}{8\sqrt{2}}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 6\sqrt{2}$.

Bài 21: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$1 + \frac{3}{a+b+c} \geq \frac{6}{ab+bc+ca}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2010-2011

Lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức đã cho tương đương:

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) + 3(ab+bc+ca) \geq 6(a+b+c)$$

Đề ý rằng $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c) = 3(a + b + c)$

Nên bài toán quy về chứng minh $\sqrt{3(a + b + c)^3} + 3\sqrt{3(a + b + c)} \geq 6(a + b + c)$

Bất đẳng thức trên tương đương với $\sqrt{3(a + b + c)}(\sqrt{a + b + c} - \sqrt{3})^2 \geq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Cách 2: Đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z} \Rightarrow xyz = 1$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} 1 + \frac{3}{a + b + c} &\geq \frac{6}{ab + bc + ca} \Leftrightarrow 1 + \frac{3abc}{a + b + c} \geq \frac{6abc}{ab + bc + ca} \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{3}{\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}} &\geq \frac{6}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \Leftrightarrow 1 + \frac{3}{xy + yz + zx} \geq \frac{6}{x + y + z} \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2$

Suy ra $1 + \frac{3}{xy + yz + zx} \geq 1 + \frac{9}{(x + y + z)^2}$

Mặt khác $1 + \frac{9}{(x + y + z)^2} - \frac{6}{x + y + z} = \left(1 - \frac{3}{x + y + z}\right)^2 \geq 0$ với $\forall x, y, z > 0$.

Nên ta được $1 + \frac{9}{(x + y + z)^2} \geq \frac{6}{x + y + z}$

Từ đó ta được bất đẳng thức $1 + \frac{3}{xy + yz + zx} \geq \frac{6}{x + y + z}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 22. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \leq 2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{\sqrt{97}}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hải Phòng năm 2010-2011

Lời giải

Cách 1: Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức sau

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2} \geq \sqrt{(a + b)^2 + (x + y)^2}$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2}\right)^2 &\geq (a + x)^2 + (b + y)^2 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} &\geq 2ax + 2by \Leftrightarrow (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng là bất đẳng thức Bunhiacopxki

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} &\geq \sqrt{(a+b)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \\ &\geq \sqrt{(a+b+c)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $(a+b+c)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{97}{4}$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy và chú ý giả thiết $a+b+c \leq 2$, ta được

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 &\geq (a+b+c)^2 + \frac{81}{(a+b+c)^2} \\ &= \left[(a+b+c)^2 + \frac{16}{(a+b+c)^2}\right] + \frac{65}{(a+b+c)^2} \geq \frac{97}{4}\end{aligned}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)\left(1 + \frac{81}{16}\right)} \geq \sqrt{\left(a + \frac{9}{4b}\right)^2} = a + \frac{9}{4b}$$

Hay
$$\frac{\sqrt{97}}{4} \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} \geq a + \frac{9}{4b}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{\sqrt{97}}{4} \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} \geq b + \frac{9}{4c}; \quad \frac{\sqrt{97}}{4} \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq c + \frac{9}{4a}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{\sqrt{97}}{4} \left(\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \right) \geq a+b+c + \frac{9}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Mà ta lại có
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Do đó ta được

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{4}{\sqrt{97}} \left[a+b+c + \frac{81}{4(a+b+c)} \right]$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{4}{\sqrt{97}} \left[a+b+c + \frac{81}{4(a+b+c)} \right] \geq \frac{\sqrt{97}}{2}$$

Hay
$$a+b+c + \frac{81}{4(a+b+c)} \geq \frac{97}{8}$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a + b + c + \frac{81}{4(a + b + c)} = a + b + c + \frac{4}{a + b + c} + \frac{65}{4(a + b + c)}$$

$$\geq 2\sqrt{(a + b + c) \frac{4}{a + b + c}} + \frac{65}{4.2} = 4 + \frac{65}{8} = \frac{97}{8}$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{2}{3}$

Bài 23: Cho các số $a, b, c \in [1; 2]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{b^2 + c^2}{bc} + \frac{c^2 + a^2}{ca} \leq 7$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hà Tĩnh năm 2010-2011

Lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 \leq 7abc$$

$$\Leftrightarrow c(ab - ca - b^2 + bc) + a(ab - ca - b^2 + bc) + 5abc - 2bc^2 - 2a^2b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ab - ca - b^2 + bc)(c + a) + b(4ca - 2c^2 - 2a^2 + ca) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(b - c)(c + a) + b(2a - c)(2c - a) \geq 0$$

Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $2 \geq a \geq b \geq c \geq 1$ khi đó ta được $2a \geq 2 \geq c; 2c \geq 2 \geq a$. Do đó ta được

$$(a - b)(b - c)(c + a) \geq 0; b(2a - c)(2c - a) \geq 0$$

Nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2; c = 1$ và các hoán vị.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \leq 7$$

Vì vai trò các biến như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $2 \geq a \geq b \geq c \geq 1$. Khi đó ta có

$$\frac{a}{c} + 1 - \frac{a}{b} - \frac{b}{c} = \left(\frac{a}{b} - 1\right)\left(\frac{b}{c} - 1\right) \geq 0$$

$$\frac{c}{a} + 1 - \frac{b}{a} - \frac{c}{b} = \left(\frac{b}{a} - 1\right)\left(\frac{c}{b} - 1\right) \geq 0$$

Cộng theo về hai bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + 2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + 2 \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \leq 5 \Leftrightarrow (2a - c)(a - 2c) \leq 0$$

Từ $2 \geq a \geq b \geq c \geq 1$ suy ra $2a \geq 2 \geq c; 2c \geq 2 \geq a$ nên bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 24. Cho a, b, c là các số thực dương không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} - \sqrt{abc}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nghệ An năm 2010-2011

Lời giải

Đặt $x = \sqrt{a}$; $y = \sqrt{b}$; $z = \sqrt{c}$. Từ giả thiết ta được $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Khi này biểu thức P trở thành $P = x^2y + y^2z + z^2x - xyz$

Dễ thấy $P \geq 0$ theo bất đẳng thức Cauchy

Không mất tính tổng quát ta giả sử y là số nằm giữa x, z. Khi đó ta có

$$z(y - x)(y - x) \leq 0 \Leftrightarrow y^2z + z^2x - xyz \leq z^2y$$

Do đó ta có $P = x^2y + y^2z + z^2x - xyz \leq x^2y + z^2y = y(x^2 + z^2)$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$2y^2(x^2 + z^2)(x^2 + z^2) \leq \left(\frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{3} \right)^3 = 8$$

Suy ra $y(x^2 + z^2) \leq 2$ nên ta được $P \leq 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = y = z \\ z = 0 \\ x^2 = 2y^2 \end{cases} \text{ và các hoán vị } \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = 1 \\ a = 2; b = 1; c = 0 \end{cases} \text{ và các hoán vị}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là 2.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = 2; b = 1; c = 0$ và các hoán vị.

Bài 25. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a^2 + 1} - a}{bc} + \frac{\sqrt{b^2 + 1} - b}{ac} + \frac{\sqrt{c^2 + 1} - c}{ab} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hưng Yên năm 2010-2011

Lời giải

Đề ý là $a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a + b)(c + a)$, do đó ta được

$$\sqrt{a^2 + 1} = \sqrt{(a + b)(c + a)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{\sqrt{a^2 + 1} - a}{bc} = \frac{\sqrt{(a + b)(c + a)} - a}{bc} \leq \frac{\frac{2a + b + c}{2} - a}{bc} = \frac{b + c}{2bc} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{\sqrt{b^2 + 1} - b}{ac} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$; $\frac{\sqrt{c^2 + 1} - c}{ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{\sqrt{a^2 + 1} - a}{bc} + \frac{\sqrt{b^2 + 1} - b}{ac} + \frac{\sqrt{c^2 + 1} - c}{ab} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 26. a) Cho 2 số dương a và b. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a + b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$

b) Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2010$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z}$$

Lời giải

a) Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên như sau

$$\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Leftrightarrow 4ab \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

b) Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right) \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right); \quad \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right)$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$P = \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{2010}{4} = \frac{1005}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1005}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 670$

Bài 27. Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bình Phước năm 2011-2012

Lời giải

Cách 1: Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$A = \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{9}{3+ab+bc+ca}$$

Mặt khác dễ thấy $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$

Mà $a+b+c \leq 3$ nên $ab+bc+ca \leq 3$

Do đó ta được $A \geq \frac{9}{3+ab+bc+ca} \geq \frac{9}{3+3} = \frac{3}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi
$$\begin{cases} 1+ab = 1+bc = 1+ca \\ a = b = c \\ a+b+c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1+ab}{4} \geq 2\sqrt{\frac{1}{1+ab} \cdot \frac{1+ab}{4}} = 1 \Rightarrow \frac{1}{1+ab} \geq 1 - \frac{1+ab}{4} = \frac{3-ab}{4}$$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{1}{1+ab} \geq \frac{3-ab}{4}; \quad \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3-ca}{4}$

Do đó ta được
$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{9-(ab+bc+ca)}{4}$$

Mặt khác ta chứng minh được $ab+bc+ca \leq 3$

Do đó ta suy ra $\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{9-(ab+bc+ca)}{4} \geq \frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{1+ab} = 1 - \frac{ab}{1+ab} \geq 1 - \frac{ab}{2\sqrt{ab}} = 1 - \frac{\sqrt{ab}}{2}$$

Tương tự ta có $\frac{1}{1+bc} \geq 1 - \frac{\sqrt{bc}}{2}; \frac{1}{1+ca} \geq 1 - \frac{\sqrt{ca}}{2}$

Cộng theo vế theo vế các bất đẳng thức trên và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} &\geq 3 - \frac{1}{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \\ &\geq 3 - \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2}\right) = 3 - \frac{a+b+c}{2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Bài 28. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > 4$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHSPT Hà Nội năm 2011-2012

Lời giải

Dễ thấy $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} > \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}; \dots \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$

Do đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$$

Suy ra

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}\right) > \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$$

Hay $2\left(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}}\right) > \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \dots + \sqrt{81}-\sqrt{80}$

Nên ta được $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{80}} > 4$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 29. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)} \geq abc + \sqrt[3]{(a^3 + abc)(b^3 + abc)(c^3 + abc)}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nghệ An năm 2011-2012

Lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right)\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b}\right)} \geq 1 + \sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc} + 1\right)\left(\frac{b^2}{ca} + 1\right)\left(\frac{c^2}{ab} + 1\right)}$$

Đặt $x = \frac{a}{b}; y = \frac{b}{c}; z = \frac{c}{a} \Rightarrow x, y, z > 0; xyz = 1$

Khi đó bất đẳng thức trên trở thành

$$\begin{aligned} & \sqrt{(xy + yz + zx)(x + y + z)} \geq 1 + \sqrt[3]{\left(\frac{x}{z} + 1\right)\left(\frac{y}{x} + 1\right)\left(\frac{z}{y} + 1\right)} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(x + y)(y + z)(z + x) + xyz} \geq 1 + \sqrt[3]{\frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{xyz}} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(x + y)(y + z)(z + x) + 1} \geq 1 + \sqrt[3]{(x + y)(y + z)(z + x)} \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt[3]{(x + y)(y + z)(z + x)}$ suy ra $t \geq 2$. Khi đó ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\sqrt{t^3 + 1} \geq 1 + t \Leftrightarrow t^3 + 1 \geq 1 + 2t + t^2 \Leftrightarrow t(t - 2)(t + 1) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $t \geq 2$.

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right)\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b}\right)} \geq 1 + \sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc} + 1\right)\left(\frac{b^2}{ca} + 1\right)\left(\frac{c^2}{ab} + 1\right)}$$

Hay
$$\sqrt{3 + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} + \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}} \geq 1 + \sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc} + 1\right)\left(\frac{b^2}{ca} + 1\right)\left(\frac{c^2}{ab} + 1\right)}$$

Đặt $x = \frac{a^2}{bc}$; $y = \frac{b^2}{ca}$; $z = \frac{c^2}{ab}$, khi đó ta có $xyz = 1$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{3 + x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \geq 1 + \sqrt[3]{(1 + x)(1 + y)(1 + z)}$$

Hay
$$\sqrt{3 + x + y + z + xy + yz + zx} \geq 1 + \sqrt[3]{2 + x + y + z + xy + yz + zx}$$

Đặt $t = \sqrt[3]{2 + x + y + z + xy + yz + zx}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $x + y + z + xy + yz + zx \geq 6$

Do đó ta có $t \geq \sqrt[3]{2 + 6} = 2$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{t^3 + 1} \geq 1 + t \Leftrightarrow t^3 + 1 \geq t^2 + 2t + 1 \Leftrightarrow t(t + 1)(t - 2) \geq 0$$

Đánh giá cuối cùng đúng với mọi $t \geq 2$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 30. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 2$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{ab}{\sqrt{ab + 2c}} + \frac{bc}{\sqrt{bc + 2a}} + \frac{ca}{\sqrt{ca + 2b}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thanh Hóa năm 2011-2012

Lời giải

Để ý đến giả thiết $a + b + c = 2$ ta có $ab + 2c = ab + c(a + b + c) = (b + c)(c + a)$

Do đó theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+2c}} = \frac{ab}{\sqrt{(b+c)(c+a)}} \leq \frac{2ab}{b+c} + \frac{2ab}{c+a}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{bc}{\sqrt{bc+2a}} \leq \frac{2bc}{a+b} + \frac{2bc}{c+a}$; $\frac{ca}{\sqrt{ca+2b}} \leq \frac{2ca}{a+b} + \frac{2ca}{b+c}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \frac{ab}{\sqrt{ab+2c}} + \frac{bc}{\sqrt{bc+2a}} + \frac{ca}{\sqrt{ca+2b}} &\leq \frac{2ab}{b+c} + \frac{2ab}{c+a} + \frac{2bc}{a+b} + \frac{2bc}{c+a} + \frac{2ca}{a+b} + \frac{2ca}{b+c} \\ &= 2(a+b+c) = 4 \end{aligned}$$

Hay $P \leq 4$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 4.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{2}{3}$

Bài 31. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = \frac{9}{4}$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 > a\sqrt{b+c} + b\sqrt{a+c} + c\sqrt{a+b}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2011-2012

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \frac{ab(a+b)}{2} > \frac{ab(a+b)}{\frac{9}{4}} = \frac{ab(a+b)}{abc} = \frac{a+b}{c}$$

Từ đó ta có
$$c^3 + \frac{a^3 + b^3}{2} > c^3 + \frac{a+b}{c} \geq 2c\sqrt{a+b}$$

Tương tự ta có

$$\begin{aligned} b^3 + \frac{a^3 + c^3}{2} &> b^3 + \frac{a+c}{b} \geq 2b\sqrt{a+c} \\ a^3 + \frac{b^3 + c^3}{2} &> a^3 + \frac{b+c}{a} \geq 2a\sqrt{b+c} \end{aligned}$$

Cộng về theo về các bất đẳng thức trên ta được:

$$a^3 + b^3 + c^3 > a\sqrt{b+c} + b\sqrt{a+c} + c\sqrt{a+b}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} \left(a\sqrt{b+c} + b\sqrt{a+c} + c\sqrt{a+b}\right)^2 &\leq 2(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \\ &< \frac{9}{4} 2(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) = abc(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

Theo một bất đẳng thức quen thuộc ta có $abc(a+b+c) \leq \frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned} abc(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) &\leq (a^2 + b^2 + c^2)(ab+bc+ca)^2 \\ &\leq \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + ab+bc+ca + ab+bc+ca)^3}{3^4} = \frac{(a+b+c)^6}{3^4} \end{aligned}$$

Do đó ta có
$$\left(a\sqrt{b+c} + b\sqrt{a+c} + c\sqrt{a+b}\right)^2 < \frac{(a+b+c)^6}{3^4}$$

Hay
$$a\sqrt{b+c} + b\sqrt{a+c} + c\sqrt{a+b} < \frac{(a+b+c)^3}{3^2}$$

Để dàng chứng minh được
$$(a^3 + b^3 + c^3) \geq \frac{(a+b+c)^3}{9}$$

Từ đó ta được bất đẳng thức sau

$$a^3 + b^3 + c^3 > a\sqrt{b+c} + b\sqrt{a+c} + c\sqrt{a+b}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 32. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{c^2(a^2+b^2)^2 + a^2(b^2+c^2)^2 + b^2(c^2+a^2)^2} \geq \frac{54(abc)^3}{(a+b+c)^2 \sqrt{(ab)^4 + (bc)^4 + (ca)^4}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2011-2012

Lời giải

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{c^2(a^2+b^2)^2 + a^2(b^2+c^2)^2 + b^2(c^2+a^2)^2} &\geq \sqrt{c^2(2ab)^2 + a^2(2bc)^2 + b^2(2ca)^2} \\ &= \sqrt{12a^2b^2c^2} = 2\sqrt{3}abc \\ (a+b+c)^2 \sqrt{(ab)^4 + (bc)^4 + (ca)^4} &\geq (3\sqrt[3]{abc})^2 \sqrt{3\sqrt[3]{a^8b^8c^8}} = 9\sqrt{3\sqrt[3]{a^4b^4c^3} \cdot \sqrt[3]{a^8b^8c^8}} \\ &= 9\sqrt{3a^2b^2c^2} \end{aligned}$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{c^2(a^2+b^2)^2 + a^2(b^2+c^2)^2 + b^2(c^2+a^2)^2} (a+b+c)^2 \sqrt{(ab)^4 + (bc)^4 + (ca)^4} \\ = 2\sqrt{3}abc \cdot 9\sqrt{3a^2b^2c^2} = 54(abc)^3 \end{aligned}$$

Hay
$$\sqrt{c^2(a^2+b^2)^2 + a^2(b^2+c^2)^2 + b^2(c^2+a^2)^2} \geq \frac{54(abc)^3}{(a+b+c)^2 \sqrt{(ab)^4 + (bc)^4 + (ca)^4}}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 33. Cho các số dương a, b, c thay đổi và thỏa mãn $3a + 4b + 5c = 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức:
$$S = \frac{ab}{ab+a+b} + \frac{2ac}{ac+a+c} + \frac{3bc}{bc+b+c}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm 2011-2012

Lời giải

Ta viết lại biểu thức S thành

$$S = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1} + \frac{2}{\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + 1} + \frac{3}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x+y+z} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$ ta có

$$S = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1} + \frac{2}{\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + 1} + \frac{3}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1} \leq \frac{a+b+1}{9} + \frac{2(c+a+1)}{9} + \frac{3(b+c+1)}{9}$$

$$= \frac{6+3a+4b+5c}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức S là 2. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 34. Cho a, b là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{\frac{a^3}{a^3 + 8b^3}} + \sqrt{\frac{4b^3}{b^3 + (a+b)^3}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH KHTN Hà Nội năm 2011-2012

Lời giải

Biểu thức P được viết lại là
$$P = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{8b^3}{a^3}}} + \sqrt{\frac{\frac{4b^3}{a^3}}{\frac{b^3}{a^3} + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^3}}$$

Đặt $t = \frac{b}{a} > 0$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại là

$$P = \sqrt{\frac{1}{1 + 8t^3}} + \sqrt{\frac{4t^3}{t^3 + (1+t)^3}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$1 + 8t^3 = (1 + 2t)(1 - 2t + 4t^2) \leq \frac{(2 + 4t^2)^2}{2} = (1 + 2t^2)^2$$

Suy ra
$$\sqrt{\frac{1}{1 + 8t^3}} \geq \sqrt{\frac{1}{(1 + 2t^2)^2}} = \frac{1}{1 + 2t^2}$$

Ta sẽ chứng minh
$$\sqrt{\frac{4t^3}{t^3 + (1+t)^3}} \geq \frac{2t^2}{1 + 2t^2}$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{4t^3}{t^3 + (1+t)^3} \geq \left(\frac{2t^2}{1 + 2t^2} \right)^2 \Leftrightarrow (1 + 2t^2)^2 \geq t^4 + t(1+t)^3 \Leftrightarrow (t-1)^2(2t^2 + t + 1) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng với mọi t.

Do đó ta được

$$P = \sqrt{\frac{1}{1 + 8t^3}} + \sqrt{\frac{4t^3}{t^3 + (1+t)^3}} \geq \frac{1}{1 + 2t^2} + \frac{2t^2}{1 + 2t^2} = 1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 1. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

Bài 35. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{3a + 3b + 2c}{\sqrt{6(a^2 + 5)} + \sqrt{6(b^2 + 5)} + \sqrt{c^2 + 5}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH KHTN Hà Nội năm 2011-2012

Lời giải

Từ giả thiết $ab + bc + ca = 5$ ta có

$$a^2 + 5 = a^2 + ab + bc + ca = (a + b)(c + a)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{6(a^2 + 5)} = \sqrt{6(a + b)(c + a)} \leq \frac{3(a + b) + 2(c + a)}{2} = \frac{5a + 3b + 2c}{4}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{6(b^2 + 5)} \leq \frac{3a + 5b + 2c}{2}; \quad \sqrt{c^2 + 5} \leq \frac{a + b + 2c}{2}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{6(a^2 + 5)} + \sqrt{6(b^2 + 5)} + \sqrt{c^2 + 5} \leq \frac{9a + 9b + 6c}{2}$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{3a + 3b + 2c}{\sqrt{6(a^2 + 5)} + \sqrt{6(b^2 + 5)} + \sqrt{c^2 + 5}} \geq \frac{2(3a + 3b + 2c)}{9a + 9b + 6c} = \frac{2}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{2}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1; c = 2$.

Bài 36. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{a^2 + abc} + \sqrt{b^2 + abc} + \sqrt{c^2 + abc} + 9\sqrt{abc}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bắc Ninh năm 2011-2012

Lời giải

$$\text{Ta có } a^2 + abc = a^2(a + b + c) + abc = a(a + b)(a + c)$$

$$\text{Do đó ta được } \sqrt{a^2 + abc} = \sqrt{a(a + b)(a + c)} \leq \frac{\sqrt{a}(a + b + a + c)}{2} = \frac{\sqrt{a}(a + 1)}{2}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{b^2 + abc} \leq \frac{\sqrt{b}(b + 1)}{2}; \quad \sqrt{c^2 + abc} \leq \frac{\sqrt{c}(c + 1)}{2}$$

Do đó ta được

$$\sqrt{a^2 + abc} + \sqrt{b^2 + abc} + \sqrt{c^2 + abc} \leq \frac{\sqrt{a}(a + 1)}{2} + \frac{\sqrt{b}(b + 1)}{2} + \frac{\sqrt{c}(c + 1)}{2}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\frac{\sqrt{a}(a + 1)}{2} + \sqrt{abc} \leq \sqrt{a} \left(\frac{a + 1}{2} + \frac{b + c}{2} \right) = \sqrt{a} \left(\frac{a + b + c + 1}{2} \right) = \sqrt{a}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{\sqrt{b}(b + 1)}{2} + \sqrt{abc} \leq \sqrt{b}; \quad \frac{\sqrt{c}(c + 1)}{2} + \sqrt{abc} \leq \sqrt{c}$$

Như vậy ta có

$$P = \sqrt{a^2 + abc} + \sqrt{b^2 + abc} + \sqrt{c^2 + abc} + 9\sqrt{abc} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 6\sqrt{abc}$$

Mà ta có

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3(a+b+c)} = \sqrt{3}; \quad 6\sqrt{abc} \leq 6\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Nên ta suy ra $P \leq \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 37. Cho a, b, c là số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{2ab}{3a+8b+6c} + \frac{3bc}{3b+6c+a} + \frac{3ca}{9c+4a+4b} \leq \frac{a+2b+3c}{9}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2011-2012

Lời giải

Cách 1: Đặt $x = a$; $y = 2b$; $z = 3c$, khi đó bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$\frac{xy}{3x+4y+2z} + \frac{yz}{3y+4z+2x} + \frac{zx}{3z+4x+2y} \leq \frac{x+y+z}{9}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \frac{xy}{3x+4y+2z} &= \frac{xy}{x+2y+x+y+z+x+y+z} \leq \frac{xy}{9} \left(\frac{1}{x+2y} + \frac{2}{x+y+z} \right) \\ &\leq \frac{xy}{9} \left(\frac{1}{9x} + \frac{2}{9y} + \frac{2}{x+y+z} \right) = \frac{2x+y}{81} + \frac{2xy}{9(x+y+z)} \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{yz}{3y+4z+2x} \leq \frac{2y+z}{81} + \frac{2yz}{9(x+y+z)}; \quad \frac{zx}{3z+4x+2y} \leq \frac{2z+x}{81} + \frac{2zx}{9(x+y+z)}$$

Cộng theo các vế câu ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{xy}{3x+4y+2z} + \frac{yz}{3y+4z+2x} + \frac{zx}{3z+4x+2y} \leq \frac{x+y+z}{27} + \frac{2(xy+yz+zx)}{9(x+y+z)}$$

Mà theo một đánh giá quen thuộc ta lại có $xy+yz+zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3}$

Do đó ta có $\frac{x+y+z}{27} + \frac{2(xy+yz+zx)}{9(x+y+z)} \leq \frac{x+y+z}{27} + \frac{2(x+y+z)}{27} = \frac{x+y+z}{9}$

Suy ra $\frac{xy}{3x+4y+2z} + \frac{yz}{3y+4z+2x} + \frac{zx}{3z+4x+2y} \leq \frac{x+y+z}{9}$

Hay bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2b = 3c$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\begin{aligned} \frac{xy}{3x+4y+2z} &= \frac{xy}{81} \cdot \frac{(6+2+1)^2}{2(x+y+z)+2y+x} \leq \frac{xy}{81} \left(\frac{18}{x+y+z} + \frac{2}{y} + \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{2xy}{9(x+y+z)} + \frac{2x+y}{81} \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{yz}{3y+4z+2x} \leq \frac{2y+z}{81} + \frac{2yz}{9(x+y+z)}; \frac{zx}{3z+4x+2y} \leq \frac{2z+x}{81} + \frac{2zx}{9(x+y+z)}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{xy}{3x+4y+2z} + \frac{yz}{3y+4z+2x} + \frac{zx}{3z+4x+2y} \leq \frac{x+y+z}{27} + \frac{2(xy+yz+zx)}{9(x+y+z)}$$

Đến đây chứng minh hoàn toàn tương tự như trên.

Bài 38. Giả sử a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = \frac{a}{b^2 + c^2 + a} + \frac{b}{c^2 + a^2 + b} + \frac{c}{a^2 + b^2 + c}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hải Dương năm 2011-2012

Lời giải

Ta chứng minh $M \leq 1$

Đặt $\sqrt[3]{a} = x; \sqrt[3]{b} = y; \sqrt[3]{c} = z$, khi đó $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^3}{y^6 + z^6 + x^3} + \frac{y^3}{z^6 + x^6 + y^3} + \frac{z^3}{x^6 + y^6 + z^3} \leq 1$$

Dễ thấy $(y-z)(y^5 - z^5) \geq 0 \Rightarrow y^6 + z^6 \geq y^5z + yz^5$

Suy ra $y^6 + z^6 + x^4yz \geq yz(x^4 + y^4 + z^4)$

Từ đó ta được $\frac{1}{y^6 + z^6 + x^3} \leq \frac{1}{yz(x^4 + y^4 + z^4)}$

Hay $\frac{x^4yz}{y^6 + z^6 + x^3} \leq \frac{x^4}{x^4 + y^4 + z^4}$

Do đó ta được $\frac{x^3}{y^6 + z^6 + x^3} \leq \frac{x^4}{x^4 + y^4 + z^4}$

Tương tự ta có $\frac{y^3}{z^6 + x^6 + y^3} \leq \frac{y^4}{x^4 + y^4 + z^4}; \frac{z^3}{x^6 + y^6 + z^3} \leq \frac{z^4}{x^4 + y^4 + z^4}$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^3}{y^6 + z^6 + x^3} + \frac{y^3}{z^6 + x^6 + y^3} + \frac{z^3}{x^6 + y^6 + z^3} \leq 1$$

Vậy giá trị lớn nhất của M là 1. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 39. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^3}{a(b+c)} \geq \frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thái Bình năm 2011-2012

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương ta được

$$\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b}{2} + \frac{c+a}{4} \geq \frac{3}{2}a; \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c}{2} + \frac{a+b}{4} \geq \frac{3}{2}b; \frac{c^3}{a(b+c)} + \frac{a}{2} + \frac{b+c}{4} \geq \frac{3}{2}c$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^3}{a(b+c)} + a + b + c \geq \frac{3(a+b+c)}{2}$$

Hay

$$\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^3}{a(b+c)} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$

Nên ta được

$$\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^3}{a(b+c)} \geq \frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức bunhiaciovski dạng phân thức ta được

$$\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^3}{a(b+c)} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b + b^2c + c^2a + 3abc}$$

Ta cần chứng minh được $2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a + 3abc)$

Vì $abc = 1$ nên ta được $a + b + c \geq 3$.

Dễ thấy $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq \frac{(a+b+c)^2(a^2 + b^2 + c^2)}{3} \geq (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a + 3abc)$$

Hay

$$2(a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a + 3abc)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) + 2(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq a^2b + b^2c + c^2a + 9$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^3 + ab^2 \geq 2a^2b; b^3 + bc^2 \geq 2b^2c; c^3 + ca^2 \geq 2c^2a$$

$$3(a^3 + b^3 + c^3) \geq 9abc = 9; 3(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9abc = 9$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên và thu gọn ta được

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 2(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq a^2b + b^2c + c^2a + 9$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 40. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$A = 14(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHQG TP Hồ Chí Minh năm 2012-2013

Lời giải

Dễ dàng tính được $ab + bc + ca = \frac{1 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$. Lại có

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) = a^3 + b^2a + b^3 + bc^2 + c^3 + ca^2 + a^2b + b^2c + c^2a$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^3 + b^2a \geq 2a^2b; b^3 + bc^2 \geq 2b^2c; c^3 + ca^2 \geq 2c^2a$$

Do đó suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^2a + b^3 + bc^2 + c^3 + ca^2 + a^2b + b^2c + c^2a \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Từ đó ta được
$$\frac{1}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq \frac{3}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Hay
$$\frac{ab + bc + ca}{a^2b + b^2c + c^2a} \geq \frac{3(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3 - 3(a^2 + b^2 + c^2)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Đặt $t = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow t \geq \frac{1}{3}$. Khi này biểu thức được viết lại thành

$$A = 14t + \frac{3-3t}{2t} = \frac{28t}{2} + \frac{3}{2t} - \frac{3t}{2t} = \frac{27t}{2} + \frac{3}{2t} + \frac{t}{2} - \frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có
$$\frac{27t}{2} + \frac{3}{2t} \geq 2\sqrt{\frac{27t}{2} \cdot \frac{3}{2t}} = 9$$

Mặt khác
$$\frac{t}{2} - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{3}$$
. Suy ra
$$A \geq 9 - \frac{4}{3} = \frac{23}{3}$$
.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{23}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 41. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a \leq b \leq 3 \leq c$; $c \geq b + 1$; $a + b \geq c$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$Q = \frac{2ab + a + b + c(ab - 1)}{(a + 1)(b + 1)(c + 1)}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH KHTN Hà Nội năm 2012-2013

Lời giải

Cách 1: Ta có

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2ab + a + b + c(ab - 1)}{(a + 1)(b + 1)(c + 1)} = \frac{(a + 1)(b + 1) + (ab - 1)(c + 1)}{(a + 1)(b + 1)(c + 1)} \\ &= \frac{1}{c + 1} + \frac{ab - 1}{(a + 1)(b + 1)} = \frac{1}{a + b + 1} + \frac{ab - 1}{ab + a + b + 1} \end{aligned}$$

Từ giả thiết

$$a + b \geq c \geq b + 1 \Rightarrow b \geq a \geq 1 \Rightarrow (a - 1)(b - 1) \geq 0 \Rightarrow ab \geq a + b - 1 \geq c - 1 \geq 2$$

Suy ra
$$Q \geq \frac{1}{ab + 2} + \frac{ab - 1}{2(ab + 1)}$$

Đặt $x = ab \Rightarrow x \geq 2$, khi đó ta được
$$Q \geq \frac{1}{x + 2} + \frac{x - 1}{2(x + 1)}$$

Suy ra
$$Q - \frac{5}{12} \geq \frac{1}{x + 2} + \frac{x - 1}{2(x + 1)} - \frac{5}{12} = \frac{(x - 2)(x + 5)}{12(x + 1)(x + 2)} \geq 0$$

Do đó ta có $Q \geq \frac{5}{12}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{5}{12}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1; b = 2; c = 3$

Cách 2: Nhận thấy $a + b \geq c \geq b + 1 \Rightarrow a \geq 1$ do đó ta được $c \geq 3 \geq b \geq a \geq 1$

Khi đó $(a - 1)(b - 1) \geq 0 \Leftrightarrow ab \geq a + b - 1 \geq c - 1$

Ta sẽ chứng minh $Q \geq \frac{5}{12}$. Thật vậy $Q = \frac{2ab + a + b + c(ab - 1)}{(a + 1)(b + 1)(c + 1)} \geq \frac{5}{12}$

Tương đương với $7abc + 7(a + b) + 19ab - 5c(a + b) - 17c - 5 \geq 0$

Đặt $A = 7abc + 7(a + b) + 19ab - 5c(a + b) - 17c - 5$ khi đó ta có

$$\begin{aligned} A &= 7abc + 7(a + b) + 19ab - 5c(a + b) - 17c - 5 \\ &= 5abc + 2abc + 7(a + b) + 19ab - 5c(a + b) - 17c - 5 \\ &\geq 5c(a + b - 1) + 6(c - 1) + 7c + 19(c - 1) - 5c(a + b) - 17c - 5 \\ &= 10c - 30 \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{5}{12}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1; b = 2; c = 3$

Cách 3: Ta có $a + b \geq c \Rightarrow a + b - c \geq 0$

Từ $a + b \geq c \geq b + 1 \Rightarrow a \geq 1$ mà $b \geq a$. Do đó ta được

$$(a - 1)(b - 1) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} ab \geq a + b - 1 \\ a + b \leq ab + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab \geq c - 1 \\ a + b \leq ab + 1 \end{cases}$$

Khi đó ta được

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2ab + a + b + c(ab - 1)}{(a + 1)(b + 1)(c + 1)} = \frac{2ab + a + b - c + abc}{(a + 1)(b + 1)(c + 1)} \geq \frac{2ab + abc}{(a + 1)(b + 1)(c + 1)} \\ &= \frac{ab(2 + c)}{(ab + a + b + 1)(c + 1)} \geq \frac{ab(2 + c)}{(ab + ab + 1 + 1)(c + 1)} = \frac{ab(2 + c)}{2(ab + 1)(c + 1)} \\ &= \frac{1}{2\left(1 + \frac{1}{ab}\right)} \cdot \frac{c + 2}{c + 1} \geq \frac{1}{2\left(1 + \frac{1}{c - 1}\right)} \cdot \frac{c + 2}{c + 1} = \frac{(c - 1)(c + 2)}{2c(c + 1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{c^2 + c} \geq \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{5}{12}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1; b = 2; c = 3$

Bài 42. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức: $P = \frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bình Phước năm 2012-2013

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$P = \frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} = \frac{ab + bc + ca}{2abc} = \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 43. Cho n số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ với $n \geq 3$. Kí hiệu $\text{Max}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ là số lớn nhất trong các số $x_1, x_2, \dots, x_n$. Chứng minh rằng:

$$\text{Max}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_n - x_1|}{2n}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHSP Hà Nội năm 2012-2013

Lời giải

Đề ý là trong hai số thực x, y bất kì ta luôn có

$$\min\{x, y\} \leq x, y \leq \max\{x, y\} \text{ và } \max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

Sử dụng đẳng thức $\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}$, ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_n - x_1|}{2n} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|}{2n} + \frac{x_2 + x_3 + |x_2 - x_3|}{2n} + \dots + \frac{x_n + x_1 + |x_n - x_1|}{2n} \\ &\leq \frac{\max\{x_1, x_2\} + \max\{x_2, x_3\} + \dots + \max\{x_n, x_1\}}{n} \leq \max\{x_1; x_2; \dots; x_n\} \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

Bài 44. Cho x, y, z là các số không âm thỏa mãn $x + y + z = \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất:

$$S = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y^2z^2$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2012-2013

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\left(\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} + \sqrt{z^2}\right) \left(\left(x\sqrt{x}\right)^2 + \left(y\sqrt{y}\right)^2 + \left(z\sqrt{z}\right)^2\right) \geq \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2$$

$$\text{Hay } \frac{3}{2} \left(x^3 + y^3 + z^3\right) \geq \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 \geq \frac{2}{3} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 \quad (*)$$

Mặt khác, dễ dàng chứng minh được

$$\begin{aligned} xyz &\geq (x + y - z)(x + z - y)(y + z - x) = \left(\frac{3}{2} - 2z\right) \left(\frac{3}{2} - 2x\right) \left(\frac{3}{2} - 2y\right) \\ &= \frac{27}{8} - \frac{9}{2}(x + y + z) + 6(xy + yz + xz) - 8xyz \\ &\Leftrightarrow 9xyz \geq \frac{27}{8} - 3(x^2 + y^2 + z^2) \Leftrightarrow x^2y^2z^2 \geq \left(\frac{3}{8} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)^2}{3} = \frac{3}{4}$. Khi đó ta được

$$S \geq \frac{2}{3}t^2 + \left(\frac{3}{8} - \frac{t}{3}\right)^2 = \frac{2t^2}{3} + \frac{t^2}{9} - \frac{t}{4} + \frac{9}{64} = \frac{7t^2}{9} - \frac{t}{4} + \frac{9}{64} = \frac{1}{6}\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{11}{8}t^2 + \frac{3}{64} \geq \frac{25}{64}$$

trị nhỏ nhất của S là $\frac{25}{64}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$

Bài 45. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1 + 3a}{1 + b^2} + \frac{1 + 3b}{1 + c^2} + \frac{1 + 3c}{1 + a^2} \geq 6$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2012-2013

Lời giải

Cách 1: Ta viết lại vế trái thành

$$\frac{1+3a}{1+b^2} + \frac{1+3b}{1+c^2} + \frac{1+3c}{1+a^2} = \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+a^2} + \frac{3a}{1+b^2} + \frac{3b}{1+c^2} + \frac{3c}{1+a^2}$$

Ta đi chứng minh

$$\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}; \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$$

+ Trước hết ta chứng minh $\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$. Ta có các hướng sau

Hướng 1: Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$

Do $ab + bc + ca = 3 \Rightarrow bc \geq 1$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau: Với $x, y > 0; xy \geq 1$ ta có

$$\frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1} \geq \frac{2}{yz+1}$$

Thật vậy, ta có: $(y^2 + z^2 + 2)(yz + 1) \geq (y^2 + 1)(z^2 + 1) \Leftrightarrow (y - z)^2(yz - 1) \geq 0$

Do vai trò của các biến như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $a \leq b \leq c$

Khi đó ta được $3bc \geq ab + bc + ca \Rightarrow bc \geq 1$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Do $ab + bc + ca = 3 \Rightarrow bc \geq 1$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$P = \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \geq \frac{1}{a^2+1} + \frac{2}{bc+1}$$

Do đó ta sẽ chứng minh:

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{2}{bc+1} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2a^2 + bc + 3}{a^2bc + a^2 + bc + 1} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow a(a + b + c - 3abc) \geq 0$$

Từ giả thiết suy ra $a + b + c \geq 3$ và $abc \leq 1$. Do đó $a + b + c - 3abc \geq 0$

Do đó ta được $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \geq \frac{1}{a^2+1} + \frac{2}{bc+1} \geq \frac{3}{2}$

Hướng 2: Biến đổi biểu thức về trái như sau

$$P = \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} = 3 - \left(\frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{4a^2}{3a^2+3} = \frac{4a^2}{3a^2+ab+bc+ca} \leq \frac{a^2}{a^2+ab+ac} + \frac{a^2}{2a^2+bc} = \frac{a}{a+b+c} + \frac{a^2}{2a^2+bc}$$

Áp dụng tương tự với hai biểu thức còn lại ta được

$$\frac{4a^2}{3a^2+3} + \frac{4b^2}{3b^2+3} + \frac{4c^2}{3c^2+3} \leq 1 + \frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ca} + \frac{c^2}{2c^2+ab}$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ca} + \frac{c^2}{2c^2+ab} \leq 1$

Thật vậy, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{3}{2} - \left(\frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ca} + \frac{c^2}{2c^2+ab} \right) \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Hay} \quad \frac{bc}{2a^2+bc} + \frac{ca}{2b^2+ca} + \frac{ab}{2c^2+ab} \geq \frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{bc}{2a^2 + bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab} = \frac{(bc)^2}{2a^2bc + b^2c^2} + \frac{(ca)^2}{2ab^2c + c^2a^2} + \frac{(ab)^2}{2abc^2 + a^2b^2}$$

$$\geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)} = 1$$

Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh.

+ Chứng minh $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a}{b^2 + 1} = a - \frac{ab^2}{b^2 + 1} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$$

Tương tự ta có $\frac{b}{c^2 + 1} \geq b - \frac{bc}{2}; \frac{c}{a^2 + 1} \geq c - \frac{ca}{2}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{c^2 + 1} + \frac{c}{a^2 + 1} \geq a + b + c - \frac{ab + bc + ca}{2} = a + b + c - \frac{3}{2}$$

Mặt khác ta có $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \Rightarrow a + b + c \geq 3$

Suy ra $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2: Ta viết lại về trái thành

$$\frac{1+3a}{1+b^2} + \frac{1+3b}{1+c^2} + \frac{1+3c}{1+a^2} = \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+a^2} + \frac{3a}{1+b^2} + \frac{3b}{1+c^2} + \frac{3c}{1+a^2}$$

Khi đó áp dụng ta đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{1}{b^2 + 1} = 1 - \frac{b^2}{b^2 + 1} \geq 1 - \frac{b^2}{2b} = 1 - \frac{b}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{1}{c^2 + 1} \geq 1 - \frac{c}{2}; \frac{1}{a^2 + 1} \geq 1 - \frac{a}{2}$

Khi đó ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} + \frac{1}{a^2 + 1} \geq 3 - \frac{a + b + c}{2}$$

Mặt khác ta lại có $\frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{c^2 + 1} + \frac{c}{a^2 + 1} \geq a + b + c - \frac{ab + bc + ca}{2} = a + b + c - \frac{3}{2}$

Do đó ta được

$$\frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+a^2} + \frac{3a}{1+b^2} + \frac{3b}{1+c^2} + \frac{3c}{1+a^2} \geq 3 + \frac{5(a+b+c)}{2} - \frac{9}{2} \geq 6$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 46. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{abc} + \frac{1}{1 - 2(ab + bc + ca)}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2012-2013

Lời giải

Do $a + b + c = 1 \Rightarrow 1 - 2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2$

Suy ra
$$P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{a + b + c}{abc} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$$

Đến đây ta chứng minh $P \geq 30$ bằng các cách sau

Cách 1: Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca} \geq \frac{9}{(a + b + c)^2} = 9.$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được $\frac{7}{ab + bc + ca} \geq 21$

Tuy nhiên, dễ thấy $\frac{(a + b + c)^2}{3} \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}$

Do đó ta được
$$\frac{7}{ab + bc + ca} \geq 21$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{3ab} + \frac{1}{3bc} + \frac{1}{3ca} &\geq \frac{16}{a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)} \\ &\geq \frac{16}{(a + b + c)^2 + \frac{1}{3}(a + b + c)^2} = 12 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$\frac{2}{3} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \geq 18$$

Để ý tiếp bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{2}{3} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \geq \frac{6}{ab + bc + ca} \geq \frac{6}{\frac{1}{3}(a + b + c)^2} = 18$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3: Theo một đánh giá quen thuộc ta có
$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab + bc + ca}$$

Do đó ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9}{ab + bc + ca}$$

Áp dụng tiếp đánh giá trên ta được

$$\left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca} \right) (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) \geq 9$$

Hay
$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2}{ab + bc + ca} \geq 9$$

Mặt khác ta lại có
$$\frac{7}{ab + bc + ca} \geq 21$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được
$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 30.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 30. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 47. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{a^3} \geq a + b + c$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2012-2013

Lời giải

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c} \Rightarrow xyz \geq 1$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{x^3}{z} + \frac{y^3}{x} + \frac{z^3}{y} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Áp dụng bất đẳng thức Biniacopcxki ta được

$$\frac{x^3}{z} + \frac{y^3}{x} + \frac{z^3}{y} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{xx + yz + zx} \geq x^2 + y^2 + z^2$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

Thật vậy theo một đánh giá quen thuộc và giả thiết $xyz \geq 1$ ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \geq \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 48. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c)$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bắc Ninh năm 2012-2013

Lời giải

Vì a, b, c là các số dương và $a + b + c = 1$ nên ta có $a, b, c < 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$1+a = 1-b+1-c \geq 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$$

Tương tự ta có $1+b \geq 2\sqrt{(1-c)(1-a)}$; $1+c \geq 2\sqrt{(1-a)(1-b)}$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 49. Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = (a+b+c+1) \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right)$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hải Dương năm 2012-2013

Lời giải

Đặt $x = 1+c$, $y = 1+b$, $z = 1+a$. Từ $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ ta được $1 \leq x \leq y \leq z \leq 2$

Ta viết lại biểu thức A là $A = (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 3 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y}$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x}{y}\right)\left(1 - \frac{y}{z}\right) &\geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{y} - \frac{y}{z} + \frac{x.y}{y.z} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \leq \frac{x}{z} + 1 \\ \left(1 - \frac{z}{y}\right)\left(1 - \frac{y}{x}\right) &\geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{z}{y} - \frac{y}{x} + \frac{z.y}{y.x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{z}{x} + 1 \\ \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} &\leq \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + 2 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} \leq 2\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + 2 \end{aligned}$$

Đặt $t = \frac{x}{z} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Do đó ta được

$$\frac{x}{z} + \frac{z}{x} = t + \frac{1}{t} = \frac{t^2 + 1}{t} = \frac{2t^2 - 5t + 2}{2t} + \frac{5}{2} = \frac{(2t-1)(t-2)}{2t} + \frac{5}{2}$$

Do $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ nên ta có $\frac{(2t-1)(t-2)}{2t}$ suy ra $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \leq \frac{5}{2}$

Từ đó ta được $A \leq 3 + 2 \cdot \frac{5}{2} + 2 = 10$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 10. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi.

Bài 50. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c + d = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{a^3 + b^3 + c^3 + d^3}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nam Định năm 2012-2013

Lời giải

Cách 1: Dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = d = \frac{3}{4}$. Ta đi chứng minh $P \geq \frac{3}{4}$.

Điều này tương đương với chứng minh $\frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{a^3 + b^3 + c^3 + d^3} \geq \frac{3}{4}$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} 4(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) &\geq 3(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \\ \Leftrightarrow 4(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) &\geq (a + b + c + d)(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) && \text{Áp dụng} \\ \Leftrightarrow 3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) &\geq a^3(b + c + d) + b^3(a + c + d) + c^3(a + b + d) + d^3(a + b + c) \end{aligned}$$

bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a^4 + a^4 + a^4 + b^4 = 4a^3b; \quad a^4 + a^4 + a^4 + c^4 = 4a^3c; \quad a^4 + a^4 + a^4 + d^4 = 4a^3d$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được $9a^4 + (b^4 + c^4 + d^4) \geq 4a^3(b + c + d)$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\begin{aligned} 9b^4 + (a^4 + c^4 + d^4) &\geq 4b^3(a + c + d) \\ 9c^4 + (a^4 + b^4 + d^4) &\geq 4c^3(a + b + d) \\ 9d^4 + (a^4 + b^4 + c^4) &\geq 4d^3(a + b + c) \end{aligned}$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} 12(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \\ \geq 4a^3(b + c + d) + 4b^3(a + c + d) + 4c^3(a + b + d) + 4d^3(a + b + c) \end{aligned}$$

Hay

$$3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \geq a^3(b + c + d) + b^3(a + c + d) + c^3(a + b + d) + d^3(a + b + c)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4}$, đạt được khi $a = b = c = d = \frac{3}{4}$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$4(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \geq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2;$$
$$(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq (a^3 + b^3 + c^3 + d^3)^2$$

Nhân theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$4(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)^2 \geq (a^3 + b^3 + c^3 + d^3)^2 (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

$$\text{Hay } 16(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)^2 \geq 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)^2 (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq (a + b + c + d)^2 = 9$$

$$\text{Do vậy } 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)^2 (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq 9(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)^2$$

$$\text{Suy ra ta được } 16(a^4 + b^4 + c^4 + d^4)^2 \geq 9(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)^2$$

$$\text{Hay } 4(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \geq 3(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)$$

$$\text{Do đó ta được } P = \frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{a^3 + b^3 + c^3 + d^3} \geq \frac{3}{4}$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{4}$, đạt được khi $a = b = c = d = \frac{3}{4}$

Bài 51. Cho tam giác ABC có chu vi bằng 2. Ký hiệu a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{a}{b+c-a} + \frac{4b}{c+a-b} + \frac{9c}{a+b-c}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hải Dương năm 2013-2014

Lời giải

Với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 2 nên $a + b + c = 2$.

Đặt $b + c - a = x$; $c + a - b = y$; $a + b - c = z$, do a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nên

$x, y, z > 0$. Khi đó ta được $x + y + z = 2$ và $a = \frac{y+z}{2}$; $b = \frac{x+z}{2}$; $c = \frac{x+y}{2}$.

Khi đó

$$S = \frac{y+z}{2x} + \frac{4(x+z)}{2y} + \frac{9(x+y)}{2z} = \frac{1}{2} \left[\frac{y+z}{x} + \frac{4(x+z)}{y} + \frac{9(x+y)}{z} \right]$$
$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{4x}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{9x}{z} \right) + \left(\frac{4z}{y} + \frac{9y}{z} \right) \right]$$

Ta có

$$\frac{y}{x} + \frac{4x}{y} = \left(\sqrt{\frac{y}{x}} - 2\sqrt{\frac{x}{y}} \right)^2 + 2 \geq 2$$

$$\frac{z}{x} + \frac{9x}{z} = \left(\sqrt{\frac{z}{x}} - 3\sqrt{\frac{x}{z}} \right)^2 + 6 \geq 6$$

$$\frac{4z}{y} + \frac{9y}{z} = \left(2\sqrt{\frac{z}{y}} - 3\sqrt{\frac{y}{z}} \right)^2 + 12 \geq 12$$

Do đó $S \geq \frac{1}{2}(4 + 6 + 12) = 11$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \\ 2z = 3y \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{5}{6}; b = \frac{2}{3}; c = \frac{1}{2}$$

Khi đó $a^2 = b^2 + c^2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 11 khi $\triangle ABC$ vuông.

Bài 52. Cho x, y, z là ba số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{\sqrt{x^2 - xy + y^2}}{x + y + 2z} + \frac{\sqrt{y^2 - yz + z^2}}{y + z + 2x} + \frac{\sqrt{z^2 - zx + x^2}}{z + x + 2y}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hải Dương năm 2013-2014

Lời giải

Ta có $x^2 - xy + y^2 = (x + y)^2 - 3xy \geq (x + y)^2 - \frac{3(x + y)^2}{4} = \frac{(x + y)^2}{4}$

Suy ra
$$\frac{\sqrt{x^2 - xy + y^2}}{x + y + 2z} \geq \frac{x + y}{2(x + z + y + z)}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$S \geq \frac{1}{2} \left(\frac{x + y}{y + z + z + x} + \frac{y + z}{z + x + x + y} + \frac{z + x}{x + y + y + z} \right)$$

Đặt $a = x + y$; $b = y + z$; $c = z + x$, khi đó ta được

$$S \geq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

Vì theo bất đẳng thức Neibizt thì $\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}$.

Vậy ta được giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{3}{4}$ đạt được tại $x = y = z$.

Bài 53. Giả sử a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $abc + bcd + cda + dab = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(a^3 + b^3 + c^3) + 9c^3$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH KHTN Hà Nội năm 2013-2014

Lời giải

Do vai trò của a, b, c như nhau nên ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = kd$, với k là số dương.

Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta được

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^2}(a^3 + b^3 + c^3) &\geq \frac{3abc}{k^2} \\ \frac{a^3}{k^3} + \frac{b^3}{k^3} + d^3 &\geq \frac{3abd}{k^2} \\ \frac{b^3}{k^3} + \frac{c^3}{k^3} + d^3 &\geq \frac{3bcd}{k^2} \\ \frac{c^3}{k^3} + \frac{a^3}{k^3} + d^3 &\geq \frac{3cad}{k^2}\end{aligned}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\left(\frac{1}{k^2} + \frac{2}{k^3}\right)(a^3 + b^3 + c^3) + 3d^3 \geq \frac{3(abc + abd + bcd + cad)}{k^2} = \frac{3}{k^2}$$

Hay

$$\left(\frac{3}{k^2} + \frac{6}{k^3}\right)(a^3 + b^3 + c^3) + 9d^3 \geq \frac{9}{k^2}$$

Ta cần tìm k để $\frac{3}{k^2} + \frac{6}{k^3} = 4 \Leftrightarrow 4k^3 - 3k - 6 = 0$ và ta chọn k là số dương.

Đặt $k = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ thay vào phương trình trên và biến đổi ta thu được $x^6 - 12x^3 + 1 = 0$

Giải phương trình này ta được $x = \sqrt[3]{6 \pm \sqrt{35}}$, để ý là $(6 + \sqrt{35})(6 - \sqrt{35}) = 1$ nên ta tính được

$$k = \frac{\sqrt[3]{6 - \sqrt{35}} + \sqrt[3]{6 + \sqrt{35}}}{2}$$

Do đó ta tính được giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{36}{\left(\sqrt[3]{6 - \sqrt{35}} + \sqrt[3]{6 + \sqrt{35}}\right)^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{\sqrt[3]{6 - \sqrt{35}} + \sqrt[3]{6 + \sqrt{35}}}{2} \cdot d$

Bài 54. Giả sử dãy số thực có thứ tự $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{192}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 0 \\ |x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_{192}| = 2013 \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $x_{192} - x_1 \geq \frac{2013}{96}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH KHTN Hà Nội năm 2013-2014

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bài toán phụ sau: Với $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$ thỏa mãn

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 0 \\ |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| = 1 \end{cases}$$

Khi đó ta được $a_n - a_1 \geq \frac{2}{n}$.

Thật vậy, từ điều kiện của bài toán ta nhận thấy tồn tại số tự nhiên k để

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_k \leq 0 \leq a_{k+1} \leq \dots \leq a_n$$

Khi đó từ $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 0 \\ |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| = 1 \end{cases}$ suy ra

$$\begin{cases} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k) + (a_{k+1} + \dots + a_n) = 0 \\ -(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k) + (a_{k+1} + \dots + a_n) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{k+1} + \dots + a_n = \frac{1}{2} \\ a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Cũng từ $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_k \leq 0 \leq a_{k+1} \leq \dots \leq a_n$ ta được

$$\begin{aligned} a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_k &\Rightarrow a_1 \leq -\frac{1}{2k} \\ a_{k+1} \leq \dots \leq a_n &\Rightarrow a_n \geq \frac{1}{2(n-k)} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } a_n - a_1 \geq \frac{1}{2(n-k)} + \frac{1}{2k} = \frac{n}{2(n-k)n} \geq \frac{2n}{(n-k+n)^2} = \frac{2}{n}$$

Như vậy bài toán được chứng minh xong.

Từ giả thiết của bài toán trên ta viết lại như sau

$$\begin{cases} \frac{x_1}{2013} + \frac{x_2}{2013} + \frac{x_3}{2013} + \dots + \frac{x_n}{2013} = 0 \\ \left| \frac{x_1}{2013} \right| + \left| \frac{x_2}{2013} \right| + \left| \frac{x_3}{2013} \right| + \dots + \left| \frac{x_{192}}{2013} \right| = 1 \end{cases}$$

Áp dụng kết quả của bài toán phụ ta được

$$\frac{x_{192}}{2013} - \frac{x_1}{2013} \geq \frac{2}{192} \Rightarrow x_{192} - x_1 \geq \frac{2013}{96}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 55. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh:

$$\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}} + \sqrt{\frac{bc+2a^2}{1+bc-a^2}} + \sqrt{\frac{ac+2b^2}{1+ac-b^2}} \geq 2 + ab + ba + ca$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2013-2014

Lời giải

Do $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ nên ta có

$$\sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}} = \sqrt{\frac{ab+2c^2}{a^2+b^2+c^2+ab-c^2}} = \sqrt{\frac{ab+2c^2}{a^2+b^2+ab}} = \frac{ab+2c^2}{\sqrt{(ab+2c^2)(a^2+b^2+ab)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt{(ab+2c^2)(a^2+b^2+ab)} \leq \frac{2c^2+a^2+b^2+2ab}{2} \leq \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{2} = a^2+b^2+c^2$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{\frac{ab+2c^2}{1+ab-c^2}} = \frac{ab+2c^2}{\sqrt{(ab+2c^2)(a^2+b^2+ab)}} \geq \frac{ab+2c^2}{a^2+b^2+c^2} = ab+2c^2$$

$$\text{Tương tự ta được } \sqrt{\frac{bc+2a^2}{1+bc-a^2}} \geq bc+2a^2; \sqrt{\frac{ca+2b^2}{1+ca-b^2}} \geq ca+2b^2$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên kết hợp $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 56. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2013-2014

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} 4a(c+1) + 4b(a+1) + 4c(b+1) &\geq 3(a+1)(b+1)(c+1) \\ \Leftrightarrow 4(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) &\geq 3abc + 3(ab+bc+ca) + 3(a+b+c) + 3 \\ \Leftrightarrow ab+bc+ca + a+b+c &\geq 6 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương ta được

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 3; a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $ab+bc+ca + a+b+c \geq 6$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 57. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+ab+bc+ca = 6abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội năm 2013-2014

Lời giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 6$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} &\geq \frac{2}{ab}; \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{2}{bc}; \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \geq \frac{2}{ca} \\ \frac{1}{a^2} + 1 &\geq \frac{2}{a}; \frac{1}{b^2} + 1 \geq \frac{2}{b}; \frac{1}{c^2} + 1 \geq \frac{2}{c} \end{aligned}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$3\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + 3 \geq 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 2.6 = 12$$

Hay

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 58. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{3}{4}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội năm 2013-2014

Lời giải

Đặt $a = \frac{x}{y}$; $b = \frac{y}{z}$; $c = \frac{z}{x}$. Gọi P là vế trái, khi đó ta được

$$P = \frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2}$$

$$= \frac{yz}{xy+xz+2yz} + \frac{zx}{xy+yz+2xz} + \frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

Biến đổi tương đương ta được

$$3 - P = 1 - \frac{yz}{xy+xz+2yz} + 1 - \frac{zx}{xy+yz+2xz} + 1 - \frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

$$3 - P = (xy + yz + xz) \left(\frac{1}{xy+xz+2yz} + \frac{1}{xy+yz+2xz} + \frac{1}{xz+yz+2xy} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \geq \frac{1}{A+B+C}$

$$\text{Ta có } 3 - P = (xy + yz + xz) \frac{9}{4xy + 4yz + 4xz} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow P \leq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 59. a) Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$, với a, b là hai số dương.

b) Cho a, b là hai số dương thỏa mãn $a + b \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F = (a^3 + b^3)^2 + (a^2 + b^2) + \frac{3}{2}ab$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2013-2014

Lời giải

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a + b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a + b)(a - b)^2 \geq 0$$

Ta thấy với a, b là hai số dương nên bất đẳng thức đã cho luôn đúng.

b) **Cách 1:** Áp dụng bất đẳng thức đã chứng minh trên ta có $(a^3 + b^3)^2 \geq [ab(a + b)]^2$ nên theo giả thiết ta được $(a^3 + b^3)^2 \geq [ab(a + b)]^2 \geq (ab)^2$

$$\text{Mặt khác ta có } a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \geq 1 - 1ab$$

Do đó

$$F \geq (ab)^2 + 1 - 2ab + \frac{3}{2}ab = (ab)^2 - \frac{ab}{2} + 1$$

$$= (ab)^2 - 2ab \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{15}{16} = \left(ab - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} \geq \frac{15}{16}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của F là bằng $\frac{15}{16}$, đạt được khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Cách 2: Ta có $F = (a^3 + b^3)^2 + (a + b)^2 - \frac{1}{2}ab$

Mà ta luôn có bất đẳng thức $a^3 + b^3 \geq \frac{(a+b)^3}{4}$, với mọi $a, b > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có $(a^3 + b^3)^2 \geq \left[\frac{(a+b)^3}{4} \right]^2 \geq \frac{1}{16}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$F \geq \frac{1}{16} + (a+b)^2 - \frac{(a+b)^2}{8} = \frac{1}{16} + \frac{7(a+b)^2}{8} \geq \frac{1}{16} + \frac{7}{8} = \frac{15}{16}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của F là bằng $\frac{15}{16}$, đạt được khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Bài 60. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $12\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \leq 3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{4a+b+c} + \frac{1}{a+4b+c} + \frac{1}{a+b+4c} \leq \frac{1}{6}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2013-2014

Lời giải

Theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \leq 12\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \leq 3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Suy ra $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1\right)\left[4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 3\right] \leq 0$

Do đó ta được $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 1$ và $a + b + c \geq 9$

Đặt $P = \frac{1}{4a+b+c} + \frac{1}{a+4b+c} + \frac{1}{a+b+4c}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ta được

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4a+b+c} + \frac{1}{a+4b+c} + \frac{1}{a+b+4c} \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3a} + \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{3a} + \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{3a} + \frac{1}{a+b+c} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3a} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{3c} + \frac{3}{a+b+c} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 61. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} > 2$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thanh Hóa năm 2013-2014

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức như sau

$$\begin{aligned}
& \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} > 2 \\
& \Leftrightarrow a \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} \right) + b \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{ca} \right) + c \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} \right) > 2abc \\
& \Leftrightarrow a(b^2 + c^2) + 2abc - a^3 + b(c^2 + a^2) - 2abc - b^3 + c(a^2 + b^2 - c^2) - 2abc - c^3 > 0 \\
& \Leftrightarrow a \left[(b+c)^2 - a^2 \right] + b \left[(a-c)^2 - b^2 \right] + c \left[(a-b)^2 - c^2 \right] > 0 \\
& \Leftrightarrow a(b+c-a)(b+c+a) + b(a-c-b)(a+b-c) + c(a-b-c)(a-b+c) > 0 \\
& \Leftrightarrow (b+c-a) \left[a^2 - (b-c)^2 \right] > 0 \\
& \Leftrightarrow (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > 0
\end{aligned}$$

Vì a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác nên

$$a + b - c > 0; b + c - a > 0; c + a - b > 0$$

Do vậy bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 62. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x^4 + yz} + \frac{y^2}{y^4 + xz} + \frac{z^2}{z^4 + xy} \leq \frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nam Định năm 2014-2015

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$2x^2\sqrt{yz} \leq x^4 + yz \Leftrightarrow \frac{1}{2x^2\sqrt{yz}} \geq \frac{1}{x^4 + yz} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^4 + yz} \leq \frac{1}{2\sqrt{yz}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{yz}} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{yz}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta được $\frac{x^2}{x^4 + yz} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{y^2}{y^4 + xz} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right); \frac{z^2}{z^4 + xy} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^2}{x^4 + yz} + \frac{y^2}{y^4 + xz} + \frac{z^2}{z^4 + xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{xy + yz + zx}{xyz}$$

Mặt khác ta lại có $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$

Do đó ta được $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} = \frac{3xyz}{xyz} = 3$

Suy ra $\frac{x^2}{x^4 + yz} + \frac{y^2}{y^4 + xz} + \frac{z^2}{z^4 + xy} \leq \frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

Cách 2: Từ giả thiết của bài toán ta được

$$3xyz = x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

Suy ra $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3$. Đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z}$, khi đó ta được $a + b + c \leq 3$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $\frac{a^2bc}{a^4+bc} + \frac{b^2ca}{b^4+ca} + \frac{c^2ab}{c^4+ab} \leq \frac{3}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $a^4 + bc \geq 2a^2\sqrt{bc}$

Do đó ta được $\frac{a^2bc}{a^4+bc} \leq \frac{a^2bc}{2a^2\sqrt{bc}} = \frac{\sqrt{bc}}{2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{a^2bc}{a^4+bc} + \frac{b^2ca}{b^4+ca} + \frac{c^2ab}{c^4+ab} \leq \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}{2}$

Dễ thấy $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq a + b + c \leq 3$ nên ta được $\frac{a^2bc}{a^4+bc} + \frac{b^2ca}{b^4+ca} + \frac{c^2ab}{c^4+ab} \leq \frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

Bài 63. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$2abc(a + b + c) \leq \frac{5}{9} + a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHKHTN Hà Nội năm 2013-2014

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức dạng $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ ta được

$$a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 \geq abc(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Bài toán quy về chứng minh $2abc(a + b + c) \leq \frac{5}{9} + abc(a^2b + b^2c + c^2a)$

Hay $2(a + b + c) \leq \frac{5}{9abc} + (a^2b + b^2c + c^2a)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $a^2b + \frac{1}{9b} \geq \frac{2a}{3}$; $b^2c + \frac{1}{9c} \geq \frac{2b}{3}$; $c^2a + \frac{1}{9a} \geq \frac{2c}{3}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$a^2b + b^2c + c^2a + \frac{1}{9a} + \frac{1}{9b} + \frac{1}{9c} \geq \frac{2a}{3} + \frac{2b}{3} + \frac{2c}{3}$$

Hay $a^2b + b^2c + c^2a + \frac{ab + bc + ca}{9abc} \geq \frac{2}{3}(a + b + c)$

Như vậy ta cần chỉ ra được $2(a + b + c) \leq \frac{4}{9abc} + \frac{2}{3}(a + b + c)$

Hay $\frac{4abc(a + b + c)}{3} \leq \frac{4}{9} \Leftrightarrow 3abc(a + b + c) \leq 1$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng vì $1 = (ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Cách 2: Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$2abc(a + b + c) + \frac{4}{9} \leq 1 + a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2$$

Đề ý là $1 = (ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)$

Như vậy ta quy bài toán về chứng minh $\frac{4}{9} \leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2$

Để ý đến giả thiết ta biến đổi tương đương bất đẳng thức trên thành

$$\begin{aligned} \frac{4}{9} &\leq a^2b^2(a^2+1) + b^2c^2(b^2+1) + c^2a^2(c^2+1) \\ \Leftrightarrow \frac{4}{9} &\leq a^2b^2(a+b)(a+c) + b^2c^2(b+c)(a+b) + c^2a^2(c+b)(c+a) \\ \Leftrightarrow 4 &\leq 9(a+b)(b+c)(c+a) \left(\frac{a^2b^2}{b+c} + \frac{b^2c^2}{c+a} + \frac{c^2a^2}{a+b} \right) \end{aligned}$$

Dễ dàng chứng minh được

$$9(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca) = 8(a+b+c)$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta lại có

$$\frac{a^2b^2}{b+c} + \frac{b^2c^2}{c+a} + \frac{c^2a^2}{a+b} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2(a+b+c)}$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$9(a+b)(b+c)(c+a) \left(\frac{a^2b^2}{b+c} + \frac{b^2c^2}{c+a} + \frac{c^2a^2}{a+b} \right) \geq 4$$

Hay bất đẳng thức trên được chứng minh.

Bài 64. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{(abc)^2} \geq 2(ab+bc+ca)$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nghệ An năm 2014-2015

Lời giải

Đặt $x = \sqrt[3]{a^2}$; $y = \sqrt[3]{b^2}$; $z = \sqrt[3]{c^2}$.

Suy ra $a^2 = x^3$; $b^2 = y^3$; $c^2 = z^3$, nên $a = \sqrt{x^3}$, $b = \sqrt{y^3}$, $c = \sqrt{z^3}$ với $x, y, z \geq 0$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2(\sqrt{x^3y^3} + \sqrt{y^3z^3} + \sqrt{z^3x^3})$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $xy(x+y) \geq 2xy\sqrt{xy} = 2\sqrt{x^3y^3}$

Tương tự ta có $yz(y+z) \geq 2\sqrt{y^3z^3}$; $zx(z+x) \geq 2\sqrt{z^3x^3}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) \geq 2(\sqrt{x^3y^3} + \sqrt{y^3z^3} + \sqrt{z^3x^3})$$

Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$$

Vì vai trò của các biến bình đẳng nên có thể giả sử $x \geq y \geq z \geq 0$

Khi đó $x(x-y)^2 + z(y-z)^2 + (z+x-y)(x-y)(y-z) \geq 0$

Suy ra $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 65. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn điều kiện $2c + b = abc$. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức: $S = \frac{3}{b+c-a} + \frac{4}{c+a-b} + \frac{5}{a+b-c}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bắc Ninh năm 2014-2015

Lời giải

Từ giả thiết ta có $a + b - c > 0$; $b + c - a > 0$; $c + a - b > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ ta được

$$S = \left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \right) + 2 \left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+b-c} \right) + 3 \left(\frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} \right) \\ \geq \frac{2}{c} + \frac{4}{b} + \frac{6}{a}$$

Mà $2c + b = abc \Leftrightarrow \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = a$ nên kết hợp với bất đẳng thức Cauchy ta được

$$S \geq 2a + \frac{6}{a} \geq 4\sqrt{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $4\sqrt{3}$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \sqrt{3}$.

Bài 66. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm thuộc đoạn $[0; 2]$. Tìm giá trị lớn

nhất của biểu thức: $P = \frac{8a^2 - 6ab + b^2}{4a^2 - 2ab + ac}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2014-2015

Lời giải

Gọi $x_1; x_2$ ($x_1 \leq x_2$) là hai nghiệm của phương trình đã cho. Theo định lí Vi-ét ta có

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{8a^2 - 6ab + b^2}{4a^2 - 2ab + ac} = \frac{8 - 6\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2}{4 - 2\frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{8 + 6(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2}{4 + 2(x_1 + x_2) + x_1 x_2}$$

$$\text{Do } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2 \Rightarrow x_1^2 \leq x_1 x_2; x_2^2 \leq 4 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq x_1 x_2 + 4$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 \leq 3x_1 x_2 + 4$$

$$\text{Do đó ta được } P \leq \frac{8 + 6(x_1 + x_2) + 3x_1 x_2 + 4}{4 + 2(x_1 + x_2) + x_1 x_2} = 3$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } x_1 = x_2 = 2 \text{ hoặc } x_1 = 0; x_2 = 2 \text{ hay } \begin{cases} c = -b = 4a \\ b = -2a; c = 0 \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3.

Bài 67. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \leq 2014$. Chứng minh rằng:

$$\frac{5a^3 - b^3}{ab + 3a^2} + \frac{5b^3 - c^3}{bc + 3b^2} + \frac{5c^3 - a^3}{ca + 3c^2} \leq 2014$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Lào Cai năm 2014-2015

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$, ta biến đổi tương đương bất đẳng thức bên như sau

$$a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \Leftrightarrow 5a^3 - b^3 \leq 6a^3 - ab(a+b) \Leftrightarrow 5a^3 - b^3 \leq a(6a^2 - ab - b^2)$$

$$\Leftrightarrow 5a^3 - b^3 \leq a(2a-b)(3a+b) \Leftrightarrow \frac{5a^3 - b^3}{ab + 3a^2} \leq 2a - b$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{5b^3 - c^3}{bc + 3b^2} \leq 2b - c$; $\frac{5c^3 - a^3}{ca + 3c^2} \leq 2c - a$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{5a^3 - b^3}{ab + 3a^2} + \frac{5b^3 - c^3}{bc + 3b^2} + \frac{5c^3 - a^3}{ca + 3c^2} \leq a + b + c \leq 2014$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{2014}{3}$

Bài 68. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x(x+1) + y(y+1) + z(z+1) \leq 18$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = \frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thái Bình năm 2014-2015

Lời giải

Ta biến đổi giả thiết

$$x(x+1) + y(y+1) + z(z+1) \leq 18 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 18 - (x+y+z)$$

Áp dụng một đánh giá quen thuộc ta được $(x+y+z)^2 \leq 54 - 3(x+y+z)$

Hay $0 < x+y+z \leq 6$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ ta được

$$B = \frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} \geq \frac{9}{2(x+y+z)+3} \geq \frac{9}{2.6+3} = \frac{3}{5}$$

Hay $B \geq \frac{3}{5}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $\frac{3}{5}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 2$

Bài 69. Cho a, b, c là ba số thực dương và có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thái Bình năm 2014-2015

Lời giải

Kết hợp với giả thiết ta có biến đổi sau

$$\frac{a-bc}{a+bc} = 1 - \frac{2bc}{a+bc} = 1 - \frac{2bc}{a(a+b+c)+bc} = 1 - \frac{2bc}{(a+b)(a+c)}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{b-ca}{b+ca} = 1 - \frac{2ca}{(b+c)(b+a)}$; $\frac{c-ab}{c+ab} = 1 - \frac{2ab}{(c+a)(b+c)}$.

Khi đó ta được

$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} = 3 - 2 \left(\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{ab}{(c+a)(b+c)} \right)$$

Ta quy bài toán về chứng minh $\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} & 4bc(b+c) + 4ca(c+a) + 4ab(a+b) \geq 3(a+b)(b+c)(c+a) \\ \Leftrightarrow & b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2 \geq 6abc \Leftrightarrow \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \geq 6 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 2\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c} - 2\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} - 2\right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 70. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $6a + 3b + 2c = abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$B = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{b^2+4}} + \frac{3}{\sqrt{c^2+9}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2014-2015

Lời giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành $\frac{6}{bc} + \frac{3}{ca} + \frac{2}{ab} = 1$. Đặt $a = \frac{1}{x}$; $b = \frac{2}{y}$; $c = \frac{3}{z}$, khi đó ta được $xy + yz + zx = 1$

Biểu thức B được viết lại thành $B = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}$

Để ý đến giả thiết $xy + yz + zx = 1$ ta có $x^2 + 1 = x^2 + xy + yz + zx = (x+y)(z+x)$

Khi đó ta được $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(z+x)}}$

Hoàn toàn tương tự ta được $B = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}} + \frac{z}{\sqrt{(z+x)(y+z)}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{(x+y)(z+x)}} & \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{z+x} \right) \\ \frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}} & \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x+y} + \frac{y}{y+z} \right) \\ \frac{z}{\sqrt{(x+z)(y+z)}} & \leq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z+x} + \frac{z}{y+z} \right) \end{aligned}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$B = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}} + \frac{z}{\sqrt{(z+x)(y+z)}} \leq \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của B là $\frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \sqrt{3}$; $b = 2\sqrt{3}$; $c = 3\sqrt{3}$

Bài 71. Cho các số thực a, b, c dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2 + a^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} > 2$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Quảng Trị năm 2014-2015

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2(b^2 + c^2)}} \geq \frac{2a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{b}{\sqrt{c^2 + a^2}} \geq \frac{2b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$; $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq \frac{2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được $\frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2 + a^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq 2$

Vì đẳng thức không xảy ra nên ta có bất đẳng thức $\frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2 + a^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} > 2$

Bài toán được chứng minh xong.

Bài 72. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{(b + c - a)^3}{2a} + \frac{(c + a - b)^3}{2b} + \frac{(a + b - c)^3}{2c}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Đắk Lắk, 2014 – 2015

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{(b + c - a)^3}{2a} + \frac{2a}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{3(b + c - a)}{2}$$

$$\frac{(c + a - b)^3}{2b} + \frac{2b}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{3(c + a - b)}{2}$$

$$\frac{(a + b - c)^3}{2c} + \frac{2c}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{3(a + b - c)}{2}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{(b + c - a)^3}{2a} + \frac{(c + a - b)^3}{2b} + \frac{(a + b - c)^3}{2c} + \frac{a + b + c}{2} + \frac{3}{2} \geq \frac{3(a + b + c)}{2}$$

Hay
$$\frac{(b + c - a)^3}{2a} + \frac{(c + a - b)^3}{2b} + \frac{(a + b - c)^3}{2c} \geq a + b + c - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2: Đặt $x = b + c - a$; $y = c + a - b$; $z = a + b - c$, khi đó ta viết lại giả thiết thành $x + y + z = 3$. Bài toán quy về tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{x^3}{2(y+z)} + \frac{y^3}{2(z+x)} + \frac{z^3}{2(x+y)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$A = \frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{2(xy+yz+zx)} \geq \frac{x^2+y^2+z^2}{2} \geq \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 73. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x > -1$; $y > -2$; $z > -3$ và $x + y + z = -5$. Chứng minh

rằng:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{4}{y+2} + \frac{9}{z+3} \geq 36$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Yên Bái năm 2014-2015

Lời giải

Do $x > -1$; $y > -2$; $z > -3$ nên $x+1 > 0$; $y+2 > 0$; $z+3 > 0$. Khi đó áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{1}{x+1} + \frac{4}{y+2} + \frac{9}{z+3} \geq \frac{(1+2+3)^2}{x+y+z+6} = 36$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x+y+z = -5 \\ \frac{1}{x+1} = \frac{2}{y+2} = \frac{3}{z+3} \end{cases}$$

Bài 74. Cho ba số thực x, y, z không âm thỏa mãn $x + y + z + xyz = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = xy + yz + zx$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Đại Học Vinh năm 2014-2015

Lời giải

Cách 1: Giả sử x là số nhỏ nhất trong ba số x, y, z. khi đó ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: $yz \leq 1$. Khi đó ta được $xy \leq 1$; $zx \leq 1$ nên $P \leq 3$

+ Trường hợp 2: $yz > 1$. Khi đó ta được $xyz \geq x$.

Do đó

$$\begin{aligned} 4 = x + y + z + xyz &\geq x + y + z + x \geq 2\sqrt{(x+y)(x+z)} \\ &= 2\sqrt{x^2 + xy + yz + zx} = 2\sqrt{x^2 + P} \geq 2\sqrt{P} \end{aligned}$$

Suy ra $P \leq 4$. Kết hợp các kết quả ta được giá trị nhỏ nhất của P là 4.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$; $y = z = 2$ và các hoán vị.

Cách 2: Giả sử x là số lớn nhất trong các số x, y, z.

Khi đó ta được $x + y + z \leq 3x$; $xyz \leq x^3$

Suy ra $x^3 + 3x \geq 4$ hay $(x-1)(x^2+x+4) \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$.

Ta có

$$\begin{aligned} P = xy + yz + zx &= x(x+y+z) + yz - x^2 = x(4-xyz) + yz - x^2 \\ &= -(x-2)^2 + 4 + yz(1-x^2) \leq 4 \end{aligned}$$

Suy ra $P \leq 4$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$; $y = z = 2$ và các hoán vị.

Bài 75. Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{b+3}} + \frac{b^2}{\sqrt{c+3}} + \frac{c^2}{\sqrt{a+3}} \geq \frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bắc Giang năm 2014-2015

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^2}{\sqrt{b+3}} + \frac{b^2}{\sqrt{c+3}} + \frac{c^2}{\sqrt{a+3}} = \frac{4a^2}{4\sqrt{b+3}} + \frac{4b^2}{4\sqrt{c+3}} + \frac{4c^2}{4\sqrt{a+3}} \geq \frac{4a^2}{b+7} + \frac{4b^2}{c+7} + \frac{4c^2}{a+7}$$

Áp dụng tiếp bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{4a^2}{b+7} + \frac{4b^2}{c+7} + \frac{4c^2}{a+7} \geq \frac{4(a+b+c)^2}{a+b+c+21} = \frac{4.9}{3+21} = \frac{3}{2}$$

Suy ra ta được

$$\frac{a^2}{\sqrt{b+3}} + \frac{b^2}{\sqrt{c+3}} + \frac{c^2}{\sqrt{a+3}} \geq \frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 76.

1) Cho a, b, c là ba số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq \frac{3}{4}(a + b + c)$$

2) Cho a, b, c là ba số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{ca}{b^2 + 2ca} + \frac{ab}{c^2 + 2ab} \leq 1$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Tin - Toán Tỉnh Tiền Giang năm 2014-2015

Lời giải

1) Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sqrt{ab} = 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{4}} \cdot b \leq \frac{a}{4} + b; \quad \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{\frac{a}{4}} \cdot b \cdot 4c \leq \frac{\frac{a}{4} + b + 4c}{3}$$

$$\text{Từ đó ta có } a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq a + \frac{a}{4} + b + \frac{\frac{a}{4} + b + 4c}{3} = \frac{4(a + b + c)}{3}.$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 4b = 16c$

2) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca} = 1$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Bài 77. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1-x^2}{x+yz} + \frac{1-y^2}{y+zx} + \frac{1-z^2}{z+xy} \geq 6$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Thành Phố Hà Nội năm 2014-2015

Lời giải

Áp dụng giả thiết ta được

$$\frac{1-x^2}{x+yz} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x+y)(z+x)} = \frac{(x+y)(y+z) + (z+x)(y+z)}{(x+y)(z+x)}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1-y^2}{y+zx} = \frac{(x+z)(x+y) + (x+z)(y+z)}{(x+y)(y+z)}$$

$$\frac{1-z^2}{z+xy} = \frac{(x+y)(y+z) + (x+y)(z+x)}{(y+z)(z+x)}$$

Đặt $a = (x+y)(y+z)$; $b = (y+z)(z+x)$; $c = (x+y)(z+x)$, khi đó ta viết lại được bất đẳng thức thành

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$; $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$; $\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 78. Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} \leq \frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHSPTP Hồ Chí Minh, 2014-2015
Lời giải

Áp dụng giả thiết ta được $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}} = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} = \sqrt{\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z} \right)$$

Do đó ta được $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z} \right)$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x+y} + \frac{y}{y+z} \right); \quad \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z+x} + \frac{z}{y+z} \right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{z+x} + \frac{y}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} + \frac{z}{y+z} \right) = \frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 79. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2} = 2014$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thanh Hóa, 2014 – 2015

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được $\sqrt{2(y^2 + z^2)} \geq x + y$ do đó ta được $\frac{x^2}{y+z} \geq \frac{x^2}{\sqrt{2(y^2 + z^2)}}$.

Hoàn toàn tương tự ta được

$$P \geq \frac{x^2}{\sqrt{2(y^2 + z^2)}} + \frac{y^2}{\sqrt{2(z^2 + x^2)}} + \frac{z^2}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}}$$

Đặt $a = \sqrt{y^2 + z^2}$; $b = \sqrt{z^2 + x^2}$; $c = \sqrt{x^2 + y^2}$, suy ra $a + b + c = 2014$

Từ đó ta được $x^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$; $y^2 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}$; $z^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$

Khi đó ta được $P \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{b} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c} \right)$

Xét biểu thức

$$\begin{aligned} Q &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{b} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c} \\ &= \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} + \frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} - (a + b + c) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \right) + \left(\frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} \right) - (a + b + c) \\ &\geq \frac{(a + b + c)^2}{a + b + c} + \frac{(a + b + c)^2}{a + b + c} - (a + b + c) = a + b + c = 2014 \end{aligned}$$

Do đó ta được $P \geq \frac{2014}{2\sqrt{2}}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{2014}{2\sqrt{2}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{2014}{3\sqrt{2}}$.

Bài 80. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ac + abc \leq 4$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \geq 2(ab + bc + ac)$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHKHTN Hà Nội năm 2015-2016

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy 4 số ta có :

$$4 \geq abc + ab + bc + ac \geq 4\sqrt[4]{a^3b^3c^3} \Rightarrow 1 \geq abc \Rightarrow a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Khi đó ta quy bài toán về chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 2(ab + bc + ac)$

Đặt $\sqrt[3]{a^2} = x, \sqrt[3]{b^2} = y, \sqrt[3]{c^2} = z$ ($x, y, z > 0$), bất đẳng thức được viết lại thành

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2\sqrt{x^3y^3} + 2\sqrt{z^3x^3} + 2\sqrt{z^3y^3}$$

Dễ dàng chứng minh được

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + xz(x+z)$$

$$xy(x+y) + yz(y+z) + xz(x+z) \geq 2\sqrt{x^3y^3} + 2\sqrt{y^3z^3} + 2\sqrt{z^3x^3}$$

Khi đó ta được

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2\sqrt{x^3y^3} + 2\sqrt{y^3z^3} + 2\sqrt{z^3x^3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 81. Giả sử x, y, z là các số thực lớn hơn 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{\sqrt{y+z-4}} + \frac{y}{\sqrt{z+x-4}} + \frac{z}{\sqrt{x+y-4}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHKHTN Hà Nội năm 2015-2016

Lời giải

Ta có $P = \frac{4x}{4\sqrt{y+z-4}} + \frac{4y}{4\sqrt{z+x-4}} + \frac{4z}{4\sqrt{x+y-4}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$4\sqrt{y+z-4} = 2\sqrt{4(y+z-4)} \leq y+z-4+4 = y+z$$

Áp dụng tương tự thì ta được

$$P = \frac{4x}{4\sqrt{y+z-4}} + \frac{4y}{4\sqrt{z+x-4}} + \frac{4z}{4\sqrt{x+y-4}} \geq 4 \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \right)$$

Dễ dàng chứng minh được $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$

Do đó ta được $P \geq 6$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 6.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 4$.

Bài 82. Tìm các số thực không âm a và b thỏa mãn:

$$\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) = \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right)$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐHSPT Hà Nội năm 2015-2016

Lời giải

Ta dễ dàng chứng minh được

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{4} \geq a \Leftrightarrow a^2 + b + \frac{3}{4} \geq a + b + \frac{1}{2}$$

$$\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 + \frac{1}{4} \geq b \Leftrightarrow b^2 + a + \frac{3}{4} \geq a + b + \frac{1}{2}$$

Áp dụng đánh giá trên và bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) \geq \left(a + b + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(2a + 2b + 1)^2$$

$$= \frac{\left[\left(2a + \frac{1}{2}\right) + \left(2b + \frac{1}{2}\right)\right]^2}{4} \geq \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Bài 83. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{y^2 z^2}{x(y^2 + z^2)} + \frac{z^2 x^2}{y(z^2 + x^2)} + \frac{x^2 y^2}{z(x^2 + y^2)}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Phú Thọ năm 2015-2016

Lời giải

Ta có
$$P = \frac{1}{x\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{y^2}\right)} + \frac{1}{y\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2}\right)} + \frac{1}{z\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)}$$

Đặt $a = \frac{1}{x}$; $b = \frac{1}{y}$; $c = \frac{1}{z}$ thì $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Khi đó ta được

$$P = \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} = \frac{a^2}{a(1 - a^2)} + \frac{b^2}{b(1 - b^2)} + \frac{c^2}{c(1 - c^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có

$$\begin{aligned} a^2(1 - a^2)^2 &= \frac{1}{2} \cdot 2a^2(1 - a^2)(1 - a^2) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2a^2 + 1 - a^2 + 1 - a^2}{3} \right)^3 = \frac{4}{27} \\ \Rightarrow a(1 - a^2) &\leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a(1 - a^2)} \geq \frac{3\sqrt{3} \cdot a^2}{2} \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{b^2}{b(1 - b^2)} \geq \frac{3\sqrt{3} \cdot b^2}{2}; \quad \frac{c^2}{c(1 - c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3} \cdot c^2}{2}$$

Cộng theo vế các kết quả trên ta được $P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \sqrt{3}$

Bài 84. Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$T = \frac{a}{b^4 + c^4 + a} + \frac{b}{a^4 + c^4 + b} + \frac{c}{a^4 + b^4 + c}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nam Định năm 2015-2016

Lời giải

Ta có $2(b^4 + c^4) \geq (b^2 + c^2)^2 \geq 2bc(b^2 + c^2) \Rightarrow b^4 + c^4 \geq bc(b^2 + c^2)$

Do đó ta được

$$\frac{a}{b^4 + c^4 + a} \leq \frac{a}{bc(b^2 + c^2) + a} = \frac{a^2}{abc(b^2 + c^2) + a^2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{b}{a^4 + c^4 + b} \leq \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Cộng theo vế các kết quả trên ta được $T \leq 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của T là 1. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 85. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{4a^2 + (b-c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{4b^2 + (c-a)^2}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{4c^2 + (a-b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2} \geq 3$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nam Định năm 2015-2016

Lời giải

Ta có

$$2 - \frac{4a^2 + (b-c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2(2a^2 + b^2 + c^2) - (4a^2 + b^2 + c^2 - 2bc)}{2a^2 + b^2 + c^2} = \frac{(b+c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2}$$

Áp dụng tương tự ta viết lại được bất đẳng thức

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{(c+a)^2}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{(a+b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2} \leq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{(b+c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} &\leq \frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{c^2 + a^2} \\ \frac{(c+a)^2}{2b^2 + c^2 + a^2} &\leq \frac{c^2}{b^2 + c^2} + \frac{a^2}{b^2 + a^2} \\ \frac{(a+b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2} &\leq \frac{a^2}{c^2 + a^2} + \frac{b^2}{c^2 + b^2} \end{aligned}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{(c+a)^2}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{(a+b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2} \leq 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Bài 86. Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3 + 4ab \leq 12$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2015ab \leq 2016$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Hải Dương năm 2015-2016

Lời giải

Ta có $12 \geq (a+b)^3 + 4ab \geq (2\sqrt{ab})^3 + 4ab$. Đặt $t = \sqrt{ab}$, $t > 0$ thì

$$12 \geq 8t^3 + 4t^2 \Leftrightarrow 2t^3 + t^2 - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 + 3t + 3) \leq 0$$

Do $2t^2 + 3t + 3 > 0, \forall t$ nên $t-1 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$. Vậy $0 < ab \leq 1$

Dễ dàng chứng minh được $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \leq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}, \forall a, b > 0, ab \leq 1$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} &\leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{ab}-a}{(1+a)(1+\sqrt{ab})} + \frac{\sqrt{ab}-b}{(1+b)(1+\sqrt{ab})} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{1+\sqrt{ab}} \right) \left(\frac{\sqrt{a}}{1+a} - \frac{\sqrt{b}}{1+b} \right) &\leq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2 (\sqrt{ab}-1)}{(1+\sqrt{ab})(1+a)(1+b)} \leq 0 \end{aligned}$$

Do $0 < ab \leq 1$ nên bất đẳng thức này đúng.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\frac{2}{1+\sqrt{ab}} + 2015ab \leq 2016, \forall a, b > 0, ab \leq 1$

Đặt $t = \sqrt{ab}, 0 < t \leq 1$ ta được $\frac{2}{1+t} + 2015t^2 \leq 2016$

$$2015t^3 + 2015t^2 - 2016t - 2014 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(2015t^2 + 4030t + 2014) \leq 0$$

Do $0 < t \leq 1$ nên bất đẳng thức trên đúng.

Vậy $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2015ab \leq 2016$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Bài 87. Cho a, b, c là các số thực bất kỳ. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq \frac{3(a + b + c)^2}{4}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Nghệ An năm 2015-2016

Lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(2a^2 + 2)(2b^2 + 2)(2c^2 + 2) \geq 3(\sqrt{2}a + \sqrt{2}b + \sqrt{2}c)^2$$

Đặt $x = a\sqrt{2}; y = b\sqrt{2}; z = c\sqrt{2}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(x^2 + 2)(y^2 + 2)(z^2 + 2) \geq 3(x + y + z)^2$$

Ta có $(x^2 + 2)(y^2 + 2) = x^2y^2 + 1 + 2x^2 + 2y^2 + 3$

$$\text{Suy ra } (x^2 + 2)(y^2 + 2) \geq 2xy + x^2 + y^2 + \frac{(x+y)^2}{2} + 3 = \frac{3}{2}[(x+y)^2 + 2]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x^2 + 2)(y^2 + 2)(z^2 + 2) &\geq \frac{3}{2}[(x+y)^2 z^2 + 4 + 2(x+y)^2 + 2z^2] \\ &\geq \frac{3}{2}[4(x+y)z + 2(x+y)^2 + 2z^2] = 3(x+y+z)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta được } (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq \frac{3(a + b + c)^2}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$4a^2b^2c^2 + 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + a^2 + b^2 + c^2 + 4 \geq 6(ab + bc + ca)$$

Theo nguyên lý Dirichlet ta giả sử

$$\begin{aligned} (2a^2 - 1)(2b^2 - 1) &\geq 0 \Leftrightarrow c^2(2a^2 - 1)(2b^2 - 1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 4a^2b^2c^2 + c^2 \geq 2a^2c^2 + 2b^2c^2 \end{aligned}$$

Khi đó ta quy bài toán về chứng minh

$$4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + a^2 + b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 4 \geq 6(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (2ab-1)^2 + \frac{3(2bc-1)^2 + 3(2ca-1)^2}{2} \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 88. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Chứng minh rằng:

a) $a + b + c \geq 3abc$

b) $\sqrt{\frac{a^3}{1+3bc}} + \sqrt{\frac{b^3}{1+3ca}} + \sqrt{\frac{c^3}{1+3ab}} \geq \frac{3}{2}$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu, 2015 – 2016

Lời giải

a) Giả thiết của bài toán được viết lại thành

$$abc(a + b + c) = ab + bc + ca$$

Mà ta lại có
$$ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3}$$

Do đó ta được
$$abc(a + b + c) \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} \Leftrightarrow 3abc \leq a + b + c$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

b) Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\sqrt{\frac{a^4}{a + 3abc}} + \sqrt{\frac{b^4}{b + 3abc}} + \sqrt{\frac{c^4}{c + 3abc}} \geq \frac{3}{2}$$

Áp dụng kết quả câu a ta được

$$\sqrt{\frac{a^4}{a + 3abc}} + \sqrt{\frac{b^4}{b + 3abc}} + \sqrt{\frac{c^4}{c + 3abc}} \geq \frac{a^2}{\sqrt{2a + b + c}} + \frac{b^2}{\sqrt{a + 2b + c}} + \frac{c^2}{\sqrt{a + b + 2c}}$$

Ta cần chỉ ra được

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a + b + c}} + \frac{b^2}{\sqrt{a + 2b + c}} + \frac{c^2}{\sqrt{a + b + 2c}} \geq \frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{\sqrt{2a + b + c}} + \frac{b^2}{\sqrt{a + 2b + c}} + \frac{c^2}{\sqrt{a + b + 2c}} \geq \frac{(a + b + c)^2}{\sqrt{2a + b + c} + \sqrt{a + 2b + c} + \sqrt{a + b + 2c}}$$

Mà theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\sqrt{2a + b + c} + \sqrt{a + 2b + c} + \sqrt{a + b + 2c} \leq \sqrt{12(a + b + c)}$$

Suy ra

$$\frac{(a + b + c)^2}{\sqrt{2a + b + c} + \sqrt{a + 2b + c} + \sqrt{a + b + 2c}} \geq \frac{(a + b + c)^2}{2\sqrt{3(a + b + c)}} = \frac{(a + b + c)\sqrt{a + b + c}}{2\sqrt{3}}$$

Cũng từ giả thiết $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ta suy ra được

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c} \Rightarrow a + b + c \geq 3$$

Do đó $\frac{(a+b+c)\sqrt{a+b+c}}{2\sqrt{3}} \leq \frac{3}{2}$.

Từ các kết quả trên ta được $\frac{a^2}{\sqrt{2a+b+c}} + \frac{b^2}{\sqrt{a+2b+c}} + \frac{c^2}{\sqrt{a+b+2c}} \geq \frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 89. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \geq \frac{3}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thái Bình năm 2015-2016

Lời giải

Theo một đánh giá quen thuộc ta được

$$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 9 \Rightarrow a+b+c \geq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{1}{1+a^2} = 1 - \frac{a^2}{1+a^2} \geq 1 - \frac{a^2}{2a} = 1 - \frac{a}{2}$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{1}{b^2+1} \geq 1 - \frac{b}{2}; \frac{1}{c^2+1} \geq 1 - \frac{c}{2}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \geq 3 - \frac{a+b+c}{2} \geq \frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 90. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{9}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{9}{2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Thái Bình năm 2015-2016

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c} = a+b+c$$

Mà theo một đánh giá quen thuộc thì $a+b+c \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)}$

Do đó ta được

$$\frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{9}{2(ab+bc+ca)} \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)} + \frac{9}{2(ab+bc+ca)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{3(ab+bc+ca)} + \frac{9}{2(ab+bc+ca)} \\ &= \frac{\sqrt{3(ab+bc+ca)}}{2} + \frac{\sqrt{3(ab+bc+ca)}}{2} + \frac{9}{2(ab+bc+ca)} \geq 3\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{9}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{9}{2}$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 91. Cho a, b, c số thực dương thỏa mãn $(a + b)(b + c)(c + a) = 1$. Chứng minh rằng:

$$ab + ac + bc \leq \frac{3}{4}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán TP Hà Nội năm 2015-2016

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được $(a + b)(b + c)(c + a) \geq \frac{8}{9}(a + b + c)(ab + bc + ca)$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$9(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8(a + b + c)(ab + bc + ca)$$

Ta có đẳng thức $(a + b + c)(ab + bc + ca) = (a + b)(b + c)(c + a) + abc$

Nên ta được

$$\begin{aligned} 9(a + b)(b + c)(c + a) &\geq 8(a + b)(b + c)(c + a) + 8abc \\ \Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) &\geq 8abc \end{aligned}$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng. Do đó bất đẳng thức trên đúng.

Áp dụng bất đẳng thức trên và kết hợp với giả thiết ta được

$$1 \geq \frac{8}{9}(a + b + c)(ab + bc + ca)$$

Lại có
$$a + b + c \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)}$$

Nên ta được

$$1 \geq \frac{8}{9}\sqrt{3(ab + bc + ca)}(ab + bc + ca) \Leftrightarrow \left(\frac{9}{8}\right)^2 \geq 3(ab + bc + ca)^3$$

Hay
$$ab + bc + ca \leq \frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Bài 92. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bạc Liêu năm 2015-2016

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a^5 + \frac{1}{a} \geq 2a^2; b^5 + \frac{1}{b} \geq 2b^2; c^5 + \frac{1}{c} \geq 2c^2$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

Dễ thấy
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 3$$

Do đó ta được
$$a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 93. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3\sqrt{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}} + \frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}} + \frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}} \geq \frac{3}{4}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bình Thuận năm 2015-2016

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}} + \frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}} + \frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}} \\ \geq \frac{9}{\sqrt{x(3y+5z)} + \sqrt{y(3z+5x)} + \sqrt{z(3x+5y)}} \end{aligned}$$

Mà theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{x(3y+5z)} + \sqrt{y(3z+5x)} + \sqrt{z(3x+5y)} \\ \leq \sqrt{3[x(3y+5z) + y(3z+5x) + z(3x+5y)]} = \sqrt{24(xy + yz + zx)} \end{aligned}$$

Mà theo một đánh giá quen thuộc thì $3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2 = 18$

Do đó ta được

$$\sqrt{x(3y+5z)} + \sqrt{y(3z+5x)} + \sqrt{z(3x+5y)} \leq \sqrt{8.18} = 12$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}} + \frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}} + \frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}} \geq \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \sqrt{2}$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$2\sqrt{8x(3y+5z)} \leq 8x + 3y + 5z$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{8x(3y+5z)}} \geq \frac{4\sqrt{2}}{8x + 3y + 5z}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}} \geq \frac{4\sqrt{2}}{8y + 3z + 5x}; \quad \frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}} \geq \frac{4\sqrt{2}}{8z + 3x + 5y}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}} + \frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}} + \frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}} \\ \geq \frac{4\sqrt{2}}{8x + 3y + 5z} + \frac{4\sqrt{2}}{8y + 3z + 5x} + \frac{4\sqrt{2}}{8z + 3x + 5y} \end{aligned}$$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{4\sqrt{2}}{8x + 3y + 5z} + \frac{4\sqrt{2}}{8y + 3z + 5x} + \frac{4\sqrt{2}}{8z + 3x + 5y} \geq \frac{9.4\sqrt{2}}{16(x + y + z)} = \frac{36\sqrt{2}}{16.3\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{x(3y+5z)}} + \frac{1}{\sqrt{y(3z+5x)}} + \frac{1}{\sqrt{z(3x+5y)}} \geq \frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \sqrt{2}$.

Bài 94. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{ab + bc + ca}{2} + \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán ĐH Vinh năm 2015-2016

Lời giải

Từ giả thiết $a + b + c = 2$ ta được $ab + bc + ca = \frac{4 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$

Do đó biểu thức P được viết lại thành

$$P = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{4 - (a^2 + b^2 + c^2)}{4} + \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Đặt $t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \leq t \leq 2$. Khi đó ta được

$$P = t + \frac{1}{t^2} - \frac{t^2}{4} + 1 = \frac{t}{8} + \frac{t}{8} + \frac{1}{2t^2} + \frac{3t}{4} - \frac{t^2}{4} + 1 \geq \frac{3}{4} + \frac{(t-1)(2-1)}{4} + \frac{3}{2} \geq \frac{9}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 0$; $c = 2$ và các hoán vị.

Bài 95. a) Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\sqrt{(1+a)(1+b)} \geq 1 + \sqrt{ab}$

b) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + b = ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^2 + 2a} + \frac{1}{b^2 + 2b} + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bình Phước năm 2015-2016

Lời giải

a) Bình phương hai vế ta được

$$(1+a)(1+b) = 1 + 2\sqrt{ab} + ab \Leftrightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

b) Áp dụng bất đẳng thức câu a và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ ta được

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{4}{a^2 + 2a + b^2 + 2b} + 1 + ab = \frac{4}{(a+b)^2 - 2ab + 2(a+b)} + 1 + ab = \frac{4}{a^2b^2} + ab + 1 \\ &= \left(\frac{4}{a^2b^2} + \frac{ab}{16} + \frac{ab}{16} \right) + \frac{7ab}{8} + 1 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{4 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{16}} + \frac{7ab}{8} + 1 = \frac{7}{4} + \frac{7ab}{8} \end{aligned}$$

Mặt khác từ giả thiết ta có $ab = a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \geq 4$

Do đó ta được $P \geq \frac{7}{4} + \frac{7 \cdot 4}{8} = \frac{21}{4}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{21}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2$

Bài 96. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} + \frac{ab+bc+ca}{2} \geq 3$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Ninh Bình năm 2015-2016

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$3 \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \Rightarrow a+b+c \geq 3$$

Biến đổi và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}; \quad \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$$

Khi đó ta được

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} + \frac{ab+bc+ca}{2} \geq a+b+c - \frac{ab+bc+ca}{2} + \frac{ab+bc+ca}{2} \geq 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 97. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c \geq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)} + \frac{b^4}{(b+2)(c+2)} + \frac{c^4}{(c+2)(a+2)} \geq \frac{1}{3}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Bắc Giang năm 2015-2016

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)} + \frac{a+2}{27} + \frac{b+2}{27} + \frac{1}{9} \geq \frac{4a}{9}$$

$$\frac{b^4}{(b+2)(c+2)} + \frac{b+2}{27} + \frac{c+2}{27} + \frac{1}{9} \geq \frac{4b}{9}$$

$$\frac{c^4}{(c+2)(a+2)} + \frac{c+2}{27} + \frac{a+2}{27} + \frac{1}{9} \geq \frac{4c}{9}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)} + \frac{b^4}{(b+2)(c+2)} + \frac{c^4}{(c+2)(a+2)} + \frac{2(a+b+c)}{27} + \frac{1}{3} \geq \frac{4(a+b+c)}{3}$$

$$\text{Hay} \quad \frac{a^4}{(a+2)(b+2)} + \frac{b^4}{(b+2)(c+2)} + \frac{c^4}{(c+2)(a+2)} \geq \frac{10(a+b+c)}{27} - \frac{21}{27} = \frac{1}{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)} + \frac{b^4}{(b+2)(c+2)} + \frac{c^4}{(c+2)(a+2)} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{ab+bc+ca+4(a+b+c)+12}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\begin{aligned} 3(a^2+b^2+c^2)^2 &\geq ab+bc+ca+4(a+b+c)+12 \\ \Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2)^2 &\geq ab+bc+ca+24 \end{aligned}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$3(a^2+b^2+c^2)^2 \geq (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2) \geq 9(a^2+b^2+c^2)$$

Lại thấy $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$; $8(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{8(a+b+c)^2}{3} \geq 8.3 = 24$

Cộng theo về hai bất đẳng thức trên ta được

$$3(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 9(a^2 + b^2 + c^2) \geq ab + bc + ca + 24$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 98. Cho ba số thực $x; y; z > 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^4}{(y-1)^2} + \frac{y^4}{(z-1)^2} + \frac{z^4}{(x-1)^2} \geq 48$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Tiền Giang năm 2015-2016

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta được

$$\frac{x^4}{(y-1)^2} + \frac{y^4}{(z-1)^2} + \frac{z^4}{(x-1)^2} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{z-1} + \frac{z^2}{x-1} \right)^2$$

Ta quy bài toán về chứng minh $\left(\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{z-1} + \frac{z^2}{x-1} \right)^2 \geq 144$

Hay

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{z-1} + \frac{z^2}{x-1} \geq 12$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski dạng phân thức ta được

$$\frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{z-1} + \frac{z^2}{x-1} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z-3}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $\frac{(x+y+z)^2}{x+y+z-3} \geq 12$ hay

$$\begin{aligned} (x+y+z)^2 &\geq 12(x+y+z) - 36 \Leftrightarrow (x+y+z)^2 - 12(x+y+z) + 36 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x+y+z-6)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$.

Cách 2: Ta đi chứng minh bất đẳng thức: Với $a > 1$ thì $a^4 \geq 16(a-1)^2$

Thật vậy

$$a^4 \geq 16(a-1)^2 \Leftrightarrow a^4 - 16a^2 + 32a - 16 \geq 0 \Leftrightarrow (a-2)^2(a^2 + 4a - 4) \geq 0$$

Vì $a > 1$ nên $a^2 + 4a - 4 > 0$, do đó bất đẳng thức trên đúng.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được $y^4 \geq 16(y-1)^2$ do đó $\frac{x^4}{(y-1)^2} \geq \frac{16x^4}{y^4}$.

Hoàn ta tương tự ta được

$$\frac{x^4}{(y-1)^2} + \frac{y^4}{(z-1)^2} + \frac{z^4}{(x-1)^2} \geq 16 \left(\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{z^4} + \frac{z^4}{x^4} \right) \geq 48$$

Vì theo bất đẳng thức Cauchy thì $\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{z^4} + \frac{z^4}{x^4} \geq 3$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 99. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{z(z+x)} + \frac{y}{x(x+y)} + \frac{z}{x(x+z)}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Cần Thơ năm 2015-2016

Lời giải

Biến đổi giả thiết ta được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Đặt $a = \frac{1}{x}$; $b = \frac{1}{y}$; $c = \frac{1}{z}$, khi đó giả thiết trở thành $a + b + c = 2$.

Ta viết lại biểu thức P là $P = \frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b^2+2c} + \frac{c^2}{c+2a}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$P = \frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b^2+2c} + \frac{c^2}{c+2a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{3} = \frac{2}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{2}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{3}{2}$

Bài 100. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2+a^2b} + \frac{1}{2+b^2c} + \frac{1}{2+c^2a} \geq 1$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Vĩnh Phúc năm 2015-2016

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^2b}{2+a^2b} + \frac{b^2c}{2+b^2c} + \frac{c^2a}{2+c^2a} \leq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $2 + a^2b = 1 + 1 + a^2b \geq 3\sqrt[3]{a^2b}$

Do đó ta được $\frac{a^2b}{2+a^2b} \leq \frac{a^2b}{3\sqrt[3]{a^2b}} = \frac{a\sqrt[3]{ab^2}}{3}$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{a^2b}{2+a^2b} + \frac{b^2c}{2+b^2c} + \frac{c^2a}{2+c^2a} \leq \frac{a\sqrt[3]{ab^2} + b\sqrt[3]{bc^2} + c\sqrt[3]{ca}}{3}$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được $\sqrt[3]{ab^2} \leq \frac{a+b+b}{3} = \frac{a+2b}{3}$

Suy ra $a\sqrt[3]{ab^2} \leq \frac{a(a+2b)}{3} = \frac{a^2+2ab}{3}$

Hoàn toàn tương tự ta được $a\sqrt[3]{ab^2} + b\sqrt[3]{bc^2} + c\sqrt[3]{ca} \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$

Từ đó ta được $\frac{a^2b}{2+a^2b} + \frac{b^2c}{2+b^2c} + \frac{c^2a}{2+c^2a} \leq 1$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 101. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 11$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{5a + 5b + 2c}{\sqrt{12(a^2 + 11)} + \sqrt{12(b^2 + 11)} + \sqrt{c^2 + 11}}$$

Trích đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tỉnh Quảng Bình năm 2015-2016

Lời giải

Để thấy $a^2 + 11 = a^2 + ab + ca + ca = (a + b)(a + c)$, do đó ta được

$$\sqrt{12(a^2 + 11)} = 2\sqrt{3(a + b)(a + c)} \leq 3(a + b) + (a + c) = 4a + 3b + c$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\sqrt{12(b^2 + 11)} = 2\sqrt{3(a + b)(b + c)} \leq 3(a + b) + (b + c) = 3a + 4b + c$$

$$\sqrt{c^2 + 11} = \sqrt{(c + a)(b + c)} \leq \frac{c + a + b + c}{2} = \frac{a + b + 2c}{2}$$

Khi đó ta được
$$\sqrt{12(a^2 + 11)} + \sqrt{12(b^2 + 11)} + \sqrt{c^2 + 11} \leq \frac{15a}{2} + \frac{15b}{2} + 3c$$

Suy ra
$$P \geq \frac{5a + 5b + 2c}{\frac{15a}{2} + \frac{15b}{2} + 3c} = \frac{10a + 10b + 4c}{15a + 15b + 6c} = \frac{2}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{2}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2a + 3b = 3a + 2b = c \\ ab + bc + ca = 11 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1; c = 5$$

Bài 102. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 8a^3}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 8b^3}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 8c^3}} \geq 1$$

Trích đề thi HSG tỉnh Nam Định năm 2011-2012

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$1 + 8a^3 = (1 + 2a)(1 - 2a + 4a^2) \leq \left(\frac{1 + 2a + 1 - 2a + 4a^2}{2} \right)^2 = (1 + 2a^2)^2$$

Do đó ta được $\frac{1}{\sqrt{1 + 8a^3}} \geq \frac{1}{1 + 2a^2}$. Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 8b^3}} \geq \frac{1}{1 + 2b^2}; \frac{1}{\sqrt{1 + 8c^3}} \geq \frac{1}{1 + 2c^2}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 8a^3}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 8b^3}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 8c^3}} \geq \frac{1}{1 + 2a^2} + \frac{1}{1 + 2b^2} + \frac{1}{1 + 2c^2}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\frac{1}{1+2a^2} + \frac{1}{1+2a^2} + \frac{1}{1+2a^2} \geq \frac{9}{3+2(a^2+b^2+c^2)} = 1$$

Suy ra
$$\frac{1}{\sqrt{1+8a^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+8b^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+8c^3}} \geq 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra hi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 103. Cho x, y thỏa mãn $\begin{cases} x, y \in \mathbb{R} \\ 0 \leq x, y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$. Chứng minh rằng:
$$\frac{\sqrt{x}}{1+y} + \frac{\sqrt{y}}{1+x} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Thái Bình năm 2011-2012

Lời giải

Từ giả thiết suy ra

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{y}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\sqrt{xy}$$

$$x\sqrt{x} \leq x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}; y\sqrt{y} \leq y \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$$

Lại có

$$\begin{cases} \sqrt{xy} \leq xy + \frac{1}{4} \\ \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{xy} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(xy + \frac{1}{4}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{xy} \leq \frac{\sqrt{2}}{6}(x+y) \end{cases}$$

Từ các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + \sqrt{x} + \sqrt{y} &\leq \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(xy + \frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{6}(x+y) \\ &\leq \frac{2\sqrt{2}(1+x+y+xy)}{3} \end{aligned}$$

Suy ra
$$\frac{\sqrt{x}}{1+y} + \frac{\sqrt{y}}{1+x} = \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}}{1+x+y+xy} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$

Bài 104. Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn điều kiện

Chứng minh rằng:
$$\begin{aligned} abc + bcd + cda + dab &= a + b + c + d + \sqrt{2012} \\ (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1) &\geq 2012 \end{aligned}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Vĩnh Phúc năm 2011-2012

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} 2012 &= (abc + bcd + cda + dab - a - b - c - d)^2 \\ &= \left[(ab-1)(c+d) + (cd-1)(a+b) \right]^2 \end{aligned}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} \left[(ab-1)(c+d) + (cd-1)(a+b) \right]^2 &\leq \left[(ab-1)^2 + (a+b)^2 \right] \left[(cd-1)^2 + (c+d)^2 \right] \\ &= (a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1)(c^2d^2 + c^2 + d^2 + 1) = (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1) \end{aligned}$$

Suy ra $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1) \geq 2012$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 105. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc + a + b = 3ab$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b+1}} + \sqrt{\frac{b}{bc+c+1}} + \sqrt{\frac{a}{ca+c+1}} \geq \sqrt{3}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Phú Thọ năm 2011-2012

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + c = 3$. Ta viết lại vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b+1}} + \sqrt{\frac{b}{bc+c+1}} + \sqrt{\frac{a}{ca+c+1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab}}} + \frac{1}{\sqrt{c + \frac{c}{b} + \frac{1}{b}}} + \frac{1}{\sqrt{c + \frac{c}{a} + \frac{1}{a}}}$$

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = c$. Khi đó giả thiết trở thành $x + y + z = 3$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{1}{\sqrt{x+y+xy}} + \frac{1}{\sqrt{y+z+yz}} + \frac{1}{\sqrt{z+x+zx}} \geq \sqrt{3}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x+y+xy}} + \frac{1}{\sqrt{y+z+yz}} + \frac{1}{\sqrt{z+x+zx}} \geq \frac{9}{\sqrt{x+y+xy} + \sqrt{y+z+yz} + \sqrt{z+x+zx}}$$

Đặt $A = \sqrt{x+y+xy} + \sqrt{y+z+yz} + \sqrt{z+x+zx}$

Theo Bunhiacopxki ta lại có ta có:

$$A^2 \leq 3(6 + xy + yz + zx) = 3[6 + xy + z(3-z)]$$

Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy ta được $xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2 = \frac{(3-z)^2}{4}$

Khi đó ta phải chứng minh

$$A^2 \leq 3 \left[6 + \frac{(3-z)^2}{4} + z(3-z) \right] = \frac{-3(z-1)^2}{4} + 27 \leq 27$$

Hay $A \leq 3\sqrt{3}$. Do đó ta được

$$\frac{9}{\sqrt{x+y+xy} + \sqrt{y+z+yz} + \sqrt{z+x+zx}} \geq \frac{9}{3\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{x+y+xy}} + \frac{1}{\sqrt{y+z+yz}} + \frac{1}{\sqrt{z+x+zx}} \geq \sqrt{3}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 106. Cho ba số dương a, b, c tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{b^3(c+2a)} + \frac{b^4}{c^3(a+2b)} + \frac{c^4}{a^3(b+2c)} \geq 1$$

Trích đề thi HSG Thành phố Hải Phòng năm 2011-2012

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^4}{b^3(c+2a)} + \frac{2a+c}{9a} + \frac{1}{3} &\geq \frac{a}{b} \\ \frac{b^4}{c^3(a+2b)} + \frac{2b+a}{9b} + \frac{1}{3} &\geq \frac{b}{c} \\ \frac{c^4}{a^3(b+2c)} + \frac{2c+b}{9c} + \frac{1}{3} &\geq \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^4}{b^3(c+2a)} + \frac{b^4}{c^3(a+2b)} + \frac{c^4}{a^3(b+2c)} + \frac{c}{9a} + \frac{a}{9b} + \frac{b}{9c} + \frac{5}{3} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

Hay

$$\frac{a^4}{b^3(c+2a)} + \frac{b^4}{c^3(a+2b)} + \frac{c^4}{a^3(b+2c)} \geq \frac{8}{9} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) - \frac{5}{3}$$

Để ý ta lại có $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$. Do đó ta được

$$\frac{a^4}{b^3(c+2a)} + \frac{b^4}{c^3(a+2b)} + \frac{c^4}{a^3(b+2c)} \geq \frac{8}{3} - \frac{5}{3} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} \left[\frac{a^4}{b^3(c+2a)} + \frac{b^4}{c^3(a+2b)} + \frac{c^4}{a^3(b+2c)} \right] \left[b(c+2a) + c(a+2b) + a(b+2c) \right] \\ \geq \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \right)^2 \end{aligned}$$

Hay

$$\left[\frac{a^4}{b^3(c+2a)} + \frac{b^4}{c^3(a+2b)} + \frac{c^4}{a^3(b+2c)} \right] \left[3(ab+bc+ca) \right] \geq \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \right)^2$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a+b+c \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)}$$

Do đó ta được

$$\left[\frac{a^4}{b^3(c+2a)} + \frac{b^4}{c^3(a+2b)} + \frac{c^4}{a^3(b+2c)} \right] \left[3(ab+bc+ca) \right] \geq \left[\sqrt{3(ab+bc+ca)} \right]^2$$

Hay

$$\frac{a^4}{b^3(c+2a)} + \frac{b^4}{c^3(a+2b)} + \frac{c^4}{a^3(b+2c)} \geq 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Bài 107. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 671$. Chứng minh rằng :

$$\frac{x}{x^2 - yz + 2013} + \frac{y}{y^2 - zx + 2013} + \frac{z}{z^2 - xy + 2013} \geq \frac{1}{x + y + z}$$

Trích đề thi HSG Thành Phố Hà Nội năm 2011-2012

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 - yz + 2013} + \frac{y}{y^2 - zx + 2013} + \frac{z}{z^2 - xy + 2013} \\ \geq \frac{(x + y + z)^2}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2013(x + y + z)} \end{aligned}$$

Biến đổi mẫu số bên vế phải ta được

$$\begin{aligned} & x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2013(x + y + z) \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3(xy + yz + zx)(x + y + z) \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) = (x + y + z)^3 \end{aligned}$$

Suy ra ta có

$$\frac{x}{x^2 - yz + 2013} + \frac{y}{y^2 - zx + 2013} + \frac{z}{z^2 - xy + 2013} \geq \frac{(x + y + z)^2}{(x + y + z)^3} = \frac{1}{x + y + z}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{\sqrt{2013}}{3}$.

Bài 108. a) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx + x + y + z = 6$. Chứng minh rằng:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$$

b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + a^2}$$

Trích đề thi HSG Tỉnh Nghệ An năm 2011-2012

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$x^2 + y^2 \geq 2xy; y^2 + z^2 \geq 2yz; z^2 + x^2 \geq 2zx$$

$$x^2 + 1 \geq 2x; y^2 + 1 \geq 2y; z^2 + 1 \geq 2z$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$3(x^2 + y^2 + z^2) + 3 \geq 2(xy + yz + zx + x + y + z) = 12$$

Hay $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} = \frac{a^3 + ab^2 - ab^2}{a^2 + b^2} = a - \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2ab} = a - \frac{b}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{b^3}{b^2 + c^2} \geq b - \frac{c}{2}; \frac{c^3}{c^2 + a^2} \geq c - \frac{a}{2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$P = \frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + a^2} \geq \frac{a + b + c}{2} = \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 109. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2012\sqrt{2011}} < 2$

Trích đề thi HSG Tỉnh Quảng Bình năm 2011-2012

Lời giải

Xét biểu thức $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Dễ thấy $2(n+1) - 2\sqrt{n(n+1)} > 1$. Thật vậy, ta có

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 > 0 \Leftrightarrow n+1 - 2\sqrt{n(n+1)} + n > 0 \Leftrightarrow 2(n+1) - 2\sqrt{n(n+1)} > 1$$

$$\text{Khi đó ta có } \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < \frac{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

Khi đó ta được

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2012\sqrt{2011}} \\ & < 2\left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2011}} - \frac{1}{\sqrt{2012}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2012}}\right) < 2 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 110. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F = \frac{x^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{y^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{z^4}{(z^2 + x^2)(z + x)}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Hà Tĩnh năm 2012-2013

Lời giải

Ta có

$$\frac{x^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} - \frac{y^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} = x - y$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{y^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} - \frac{z^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} = y - z$$

$$\frac{z^4}{(z^2 + x^2)(z + x)} - \frac{x^4}{(z^2 + x^2)(z + x)} = z - x$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq (a + b)^2$ ta được

$$\begin{aligned}
F &= \frac{x^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{y^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{z^4}{(z^2 + x^2)(z + x)} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{x^4 + y^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{y^4 + z^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{z^4 + x^4}{(z^2 + x^2)(z + x)} \right) \\
&\geq \frac{1}{4} \left(\frac{(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{(y^2 + z^2)^2}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{(z^2 + x^2)^2}{(z^2 + x^2)(z + x)} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{(x^2 + y^2)}{x + y} + \frac{(y^2 + z^2)}{y + z} + \frac{(z^2 + x^2)}{z + x} \right) \\
&\geq \frac{1}{8} \left(\frac{(x + y)^2}{x + y} + \frac{(y + z)^2}{y + z} + \frac{(z + x)^2}{z + x} \right) = \frac{1}{4} (x + y + z) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Do đó F đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Bài 111. Cho $A_n = \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n < 1$$

Trích đề thi HSG tỉnh Hải Dương năm 2012-2013

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n-1}} = \frac{\sqrt{2n-1}}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{\sqrt{2n-1}}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\
&= \frac{\sqrt{2n-1}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right)
\end{aligned}$$

Vì $\frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} > 0$ và $\frac{1}{\sqrt{2n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{2}{\sqrt{2n-1}}$

Nên $A_n < \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

Do đó ta được

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Hay $A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n < 1 - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < 1$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 112. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{(ab + a + 1)^2} + \frac{b}{(bc + b + 1)^2} + \frac{c}{(ca + c + 1)^2} \geq \frac{1}{a + b + c}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Ninh Bình năm 2012-2013

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned}
& \left(\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + \sqrt{c^2} \right) \left[\left(\frac{\sqrt{a}}{ab+a+1} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{b}}{bc+b+1} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{c}}{ca+c+1} \right)^2 \right] \\
& \geq \left(\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} \right)^2 \\
& = \left(\frac{1}{b+1+bc} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{bc}{1+bc+b} \right)^2 = 1
\end{aligned}$$

Do đó ta được
$$\frac{a}{(ab+a+1)^2} + \frac{b}{(bc+b+1)^2} + \frac{c}{(ca+c+1)^2} \geq \frac{1}{a+b+c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 113. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{a+b+c}{6}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Phú Thọ năm 2012-2013

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{9}{x+y+z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ ta được

$$\frac{1}{a+3b+2c} = \frac{1}{a+c+b+c+2b} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b} \right)$$

Do đó ta được

$$\frac{ab}{a+3b+2c} \leq \frac{ab}{9} \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b} \right) = \frac{1}{9} \left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{a}{2} \right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{bc}{2a+b+3c} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{b}{2} \right); \quad \frac{ac}{3a+2b+c} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{ac}{a+b} + \frac{ac}{b+c} + \frac{c}{2} \right)$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned}
& \frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \\
& \leq \frac{1}{9} \left(\frac{ac+bc}{a+b} + \frac{ab+ac}{b+c} + \frac{bc+ab}{a+c} + \frac{a+b+c}{2} \right) = \frac{a+b+c}{6}
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 114. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a^2 + b^2 + c^2$$

Trích đề thi HSG tỉnh Nghệ An năm 2012-2013

Lời giải

Từ giả thiết ta được $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 1$ hay

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 + c^2 &= \frac{1}{a+b+c} + ab + bc + ca \\
\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) &= \frac{2}{a+b+c} + 2(ab + bc + ca) \\
\Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) &= \frac{2}{a+b+c} + (a+b+c)^2
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{2}{a+b+c} + (a+b+c)^2 = \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+c} + (a+b+c)^2 \geq 3$$

Do đó ta được $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1 \\ (a+b+c)^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0; c = 1 \\ a = c = 0; b = 1 \\ a = 1; b = c = 0 \end{cases}$$

Bài 115. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = \frac{1}{6}$. Chứng minh rằng:

$$3 + \frac{a}{2b} + \frac{2b}{3c} + \frac{3c}{a} \geq a + 2b + 3c + \frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Vĩnh Phúc năm 2012-2013

Lời giải

Đặt $a = x$; $2b = y$; $3c = z$, khi đó ta được $xyz = 1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$3 + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Đặt $x = \frac{n}{m}$; $y = \frac{p}{n}$; $z = \frac{m}{p}$. Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$m^3 + n^3 + p^3 + 3mnp \geq m^2n + mn^2 + n^2p + np^2 + m^2p + mp^2$$

Biến đổi tương đương ta được $mnp \geq (m+n-p)(n+p-m)(p+m-n)$

Bất đẳng thức trên luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 116. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c+5}{a+1} + \frac{c+a+4}{b+2} + \frac{a+b+3}{c+3} \geq 6$$

Trích đề thi HSG tỉnh Quảng Bình năm 2012-2013

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{b+c+5}{a+1} + 1 + \frac{c+a+4}{b+2} + 1 + \frac{a+b+3}{c+3} + 1 \geq 9$$

Hay $(a+b+c+6) \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+3} \right) \geq 9$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+3} \geq \frac{9}{a+b+c+6}$$

Do đó ta được

$$(a + b + c + 6) \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+3} \right) \geq (a + b + c + 6) \frac{9}{a + b + c + 6} = 9$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 3$; $b = 2$; $c = 1$

Bài 117. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{27a^2}{c(c^2 + 9a^2)} + \frac{b^2}{a(4a^2 + b^2)} + \frac{8c^2}{b(9b^2 + 4c^2)} \geq \frac{3}{2}$$

Trích đề thi HSG Thành Phố Hà Nội năm 2012-2013

Lời giải

Cách 1: Đặt $a = \frac{1}{x}$; $b = \frac{2}{y}$; $c = \frac{3}{z}$, khi đó giả thiết được viết lại là $x + y + z = 3$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + x^2} \geq \frac{3}{2}$

Sử dụng kỹ thuật Cauchy ngược dấu ta chứng minh được

$$\frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + x^2} \geq \frac{x + y + z}{2} = \frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 3$; $b = 2$; $c = 1$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \frac{27a^2}{c(c^2 + 9a^2)} &= \frac{27a^2 + 3c^2 - 3c^2}{c(c^2 + 9a^2)} = \frac{3}{c} - \frac{3c}{c^2 + 9a^2} \geq \frac{3}{c} - \frac{3c}{2\sqrt{c^2 \cdot 9a^2}} = \frac{3}{c} - \frac{1}{2a} \\ \frac{b^2}{a(4a^2 + b^2)} &= \frac{b^2 + 4a^2 - 4a^2}{a(4a^2 + b^2)} = \frac{1}{a} - \frac{4a}{4a^2 + b^2} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \\ \frac{8c^2}{b(9b^2 + 4c^2)} &= \frac{8c^2 + 18b^2 - 18b^2}{b(9b^2 + 4c^2)} = \frac{2}{b} - \frac{18b}{9b^2 + 4c^2} \geq \frac{2}{b} - \frac{3}{2c} \end{aligned}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{27a^2}{c(c^2 + 9a^2)} + \frac{b^2}{a(4a^2 + b^2)} + \frac{8c^2}{b(9b^2 + 4c^2)} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \right) = \frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 3$; $b = 2$; $c = 1$.

Bài 118. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2x^2 + y^2 + z^2}{4 - yz} + \frac{2y^2 + z^2 + x^2}{4 - zx} + \frac{2z^2 + x^2 + y^2}{4 - xy} \geq 4xyz$$

Trích đề thi HSG Tỉnh Phú Thọ năm 2013-2014

Lời giải

Cách 1: Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $2x^2 + y^2 + z^2 \geq 2x(y + z)$

Tương tự ta có $2y^2 + z^2 + x^2 \geq 2y(z + x)$; $2z^2 + x^2 + y^2 \geq 2z(x + y)$

Do đó ta sẽ chứng minh $\frac{x(y + z)}{4 - yz} + \frac{y(z + x)}{4 - zx} + \frac{z(x + y)}{4 - xy} \geq 2xyz$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{y+z}{(4-yz)2yz} + \frac{z+x}{(4-zx)2zx} + \frac{x+y}{(4-xy)xy} \geq 1$$

Ta có $\frac{y+z}{(4-yz)2yz} \geq \frac{2\sqrt{yz}}{(2-\sqrt{yz})(2+\sqrt{yz})2yz} = \frac{1}{(2-\sqrt{yz})\sqrt{yz}(2+\sqrt{yz})}$

Để thấy $0 < (2-\sqrt{yz})\sqrt{yz} = -(\sqrt{xy}-1)^2 + 1 \leq 1$ nên

$$\frac{1}{(2-\sqrt{yz})\sqrt{yz}(2+\sqrt{yz})} \geq \frac{1}{2+\sqrt{yz}}$$

Do đó ta được $\frac{y+z}{(4-yz)2yz} \geq \frac{1}{2+\sqrt{yz}}$

Hoàn toàn tương tự có $\frac{z+x}{(4-zx)2zx} \geq \frac{1}{2+\sqrt{zx}}; \frac{x+y}{(4-xy)2xy} \geq \frac{1}{2+\sqrt{xy}}$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{y+z}{(4-yz)2yz} + \frac{z+x}{(4-zx)2zx} + \frac{x+y}{(4-xy)xy} \geq \frac{1}{2+\sqrt{xy}} + \frac{1}{2+\sqrt{yz}} + \frac{1}{2+\sqrt{zx}}$$

Theo một đánh giá quen thuộc thì

$$\frac{1}{2+\sqrt{xy}} + \frac{1}{2+\sqrt{yz}} + \frac{1}{2+\sqrt{zx}} \geq \frac{9}{6+\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}} \geq \frac{9}{6+x+y+z} = 1$$

Do đó ta suy ra $\frac{y+z}{(4-yz)2yz} + \frac{z+x}{(4-zx)2zx} + \frac{x+y}{(4-xy)xy} \geq 1$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Cách 2: Gọi về trái của bất đẳng thức là P. Khi đó biến đổi P như sau

$$P = \left(\frac{x^2}{4-yz} + \frac{y^2}{4-xz} + \frac{z^2}{4-yx} \right) + (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{4-yz} + \frac{1}{4-xz} + \frac{1}{4-yx} \right)$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski dạng phân thức ta có

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4-yz} + \frac{y^2}{4-xz} + \frac{z^2}{4-yx} &\geq \frac{(x+y+z)^2}{12-(xy+yz+zx)} \\ \frac{1}{4-yz} + \frac{1}{4-xz} + \frac{1}{4-yx} &\geq \frac{9}{12-(xy+yz+zx)} \end{aligned}$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{(x+y+z)^2}{12-(xy+yz+zx)} + \frac{9(x^2+y^2+z^2)}{12-(xy+yz+zx)} \\ &\geq \frac{3(xy+yz+zx)}{12-(xy+yz+zx)} + \frac{9(xy+yz+zx)}{12-(xy+yz+zx)} \\ &\geq \frac{12(xy+yz+zx)}{12-(xy+yz+zx)} \geq \frac{36\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}{12-3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}} \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt[3]{xyz} = t \leq \frac{x+y+z}{3} = 1$. Khi đó ta có

$$\frac{36t^2}{12-3t^2} - 4t^3 \Leftrightarrow 12t^2(t-1)(t^2+t-3) \geq 0$$

Đánh giá cuối cùng luôn đúng. Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Cách 3: Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$P = \frac{x^2 + y^2 + x^2 + z^2}{xyz(4-yz)} + \frac{x^2 + y^2 + y^2 + z^2}{xyz(4-xz)} + \frac{z^2 + y^2 + x^2 + z^2}{xyz(4-yx)} \geq 4$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} M &\geq \frac{2xy + 2xz}{xyz(4-yz)} + \frac{2xy + 2yz}{xyz(4-xz)} + \frac{2xz + 2yz}{xyz(4-yx)} \\ &= 2 \left(\frac{y+z}{yz(4-yz)} + \frac{x+z}{xz(4-xz)} + \frac{x+z}{yx(4-yx)} \right) \quad \text{Áp} \\ &= 2 \left(\frac{1}{z(4-yz)} + \frac{1}{x(4-yz)} + \frac{1}{y(4-yx)} \right) + 2 \left(\frac{1}{y(4-yz)} + \frac{1}{zx(4-yz)} + \frac{1}{x(4-yx)} \right) \end{aligned}$$

dùng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(4-yz)} + \frac{1}{x(4-yz)} + \frac{1}{y(4-yx)} &\geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz(4-yz)(4-xz)(4-xy)}} \\ \frac{1}{y(4-yz)} + \frac{1}{zx(4-yz)} + \frac{1}{x(4-yx)} &\geq \frac{6}{\sqrt[3]{xyz(4-yz)(4-xz)(4-xy)}} \end{aligned}$$

Do đó ta được $P \geq \frac{12\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3xyz(4-yz)(4-xz)(4-xy)}}$

Mặt khác ta lại có

$$3xyz(4-xz)(4-yz)(4-xy) \leq \left(\frac{3xyz + 12 - xz - xy - yz}{4} \right)^4$$

Mà $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} = 3 \Leftrightarrow \frac{xy+yz+xz}{xyz} \geq 3 \Leftrightarrow 3xyz - xy - xz - yz \leq 0$

Suy ra

$$3xyz(4-xz)(4-yz)(4-xy) \leq 81 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3xyz(4-xz)(4-yz)(4-xy)} \leq 3\sqrt[3]{3}$$

Do đó ta được $P \geq \frac{12\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{3}} = 4$. Như vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 4: Đặt về trái của bất đẳng thức là P.

Với $x, y, z > 0$ ta có $yz \leq \frac{(y+z)^2}{4} < \frac{(x+y+z)^2}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow 4-yz > 0$

Tương tự ta cũng có $4-zx > 0$; $4-xy > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$4(x^2 + x^2 + y^2 + z^2) \geq (x+x+y+z)^2 = (2x+y+z)^2$$

Từ đó suy ra $\frac{2x^2 + y^2 + z^2}{4 - yz} \geq \frac{(2x + y + z)^2}{4(4 - yz)}$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{2y^2 + z^2 + x^2}{4 - zx} \geq \frac{(2y + z + x)^2}{4(4 - zx)}; \frac{2z^2 + x^2 + y^2}{4 - xy} \geq \frac{(2z + x + y)^2}{4(4 - xy)}$$

Do đó ta được $P \geq \frac{(2x + y + z)^2}{4(4 - yz)} + \frac{(2y + z + x)^2}{4(4 - zx)} + \frac{(2z + x + y)^2}{4(4 - xy)} = Q$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{(2x + y + z)^2}{4(4 - yz)} + \frac{4}{9}(4 - yz) &\geq 2\sqrt{\frac{(2x + y + z)^2}{4(4 - yz)} \cdot \frac{4}{9}(4 - yz)} = \frac{2}{3}(2x + y + z) \\ \frac{(2y + z + x)^2}{4(4 - zx)} + \frac{4}{9}(4 - zx) &\geq 2\sqrt{\frac{(2y + z + x)^2}{4(4 - zx)} \cdot \frac{4}{9}(4 - zx)} = \frac{2}{3}(2y + z + x) \\ \frac{(2z + x + y)^2}{4(4 - xy)} + \frac{4}{9}(4 - xy) &\geq 2\sqrt{\frac{(2z + x + y)^2}{4(4 - xy)} \cdot \frac{4}{9}(4 - xy)} = \frac{2}{3}(2z + x + y) \end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$Q + \frac{4}{9}(12 - xy - yz - zx) \geq \frac{8}{3}(x + y + z) = 8 \Rightarrow Q \geq \frac{8}{3} + \frac{4}{9}(xy + yz + zx)$$

Bất đẳng thức trên sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra được

$$\frac{8}{3} + \frac{4}{9}(xy + yz + zx) \geq 4xyz$$

Thật vậy, ta viết lại bất đẳng thức trên thành

$$\frac{8}{81} \cdot (x + y + z)^3 + \frac{4}{27}(x + y + z)(xy + yz + zx) \geq 4xyz$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}; \quad xy + yz + zx \geq 3\sqrt{x^2y^2z^2}$$

Suy ra $\frac{8}{81} \cdot (x + y + z)^3 + \frac{4}{27}(x + y + z)(xy + yz + zx) \geq 4xyz$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Cách 5: Về trái của bất đẳng thức được viết lại thành

$$P = (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{4 - xy} + \frac{1}{4 - yz} + \frac{1}{4 - zx} \right) + \left(\frac{x^2}{4 - yz} + \frac{y^2}{4 - zx} + \frac{z^2}{4 - xy} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{4 - xy} + \frac{1}{4 - yz} + \frac{1}{4 - zx} \right) \geq \frac{9(x^2 + y^2 + z^2)}{12 - (xy + yz + zx)} = \frac{18(x^2 + y^2 + z^2)}{15 + x^2 + y^2 + z^2}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\frac{x^2}{4-yz} + \frac{x(4-yz)}{9} + \frac{1}{3} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4-yz} \cdot \frac{x(4-yz)}{9} \cdot \frac{1}{3}} = x$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4-yz} \geq x - \frac{x(4-yz)}{9} - \frac{1}{3} = \frac{5x}{9} + \frac{xyz}{9} - \frac{1}{3}$$

Tương tự ta có $\frac{y^2}{4-zx} \geq \frac{5y}{9} + \frac{xyz}{9} - \frac{1}{3}$; $\frac{z^2}{4-xy} \geq \frac{5z}{9} + \frac{xyz}{9} - \frac{1}{3}$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^2}{4-yz} + \frac{y^2}{4-zx} + \frac{z^2}{4-xy} \geq \frac{5}{9}(x+y+z) + \frac{xyz}{3} - 1 = \frac{2}{3} + \frac{xyz}{3}$$

Do đó ta được $A \geq \frac{18(x^2+y^2+z^2)}{15+x^2+y^2+z^2} + \frac{2}{3} + \frac{xyz}{3}$

Từ giả thiết ta được $x^2+y^2+z^2 \geq 3$. Do đó ta có $\frac{18(x^2+y^2+z^2)}{15+x^2+y^2+z^2} \geq 3$

Cũng từ giả thiết ta được $xyz \geq 1$.

Từ đó suy ra $P \geq 3 + \frac{2}{3} + \frac{xyz}{3} = \frac{11}{3} + \frac{xyz}{3} \geq \frac{11xyz}{3} + \frac{xyz}{3} = 4xyz$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong

Bài 119. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = \frac{1}{x^3+y^3} + \frac{1}{xy}$$

Trích đề thi HSG Tỉnh Thanh Hóa năm 2013-2014

Lời giải

Ta có $B = \frac{1}{(x+y)^3 - 3xy(x+y)} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{1-3xy} + \frac{1}{xy} = \frac{1-2xy}{xy(1-3xy)}$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4}$.

Gọi B_0 là một giá trị của B , khi đó luôn tồn tại x, y để

$$B_0 = \frac{1-2xy}{xy(1-3xy)} \Leftrightarrow 3B_0(xy)^2 - (2+B_0)xy + 1 = 0$$

Để tồn tại x, y thì phương trình trên phải có nghiệm xy , tức là

$$\Delta = B_0^2 - 8B_0 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B_0 \geq 4+2\sqrt{3} \\ B_0 \leq 4-2\sqrt{3} \end{cases}$$

Để ý rằng với giả thiết bài toán thì $B > 0$. Do đó ta có $B_0 \geq 4+2\sqrt{3}$.

Với $B_0 = 4+2\sqrt{3} \Rightarrow xy = \frac{2+B_0}{6B_0} = \frac{3+\sqrt{3}}{6(2+\sqrt{3})} \Rightarrow x(1-x) = \frac{3+\sqrt{3}}{6(2+\sqrt{3})}$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{3+\sqrt{3}}{6(2+\sqrt{3})} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}, \quad x = \frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $4 + 2\sqrt{3}$, đạt được khi

$$x = \frac{1 + \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1}}{2}; y = \frac{1 - \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{1 - \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1}}{2}; y = \frac{1 + \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1}}{2}.$$

Bài 120. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2ab + 6bc + 2ca = 7abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$C = \frac{4ab}{a+2b} + \frac{9ca}{a+4c} + \frac{4bc}{b+c}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Hải Dương năm 2013-2014

Lời giải

Từ $2ab + 6bc + 2ca = 7abc$ ta được $\frac{2}{c} + \frac{6}{a} + \frac{2}{b} = 7$

$$\text{Đặt } x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c} \Rightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ 2z + 6x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó ta được } C = \frac{4ab}{a+2b} + \frac{9ca}{a+4c} + \frac{4bc}{b+c} = \frac{4}{2x+y} + \frac{9}{4x+z} + \frac{4}{y+z}$$

Hay

$$C = \frac{4}{2x+y} + 2x + y + \frac{9}{4x+z} + 4x + z + \frac{4}{y+z} + y + z - (2x + y + 4x + z + y + z)$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{x+2y}} - \sqrt{x+2y} \right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{4x+z}} - \sqrt{4x+z} \right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{y+z}} - \sqrt{y+z} \right)^2 + 17 \geq 17$$

Vậy giá trị

nhỏ nhất của C là 17. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}; y = z = 1$

Bài 121. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{4a}{b+c-a} + \frac{9b}{c+a-b} + \frac{16c}{a+b-c} \geq 26$$

Trích đề thi HSG tỉnh Quảng Trị năm 2013-2014

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{8a}{b+c-a} + 4 + \frac{18b}{c+a-b} + 9 + \frac{32c}{a+b-c} + 16 \geq 81$$

$$\text{Hay } (a+b+c) \left(\frac{4}{b+c-a} + \frac{9}{c+a-b} + \frac{16}{a+b-c} \right) \geq 81$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski dạng phân thức ta được

$$\frac{4}{b+c-a} + \frac{9}{c+a-b} + \frac{16}{a+b-c} \geq \frac{(2+3+4)^2}{a+b+c} = \frac{81}{a+b+c}$$

Do đó ta được

$$(a+b+c) \left(\frac{4}{b+c-a} + \frac{9}{c+a-b} + \frac{16}{a+b-c} \right) \geq \frac{81(a+b+c)}{a+b+c} = 81$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 122. Cho a, b, c thỏa mãn $0 \leq a; b; c \leq 4$ và $a + b + c = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$$

Trích đề thi HSG Thành phố Hà Nội năm 2013-2014

Lời giải

Vì $0 \leq a; b; c \leq 4$ do đó ta được $(a-4)(b-4)(c-4) \leq 0$, biến đổi tương đương ta thu được

$$\begin{aligned}(a-4)(b-4)(c-4) &\leq 0 \Leftrightarrow abc - 4(ab+bc+ca) + 16(a+b+c) - 64 \leq 0 \\ \Leftrightarrow 4(ab+bc+ca) &\geq abc + 16(a+b+c) - 64\end{aligned}$$

Do $abc \geq 0$ nên ta được

$$\begin{aligned}4(ab+bc+ca) &\geq abc + 16(a+b+c) - 64 \geq 16.6 - 64 = 32 \\ \Leftrightarrow ab+bc+ca &\geq 8\end{aligned}$$

Ta có

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = (a+b+c)^2 - (ab+bc+ca) \leq 6^2 - 8 = 28$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 28. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 0; b = 2; c = 4$ và các hoán vị.

Bài 123. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x^2 + 4yz} + \frac{1}{y^2 + 4zx} + \frac{1}{z^2 + 4xy} < \frac{1}{xyz}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Thừa Thiên Huế năm 2013-2014

Lời giải

Để thấy $\frac{1}{x^2 + 4yz} < \frac{1}{4yz}; \frac{1}{y^2 + 4zx} < \frac{1}{4zx}; \frac{1}{z^2 + 4xy} < \frac{1}{4xy}$

Do đó ta được $\frac{1}{x^2 + 4yz} + \frac{1}{y^2 + 4zx} + \frac{1}{z^2 + 4xy} < \frac{1}{4yz} + \frac{1}{4zx} + \frac{1}{4xy}$

Kết hợp với giả thiết ta được $\frac{1}{4yz} + \frac{1}{4zx} + \frac{1}{4xy} = \frac{x+y+z}{4xyz} = \frac{1}{xyz}$

Suy ra $\frac{1}{x^2 + 4yz} + \frac{1}{y^2 + 4zx} + \frac{1}{z^2 + 4xy} < \frac{1}{xyz}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 124. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c} + \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{a} + \frac{\sqrt{c^2 + a^2}}{b} \geq 2 \left(\frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2 + a^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

Trích đề thi HSG tỉnh Bắc Giang năm 2013-2014

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$ ta được

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c} + \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{a} + \frac{\sqrt{c^2 + a^2}}{b} &= \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{\sqrt{2}c} + \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2)}}{\sqrt{2}a} + \frac{\sqrt{2(c^2 + a^2)}}{\sqrt{2}b} \\ &\geq \frac{a+b}{\sqrt{2}c} + \frac{b+c}{\sqrt{2}a} + \frac{c+a}{\sqrt{2}b}\end{aligned}$$

Mặt khác cũng áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2 + a^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq \frac{\sqrt{2}a}{b+c} + \frac{\sqrt{2}b}{c+a} + \frac{\sqrt{2}c}{a+b}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}c} + \frac{b+c}{\sqrt{2}a} + \frac{c+a}{\sqrt{2}b} \geq \frac{2\sqrt{2}a}{b+c} + \frac{2\sqrt{2}b}{c+a} + \frac{2\sqrt{2}c}{a+b}$$

Hay
$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq \frac{4a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{4c}{a+b}$$

Thật vậy, Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, ta được

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} &= a\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right) + b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \\ &\geq \frac{4a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{4c}{a+b} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 125. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2c} + \frac{b^2}{c^2a} + \frac{c^2}{a^2b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Vĩnh Phúc năm 2013-2014

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^2}{b^2c} + \frac{b^2}{c^2a} + \frac{1}{a} \geq \frac{3}{c}; \quad \frac{b^2}{c^2a} + \frac{c^2}{a^2b} + \frac{3}{b} \geq \frac{1}{a}; \quad \frac{a^2}{b^2c} + \frac{c^2}{a^2b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{b}$$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta được

$$2\left(\frac{a^2}{b^2c} + \frac{b^2}{c^2a} + \frac{c^2}{a^2b}\right) + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{a} + \frac{3}{b} + \frac{3}{c}$$

Hay
$$\frac{a^2}{b^2c} + \frac{b^2}{c^2a} + \frac{c^2}{a^2b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 126. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} = 1$.

Chứng

minh rằng:
$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Hải Dương năm 2014-2015

Lời giải

Dễ thấy $2(a^2 + b^2) \leq (a+b)^2$. Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a^2}{\sqrt{2(b^2+c^2)}} + \frac{b^2}{\sqrt{2(c^2+a^2)}} + \frac{c^2}{\sqrt{2(c^2+a^2)}}$$

Đặt $x = \sqrt{b^2 + c^2}$, $y = \sqrt{c^2 + a^2}$, $z = \sqrt{a^2 + b^2}$

Khi đó ta được suy ra

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2\sqrt{2}x} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2\sqrt{2}y} + \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2\sqrt{2}z}$$

Áp dụng tiếp bất đẳng thức trên thì ta được

$$\begin{aligned}
& \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2\sqrt{2}x} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2\sqrt{2}y} + \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2\sqrt{2}z} \\
& \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{(y+z)^2}{2x} - x + \frac{(z+x)^2}{2y} - y + \frac{(x+y)^2}{2z} - z \right] \\
& \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x} + 2x - 3x \right) + \left(\frac{(z+x)^2}{2y} + 2y - 3y \right) + \left(\frac{(x+y)^2}{2z} + 2z - 3z \right) \right] \\
& \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} [2y + z - 3x + 2(z+x) - 3y + 2(x+y) - 3z] = \frac{1}{2\sqrt{2}} (x+y+z) = \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Do đó ta được
$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

Bài 127. Với a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^5}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^5}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Thái Bình năm 2013-2014

Lời giải

Cách 1: Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} & \geq \frac{2a - b}{3} \Leftrightarrow 3a^3 \geq (2a - b)(a^2 + ab + b^2) \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a + b) \\
& \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Đánh giá cuối cùng luôn đúng.

Do đó
$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{2a - b}{3} \Leftrightarrow \frac{a^5}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{2a^3 - a^2b}{3}.$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{a^5}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^5}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^5}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} + \frac{a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a}{3} \text{ Mặt}$$

khác vì vai trò a, b, c như nhau nên giả sử $a \geq b \geq c > 0$

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a & = a^2(a - b) + b^2(b - c) + c^2(c - a) \\
& = (a - b)^2(a + b) + (a - c)(b - c)(b + c) \geq 0
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra
$$\frac{a^5}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^5}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^5}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$\begin{aligned}
& \frac{a^5}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^5}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^5}{c^2 + ca + a^2} \\
& = \frac{a^6}{a^3 + a^2b + ab^2} + \frac{b^6}{b^3 + b^2c + bc^2} + \frac{c^6}{c^3 + c^2a + ca^2} \\
& \geq \frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2}{a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2}
\end{aligned}$$

Mặt khác ta có $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

Chứng minh tương tự $b^3 + c^3 \geq bc(b+c); c^3 + a^3 \geq ca(c+a)$

Suy ra $3(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^3 + b^3 + c^3 + ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$

$$\frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2}{a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2} \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 128. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{9a^3 + 3b^2 + c} + \frac{b}{9b^3 + 3c^2 + a} + \frac{c}{9c^3 + 3a^2 + b}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Vĩnh Phúc năm 2014-2015

Lời giải

Cách 1: Ta có $P = \frac{3a}{27a^3 + 9b^2 + 3c} + \frac{3b}{27b^3 + 9c^2 + 3a} + \frac{3c}{27c^3 + 9a^2 + 3b}$

$$\text{Đặt } x = 3a; y = 3b; z = 3c \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x, y, z > 0 \end{cases}$$

Khi đó ta viết lại được

$$P = \frac{x}{x^3 + y^2 + z} + \frac{y}{y^3 + z^2 + x} + \frac{z}{z^3 + x^2 + y}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki và chú ý đến giả thiết ta có

$$\begin{aligned} (x^3 + y^2 + z) \left(\frac{1}{x} + 1 + z \right) &\geq (x + y + z)^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{x^3 + y^2 + z} &\leq \frac{\frac{1}{x} + 1 + z}{(x + y + z)^2} \Rightarrow \frac{x}{x^3 + y^2 + z} \leq \frac{1 + x + zx}{(x + y + z)^2} = \frac{1 + x + zx}{9} \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự thu được $\frac{y}{y^3 + z^2 + x} \leq \frac{1 + y + xy}{9}; \frac{z}{z^3 + x^2 + y} \leq \frac{1 + z + yz}{9}$

$$\text{Từ đó suy ra } P \leq \frac{3 + x + y + z + (xy + yz + zx)}{9} = \frac{6 + (xy + yz + zx)}{9}$$

Dễ dàng chứng minh được $xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}(x + y + z)^2 = 3$

$$\text{Do đó } P \leq \frac{6 + (xy + yz + zx)}{9} \leq \frac{6 + 3}{9} = 1. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi}$$

$$x = y = z = 1 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1 đạt được tại $a = b = c = \frac{1}{3}$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$9a^3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \geq 3a; 9b^3 + \frac{1}{3} \geq 2b \Rightarrow 9a^3 + 9b^2 + c \geq 3a + 2b + c - 1 = 2a + b$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$9b^3 + 9c^2 + a \geq 2b + c; 9c^3 + 9a^2 + b \geq 2c + a$$

Do đó ta suy ra

$$P \leq \frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} = \frac{1}{2+\frac{b}{a}} + \frac{1}{2+\frac{c}{b}} + \frac{1}{2+\frac{a}{c}}$$

Đặt $x = \frac{b}{a}$; $y = \frac{c}{b}$; $z = \frac{a}{c} \Rightarrow xyz = 1$. Khi đó ta được

$$P \leq \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} + \frac{1}{2+z}$$

Ta chứng minh $\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} + \frac{1}{2+z} \leq 1$.

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} (2+z)(2+y) + (2+y)(2+z) + (2+z)(2+x) &\leq (2+x)(2+y)(2+z) \\ \Leftrightarrow xy + yz + zx + 4(x+y+z) + 12 &\leq xyz + 2(xy + yz + zx) + 4(x+y+z) + 8 \\ \Leftrightarrow x + y + z &\geq 3 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$

Do đó bất đẳng thức trên được chứng minh.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1 đạt được tại $a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 129. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{\sqrt[3]{yz}} + \frac{y}{\sqrt[3]{xz}} + \frac{z}{\sqrt[3]{xy}} \geq xy + yz + xz$$

Trích đề thi HSG tỉnh Phú Thọ năm 2014-2015

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \frac{x}{\sqrt[3]{yz}} + \frac{y}{\sqrt[3]{xz}} + \frac{z}{\sqrt[3]{xy}} = \frac{x\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{xyz}} + \frac{y\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{xyz}} + \frac{z\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $3 = x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \Leftrightarrow xyz \leq 1$.

$$\text{Suy ra } A \geq x\sqrt[3]{x} + y\sqrt[3]{y} + z\sqrt[3]{z}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki

$$\left(x\sqrt[3]{x} + y\sqrt[3]{y} + z\sqrt[3]{z}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2}\right) \geq (x+y+z)^2 \geq 3(xy + yz + xz)$$

Lại thấy theo bất đẳng thức Cauchy thì

$$\sqrt[3]{x^2 \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{x^2 + 1 + 1}{3}; \sqrt[3]{y^2 \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{y^2 + 1 + 1}{3}; \sqrt[3]{z^2 \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{z^2 + 1 + 1}{3}$$

$$\text{Nên } \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} + \sqrt[3]{z^2} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 6}{3} = 3$$

$$\text{Do đó ta được } A \geq x\sqrt[3]{x} + y\sqrt[3]{y} + z\sqrt[3]{z} \geq xy + yz + xz$$

$$\text{Hay } \frac{x}{\sqrt[3]{yz}} + \frac{y}{\sqrt[3]{xz}} + \frac{z}{\sqrt[3]{xy}} \geq xy + yz + xz$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2 = y^2 = z^2 = 1 \\ \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{z} \Leftrightarrow x = y = z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$$

Bài 130. Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{2x^2 + 3xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + 3yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + 3zx + 2x^2}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Ninh Bình năm 2014-2015

Lời giải

Ta viết lại biểu thức A thành

$$A = \sqrt{2(x+y)^2 - xy} + \sqrt{2(y+z)^2 - yz} + \sqrt{2(z+x)^2 - zx}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$2(x+y)^2 - xy \geq 2(x+y)^2 - \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{7(x+y)^2}{4}$$

Do đó ta được
$$\sqrt{2(x+y)^2 - xy} \geq \frac{\sqrt{7}(x+y)}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta thu được

$$A = \sqrt{2x^2 + 3xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + 3yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + 3zx + 2x^2} \geq \sqrt{7}(x+y+z) = 3\sqrt{7}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $3\sqrt{7}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

Bài 131. Cho các số dương a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + 6a + 9}{a^2 - 2a + 3} + \frac{b^2 + 6b + 9}{b^2 - 2b + 3} + \frac{c^2 + 6c + 9}{c^2 - 2c + 3} \leq 24$$

Trích đề thi HSG tỉnh Gia Lai năm 2014-2015

Lời giải

Ta có

$$\frac{a^2 + 6a + 9}{a^2 - 2a + 3} = \frac{(a-1)^2 + 8a + 8}{(a-1)^2 + 2} = 1 + \frac{8a + 6}{(a-1)^2 + 2} \leq 1 + \frac{8a + 6}{2} = 4a + 4$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{b^2 + 6b + 9}{b^2 - 2b + 3} \leq 4b + 4; \quad \frac{c^2 + 6c + 9}{c^2 - 2c + 3} \leq 4c + 4$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên và kết hợp với giả thiết ta được

$$\frac{a^2 + 6a + 9}{a^2 - 2a + 3} + \frac{b^2 + 6b + 9}{b^2 - 2b + 3} + \frac{c^2 + 6c + 9}{c^2 - 2c + 3} \leq 4(a+b+c) + 3.4 = 24$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 132. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a+2b+3} + \frac{1}{b+2c+3} + \frac{1}{c+2a+3}$$

Trích đề thi HSG tỉnh Nghệ An năm 2014-2015

Lời giải

Đặt $a = x^2$; $b = y^2$; $c = z^2$ khi đó ta được $xyz = 1$ và biểu thức P được viết lại thành

$$P = \frac{1}{x^2 + 2y^2 + 3} + \frac{1}{y^2 + 2z^2 + 3} + \frac{1}{z^2 + 2x^2 + 3}$$

Ta có $x^2 + y^2 \geq 2xy$; $y^2 + 1 \geq 2y \Rightarrow x^2 + 2y^2 + 3 \geq 2(xy + y + 1)$

Do đó ta được
$$\frac{1}{x^2 + 2y^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{xy + y + 1}$$

Chứng minh tương tự ta có

$$\frac{1}{y^2 + 2z^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{yz + z + 1}; \quad \frac{1}{z^2 + 2x^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{zx + x + 1}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xy + y + 1} + \frac{1}{yz + z + 1} + \frac{1}{zx + x + 1} \right)$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} = 1$$

Đến đây ta có hai hướng đánh giá
$$\frac{1}{xy + y + 1} + \frac{1}{yz + z + 1} + \frac{1}{zx + x + 1}$$

Hướng 1: Do $xyz = 1$, nên tồn tại các số dương m, n, p để $x = \frac{m}{n}$; $y = \frac{n}{p}$; $z = \frac{p}{m}$

Khi đó ta có

$$\frac{1}{xy + y + 1} + \frac{1}{yz + z + 1} + \frac{1}{zx + x + 1} = \frac{p}{m + n + p} + \frac{m}{m + n + p} + \frac{n}{m + n + p} = 1$$

Hướng 2: Do $xyz = 1$, nên ta được

$$\frac{1}{xy + y + 1} + \frac{1}{yz + z + 1} + \frac{1}{zx + x + 1} = \frac{zx}{z + 1 + zx} + \frac{x}{1 + zx + z} + \frac{1}{zx + z + 1} = 1$$

Từ đó ta được $P \leq \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 133. Cho các số dương x, y, z thay đổi thỏa mãn $xy + yz + zx = xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức:
$$M = \frac{1}{4x + 3y + z} + \frac{1}{x + 4y + 3z} + \frac{1}{3x + y + 4z}$$

Trích đề thi HSG Tỉnh Hải Dương năm 2014-2015

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{64}{4x + 3y + z} \leq \frac{16}{4x} + \frac{16}{3y + z} \leq \frac{4}{x} + \frac{4}{2y} + \frac{4}{y + z} \leq \frac{4}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z}$$

Tương tự ta được
$$\frac{64}{x + 4y + 3z} \leq \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{3}{z}; \quad \frac{64}{3x + y + 4z} \leq \frac{3}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z}$$

Do đó ta được
$$M = \frac{1}{4x + 3y + z} + \frac{1}{x + 4y + 3z} + \frac{1}{3x + y + 4z} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{8}$$

Vậy M đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{8}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 3$.

Bài 134. Cho các số dương x, y, z thay đổi thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x + \sqrt{3x + yz}} + \frac{y}{y + \sqrt{3y + zx}} + \frac{z}{z + \sqrt{3z + xy}} \leq 1$$

Trích đề thi HSG Tỉnh Hà Nam năm 2014-2015

Lời giải

Áp dụng giả thiết ta chú ý đến phép biến đổi

$$3x + yz = x(x + y + z) + yz = (x + y)(x + z)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(x + y)(x + z) \geq (\sqrt{xy} + \sqrt{xz})^2$$

Do đó ta được

$$\frac{x}{x + \sqrt{3x + yz}} \leq \frac{x}{x + \sqrt{xy} + \sqrt{xz}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{y}{y + \sqrt{3y + zx}} \leq \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}; \quad \frac{z}{z + \sqrt{3z + xy}} \leq \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x}{x + \sqrt{3x + yz}} + \frac{y}{y + \sqrt{3y + zx}} + \frac{z}{z + \sqrt{3z + xy}} \leq 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài 135. Cho các số dương a, b, c thay đổi thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 - ca + a^2}}$$

Trích đề thi HSG Thành Phố Hà Nội năm 2014-2015

Lời giải

Cách 1: Ta có $a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab \geq (a + b)^2 - \frac{3(a + b)^2}{4} = \frac{(a + b)^2}{4}$

Do đó ta được $\frac{1}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} \leq \frac{2}{a + b} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right); \quad \frac{1}{\sqrt{c^2 - ca + a^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right)$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$P = \frac{1}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 - ca + a^2}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $a^2 - ab + b^2 \geq 2ab - ab = ab$

Do đó ta được $\frac{1}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}}$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{bc}}; \quad \frac{1}{\sqrt{c^2 - ca + a^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{ca}}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$P = \frac{1}{\sqrt{a^2 - ab + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - bc + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 - ca + a^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}$$

Dễ thấy
$$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$$

Do đó ta được $P \leq 3$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 3.

Bài 136. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + ab + bc + ca \geq 6$$

Trích đề thi HSG Tỉnh Đắk Lắk năm 2014-2015

Lời giải

Cách 1: Để ý đến giả thiết $a + b + c = 3$ ta có

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + ab + bc + ca &= a^3 + b^3 + c^3 + \frac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + \frac{9 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a^3 + a^3 + 1 \geq 3a^2; \quad b^3 + b^3 + 1 \geq 3b^2; \quad c^3 + c^3 + 1 \geq 3c^2$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 3 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Do đó ta được
$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{9 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} \geq a^2 + b^2 + c^2 + 3$$

Lại thấy
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 3$$

Do đó ta được
$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{9 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} \geq 6$$

Hay
$$a^3 + b^3 + c^3 + ab + bc + ca \geq 6$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$3(a^3 + b^3 + c^3) = (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Dễ thấy $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$, do đó ta được

$$3(a^3 + b^3 + c^3) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Khi đó ta suy ra

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + ab + bc + ca &\geq a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \\ &= (a + b + c)^2 - (ab + bc + ca) \\ &\geq (a + b + c)^2 - \frac{(a + b + c)^2}{3} = 9 - 3 = 6 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 137. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a \leq 1; b \leq 2; a + b + c = 6$. Chứng minh rằng:

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 4abc$$

Trích đề thi HSG Tỉnh Bắc Giang năm 2014-2015

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 4 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{abc} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{a+b+c+1}{abc} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{7}{abc} \geq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a + \frac{b}{2} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{2}}; \frac{b}{2} + \frac{c}{3} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{6}}$$

$$\text{Do đó ta được } 6 = a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{2c}{3} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{2}} + 2\sqrt{\frac{bc}{6}} + \frac{2c}{3} \geq 6\sqrt[3]{\frac{ab^2c^3}{108}}$$

Do đó ta được $ab^2c^3 \leq 108$, mà theo giả thiết $a \leq 1; b \leq 2$ suy ra $a^2b \leq 2$

$$\text{Suy ra ta có } 216 \geq 108a^2b \geq ab^2c^3a^2b = (abc)^3 \Rightarrow abc \leq 6$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và các giả thiết ta lại có

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \geq 3; \frac{2}{a} + \frac{1}{b} \geq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}; \frac{3.7}{abc} \geq \frac{3.7}{6} = \frac{7}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{7}{abc}\right) \geq 3 + \frac{5}{2} + \frac{7}{2}$$

$$\text{Hay } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{7}{abc} \geq 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1; b = 2; c = 3$.

Bài 138. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức: } T = \frac{19a+3}{1+b^2} + \frac{19b+3}{1+c^2} + \frac{19c+3}{1+a^2}$$

Trích đề thi HSG Tỉnh Hưng Yên năm 2014-2015

Lời giải

Cách 1: Biến đổi và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{19a+3}{1+b^2} = 19a+3 - \frac{b^2(19a+3)}{1+b^2}$$

$$\geq 19a+3 - \frac{b(19a+3)}{2} = \frac{38a+6-19ab-3b}{2}$$

Hoàn toàn tương tự được

$$\frac{19b+3}{1+c^2} \geq \frac{38b+6-19bc-3c}{2}; \frac{19c+3}{1+a^2} \geq \frac{38c+6-19ca-3a}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$T = \frac{19a+3}{1+b^2} + \frac{19b+3}{1+c^2} + \frac{19c+3}{1+a^2} \geq \frac{35(a+b+c) + 18 - 19(ab+bc+ca)}{2}$$

$$\geq \frac{35\sqrt{3(ab+bc+ca)} + 18 - 19.3}{2} = 33$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 33. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Cách 2: Dễ thấy $\frac{19a+3}{1+b^2} = \frac{16a}{1+b^2} + \frac{3(a+1)}{1+b^2}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{16a}{1+b^2} = 16a - \frac{16ab^2}{1+b^2} \geq 16a - \frac{16ab^2}{2b} = 16a - 8ab$$

$$\frac{3(a+1)}{1+b^2} = 3(a+1) - \frac{3(a+1)b^2}{1+b^2} \geq 3(a+1) - \frac{3(a+1)b^2}{2b} = 3(a+1) - \frac{3(a+1)b}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\begin{aligned} T &= \frac{19a+3}{1+b^2} + \frac{19b+3}{1+c^2} + \frac{19c+3}{1+a^2} \geq \frac{35(a+b+c) + 18 - 19(ab+bc+ac)}{2} \\ &\geq \frac{35 \cdot \sqrt{3(ab+bc+ca)} + 18 - 19 \cdot 3}{2} = 33 \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 33.

Bài 139. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 2\sqrt{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^8+y^8}{x^4+y^4+x^2y^2} + \frac{y^8+z^8}{y^4+z^4+y^2z^2} + \frac{z^8+x^8}{z^4+x^4+z^2y^2} \geq 8$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Hải Dương năm học 2013-2014

Lời giải

Đặt $a = x^2$; $b = y^2$; $c = z^2$ suy ra $abc = 8$. Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2+ab} + \frac{b^4+c^4}{b^2+c^2+bc} + \frac{c^4+a^4}{c^2+a^2+ca} \geq 8$$

Dễ dàng chứng minh được

$$a^4+b^4 \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{2}; a^2+b^2+ab \leq \frac{3(a^2+b^2)}{2}$$

Suy ra $\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2+ab} \geq \frac{a^2+b^2}{3}$. Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2+ab} + \frac{b^4+c^4}{b^2+c^2+bc} + \frac{c^4+a^4}{c^2+a^2+ca} \geq \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{3}$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 12$$

Do đó ta được $\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2+ab} + \frac{b^4+c^4}{b^2+c^2+bc} + \frac{c^4+a^4}{c^2+a^2+ca} \geq 8$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \sqrt{2}$

Bài 140. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$a \cdot \sqrt{\frac{b+c}{a^2+bc}} + b \cdot \sqrt{\frac{c+a}{b^2+ca}} + c \cdot \sqrt{\frac{a+b}{c^2+ab}} \leq \frac{3}{abc}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Bắc Giang năm học 2013-2014

Lời giải

Cách 1: Ta có $a \cdot \sqrt{\frac{b+c}{a^2+bc}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{ab+ac}{a^2+bc}}$. Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy và chú ý đến giả thiết $ab+bc+ca = 3$ ta có

$$a^2+bc+ab^2c^2 \geq 3abc \Rightarrow a^2+bc \geq abc(3-bc) = abc(ab+ac)$$

Do đó ta được

$$\frac{ab+ac}{a^2+bc} \leq \frac{1}{abc} \Rightarrow \sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{ab+ac}{a^2+bc}} \leq \frac{1}{\sqrt{bc}} \Rightarrow a \cdot \sqrt{\frac{b+c}{a^2+bc}} \leq \frac{1}{\sqrt{bc}}$$

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$b \cdot \sqrt{\frac{c+a}{b^2+ca}} \leq \frac{1}{\sqrt{ca}}; c \cdot \sqrt{\frac{a+b}{c^2+ab}} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$a \cdot \sqrt{\frac{b+c}{a^2+bc}} + b \cdot \sqrt{\frac{c+a}{b^2+ca}} + c \cdot \sqrt{\frac{a+b}{c^2+ab}} \leq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{abc}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{abc}} \leq \frac{3}{abc} \Leftrightarrow \sqrt{abc} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \leq 3$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng vì

$$3 = ab + bc + ca \geq \sqrt{abc} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\left(a \cdot \sqrt{\frac{b+c}{a^2+bc}} + b \cdot \sqrt{\frac{c+a}{b^2+ca}} + c \cdot \sqrt{\frac{a+b}{c^2+ab}} \right)^2 \leq (a+b+c) \left(\frac{ab+ac}{a^2+bc} + \frac{bc+ab}{b^2+ca} + \frac{ca+ac}{c^2+a} \right)$$

Ta cần chứng minh được

$$\begin{aligned} (a+b+c) \left(\frac{ab+ac}{a^2+bc} + \frac{bc+ab}{b^2+ca} + \frac{ca+ac}{c^2+a} \right) &\leq \left(\frac{3}{abc} \right)^2 \\ \Leftrightarrow (abc)^2 (a+b+c) \left(\frac{ab+ac}{a^2+bc} + \frac{bc+ab}{b^2+ca} + \frac{ca+ac}{c^2+a} \right) &\leq 9 \end{aligned}$$

Dễ thấy $abc(a+b+c) \leq \frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2 = 3$ và cũng từ giả thiết ta suy ra $abc \leq 1$. Do đó ta được

$$(abc)^2 (a+b+c) \leq 3.$$

Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{ab+ac}{a^2+bc} + \frac{bc+ab}{b^2+ca} + \frac{ca+ac}{c^2+a} \leq 3$$

Thật vậy, biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} & \frac{ab+ac}{a^2+bc} - 1 + \frac{bc+ab}{b^2+ca} - 1 + \frac{ca+ac}{c^2+a} - 1 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(a-b)(a-c)}{a^2+bc} + \frac{(b-c)(b-a)}{b^2+ca} + \frac{(c-a)(c-b)}{c^2+a} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(a-b)\left[(a-c)(b^2+ca) - (b-c)(a^2+bc)\right]}{(a^2+bc)(b^2+ca)} + \frac{(c-a)(c-b)}{c^2+a} \geq 0 \\ & (b-a)(b+a)(2a+c) \end{aligned}$$

Do vai trò của các biến như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử

Bài 141. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn:

$$\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} + \frac{1}{1+d^3} = 2$$

Chứng minh rằng: $\frac{1-a}{1-a+a^2} + \frac{1-b}{1-b+b^2} + \frac{1-c}{1-c+c^2} + \frac{1-d}{1-d+d^2} \geq 0$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Đồng Tháp năm học 2013-2014

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh

$$\frac{1-a^2}{1+a^3} + \frac{1-b^2}{1+b^3} + \frac{1-c^2}{1+c^3} + \frac{1-d^2}{1+d^3} \geq 0$$

Hay $\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} + \frac{1}{1+d^3} \geq \frac{a^2}{1+a^3} + \frac{b^2}{1+b^3} + \frac{c^2}{1+c^3} + \frac{d^2}{1+d^3}$

Từ giả thiết và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} = 2 - \frac{1}{1+d^3} = \frac{1+2d^3}{1+d^3} \geq \frac{3d^2}{1+d^3}$$

Hay $\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} \geq \frac{3d^2}{1+d^3}$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} + \frac{1}{1+d^3} &\geq \frac{3a^2}{1+a^3} \\ \frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+c^3} + \frac{1}{1+d^3} &\geq \frac{3b^2}{1+b^3} \\ \frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+d^3} &\geq \frac{3c^2}{1+c^3} \end{aligned}$$

Cộng theo về bốn bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} + \frac{1}{1+d^3} \geq \frac{a^2}{1+a^3} + \frac{b^2}{1+b^3} + \frac{c^2}{1+c^3} + \frac{d^2}{1+d^3}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$.

Bài 142. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Trà Vinh năm học 2013-2014

Lời giải

Cách 1: Chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta được

$$\sqrt{17\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)} = \sqrt{(1+4^2)\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)} \geq \sqrt{\left(a + \frac{4}{a}\right)^2} = a + \frac{4}{a}$$

Áp dụng tương tự ta được $\sqrt{17\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)} \geq b + \frac{4}{b}$; $\sqrt{17\left(c^2 + \frac{1}{c^2}\right)} \geq c + \frac{4}{c}$

Khi đó ta được

$$\sqrt{17\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)} + \sqrt{17\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)} + \sqrt{17\left(c^2 + \frac{1}{c^2}\right)} \geq a + b + c + \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{36}{a+b+c}$

Nên ta được $a + b + c + \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} \geq a + b + c + \frac{36}{a+b+c}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và kết hợp với giả thiết ta được

$$\begin{aligned} a + b + c + \frac{36}{a+b+c} &= a + b + c + \frac{9}{4(a+b+c)} + \frac{135}{4(a+b+c)} \\ &\geq 2 \cdot \sqrt{(a+b+c) \cdot \frac{9}{4(a+b+c)}} + \frac{135}{4 \cdot \frac{3}{2}} = 3 + \frac{135}{6} = \frac{51}{2} \end{aligned}$$

Từ đó ta suy ra $\sqrt{17\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)} + \sqrt{17\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right)} + \sqrt{17\left(c^2 + \frac{1}{c^2}\right)} \geq \frac{51}{2}$

Hay $\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}$

Như vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{3\sqrt{17}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Cách 2: Dễ dàng chứng minh được: Với a, b, x, y là các số thực dương ta luôn có:

$$\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2} \geq \sqrt{(a+b)^2 + (x+y)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{(a+b)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \\ &\geq \sqrt{(a+b+c)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \left(\frac{9}{a+b+c}\right)^2 = \frac{81}{(a+b+c)^2}$

Do đó ta được

$$(a+b+c)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \geq (a+b+c)^2 + \frac{81}{(a+b+c)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và giả thiết ta có

$$(a+b+c)^2 + \frac{81}{16(a+b+c)^2} \geq 2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}; \quad \frac{1215}{16(a+b+c)^2} \geq \frac{1215}{16 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{135}{4}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $(a+b+c)^2 + \frac{81}{(a+b+c)^2} \geq \frac{9}{2} + \frac{135}{4} = \frac{153}{4}$

Từ các kết quả đó ta được $S \geq \sqrt{\frac{153}{4}} = \frac{3\sqrt{17}}{2}$.

Như vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{3\sqrt{17}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Bài 143. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{bc}{a^2(b+c)} + \frac{ca}{b^2(c+a)} + \frac{ab}{c^2(a+b)}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Lâm Đồng năm học 2013-2014

Lời giải

Kết hợp với giả thiết ta viết lại biểu thức P thành

$$P = \frac{b^2c^2}{ab+ac} + \frac{c^2a^2}{ab+bc} + \frac{a^2b^2}{ca+bc}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$P = \frac{b^2c^2}{ab+ac} + \frac{c^2a^2}{ab+bc} + \frac{a^2b^2}{ca+bc} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{ab+bc+ca}{2}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$$

Suy ra ta được $P \geq \frac{3}{2}$ hay giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 144. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $0 \leq a; b; c \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(2-c) \leq 2$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh An Giang năm học 2014-2015

Lời giải

Từ giả thiết ta được $0 \leq 1-a; 1-b \leq 1; a+b+1 \geq 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$1 = \frac{(1-a) + (1-b) + (a+b+1)}{3} \geq \sqrt[3]{(1-a)(1-b)(a+b+1)}$$

Suy ra $1 \geq (1-a)(1-b)(a+b+1)$

Vì $2-c > 0$ nên khi đó ta được

$$2-c \geq (1-a)(1-b)(a+b+1)(2-c)$$

Suy ra $(1-a)(1-b)(2-c) \leq \frac{2-c}{a+b+1}$

Hay $\frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(2-c) \leq \frac{2}{a+b+1} \quad (1)$

Ta đi chứng minh $\frac{a}{b+c+1} \leq \frac{2a}{a+b+1}$. Thật vậy, biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$a(a+b+1) \leq 2a(b+c+1) \Leftrightarrow a(b+2c+1-a) \leq 0$$

Tương tự ta được $\frac{b}{a+c+1} \leq \frac{2b}{a+b+1}$

Từ các kết quả trên ta được

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(2-c) \\ \leq \frac{2}{a+b+1} + \frac{2a}{a+b+1} + \frac{2b}{a+b+1} = 2 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 0; c = 1$.

Bài 145. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3(ab + bc + ca)$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Lâm Đồng năm học 2014-2015

Lời giải

Dễ thấy $2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{18}{a+b+c} = 6$. Do đó ta được

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6 \geq 3(ab + bc + ca)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a^3 + 1 + 1 \geq 3a; b^3 + 1 + 1 \geq 3b; c^3 + 1 + 1 \geq 3c$$

Ta quy bài toán về chứng minh $3(a + b + c) \geq 3(ab + bc + ca)$

Hay $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$, đây là một đánh giá đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 146. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{a^2 + (b+c)^2} + \frac{b(c+a)}{b^2 + (c+a)^2} + \frac{c(a+b)}{c^2 + (a+b)^2} \leq \frac{6}{5}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Thái Bình năm học 2014-2015

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} a^2 + (b+c)^2 &= \left[a^2 + \frac{(b+c)^2}{4} \right] + \frac{3}{4}(b+c)^2 \geq a(b+c) + \frac{3}{4}(b+c)^2 \\ &= \frac{(b+c)(4a+3b+3c)}{4} \end{aligned}$$

Suy ra ta được $\frac{a(b+c)}{a^2 + (b+c)^2} \leq \frac{4a(b+c)}{(4a+3b+3c)(b+c)} = \frac{4a}{4a+3b+3c}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{4a}{4a+3b+3c} = \frac{a}{25} \cdot \frac{(9+1)^2}{4a+3b+3c} \leq \frac{a}{25} \left(\frac{9^2}{3(a+b+c)} + \frac{1}{a} \right).$$

Suy ra ta được
$$\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)} \leq \frac{27a}{25(a+b+c)} + \frac{1}{25}$$

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)} \leq \frac{27b}{25(a+b+c)} + \frac{1}{25}; \quad \frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)} \leq \frac{27c}{25(a+b+c)} + \frac{1}{25}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2} + \frac{b(a+c)}{(c+a)^2+b^2} + \frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2} \leq \frac{27(a+b+c)}{25(a+b+c)} + \frac{3}{25} = \frac{6}{5}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 147. Cho a, b, c là các số thực không âm sao cho $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+9bc+4(b-c)^2} + \frac{b}{1+9ca+4(c-a)^2} + \frac{c}{1+9ab+4(a-b)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Thành Phố Hải Phòng năm học 2014-2015

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a}{1+9bc+4(b-c)^2} + \frac{b}{1+9ca+4(c-a)^2} + \frac{c}{1+9ab+4(a-b)^2} \\ & \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c) + 27abc + 4a(b-c)^2 + 4b(c-a)^2 + 4c(a-b)^2} \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$2(a+b+c)^2 \geq 1 + 27abc + 4a(b-c)^2 + 4b(c-a)^2 + 4c(a-b)^2$$

Hay $1 \geq 4ab(a+b) + 4bc(b+c) + 4ca(c+a) + 3abc$

Để ý đến giả thiết ta viết lại được bất đẳng thức trên thành

$$(a+b+c)^3 \geq 4ab(a+b) + 4bc(b+c) + 4ca(c+a) + 3abc$$

Hay $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$

Biến đổi tương đương ta được $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

Bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức đúng và dễ dàng chứng minh được.

Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = \frac{1}{2}; c = 0$ và các hoán vị.

Bài 148. Cho x, y, z là các số thực không dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{xy^3z^3}{(x^2+yz)^2(y^3+z^3)} + \frac{yz^3x^3}{(y^2+zx)^2(z^3+x^3)} + \frac{zx^3y^3}{(z^2+xy)^2(x^3+y^3)} \leq \frac{3}{8}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Trường ĐHKHTN Hà Nội năm học 2014-2015

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được $2(y^3 + z^3) \geq (y+z)(y^2 + z^2) \geq 2\sqrt{yz}(y^2 + z^2)$

Và lại có $x^2 + yz \geq 2x\sqrt{yz}$. Nhân theo vế hai kết quả trên ta được

$$(x^2 + yz)(y^3 + z^3) \geq 2xyz(y^2 + z^2)$$

Suy ra ta được

$$\begin{aligned} \frac{xy^3z^3}{(x^2 + yz)^2(y^3 + z^3)} &\leq \frac{xy^3z^3}{2(x^2 + yz)xyz(y^2 + z^2)} \\ &= \frac{y^2z^2}{2(x^2y^2 + x^2z^2 + y^3z + yz^3)} \leq \frac{y^2z^2}{2(x^2y^2 + x^2z^2 + 2y^2z^2)} \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\begin{aligned} &\frac{xy^3z^3}{(x^2 + yz)^2(y^3 + z^3)} + \frac{yz^3x^3}{(y^2 + zx)^2(z^3 + x^3)} + \frac{zx^3y^3}{(z^2 + xy)^2(x^3 + y^3)} \\ &\leq \frac{y^2z^2}{2(x^2y^2 + x^2z^2 + 2y^2z^2)} + \frac{x^2z^2}{2(x^2y^2 + 2x^2z^2 + y^2z^2)} + \frac{x^2y^2}{2(2x^2y^2 + x^2z^2 + 2y^2z^2)} \end{aligned}$$

Ta cần chỉ ra được

$$\frac{y^2z^2}{x^2y^2 + x^2z^2 + 2y^2z^2} + \frac{x^2z^2}{x^2y^2 + 2x^2z^2 + y^2z^2} + \frac{x^2y^2}{2x^2y^2 + x^2z^2 + 2y^2z^2} \leq \frac{3}{4}$$

Đặt $a = x^2y^2$; $b = y^2z^2$; $c = z^2x^2$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{a}{2a + b + c} + \frac{b}{a + 2b + c} + \frac{c}{a + b + 2c} \leq \frac{3}{4}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{b + c}{2a + b + c} + \frac{a + c}{a + 2b + c} + \frac{a + b}{a + b + 2c} \geq \frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{b + c}{2a + b + c} + \frac{a + c}{a + 2b + c} + \frac{a + b}{a + b + 2c} \geq \frac{(2a + 2b + 2c)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2) + 6(ab + bc + ca)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\begin{aligned} &2(2a + 2b + 2c)^2 \geq 3[2(a^2 + b^2 + c^2) + 6(ab + bc + ca)] \\ \Leftrightarrow &4(a + b + c)^2 \geq 3(a + b + c)^2 + 3(ab + ba + ca) \\ \Leftrightarrow &(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \end{aligned}$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$

Bài 149. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{x^2y}{4x + 5y}} + \sqrt{\frac{y^2z}{4y + 5z}} + \sqrt{\frac{z^2x}{4z + 5x}}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Trường ĐHKHTN Hà Nội năm học 2014-2015

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$P^2 \leq (xy + yz + zx) \left(\frac{x}{4x + 5y} + \frac{y}{4y + 5z} + \frac{z}{4z + 5x} \right)$$

$$\text{Đặt } Q = \frac{x}{4x+5y} + \frac{y}{4y+5z} + \frac{z}{4z+5x} = \frac{1}{4} \left[3 - \left(\frac{5y}{4x+5y} + \frac{5z}{4y+5z} + \frac{5x}{4z+5x} \right) \right]$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{5y}{4x+5y} + \frac{5z}{4y+5z} + \frac{5x}{4z+5x} &\geq \frac{5(x+y+z)^2}{4(xy+yz+zx) + 5(x^2+y^2+z^2)} \\ &= \frac{5}{5(x+y+z)^2 - 6(xy+yz+zx)} = \frac{5}{5-6(xy+yz+zx)} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta được } Q \leq \frac{1}{4} \left[3 - \frac{5}{5-6(xy+yz+zx)} \right]$$

$$\text{Khi đó ta suy ra } P^2 \leq \frac{1}{4}(xy+yz+zx) \left[3 - \frac{5}{5-6(xy+yz+zx)} \right]$$

Đặt $a = xy + yz + zx \Rightarrow 0 < a \leq \frac{1}{3}$. Khi đó ta được

$$P^2 \leq \frac{1}{4}a \left(3 - \frac{5}{5-6a} \right) = \frac{a(5-9a)}{2(5-6a)}$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } \frac{a(5-9a)}{2(5-6a)} \leq \frac{1}{9}.$$

Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với $(1-3a)(10-27a) \geq 0$, đây là một đánh giá đúng do

$0 < a \leq \frac{1}{3}$. Do đó bất đẳng thức trên được chứng minh.

Suy ra $P \leq \frac{1}{3}$ hay giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài 150. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{1+9b^2ca} + \frac{b^3}{1+9c^2ab} + \frac{c^3}{1+9a^2bc} \geq \frac{(a+b+c)^3}{18}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2014-2015

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^3}{1+9b^2ca} + \frac{b^3}{1+9c^2ab} + \frac{c^3}{1+9a^2bc} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a+b+c+9abc(ab+bc+ca)}$$

Dễ thấy $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$ và để ý đến giả thiết $ab + bc + ca = 1$ ta được

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a+b+c+9abc(ab+bc+ca)} \geq \frac{(a+b+c)^4}{9(a+b+c+9abc)}$$

Do đó ta có

$$\frac{a^3}{1+9b^2ca} + \frac{b^3}{1+9c^2ab} + \frac{c^3}{1+9a^2bc} \geq \frac{(a+b+c)^4}{9(a+b+c+9abc)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{(a+b+c)^4}{9(a+b+c+9abc)} \geq \frac{(a+b+c)^3}{18}$$

Hay $a+b+c \geq 9abc$. Để ý đến giả thiết $ab+bc+ca=1$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a+b+c = (a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 9abc$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 151. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} & \sqrt{5a^2+4bc} + \sqrt{5b^2+4ca} + \sqrt{5c^2+4ab} \\ & \geq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} + 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \end{aligned}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Quảng Nam năm học 2014-2015

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{5a^2+4bc} - 2\sqrt{bc} + \sqrt{5b^2+4ca} - 2\sqrt{ca} + \sqrt{5c^2+4ab} - 2\sqrt{ab} \geq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Hay

$$\frac{5a^2}{\sqrt{5a^2+4bc} + 2\sqrt{bc}} + \frac{5b^2}{\sqrt{5b^2+4ca} + 2\sqrt{ca}} + \frac{5c^2}{\sqrt{5c^2+4ab} + 2\sqrt{ab}} \geq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Hay

$$\frac{1}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}} \left(\frac{5a^2}{\sqrt{5a^2+4bc} + 2\sqrt{bc}} + \frac{5b^2}{\sqrt{5b^2+4ca} + 2\sqrt{ca}} + \frac{5c^2}{\sqrt{5c^2+4ab} + 2\sqrt{ab}} \right) \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} 2\sqrt{5a^2+4bc} \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} & \leq 8a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4bc \\ 4\sqrt{bc} \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} & = \frac{4 \cdot 3\sqrt{bc} \cdot \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{3} \leq \frac{2(3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 9bc)}{3} \\ & = 2(a^2 + b^2 + c^2 + 3bc) \end{aligned}$$

Cộng theo về hai bất đẳng thức trên ta được

$$2(\sqrt{5a^2+4bc} + 2\sqrt{bc}) \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \leq 10a^2 + 5b^2 + 5c^2 + 10bc$$

Suy ra

$$\frac{10a^2}{2(\sqrt{5a^2+4bc} + 2\sqrt{bc}) \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}} \geq \frac{10a^2}{10a^2 + 5b^2 + 5c^2 + 10bc}$$

Lại có $10bc \leq 5b^2 + 5c^2$ nên ta được

$$\frac{10a^2}{10a^2 + 5b^2 + 5c^2 + 10bc} \geq \frac{10a^2}{10a^2 + 10b^2 + 10c^2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Do đó ta được
$$\frac{10a^2}{2\left(\sqrt{5a^2 + 4bc} + 2\sqrt{bc}\right)\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}} \geq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}} & \left(\frac{5a^2}{\sqrt{5a^2 + 4bc} + 2\sqrt{bc}} + \frac{5b^2}{\sqrt{5b^2 + 4ca} + 2\sqrt{ca}} + \frac{5c^2}{\sqrt{5c^2 + 4ab} + 2\sqrt{ab}} \right) \\ & \geq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2}{b^2 + a^2 + c^2} + \frac{c^2}{c^2 + b^2 + a^2} = 1 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 152. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2a + 3b}{a + 2b + c} + \frac{4b}{a + b + 2c} - \frac{8c}{a + b + 3c}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Quảng Nam năm học 2014-2015

Lời giải

Đặt $x = a + 2b + c$; $y = a + b + 2c$; $z = a + b + 3c$. Khi đó ta được

$$a = 5y - x - 3z; \quad b = x + z - 2y; \quad c = z - x$$

Biểu thức P được viết lại thành
$$P = \frac{4x}{y} + \frac{2y}{x} + \frac{8y}{z} + \frac{4z}{y} - 17$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$P = \frac{4x}{y} + \frac{2y}{x} + \frac{8y}{z} + \frac{4z}{y} - 17 \geq 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{2y}{x}} + 2\sqrt{\frac{8y}{z} \cdot \frac{4z}{y}} - 17 = 12\sqrt{2} - 17$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $12\sqrt{2} - 17$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{4x}{y} = \frac{2y}{x} \\ \frac{8y}{z} = \frac{4z}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = y^2 \\ 2y^2 = z^2 \end{cases} \Leftrightarrow z = \sqrt{2}y = 2x$$

Bài 153. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $2\sqrt{xy} + \sqrt{xz} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z} \geq 4$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Tuyên Quang năm học 2014-2015

Lời giải

Biến đổi vế trái của bất đẳng thức như sau

$$\frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z} = \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{2yz}{x} + \frac{2xy}{z} + \frac{3zx}{y} + \frac{3xy}{z}$$

Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 2z; \quad \frac{2yz}{x} + \frac{2xy}{z} \geq 4y; \quad \frac{3zx}{y} + \frac{3xy}{z} \geq 6x$$

Do đó ta được
$$\frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z} \geq 6x + 4y + 2z$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$6x + 4y + 2z = 4(x + y) + 2(x + z) \geq 8\sqrt{xy} + 4\sqrt{xz} = 4(2\sqrt{xy} + \sqrt{xz}) = 4$$

Do đó ta suy ra
$$\frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z} \geq 4$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Bài 154. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện:

$$3(x^4 + y^4 + z^4) - 7(x^2 + y^2 + z^2) + 12 = 0.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2}{y+2z} + \frac{y^2}{z+2x} + \frac{z^2}{x+2y}$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Yên Bái năm học 2014-2015

Lời giải

Trước hết ta đơn giản hóa giả thiết của bài toán.

Áp dụng một đánh giá quen thuộc ta có $x^4 + y^4 + z^4 \geq 3(x^2 + y^2 + z^2)^2$

Khi đó ta được $3(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 7(x^2 + y^2 + z^2) + 12 \leq 0$

Hay $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$P = \frac{x^2}{y+2z} + \frac{y^2}{z+2x} + \frac{z^2}{x+2y} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2y + y^2z + z^2x + 2(xy^2 + zx^2 + yz^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} x^2y + y^2z + z^2x &\leq \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)} \\ &\leq \sqrt{\frac{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^3}{3}} = (x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$2(xy^2 + yz^2 + zx^2) \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}}$$

Do đó ta được
$$P \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{3(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} = 1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài 155. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2 + c^2} + \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2 + b^2} \geq \frac{3}{5}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Đắk Lắk năm học 2014-2015

Lời giải

Đề ý là
$$\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2 + c^2} = \frac{(a+b)^2 + c^2 - 2c(a+b)}{(a+b)^2 + c^2} = 1 - \frac{2c(a+b)}{(a+b)^2 + c^2}$$

Áp dụng tương tự ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2} + \frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2} + \frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2} \leq \frac{6}{5}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^2 + (b+c)^2 = \left[a^2 + \frac{(b+c)^2}{4} \right] + \frac{3}{4}(b+c)^2 \geq a(b+c) + \frac{3}{4}(b+c)^2$$

$$= \frac{(b+c)(4a+3b+3c)}{4}$$

Suy ra ta được

$$\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2} \leq \frac{4a(b+c)}{(4a+3b+3c)(b+c)} = \frac{4a}{4a+3b+3c}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{4a}{4a+3b+3c} = \frac{a}{25} \cdot \frac{(9+1)^2}{4a+3b+3c} \leq \frac{a}{25} \left(\frac{9^2}{3(a+b+c)} + \frac{1}{a} \right).$$

Suy ra ta được

$$\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2} \leq \frac{27a}{25(a+b+c)} + \frac{1}{25}$$

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2} \leq \frac{27b}{25(a+b+c)} + \frac{1}{25}; \quad \frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2} \leq \frac{27c}{25(a+b+c)} + \frac{1}{25}$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2} + \frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2} + \frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2} \leq \frac{27(a+b+c)}{25(a+b+c)} + \frac{3}{25} = \frac{6}{5}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 156. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 2xyz$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{x}{2y^2z^2 + xyz}} + \sqrt{\frac{y}{2z^2x^2 + xyz}} + \sqrt{\frac{z}{2x^2y^2 + xyz}} \leq 1$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Gia Lai năm học 2014-2015

Lời giải

Giả thiết của bài toán được viết lại thành $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$ thì ta được

$a + b + c = 2$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{bc}{\sqrt{2a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{2b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{2c+ab}} \leq 1$$

Chú ý đến giả thiết $a + b + c = 2$, ta có

$$\frac{bc}{\sqrt{2a+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{bc}{2} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+a} \right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{ca}{\sqrt{2b+ca}} \leq \frac{ca}{2} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} \right); \quad \frac{ab}{\sqrt{2c+ab}} \leq \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{b+c} \right)$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{bc}{\sqrt{2a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{2b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{2c+ab}} \leq \frac{bc}{2} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+a} \right) + \frac{ca}{2} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} \right) + \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{b+c} \right) = \frac{a+b+c}{2} = 1$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{3}{2}$

Bài 157. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x+2}{x^3(y+z)} + \frac{y+2}{y^3(z+x)} + \frac{z+2}{z^3(x+y)}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Cần Thơ năm học 2015-2016

Lời giải

Đặt $a = \frac{1}{x}$; $b = \frac{1}{y}$; $z = \frac{1}{c}$, suy ra $abc = 1$. Biểu thức P được viết lại thành

$$P = \frac{a^2bc(1+2a)}{b+c} + \frac{b^2ca(1+2b)}{c+a} + \frac{c^2ab(1+2c)}{a+b}$$

Hay

$$P = \frac{a(1+2a)}{b+c} + \frac{b(1+2b)}{c+a} + \frac{c(1+2c)}{a+b}$$

Ta viết biểu thức P thành $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{2a^2}{b+c} + \frac{2b^2}{c+a} + \frac{2c^2}{a+b}$

Dễ dàng chứng minh được $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{abc}}{2} = \frac{3}{2}$$

DO đó ta được $P \geq \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Bài 158. Cho a, b, c là các số thực dương bất kỳ. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 \geq \frac{ab+bc+ca}{3} \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Kiên Giang năm học 2015-2016

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{a+b+c}{3} \right)^6 \geq \left(\frac{ab+bc+ca}{3} \right)^2 \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

$$\text{Hay} \quad \frac{(a+b+c)^6}{27} \geq (ab+bc+ca)^2 (a^2+b^2+c^2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} (ab + bc + ca)^2 (a^2 + b^2 + c^2) &= (ab + bc + ca)(ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2) \\ &\leq \left[\frac{(ab + bc + ca) + (ab + bc + ca) + (a^2 + b^2 + c^2)}{3} \right]^3 = \frac{(a + b + c)^6}{27} \end{aligned}$$

thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 159. Cho a, b, c là các số thực không âm trong đó không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2} \geq \frac{3}{ab + bc + ca}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Thanh Hóa năm học 2015-2016

Lời giải

Vì vai trò của các biến như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử c là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c . Khi đó ta được

$$\begin{aligned} b^2 - bc + c^2 &= b^2 - c(b - c) \leq b^2 \\ a^2 - ac + c^2 &= a^2 - c(a - c) \leq a^2 \\ ab + bc + ca &= ab + c(a + b) \geq ab \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2} \geq \frac{3}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

Và có

$$\frac{3}{ab + bc + ca} \leq \frac{1}{ab}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2 - ab + b^2} \geq \frac{3}{ab}$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2 - ab + b^2} - \frac{1}{ab} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{ab - a^2}{a^3b} + \frac{ab - b^2}{ab^3} + \frac{2ab - a^2 - b^2}{(a^2 - ab + b^2)ab} &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a - b)^4}{a^2b^2(a^2 - ab + b^2)} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 160. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{4}{a + b} + \frac{4}{b + c} + \frac{4}{c + a} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 9$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Thành Phố Hà Nội năm học 2015-2016

Lời giải

Cách 1: Để ý đến giả thiết lại viết lại được bất đẳng thức trên thành

$$\begin{aligned} \frac{4(a + b + c)}{a + b} + \frac{4(a + b + c)}{b + c} + \frac{4(a + b + c)}{c + a} &\leq \frac{a + b + c}{a} + \frac{a + b + c}{b} + \frac{a + b + c}{c} + 9 \\ \Leftrightarrow \frac{4c}{a + b} + \frac{4a}{b + c} + \frac{4b}{c + a} + 12 &\leq \frac{b + c}{a} + \frac{a + c}{b} + \frac{a + b}{c} + 12 \\ \Leftrightarrow \frac{4c}{a + b} + \frac{4a}{b + c} + \frac{4b}{c + a} &\leq \frac{b + c}{a} + \frac{a + c}{b} + \frac{a + b}{c} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy dạng $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, ta được

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} &= a \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} \right) + b \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) + c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \\ &\geq \frac{4a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{4c}{a+b} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{4}{1-c} + \frac{4}{1-a} + \frac{4}{1-b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 9$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{4}{1-c} - \frac{1}{c} \leq 18c - 3$. Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$5c - 1 \leq c(1-c)(18c-3) \Leftrightarrow 5c - 1 \leq 21c^2 - 3c - 18c^3 \Leftrightarrow (3c-1)^2(2c-1) \leq 0$$

Do a, b, c là ba cạnh của một tam giác và $a + b + c = 1$ nên

$$2c - 1 = 2c - (a + b + c) = c - (a + b) < 0$$

Do đó bất đẳng thức trên đúng.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 161. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a+b+1}{a^3+b^3+1} + \frac{b+c+1}{b^3+c^3+1} + \frac{c+a+1}{c^3+a^3+1}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Trường Đại học Vinh năm học 2015-2016

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho giả thiết ta được

$$a + b + c = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức cho giả thiết ta được

$$a + b + c = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \Rightarrow ab+bc+ca \geq a+b+c$$

Áp dụng bất đẳng thức Bnhiacopxki ta có

$$(a^3+b^3+1)(a+b+1) \geq (a^2+b^2+1)^2 \geq \frac{(a+b+1)^2(a^2+b^2+1)}{3}$$

Do đó ta được

$$\frac{a+b+1}{a^3+b^3+1} \leq \frac{3}{a^2+b^2+1}$$

Hoàn toàn tương tự ta thu được $P \leq \frac{3}{a^2+b^2+1} + \frac{3}{b^2+c^2+1} + \frac{3}{c^2+a^2+1}$

Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{a^2+b^2+1} + \frac{1}{b^2+c^2+1} + \frac{1}{c^2+a^2+1} \leq 1$

Thật vậy, bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+1} + \frac{b^2+c^2}{b^2+c^2+1} + \frac{c^2+a^2}{c^2+a^2+1} \geq 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2 + 1} + \frac{c^2 + a^2}{c^2 + a^2 + 1} \geq \frac{\left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2}\right)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2) + 3}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2}\right)^2 \geq 4(a^2 + b^2 + c^2) + 6 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)} + \sqrt{(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} + \sqrt{(c^2 + a^2)(a^2 + b^2)} \geq a^2 + b^2 + c^2 + 3 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\sqrt{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)} \geq b^2 + ac$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)} + \sqrt{(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} + \sqrt{(c^2 + a^2)(a^2 + b^2)} \\ & \geq a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \end{aligned}$$

Mà từ giả thiết ta được $ab + bc + ca \geq 3$. Do vậy ta được

$$\sqrt{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)} + \sqrt{(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} + \sqrt{(c^2 + a^2)(a^2 + b^2)} \geq a^2 + b^2 + c^2 + 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là 3. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 162. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$(a + bc)^2 + (b + ca)^2 + (c + ab)^2 \geq \sqrt{2}(a + b)(b + c)(c + a)$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Đắk Lắk năm học 2015-2016

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$(a + bc)^2 + (b + ca)^2 \geq \frac{(a + bc + b + ca)^2}{2} = \frac{(a + b)^2(c + 1)^2}{2}$$

$$\text{Khi đó ta được } (a + bc)^2 + (b + ca)^2 + (c + ab)^2 \geq \frac{(a + b)^2(c + 1)^2}{2} + (c + ab)^2$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{(a + b)^2(c + 1)^2}{2} + (c + ab)^2 \geq 2 \frac{(a + b)(c + 1)(c + ab)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(a + b)(c + 1)(c + ab)$$

Bài toán quy về chứng minh

$$\begin{aligned} & \sqrt{2}(a + b)(c + 1)(c + ab) \geq \sqrt{2}(a + b)(b + c)(c + a) \\ \Leftrightarrow & (c + 1)(c + ab) \geq (b + c)(c + a) \Leftrightarrow c + abc = bc + ca \\ \Leftrightarrow & c(a - 1)(b - 1) \geq 0 \end{aligned}$$

Theo nguyên lí Dirrichlet thì trong ba số a, b, c luôn tìm được hai số cùng phía với 1. Vì vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử hai số đó là a và b . Khi đó bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

Bài 163. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x}{\sqrt{x}(y + z)} + \frac{y^3 - 2y^2 + y}{\sqrt{y}(z + x)} + \frac{z^3 - 2z^2 + z}{\sqrt{z}(x + y)} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Kiên Giang năm học 2015-2016

Lời giải

Áp dụng giả thiết $x + y + z = 1$ ta được

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x}{\sqrt{x}(y+z)} = \frac{x(1-x)^2}{\sqrt{x}(1-x)} = \sqrt{x}(1-x) = \sqrt{x} - x\sqrt{x}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{\sqrt{x}(y+z)} + \frac{y^3 - 2y^2 + y}{\sqrt{y}(z+x)} + \frac{z^3 - 2z^2 + z}{\sqrt{z}(x+y)} \\ = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - (x\sqrt{x} + x\sqrt{y} + x\sqrt{z}) \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - (x\sqrt{x} + x\sqrt{y} + x\sqrt{z}) \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Từ $x + y + z = 1 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{3}$. Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\sqrt{3}(x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z}) \geq (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})(x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z}) \geq (x + y + z)^2$$

Do đó ta được $x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Từ đó ta có

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - (x\sqrt{x} + x\sqrt{y} + x\sqrt{z}) \leq \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài 164. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq a + b + c$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2015-2016

Lời giải

Sử dụng kỹ thuật thêm bớt ta có bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} 2(a+b+c) &\geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ \Leftrightarrow (a^4 + b^4 + c^4) + 2(a+b+c) &\geq (a^4 + b^4 + c^4) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ \Leftrightarrow (a^4 + b^4 + c^4) + 2(a+b+c) &\geq (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 9 \end{aligned}$$

Vậy ta cần chứng minh $a^4 + b^4 + c^4 + 2(a+b+c) \geq 9$

Hay là $(a^4 + a + a) + (b^4 + b + b) + (c^4 + c + c) \geq 9$

Điều này hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy bộ ba số ta có

$$a^4 + a + a \geq 3\sqrt[3]{a^4 \cdot a \cdot a} = 3a^2$$

$$b^4 + b + b \geq 3\sqrt[3]{b^4 \cdot b \cdot b} = 3b^2$$

$$c^4 + c + c \geq 3\sqrt[3]{c^4 \cdot c \cdot c} = 3c^2$$

Bài toán được giải quyết. Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 165. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 + a + b + c + \frac{2a}{b^2 + c^2} + \frac{2b}{a^2 + c^2} + \frac{2c}{a^2 + b^2} \geq 9$$

Trích đề thi chọn HS dự thi HSGQG Tỉnh Thái Nguyên năm học 2015-2016

Lời giải

Dễ dàng chứng minh được $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2) = \frac{a^2 + b^2}{c}$

Áp dụng hoàn toàn tương tự ta được

$$2(a^4 + b^4 + c^4) \geq \frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b}$$

Bài toán quy về chứng minh

$$\frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} + 2(a + b + c) + \frac{4a}{b^2 + c^2} + \frac{4b}{a^2 + c^2} + \frac{4c}{a^2 + b^2} \geq 18$$

Áp dụng bất đẳng thức Caychy ta được

$$\frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{4c}{a^2 + b^2} \geq 4; \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{4a}{b^2 + c^2} \geq 4; \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{4b}{c^2 + a^2} \geq 4$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{4a}{b^2 + c^2} + \frac{4b}{a^2 + c^2} + \frac{4c}{a^2 + b^2} \geq 12$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được $a + b + c \geq 3$, đánh giá cuối cùng đúng theo bất đẳng thức Cauchy. Vậy bài toán được chứng minh xong

Bài 102. Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $\min \{a + b; b + c; c + a\} > 0$ và

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca).$$

Chứng minh rằng:
$$\sqrt{\frac{ab}{a^2 + b^2}} + \sqrt{\frac{bc}{b^2 + c^2}} + \sqrt{\frac{ca}{c^2 + a^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta phân tích các giả thiết của bài toán, từ $\min \{a + b; b + c; c + a\} > 0$ ta suy ra được trong các tổng trên không có tổng nào bằng không và từ giả thiết thứ hai ta thu được trong các biến a, b, c chỉ có thể có một biến bằng 0. Do đó ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b; c = 0$ và các hoán vị của nó. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy không thể đánh giá trực tiếp tử hoặc mẫu của các biểu thức.

Do đó ta hướng đến biến đổi các biểu thức trước. Chú ý đến phép biến đổi
$$\sqrt{\frac{ab}{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{ab(a^2 + b^2)}}{a^2 + b^2}.$$

Để đảm bảo dấu đẳng thức xảy ra ta nhân với $\sqrt{2}$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{\sqrt{2ab(a^2 + b^2)}}{a^2 + b^2} + \frac{\sqrt{2bc(b^2 + c^2)}}{b^2 + c^2} + \frac{\sqrt{2ca(c^2 + a^2)}}{c^2 + a^2} \geq 1$$

Đến đây áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{\sqrt{2ab(a^2 + b^2)}}{a^2 + b^2} \geq \frac{\sqrt{2ab \cdot 2ab}}{a^2 + b^2} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{\sqrt{2bc(b^2 + c^2)}}{b^2 + c^2} \geq \frac{2bc}{b^2 + c^2}; \quad \frac{\sqrt{2ca(c^2 + a^2)}}{c^2 + a^2} \geq \frac{2ca}{c^2 + a^2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{\sqrt{2ab(a^2 + b^2)}}{a^2 + b^2} + \frac{\sqrt{2bc(b^2 + c^2)}}{b^2 + c^2} + \frac{\sqrt{2ca(c^2 + a^2)}}{c^2 + a^2} \geq \frac{2ab}{a^2 + b^2} + \frac{2bc}{b^2 + c^2} + \frac{2ca}{c^2 + a^2}$$

Khi đó phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{2ab}{a^2 + b^2} + \frac{2bc}{b^2 + c^2} + \frac{2ca}{c^2 + a^2} \geq 1$$

Để ý là
$$\frac{2ab}{a^2 + b^2} + \frac{2bc}{b^2 + c^2} + \frac{2ca}{c^2 + a^2} + 3 = \frac{(a + b)^2}{a^2 + b^2} + \frac{(b + c)^2}{b^2 + c^2} + \frac{(c + a)^2}{c^2 + a^2}$$

Lúc này áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} \frac{(a + b)^2}{a^2 + b^2} + \frac{(b + c)^2}{b^2 + c^2} + \frac{(c + a)^2}{c^2 + a^2} &\geq \frac{(2a + 2b + 2c)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \\ &= \frac{2(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)}{2(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{8(ab + bc + ca)}{2(ab + bc + ca)} = 4 \end{aligned}$$

Do đó ta có
$$\frac{2ab}{a^2 + b^2} + \frac{2bc}{b^2 + c^2} + \frac{2ca}{c^2 + a^2} \geq 1$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b; c = 0$ và các hoán vị.

Bài 103. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b+2c}} + \sqrt{\frac{bc}{b+c+2a}} + \sqrt{\frac{ca}{c+a+2b}} \leq \frac{1}{2}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức trên ta thấy được một số ý tưởng tiếp cận như sử dụng các bất đẳng thức Cauchy, Bunhiacopxki để khử các căn bậc hai, đổi biến để đơn giản hóa giả thiết,...

Cách 1: Trước hết với ý tưởng khử các căn bậc hai, ta chú ý đến đánh giá bằng bất đẳng thức Bunhiacopxki như sau

$$4(a+b+2c) = (1+1+2)(a+b+2c) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{c})^2$$

Khi đó kết hợp với bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b+2c}} = \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{4(a+b+2c)}} \leq \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{c}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} \right)$$

Áp dụng tương tự ta có

$$\sqrt{\frac{bc}{b+c+2a}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} \right); \sqrt{\frac{ca}{c+a+2b}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} \right)$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{\frac{ab}{a+b+2c}} + \sqrt{\frac{bc}{b+c+2a}} + \sqrt{\frac{ca}{c+a+2b}} \leq \frac{1}{2} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) = \frac{1}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{9}$.

Cách 2: Đặt $x = \sqrt{a}$; $y = \sqrt{b}$; $z = \sqrt{c}$. Từ giả thiết ta suy ra $x + y + z = 1$.

Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2}} + \frac{yz}{\sqrt{y^2 + z^2 + 2x^2}} + \frac{zx}{\sqrt{z^2 + x^2 + 2y^2}} \leq \frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$4(x^2 + y^2 + 2z^2) = (1+1+2)(x^2 + y^2 + 2z^2) \geq (x + y + 2z)^2$$

Do đó ta có

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2}} = \frac{2xy}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + 2z^2)}} \leq \frac{2xy}{x + y + 2z} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{xy}{x + z} + \frac{xy}{y + z} \right)$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{yz}{\sqrt{y^2 + z^2 + 2x^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{yz}{x + y} + \frac{yz}{x + z} \right); \frac{zx}{\sqrt{z^2 + x^2 + 2y^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{zx}{x + y} + \frac{zx}{y + z} \right)$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2}} + \frac{yz}{\sqrt{y^2 + z^2 + 2x^2}} + \frac{zx}{\sqrt{z^2 + x^2 + 2y^2}} \leq \frac{x + y + z}{2} = \frac{1}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 104. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} + \frac{a+b}{c^2} \geq 2$$

Phân tích và lời giải

Từ giả thiết của bài toán thì suy nghĩ rất tự nhiên là đổi biến $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, khi đó giả thiết trở thành $x + y + z = 1$ và bất đẳng thức được viết lại là

$$\frac{x^2(y+z)}{yz} + \frac{y^2(z+x)}{zx} + \frac{z^2(x+y)}{xy} \geq 2$$

Quan sát bất đẳng thức trên ta có các cách xử lý như sau

Cách 1: Chú ý đến dụng bất đẳng thức Cauchy ta được các đánh giá

$$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}; yz \leq \frac{(y+z)^2}{4}; zx \leq \frac{(z+x)^2}{4}$$

Khi đó ta được bất đẳng thức sau

$$\frac{x^2(y+z)}{yz} + \frac{y^2(z+x)}{zx} + \frac{z^2(x+y)}{xy} \geq \frac{4x^2}{(y+z)} + \frac{4y^2}{(z+x)} + \frac{4z^2}{(x+y)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cộng mẫu ta có

$$\frac{4x^2}{y+z} + \frac{4y^2}{z+x} + \frac{4z^2}{x+y} \geq \frac{4(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = 2(x+y+z) = 2$$

Vậy bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$.

Cách 2: Biến đổi bất đẳng thức thành

$$x^2\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + y^2\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) + z^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq \frac{1}{2}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$\begin{aligned} x^2\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) &= \frac{x^2}{y+z}(y+z)\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq \frac{4x^2}{y+z} \\ y^2\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) &= \frac{y^2}{z+x}(z+x)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) \geq \frac{4y^2}{z+x} \\ z^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) &= \frac{z^2}{x+y}(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq \frac{4z^2}{x+y} \end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$x^2\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + y^2\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) + z^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq \frac{4x^2}{y+z} + \frac{4y^2}{z+x} + \frac{4z^2}{x+y}$$

Đến đây đánh giá tương tự như cách 1 hoặc có thể áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki như sau đây

$$\begin{aligned} \frac{4x^2}{y+z} + \frac{4y^2}{z+x} + \frac{4z^2}{x+y} &= 2\left[(x+y) + (y+z) + (z+x)\right] \left[\frac{4x^2}{y+z} + \frac{4y^2}{z+x} + \frac{4z^2}{x+y}\right] \\ &\geq 2\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\sqrt{y+z} + \frac{y}{\sqrt{z+x}}\sqrt{z+x} + \frac{z}{\sqrt{x+y}}\sqrt{x+y}\right)^2 = 2(x+y+z)^2 = 2 \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 105. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(1 + \frac{2a}{b}\right)^2 + \left(1 + \frac{2b}{c}\right)^2 + \left(1 + \frac{2c}{a}\right)^2 \geq \frac{9(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

Phân tích và lời giải

Để ý đến các đại lượng về trái của bất đẳng thức ta nhận thấy các ý tưởng tiếp cận bài toán như khai triển rồi đánh giá bằng bất đẳng thức Cauchy hoặc sử dụng đánh giá quen thuộc $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$. Ta đi phân tích các ý tưởng đó theo các cách sau

Cách 1: Triển khai về trái ta được

$$\left(1 + \frac{2a}{b}\right)^2 + \left(1 + \frac{2b}{c}\right)^2 + \left(1 + \frac{2c}{a}\right)^2 = 3 + 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + 4\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) + \left(1 + \frac{b^2}{c^2}\right) + \left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right) &\geq 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \\ 3\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) &\geq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \geq 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \end{aligned}$$

Từ đó ta được

$$3 + 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + 4\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) \geq 9\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)$$

Để ý là theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{bc} + \frac{c^2}{ca} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

Suy ra
$$\left(1 + \frac{2a}{b}\right)^2 + \left(1 + \frac{2b}{c}\right)^2 + \left(1 + \frac{2c}{a}\right)^2 \geq \frac{9(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$ ta được

$$\left(1 + \frac{2a}{b}\right)^2 + \left(1 + \frac{2b}{c}\right)^2 + \left(1 + \frac{2c}{a}\right)^2 \geq \frac{1}{3} \left[3 + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \right]^2$$

Ta cần chứng minh được
$$\frac{1}{3} \left[3 + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \right]^2 \geq \frac{9(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

Như vậy phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\left[3 + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \right]^2 \geq 27\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)$$

Thật vậy, đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \Rightarrow t \geq 3$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(3 + 2t)^2 \geq 27t \Leftrightarrow (t - 3)(4t - 3) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do $t \geq 3$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

Bài 106. Cho a, b, c, d là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ac + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

Phân tích và lời giải

Quan sát bất đẳng thức thì suy nghĩ đầu tiên đó là sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức. Do đó ta thử tiếp cận bài toán với bất đẳng thức xem như thế nào?

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ac + a^2} \\ & \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + a^2c + ca^2} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

Hay
$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một đánh giá quen thuộc.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ngoài ra để ý đến mối liên hệ giữa tử và mẫu ta chú ý đến hằng đẳng thức bậc ba quen thuộc

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2). \text{ Do đó ta có phép biến đổi}$$

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} - \frac{b^3}{a^2 + ab + b^2} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = a - b$$

Hoàn toàn tương tự ta có

$$\begin{aligned} & \frac{2a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{2b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{2c^3}{c^2 + ac + a^2} \\ & = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ac + a^2} \end{aligned}$$

$$\text{Để ý là } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq \frac{(a + b)(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

Khi này ta được $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{a + b}{3}$, đến đây bài toán xem như được chứng minh và ta trình bày lại

lời giải như sau

Cách 2: Ta có

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} - \frac{b^3}{a^2 + ab + b^2} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = a - b$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} - \frac{c^3}{b^2 + bc + c^2} = b - c; \quad \frac{c^3}{c^2 + ac + a^2} - \frac{a^3}{c^2 + ac + a^2} = c - a$$

Cộng theo về các đẳng thức trên ta được

$$\left(\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ac + a^2} \right) - \left(\frac{b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{a^3}{c^2 + ac + a^2} \right) = 0$$

Hay

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ac + a^2} = \frac{b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{a^3}{c^2 + ac + a^2}$$

Do đó ta được

$$\frac{2a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{2b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{2c^3}{c^2 + ac + a^2} = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ac + a^2}$$

Để ý ta thấy

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq \frac{(a + b)(a^2 + ab + b^2)}{3}$$

Do đó ta được

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{a + b}{3}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ac + a^2} \geq \frac{2(a + b + c)}{3}$$

Suy ra

$$\frac{2a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{2b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{2c^3}{c^2 + ac + a^2} \geq \frac{2(a + b + c)}{3}$$

Hay

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ac + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Cách 3: Ngoài hai lời giải trên ta có thể tham khảo thêm lời giải bằng phương pháp biến đổi tương đương như sau

Vì a, b là các số thực dương nên ta có

$$(a - b)^2(a + b) \geq 0 \Leftrightarrow 3a^3 \geq (2a - b)(a^2 + ab + b^2) \Leftrightarrow \frac{3a^3}{a^2 + ab + b^2} \geq 2a - b$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{3b^3}{b^2 + bc + c^2} \geq 2b - c; \quad \frac{3c^3}{c^2 + ac + a^2} \geq 2c - a$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ac + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 107. Cho tam giác có ba cạnh a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} = 2$. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq \frac{3}{4}$$

Phân tích và lời giải

Khi tiếp cận bài toán này có lẽ ấn tượng đầu tiên là giả thiết của bài toán là một đẳng thức phức tạp. Tuy nhiên khi nhìn bất đẳng thức cần chứng minh ta thấy tích các đại lượng $a + b - c$; $b + c - a$; $c + a - b$ thì thấy tự tin hơn tí vì ít nhiều liên tưởng đến một số đánh giá quen thuộc. Để có các bước đi hợp lí ta đi đánh giá lại giả thiết trước.

Từ giả thiết $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} = 2$, ta được $\frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c^2}{c^2+1} = 1$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia copxki ta được

$$1 = \frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c^2}{c^2+1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3}$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq (a+b+c)^2$ hay $ab + bc + ca \leq \frac{3}{2}$.

Quan sát tích các đại lượng dưới dấu căn ta liên tưởng đến một bất đẳng thức khá là hay gặp $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$. Như vậy ta thu được bất đẳng thức

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq (a+b+c)abc$$

Đến đây ta chú ý đến đánh giá $abc(a+b+c) \leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{3}$

Khi đó ta được

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{3} \leq \frac{3}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 108. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc \geq 13$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta thấy xuất hiện đại lượng $(a^2 + b^2 + c^2)$ liên hệ với giả thiết của bài toán bằng một hằng đẳng thức quen thuộc

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$. Như vậy khi đó ta trong bất đẳng thức sẽ có đại lượng $ab+bc+ca$ và abc . Hai đại lượng này làm ta liên tưởng đến phép sắp thứ tự để giảm biến, hoặc sử dụng bất đẳng thức phụ quen thuộc, hoặc sử dụng nguyên lí Dirichlet. Từ sự phân tích đó ta có các lời giải sau

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$3(a+b+c)^2 - 6(ab+bc+ca) + 4abc \geq 13$$

Hay $3(ab+bc+ca) - 2abc \leq 7$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \leq b \leq c$, do đó ta được $a \leq 1$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} 3(ab+bc+ca) - 2abc &= 3a(b+c) + bc(3-2a) \\ &\leq 3a(b+c) + \frac{(b+c)^2(3-2a)}{4} \\ &= 3a(3-a) + \frac{(3-a)^2(3-2a)}{4} = \frac{27+3a^2-2a^3}{4} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $\frac{27 + 3a^2 - 2a^3}{4} \leq 7$

Hay $2a^3 - 3a^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(2a+1) \geq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2: Ta có

$$\begin{aligned} (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) &= (3-2c)(3-2b)(3-2a) \\ &= 27 - 18(a+b+c) + 12(ab+bc+ca) - 8abc = 12(ab+bc+ca) - 27 - 8abc \end{aligned}$$

Mặt khác ta dễ dàng chứng minh được

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

Do đó ta được $abc \geq 12(ab+bc+ca) - 27 - 7abc$

Hay $abc \geq \frac{4(ab+bc+ca)}{3} - 3$

Do đó ta có $3(a^2+b^2+c^2) + 4abc \geq 3(a^2+b^2+c^2) + \frac{16(ab+bc+ca)}{3} - 12$

Ta cần chứng minh $3(a^2+b^2+c^2) + \frac{16(ab+bc+ca)}{3} - 12 \geq 13$

Hay $9(a^2+b^2+c^2) + 16(ab+bc+ca) \geq 75$

Thật vậy, áp dụng một đánh giá quen thuộc ta có

$$\begin{aligned} 9(a^2+b^2+c^2) + 16(ab+bc+ca) &= a^2+b^2+c^2 + 8[a^2+b^2+c^2 + 2(ab+bc+ca)] \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{3} + 8(a+b+c)^2 = 3 + 72 = 75 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 3: Trong ba số dương bất kì a, b, c luôn tồn tại hai số cùng phía so với 1.

Không mất tính tổng quát ta giả sử hai số đó là a và b . khi đó ta có

$$c(1-a)(1-b) \geq 0 \Leftrightarrow abc \geq c(a+b) - c$$

Ta có

$$\begin{aligned} 3(a^2+b^2+c^2) + 4abc &\geq 3\left[\frac{(a+b)^2}{2} + c^2\right] + 4c(a+b) - 4c \\ &= 3\left[\frac{(3-c)^2}{2} + c^2\right] + 4c(3-c) - 4c = \frac{(c-1)^2}{2} + 26 \geq 13 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 109. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 2abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(2a-1)^2} + \frac{1}{b(2b-1)^2} + \frac{1}{c(2c-1)^2} \geq \frac{1}{2}$$

Phân tích và lời giải

Bất đẳng thức trên đã được chứng minh bằng kỹ thuật đổi biến trong bất đẳng thức Cauchy. Ở đây ta thực hiện đổi biến và áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki xem có thể chứng minh được không.

Từ giả thiết $ab + bc + ca = 2abc$ suy ra $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$.

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, khi đó ta có $x + y + z = 2$.

Bất đẳng thức được viết lại là $\frac{x^3}{(2-x)^2} + \frac{y^3}{(2-y)^2} + \frac{z^3}{(2-z)^2} \geq \frac{1}{2}$

Hay $\frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{z^3}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{z^3}{(x+y)^2} &\geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x(y+z)^2 + y(z+x)^2 + z(x+y)^2} \\ &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y + 6xyz} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y + 6xyz} \geq \frac{1}{2}$$

Hay $2(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y + 6xyz$

Thật vậy, theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$2(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq \frac{2(x+y+z)^2(x^2 + y^2 + z^2)}{3}$$

Mà ta lại có

$$(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y$$

Suy ra ta có

$$\frac{2(x+y+z)^2(x^2 + y^2 + z^2)}{3} \geq \frac{4(x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y)}{3}$$

Ta cần chỉ ra được

$$\begin{aligned} 4(x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y) \\ \geq 3(x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y + 6xyz) \end{aligned}$$

Hay $4(x^3 + y^3 + z^3) + x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y \geq 18xyz$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$4(x^3 + y^3 + z^3) \geq 12xyz; \quad x^2y + y^2x + x^2z \geq 3xyz; \quad z^2x + y^2z + z^2y \geq 3xyz$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$4(x^3 + y^3 + z^3) + x^2y + y^2x + x^2z + z^2x + y^2z + z^2y \geq 18xyz$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{3}{2}$.

Bài 110. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2 + abc} + \sqrt{b^2 + abc} + \sqrt{c^2 + abc} + 9\sqrt{abc} \leq \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Phân tích: Chú ý đến phép biến đổi $a^2 + abc = a^2(a + b + c) + abc = a(a + b)(a + c)$, do đó ta có

$$\sqrt{a^2 + abc} = \sqrt{a(a + b)(a + c)} \leq \frac{\sqrt{a(a + b + a + c)}}{2} = \frac{\sqrt{a(a + 1)}}{2}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có} \quad a^2 + abc = a^2(a + b + c) + abc = a(a + b)(a + c)$$

Do đó ta được

$$\sqrt{a^2 + abc} = \sqrt{a(a + b)(a + c)} \leq \frac{\sqrt{a(a + b + a + c)}}{2} = \frac{\sqrt{a(a + 1)}}{2}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{b^2 + abc} \leq \frac{\sqrt{b(b + 1)}}{2}; \quad \sqrt{c^2 + abc} \leq \frac{\sqrt{c(c + 1)}}{2}$$

Do đó ta được

$$\sqrt{a^2 + abc} + \sqrt{b^2 + abc} + \sqrt{c^2 + abc} \leq \frac{\sqrt{a(a + 1)}}{2} + \frac{\sqrt{b(b + 1)}}{2} + \frac{\sqrt{c(c + 1)}}{2}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\frac{\sqrt{a(a + 1)}}{2} + \sqrt{abc} \leq \sqrt{a\left(\frac{a + 1}{2} + \frac{b + c}{2}\right)} = \sqrt{a\left(\frac{a + b + c + 1}{2}\right)} = \sqrt{a}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{\sqrt{b(b + 1)}}{2} + \sqrt{abc} \leq \sqrt{b}; \quad \frac{\sqrt{c(c + 1)}}{2} + \sqrt{abc} \leq \sqrt{c}$$

Như vậy ta có

$$\sqrt{a^2 + abc} + \sqrt{b^2 + abc} + \sqrt{c^2 + abc} + 9\sqrt{abc} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + 6\sqrt{abc}$$

Mà ta có

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3(a + b + c)} = \sqrt{3}; \quad 6\sqrt{abc} \leq 6\sqrt{\left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Nên ta suy ra

$$\sqrt{a^2 + abc} + \sqrt{b^2 + abc} + \sqrt{c^2 + abc} + 9\sqrt{abc} \leq \sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 111. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a + b^3 + c^3} + \frac{b}{b + c^3 + a^3} + \frac{c}{c + a^3 + b^3} \leq 1$$

Phân tích: Để đồng bậc mẫu ta chú ý đến đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki

$$(a + b^3 + c^3)(a^3 + b + c) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(a + b^3 + c^3)(a^3 + b + c) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Suy ra
$$\frac{a}{a + b^3 + c^3} = \frac{a(a^3 + b + c)}{(a + b^3 + c^3)(a^3 + b + c)} \leq \frac{a^4 + ab + ac}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{b}{b + c^3 + a^3} \leq \frac{b^4 + ab + bc}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}; \quad \frac{c}{c + a^3 + b^3} \leq \frac{c^4 + ca + bc}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

Do đó ta được bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{a + b^3 + c^3} + \frac{b}{b + c^3 + a^3} + \frac{c}{c + a^3 + b^3} \leq \frac{a^4 + b^4 + c^4 + 2(ab + bc + ca)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{a^4 + b^4 + c^4 + 2(ab + bc + ca)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \leq 1$$

Hay
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab + bc + ca$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki và bất đẳng thức Cauchy ta được

$$3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq (ab + bc + ca)^2; \quad a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^4} = 3$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 \geq (ab + bc + ca)^2$$

Hay
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab + bc + ca$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 112. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \leq \frac{3}{2}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta chú ý đến đối chiều bất đẳng thức. Ngoài ra ta có thể sắp thứ tự các biến để chứng minh bài toán.

Lời giải

Cách 1: Không mất tính tổng quát, giải sử $a \geq b \geq c$

Do $ab + bc + ca = 3 \Rightarrow bc \geq 1$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau: Với $x, y > 0; xy \geq 1$ ta có

$$\frac{1}{y^2 + 1} + \frac{1}{z^2 + 1} \geq \frac{2}{yz + 1}$$

Thật vậy, ta có $(y^2 + z^2 + 2)(yz + 1) \geq (y^2 + 1)(z^2 + 1) \Leftrightarrow (y - z)^2(yz - 1) \geq 0$

Không mất tính tổng quát, giải sử $a \geq b \geq c$. Do $ab + bc + ca = 3 \Rightarrow bc \geq 1$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \geq \frac{1}{a^2 + 1} + \frac{2}{bc + 1}$$

Do đó ta sẽ chứng minh:

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{2}{bc + 1} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow a^2 + 3 - bc - 3a^2bc \geq 0 \Leftrightarrow a(a + b + c - 3abc) \geq 0$$

Từ giả thiết $ab + bc + ca = 3$, suy ra $a + b + c \geq 3$ và $abc \leq 1$.

Do đó $a + b + c - 3abc \geq 0$

Do đó ta được

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \geq \frac{1}{a^2 + 1} + \frac{2}{bc + 1} \geq \frac{3}{2}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2: Gọi biểu thức vế trái là P, ta biến đổi biểu thức P như sau

$$P = \frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} = 3 - \left(\frac{a^2}{a^2 + 1} + \frac{b^2}{b^2 + 1} + \frac{c^2}{c^2 + 1} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{4a^2}{3a^2 + 3} = \frac{4a^2}{3a^2 + ab + bc + ca} \leq \frac{a^2}{a^2 + ab + ac} + \frac{a^2}{2a^2 + bc} = \frac{a}{a + b + c} + \frac{a^2}{2a^2 + bc}$$

Áp dụng tương tự với hai biểu thức còn lại ta được

$$\frac{4a^2}{3a^2 + 3} + \frac{4b^2}{3b^2 + 3} + \frac{4c^2}{3c^2 + 3} \leq 1 + \frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ca} + \frac{c^2}{2c^2 + ab}$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ca} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} \leq 1$

Thật vậy, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{3}{2} - \left(\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ca} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} \right) \geq \frac{1}{2}$$

Hay
$$\frac{bc}{2a^2 + bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab} \geq \frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{bc}{2a^2 + bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab} &= \frac{(bc)^2}{2a^2bc + b^2c^2} + \frac{(ca)^2}{2ab^2c + c^2a^2} + \frac{(ab)^2}{2abc^2 + a^2b^2} \\ &\geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)} = 1 \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 113. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^4 + b^3 + c^2} + \frac{1}{b^4 + c^3 + a^2} + \frac{1}{c^4 + a^3 + b^2} \leq 1$$

Phân tích: Để ý là theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có đánh giá

$$(a^4 + b^3 + c^2)(1 + b + c^2) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(a^4 + b^3 + c^2)(1 + b + c^2) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Do đó ta có
$$\frac{1}{a^4 + b^3 + c^2} = \frac{1 + b + c^2}{(a^4 + b^3 + c^2)(1 + b + c^2)} \leq \frac{1 + b + c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^4 + b^3 + c^2} + \frac{1}{b^4 + c^3 + a^2} + \frac{1}{c^4 + a^3 + b^2} \leq \frac{3 + a + b + c + a^2 + b^2 + c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{3 + a + b + c + a^2 + b^2 + c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \leq 1$$

Hay

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3 + a + b + c + a^2 + b^2 + c^2$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3\sqrt{a^2 b^2 c^2} (a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Từ giả thiết $abc \geq 1$ suy ra $a + b + c \geq 3$.

Do đó ta được $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3} \geq a + b + c$; $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt{a^2 b^2 c^2} \geq 3$

Suy ra

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$

Bài 114. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{a + bc} + \frac{b^3}{b + ca} + \frac{c^3}{c + ab} \geq \frac{3}{2}$$

Phân tích: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta để ý đến các đánh giá

$$\frac{a^3}{a + bc} + \frac{a + bc}{4} + \frac{1}{2} \geq 3\sqrt{\frac{a^3}{a + bc} \cdot \frac{a + bc}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3a}{2} \text{ và } ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^3}{a + bc} + \frac{a + bc}{4} + \frac{1}{2} \geq 3\sqrt{\frac{a^3}{a + bc} \cdot \frac{a + bc}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3a}{2}$$

Suy ra

$$\frac{a^3}{a + bc} \geq \frac{5a}{4} - \frac{bc}{4} - \frac{1}{2}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{b^3}{b + ca} \geq \frac{5b}{4} - \frac{ca}{4} - \frac{1}{2}; \quad \frac{c^3}{c + ab} \geq \frac{5c}{4} - \frac{ab}{4} - \frac{1}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{a + bc} + \frac{b^3}{b + ca} + \frac{c^3}{c + ab} &\geq \frac{5(a + b + c)}{4} - \frac{ab + bc + ca}{4} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{9}{4} - \frac{ab + bc + ca}{4} \end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có

$$ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 3$$

Do đó ta có

$$\frac{a^3}{a + bc} + \frac{b^3}{b + ca} + \frac{c^3}{c + ab} \geq \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 115. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $ab + a + b = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3a}{b + 1} + \frac{3b}{a + 1} + \frac{ab}{a + b} \leq a^2 + b^2 + \frac{3}{2}$$

Phân tích: Chú ý đến đánh giá $(a+b)^2 \geq 4ab$, khi đó ta viết lại được giả thiết của bài toán là $(a+b)^2 + 4(a+b) - 12 \geq 0$ và đặt $t = a+b$.

Lời giải

Từ giả thiết $ab + a + b = 3$ suy ra $3 - (a+b) = ab$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$3 - (a+b) = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow (a+b)^2 + 4(a+b) - 12 \geq 0 \Rightarrow 2 \leq a+b \leq 3$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{3 \left[(a+b)^2 - 2ab \right] + 3(a+b)}{ab + a + b + 1} + \frac{3 - (a+b)}{a+b} \leq (a+b)^2 - 2ab + \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{3 \left[(a+b)^2 - 6 + 2(a+b) \right] + 3(a+b)}{4} + \frac{3 - (a+b)}{a+b} \leq (a+b)^2 - 6 + 2(a+b) + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Đặt $t = a+b \Rightarrow 2 \leq t \leq 3$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{3(t^2 - 6 + 2t) + 3t}{4} + \frac{3-t}{t} \leq t^2 - 6 + 2t + \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & 3t^3 + 9t^2 - 18t + 12 - 4t \leq 4t^3 + 6t^2 - 18t \\ \Leftrightarrow & (t-2)(t^2 + t + 6) \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng với $t \geq 2$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Bài 116. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+a}{b+c} + \frac{1+b}{c+a} + \frac{1+c}{a+b} \leq 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)$$

Phân tích: Để ý đến giả thiết $a + b + c = 1$ ta có các phép biến đổi sau

$$\frac{1+a}{b+c} = \frac{2a+b+c}{b+c} = \frac{2a}{b+c} + 1 \text{ và } \frac{a}{b} - \frac{a}{b+c} = \frac{ac}{b(b+c)}$$

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{1+a}{b+c} + \frac{1+b}{c+a} + \frac{1+c}{a+b} \leq 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \Leftrightarrow \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} + 3 \leq 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \\ \Leftrightarrow & \frac{a}{b} - \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c} - \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a} - \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{ac}{b(b+c)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ab}{c(c+a)} \geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{ac}{b(b+c)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ab}{c(c+a)} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{(ab+bc+ca)^2}{2abc(a+b+c)} \geq \frac{3}{2}$$

Hay
$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$$

Đánh giá cuối cùng đúng theo bất đẳng thức Cauchy

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 117. Cho a, b, c là các số thực không âm tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(ab + bc + ca) \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right] \geq 4$$

Phân tích: Bất đẳng thức có các đại lượng $(a-b)^2$; $(b-c)^2$; $(c-a)^2$ dưới mẫu, do đó đẳng thức không thể xảy ra tại $a = b = c$. Ta dự đoán đẳng thức xảy ra tại một biến bằng 0. Do đó ta nghĩ đến sắp thứ tự các biến để giảm biến cho bài toán.

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó ta có

$$ab + bc + ca \geq ab; \quad \frac{1}{(b-c)^2} \geq \frac{1}{b^2}; \quad \frac{1}{(c-a)^2} \geq \frac{1}{a^2}$$

Do đó ta được bất đẳng thức sau

$$(ab + bc + ca) \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right] \geq ab \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right]$$

Ta cần chứng minh

$$ab \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right] \geq 4$$

Thật vậy, ta có

$$ab \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right] = \frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{(a-b)^2}{ab} + 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 2 \sqrt{\frac{ab}{(a-b)^2} \cdot \frac{(a-b)^2}{ab}} = 2$$

Suy ra

$$ab \left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} \right] \geq 4$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} c = 0 \\ (a-b)^2 = ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = \frac{(3+\sqrt{5})b}{2} \end{cases}$$

Bài 118. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{ab}}{c + 3\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{bc}}{a + 3\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{b + 3\sqrt{ca}} \leq \frac{3}{4}$$

Phân tích: Quan sát bất đẳng thức ta chú ý đến phép đổi biến $x = \sqrt{a}$; $y = \sqrt{b}$; $z = \sqrt{c}$ và để có các đánh giá hợp lý ta có thể đổi chiều bất đẳng thức.

Lời giải

Đặt $x = \sqrt{a}$; $y = \sqrt{b}$; $z = \sqrt{c}$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{xy}{z^2 + 3xy} + \frac{yz}{a^2 + 3yz} + \frac{zx}{y^2 + 3zx} \leq \frac{3}{4}$$

Ta biến đổi biểu thức về trái như sau

$$\begin{aligned} P &= \frac{xy}{z^2 + 3xy} + \frac{yz}{a^2 + 3yz} + \frac{zx}{y^2 + 3zx} = \frac{1}{3} \left(\frac{3xy}{z^2 + 3xy} + \frac{3yz}{a^2 + 3yz} + \frac{3zx}{y^2 + 3zx} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{z^2}{z^2 + 3xy} + 1 - \frac{x^2}{x^2 + 3yz} + 1 - \frac{y^2}{y^2 + 3zx} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{z^2}{z^2 + 3xy} + \frac{x^2}{x^2 + 3yz} + \frac{y^2}{y^2 + 3zx} \right) \end{aligned}$$

Đặt
$$Q = \frac{z^2}{z^2 + 3xy} + \frac{x^2}{x^2 + 3yz} + \frac{y^2}{y^2 + 3zx}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức và một đánh giá quen thuộc ta được

$$\begin{aligned} Q &= \frac{z^2}{z^2 + 3xy} + \frac{x^2}{x^2 + 3yz} + \frac{y^2}{y^2 + 3zx} \geq \frac{(x + y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 3(xy + yz + zx)} \\ &\geq \frac{(x + y + z)^2}{(x + y + z)^2 + \frac{(x + y + z)^2}{3}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Do đó ta được $P \leq 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$. Vậy bài toán được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 119. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3 + b^3 + 16c^3}{(a + b + c)^3} \geq \frac{16}{81}$$

Phân tích: Để ý là $\frac{a^3 + b^3 + 16c^3}{(a + b + c)^3} = \frac{a^3}{(a + b + c)^3} + \frac{b^3}{(a + b + c)^3} + \frac{16c^3}{(a + b + c)^3}$. Khi đó ta nghĩ đến

phép đổi biến $x = \frac{a}{a + b + c}$; $y = \frac{b}{a + b + c}$; $z = \frac{c}{a + b + c}$.

Lời giải

Đặt $x = \frac{a}{a + b + c}$; $y = \frac{b}{a + b + c}$; $z = \frac{c}{a + b + c}$. Khi đó ta được $x + y + z = 1$.

Bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{x^3}{(a + b + c)^3} + \frac{b^3}{(a + b + c)^3} + \frac{16c^3}{(a + b + c)^3} = x^3 + y^3 + 16z^3 \geq \frac{16}{81}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(x^2 + y^2 + 4z^2) \left(1 + 1 + \frac{1}{4} \right) \geq (x + y + z)^2 = 1$$

Suy ra
$$x^2 + y^2 + 4z^2 \geq \frac{4}{9}$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(x + y + z)(x^3 + y^3 + 16z^3) \geq (x^2 + y^2 + 4z^2)^2 \geq \left(\frac{4}{9}\right)^2$$

Hay
$$x^3 + y^3 + 16z^3 \geq \frac{16}{81}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{4z}{1} \\ x^2 = y^2 = 16z^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 4z \Leftrightarrow a = b = 4c$$

Bài 120. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \leq \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng:

$$(a + b)\sqrt{1 + \frac{1}{a^2b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Phân tích: Để ý đến phép biến đổi

$$(a + b)\sqrt{1 + \frac{1}{a^2b^2}} = \sqrt{(a + b)^2 \left(1 + \frac{1}{a^2b^2}\right)} = \sqrt{(a + b)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh làm ta liên tưởng đến đánh giá

$$\sqrt{x^2 + m^2} + \sqrt{y^2 + n^2} \geq \sqrt{(x + y)^2 + (m + n)^2}$$

Lời giải

Để dàng chứng minh được: Với các số thực dương x, y, m, n ta luôn có

$$\sqrt{x^2 + m^2} + \sqrt{y^2 + n^2} \geq \sqrt{(x + y)^2 + (m + n)^2}$$

Thật vậy, bình phương hai vế và rút gọn ta được $\sqrt{(x^2 + m^2)(y^2 + n^2)} \geq xy + mn$

Hay
$$(x^2 + m^2)(y^2 + n^2) \geq (xy + mn)^2$$

Bất đẳng thức cuối cùng là bất đẳng thức Bunhiacopxki quen thuộc.

Gọi vế trái của bất đẳng thức trên là P, áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} P &= (a + b)\sqrt{1 + \frac{1}{a^2b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} = \sqrt{(a + b)^2 \left(1 + \frac{1}{a^2b^2}\right)} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \\ &= \sqrt{(a + b)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{(a + b + c)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} \end{aligned}$$

Mà ta lại có
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$$

Nên ta được
$$P \geq \sqrt{(a + b + c)^2 + \frac{81}{(a + b + c)^2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$P \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + \frac{81}{(a+b+c)^2}} = \sqrt{(a+b+c)^2 + \frac{81}{16(a+b+c)^2} + \frac{1215}{16(a+b+c)^2}}$$

$$\geq \sqrt{2\sqrt{\frac{81}{16}} + \frac{1215}{16\left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Hay $P \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Bài 121. Cho các số thực $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b+c} \geq \frac{1}{3} + (1-a)(1-b)(1-c)$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử $1 \geq a \geq b \geq c > 0$, khi đó ta có $\frac{a}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$3 = 1 - b + 1 - c + 1 + b + c \geq 3\sqrt{(1-b)(1-c)(1+b+c)}$$

Suy ra $1 \geq (1-b)(1-c)(1+b+c)$

Do đó ta được $1 - a \geq (1-a)(1-b)(1-c)(1+b+c)$

Hay $\frac{1-a}{1+b+c} \geq (1-a)(1-b)(1-c)$

Mặt khác ta lại có $\frac{1-a}{a+b+c} \geq \frac{1-a}{1+b+c}$

Nên ta được $\frac{1-a}{a+b+c} \geq (1-a)(1-b)(1-c)$

Suy ra

$$\frac{1}{a+b+c} \geq (1-a)(1-b)(1-c) + \frac{a}{a+b+c} \geq \frac{1}{3} + (1-a)(1-b)(1-c)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 122. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $a^2 + 2b^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{4b}{a^2 + b^2} \geq 3\sqrt{3}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{a^4}{a^2b^4} = \frac{a^4}{a^2b^2b^2} \geq \frac{a^4}{\left(\frac{a^2 + 2b^2}{3}\right)^3} = 27a^4$

Suy ra $\frac{a^2}{b^4} \geq 27a^4$ hay $\frac{a}{b^2} \geq 3\sqrt{3}a^2$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{16b^4}{2b^2(a^2 + b^2)(a^2 + b^2)} \geq \frac{a^4}{\left(\frac{2b^2 + a^2 + b^2 + a^2 + b^2}{3}\right)^3} = \frac{a^4}{\left(\frac{2a^2 + 4b^2}{3}\right)^3} = 108b^4$$

Suy ra $\frac{16b^2}{(a^2 + b^2)^2} \geq 108b^4$ hay $\frac{4b}{a^2 + b^2} \geq 6\sqrt{3}b^2$

Do đó ta được $\frac{a}{b^2} + \frac{4b}{a^2 + b^2} \geq 3\sqrt{3}(a^2 + 2b^2) = 3\sqrt{3}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 123. Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + 8b^3}} + \sqrt{\frac{4b^3}{b^3 + (a+b)^3}} \geq 1$$

Phân tích: Biểu thức vế trái được viết lại thành $\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{8b^3}{a^3}}} + \sqrt{\frac{\frac{4b^3}{a^3}}{\frac{b^3}{a^3} + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^3}}$. Đến đây ta nghĩ đến

phép đổi biến $t = \frac{b}{a}$.

Lời giải

Biểu thức vế trái được viết lại là $\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{8b^3}{a^3}}} + \sqrt{\frac{\frac{4b^3}{a^3}}{\frac{b^3}{a^3} + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^3}}$

Đặt $t = \frac{b}{a} > 0$. Khi đó bất đẳng thức được viết lại là

$$\sqrt{\frac{1}{1 + 8t^3}} + \sqrt{\frac{4t^3}{t^3 + (1+t)^3}} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$1 + 8t^3 = (1 + 2t)(1 - 2t + 4t^2) \leq \frac{(2 + 4t^2)^2}{2} = (1 + 2t^2)^2$$

Suy ra $\sqrt{\frac{1}{1 + 8t^3}} \geq \sqrt{\frac{1}{(1 + 2t^2)^2}} = \frac{1}{1 + 2t^2}$

Ta sẽ chứng minh $\sqrt{\frac{4t^3}{t^3 + (1+t)^3}} \geq \frac{2t^2}{1 + 2t^2}$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{4t^3}{t^3 + (1+t)^3} \geq \left(\frac{2t^2}{1+2t^2} \right)^2 \Leftrightarrow (1+2t^2)^2 \geq t^4 + t(1+t)^3 \Leftrightarrow (t-1)^2(2t^2+t+1) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng với mọi t .

Do đó ta được
$$\sqrt{\frac{1}{1+8t^3}} + \sqrt{\frac{4t^3}{t^3 + (1+t)^3}} \geq \frac{1}{1+2t^2} + \frac{2t^2}{1+2t^2} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Bài 124. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = \frac{3}{4}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b+3c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}} \geq 3$$

Phân tích: Dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{1}{4}$. Khi đó ta có đánh giá theo bất đẳng

thức Cauchy là $\sqrt[3]{a+3b} = \sqrt[3]{(a+3b) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{a+3b+2}{3}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt[3]{a+3b} = \sqrt[3]{(a+3b) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{a+3b+2}{3}$$

Do đó ta được
$$\frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}} \geq \frac{3}{a+3b+2}$$

Áp dụng tương tự ta được
$$\frac{1}{\sqrt[3]{b+3c}} \geq \frac{3}{b+3c+2}; \quad \frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}} \geq \frac{3}{c+3a+2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b+3c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}} \geq \frac{3}{a+3b+2} + \frac{3}{b+3c+2} + \frac{3}{c+3a+2}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{3}{a+3b+2} + \frac{3}{b+3c+2} + \frac{3}{c+3a+2} \geq \frac{3 \cdot 9}{4(a+b+c)+6} = 3$$

Do đó ta được
$$\frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b+3c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c+3a}} \geq 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{4}$.

Bài 125. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$2 \left(\frac{ab}{c+ab} + \frac{bc}{a+bc} + \frac{ca}{a+ca} \right) \geq \sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{a+ca}}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{ab}{c+ab} + \frac{bc}{a+bc} + \frac{ca}{a+ca} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3abc}$$

Mà ta có
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq \frac{(ab + bc + ca)^2}{3}$$

Và
$$abc(a + b + c) \leq \frac{(ab + bc + ca)^2}{3}$$

Nên ta được

$$\begin{aligned} a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3abc &= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3abc(a + b + c) \\ &\leq \frac{(ab + bc + ca)^2}{3} + (ab + bc + ca)^2 = \frac{4(ab + bc + ca)^2}{3} \end{aligned}$$

Do đó ta có
$$\frac{ab}{c + ab} + \frac{bc}{a + bc} + \frac{ca}{a + ca} \geq \frac{3}{4}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$3\left(\frac{ab}{c + ab} + \frac{bc}{a + bc} + \frac{ca}{a + ca}\right) \geq \left(\sqrt{\frac{ab}{c + ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a + bc}} + \sqrt{\frac{ca}{a + ca}}\right)^2$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta được

$$2\left(\frac{ab}{c + ab} + \frac{bc}{a + bc} + \frac{ca}{a + ca}\right) \geq \sqrt{\frac{ab}{c + ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a + bc}} + \sqrt{\frac{ca}{a + ca}}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 126. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{\sqrt{1 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}} \leq \frac{4}{9}$$

Phân tích: Từ giả thiết ta suy ra $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$. Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, khi đó ta được

$xy + yz + zx = 1$. Khi đó để ý đến phép biến đổi

$$x^2 + 1 = x^2 + xy + yz + zx = (x + y)(x + z)$$

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$. Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$.

Khi đó ta được $xy + yz + zx = 1$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành
$$\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} \leq \frac{4}{9}$$

Để ý ta thấy $x^2 + 1 = x^2 + xy + yz + zx = (x + y)(x + z)$

Áp dụng tương tự bất đẳng thức trở thành

$$\frac{2x}{\sqrt{(x + y)(x + z)}} + \frac{y}{\sqrt{(x + y)(y + z)}} + \frac{z}{\sqrt{(y + z)(z + x)}} \leq \frac{4}{9}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} & \frac{2x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}} + \frac{z}{\sqrt{(y+z)(z+x)}} \\ & \leq x \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right) + y \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{4(y+z)} \right) + z \left(\frac{1}{4(y+z)} + \frac{1}{x+z} \right) \\ & = \frac{x+y}{x+y} + \frac{y+z}{4(y+z)} + \frac{z+x}{z+x} = 1 + \frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a; b; c) = \left(\frac{\sqrt{15}}{7}; \sqrt{15}; \sqrt{15} \right)$

Bài 127. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{5}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng cộng mẫu ta được

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)} + 1$$

Khi đó ta được bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)} + 1 + \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}$$

Ta cần chứng minh $\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)} + 1 + \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{5}{2}$

Đặt $t = \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow 0 < t \leq 1$. Khi đó bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{1}{2t^2} + t + 1 \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow (t-1)^2(2t+1) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng với $0 < t \leq 1$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 128. Cho a, b, c là các số thực dương không âm. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + \frac{(a+b+c)^3}{abc} \geq 28$$

Lời giải

Ta có

$$\frac{(a+b+c)^3}{abc} = (a^2+b^2+c^2) \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) + \frac{2(ab+bc+ca)(a+b+c)}{abc}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki và cauchy ta được

$$\begin{aligned} & (a^2+b^2+c^2) \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \geq \frac{9(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} \\ & \frac{2(ab+bc+ca)(a+b+c)}{abc} \geq \frac{2.3.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.3.\sqrt[3]{abc}}{abc} = 18 \end{aligned}$$

Do đó ta được
$$\frac{(a+b+c)^3}{abc} \geq \frac{9(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} + 18$$

Suy ra ta có bất đẳng thức

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + \frac{(a+b+c)^3}{abc} \geq \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} + 18$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} \geq 10$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq 2; \quad \frac{8(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} \geq \frac{8(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca} = 8$$

Cộng theo vế của hai bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} \geq 10$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 129. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \leq \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng:

$$a + b + c + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{27}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{1}{a^2} + 4 \geq \frac{4}{a}; \quad \frac{1}{b^2} + 4 \geq \frac{4}{b}; \quad \frac{1}{c^2} + 4 \geq \frac{4}{c}$$

Do đó ta được
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} - 12$$

Khi đó ta có
$$a + b + c + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a + b + c + \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} - 12$$

Và theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta lại có
$$\frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} \geq \frac{36}{a+b+c}$$

Từ đó ta suy ra

$$a + b + c + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a + b + c + \frac{36}{a+b+c} - 12$$

Ta cần chứng minh
$$a + b + c + \frac{36}{a+b+c} - 12 \geq \frac{27}{2}$$

Hay
$$a + b + c + \frac{36}{a+b+c} \geq \frac{51}{2}$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a + b + c + \frac{9}{4(a+b+c)} \geq 2\sqrt{\frac{9}{4}} = 3; \quad \frac{135}{4(a+b+c)} \geq \frac{135}{4 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{45}{2}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được
$$a + b + c + \frac{36}{a+b+c} \geq \frac{51}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 130. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq 9(a^3 + b^3 + c^3)$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $(a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq 9abc(a^3 + b^3 + c^3)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$9abc(a^3 + b^3 + c^3) = 27.ab.ac.\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3a} \leq \left(ab + ab + \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3a}\right)^3$$

Mà ta có

$$\begin{aligned} ab + ab + \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3a} &= ab + bc + ca + \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{3a} \\ &= ab + bc + ca + \frac{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{3a} \end{aligned}$$

Suy ra

$$9abc(a^3 + b^3 + c^3) \leq \left[ab + bc + ca + \frac{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{3a}\right]^3$$

Như vậy ta cần chứng minh được

$$ab + bc + ca + \frac{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{3a} \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Hay
$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)\left(1 - \frac{a + b + c}{3}\right) \geq 0$$

Đánh giá trên luôn đúng do ta có thể giả sử a là số lớn nhất trong ba số a, b, c .

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 131. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{ab}}{4 - \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{bc}}{4 - \sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{4 - \sqrt{ca}} \leq 1$$

Lời giải

Đặt $x = \sqrt{a}$; $y = \sqrt{b}$; $z = \sqrt{c}$. Khi đó ta viết lại giả thiết là $x^4 + y^4 + z^4 = 3$.

Bất đẳng thức được viết lại là
$$\frac{xy}{4 - xy} + \frac{yz}{4 - yz} + \frac{zx}{4 - zx} \leq 1$$

Khi đó gọi về trái là P thì ta có

$$P + 3 = 1 + \frac{xy}{4 - xy} + 1 + \frac{yz}{4 - yz} + 1 + \frac{zx}{4 - zx} = \frac{4}{4 - xy} + \frac{4}{4 - yz} + \frac{4}{4 - zx}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{2}{4 - xy} &= 1 - \frac{2 - xy}{4 - xy} = 1 - \frac{(2 - xy)(2 + xy)}{(4 - xy)(2 + xy)} = 1 - \frac{4 - x^2y^2}{9 - (xy - 1)^2} \\ &\leq 1 - \frac{4 - x^2y^2}{9} = \frac{5}{9} + \frac{x^2y^2}{9} \end{aligned}$$

Tương tự ta được $\frac{2}{4-yz} \leq \frac{5}{9} + \frac{y^2z^2}{9}$; $\frac{2}{4-zx} \leq \frac{5}{9} + \frac{x^2z^2}{9}$

Do đó ta được

$$P + 3 \leq 2 \left(\frac{15}{9} + \frac{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}{9} \right) \leq 2 \left(\frac{15}{9} + \frac{x^4 + y^4 + z^4}{9} \right) = 4$$

Suy ra $P \leq 1$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 132. cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(a+2)(b+2)}{(b+1)(b+5)} + \frac{(b+2)(c+2)}{(c+1)(c+5)} + \frac{(c+2)(a+2)}{(a+1)(a+5)} \geq \frac{9}{4}$$

Phân tích: Chú ý đến đánh giá $\frac{(b+2)}{(b+1)(b+5)} \geq \frac{3}{4(b+2)}$

Lời giải

Ta có bất đẳng thức luôn đúng sau

$$\frac{(b+2)}{(b+1)(b+5)} \geq \frac{3}{4(b+2)} \Leftrightarrow 4b^2 + 16b + 16 \geq 3b^2 + 18b + 15 \Leftrightarrow (b-1)^2 \geq 0$$

Từ đó ta suy ra $\frac{(a+2)(b+2)}{(b+1)(b+5)} \geq \frac{3(a+2)}{4(b+2)}$

Tương tự

$$\frac{(b+2)(c+2)}{(c+1)(c+5)} \geq \frac{3(b+2)}{4(c+2)}; \frac{(c+2)(a+2)}{(a+1)(a+5)} \geq \frac{3(c+2)}{4(a+2)}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên, và sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số, ta được:

$$\frac{(a+2)(b+2)}{(b+1)(b+5)} + \frac{(b+2)(c+2)}{(c+1)(c+5)} + \frac{(c+2)(a+2)}{(a+1)(a+5)} \geq \frac{3}{4} \left(\frac{a+2}{b+2} + \frac{b+2}{c+2} + \frac{c+2}{a+2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 133. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+4a} + \frac{c+a}{a+c+16b} \geq \frac{16}{15}$$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} x = a + b + c \\ y = b + c + 4a \\ z = c + a + 16b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = y - x \\ 15b = z - x \\ 15c = 21x - 5y - z \end{cases}$

Khi đó biểu thức vế trái P được viết lại là

$$P = \frac{-6x + 5y + z}{15x} + \frac{20x - 5y}{15y} + \frac{16x - z}{15z} = \frac{y}{3x} + \frac{3x}{4y} + \frac{z}{15x} + \frac{16x}{15z} - \frac{4}{5}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{y}{3x} + \frac{4x}{3y} \geq \frac{4}{3}; \frac{z}{15x} + \frac{16x}{15z} \geq \frac{8}{15}$$

Do đó ta được $P \geq \frac{4}{3} + \frac{8}{15} - \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{y}{3x} = \frac{4x}{3y} \\ \frac{z}{15x} = \frac{16x}{15z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5c}{7} \\ b = \frac{3c}{7} \end{cases}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{5c}{7}$; $b = \frac{3c}{7}$.

Bài 134. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} = 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt{b+3c}} + \frac{1}{\sqrt{c+3a}} \leq 1$$

Phân tích: Quan sát giả thiết ta chú ý đến phép đổi biến $x = \sqrt{a}$; $y = \sqrt{b}$; $z = \sqrt{c}$. Đến đây ta có thể đánh giá các căn bậc hai theo bất đẳng thức Cauchy hoặc Bunhiacopxki như sau

$$\begin{aligned} x^2 + 3y^2 &= x^2 + y^2 + y^2 + y^2 \geq 4\sqrt{x^2 y^6} \\ 4(x^2 + 3y^2) &= (1+1+1+1)(x^2 + y^2 + y^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2 \end{aligned}$$

Lời giải

Cách 1: Đặt $x = \sqrt{a}$; $y = \sqrt{b}$; $z = \sqrt{c}$. Khi đó ta được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + 3z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + 3x^2}} \leq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$x^2 + 3y^2 = x^2 + y^2 + y^2 + y^2 \geq 4\sqrt{x^2 y^6}$$

Áp dụng một bất đẳng thức Cauchy khác ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} &\leq \frac{1}{2\sqrt{4\sqrt{x^2 y^6}}} = \frac{1}{2\sqrt{4\sqrt{x^2 y^2} \cdot 4\sqrt{y^4}}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{4\sqrt{x^2 y^2}}} + \frac{1}{\sqrt{4\sqrt{y^4}}} \right) \\ &\leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{y} \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y} \right) \end{aligned}$$

Tương tự ta có $\frac{1}{\sqrt{y^2 + 3z^2}} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{y} + \frac{3}{z} \right)$; $\frac{1}{\sqrt{z^2 + 3x^2}} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{z} + \frac{3}{x} \right)$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + 3z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + 3x^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{9}{4}$

Cách 2: Đặt $x = \sqrt{a}$; $y = \sqrt{b}$; $z = \sqrt{c}$. Khi đó ta được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + 3z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + 3x^2}} \leq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$4(x^2 + 3y^2) = (1 + 1 + 1 + 1)(x^2 + y^2 + y^2 + y^2) \geq (x + 3y)^2$$

Do đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} = \frac{2}{\sqrt{2(x^2 + 3y^2)}} \leq \frac{2}{\sqrt{(x + 3y)^2}} = \frac{2}{x + 3y} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y} \right)$$

Tương tự ta có $\frac{1}{\sqrt{y^2 + 3z^2}} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{y} + \frac{3}{z} \right); \frac{1}{\sqrt{z^2 + 3x^2}} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{z} + \frac{3}{x} \right)$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + 3z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + 3x^2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{9}{4}$

Bài 135. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{ca^2 + 2c^2} + \frac{b^2}{ab^2 + 2a^2} + \frac{c^2}{bc^2 + 2b^2} \geq 1$$

Lời giải

Từ giả thiết $ab + bc + ca = abc$ ta được $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$.

Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$. Khi đó ta được $x + y + z = 3$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{x^2}{x + 2y^2} + \frac{y^2}{y + 2z^2} + \frac{z^2}{z + 2x^2} \geq 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x^2}{x + 2y^2} = \frac{x^2 + 2xy^2 - 2xy^2}{x + 2y^2} = x - \frac{2xy^2}{x + y^2 + y^2} \geq x - \frac{2xy^2}{2\sqrt{xy^4}} = x - \frac{2\sqrt{x^2y^2}}{3}$$

Áp dụng tương tự ta được $\frac{y^2}{y + 2z^2} \geq y - \frac{2\sqrt{y^2z^2}}{3}; \frac{z^2}{z + 2x^2} \geq z - \frac{2\sqrt{z^2x^2}}{3}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{x^2}{x + 2y^2} + \frac{y^2}{y + 2z^2} + \frac{z^2}{z + 2x^2} \geq (x + y + z) - \frac{2}{3} \left(\sqrt[3]{x^2y^2} + \sqrt[3]{y^2z^2} + \sqrt[3]{z^2x^2} \right)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^2y^2} &\leq \frac{xy + xy + 1}{3} = \frac{2xy + 1}{3} \\ \sqrt[3]{y^2z^2} &\leq \frac{yz + yz + 1}{3} = \frac{2yz + 1}{3} \\ \sqrt[3]{z^2x^2} &\leq \frac{zx + zx + 1}{3} = \frac{2zx + 1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \sqrt[3]{x^2y^2} + \sqrt[3]{y^2z^2} + \sqrt[3]{z^2x^2} \leq \frac{2(xy + yz + zx)}{3} + 1 \leq \frac{2(x + y + z)^2}{9} + 1 = 3$$

$$\text{Do đó ta được } \frac{x^2}{x + 2y^2} + \frac{y^2}{y + 2z^2} + \frac{z^2}{z + 2x^2} \geq 3 - \frac{2 \cdot 3}{3} = 1.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 136. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a + b + c} + \frac{6}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \geq \frac{3}{a^3 + b^3 + c^3}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} (a^3 + b^3 + c^3)(a + b + c) &\geq (a^2 + b^2 + c^2)^2 \\ 3(a^2 + b^2 + c^2) &\geq (a + b + c)^2 \end{aligned}$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\text{Suy ra } \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \quad (1)$$

Cũng từ hai bất đẳng thức trên ta được

$$3(a^3 + b^3 + c^3)^2 \geq (a^2 + b^2 + c^2)^3$$

Suy ra

$$\frac{(a^3 + b^3 + c^3)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^4} \geq \frac{1}{3(a^2 + b^2 + c^2)} \Leftrightarrow \frac{6(a^3 + b^3 + c^3)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \geq \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \geq 3 \quad (3)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} + \frac{6(a^3 + b^3 + c^3)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \geq 3$$

$$\text{Hay } \frac{1}{a + b + c} + \frac{6}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \geq \frac{3}{a^3 + b^3 + c^3}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 137. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{4a + 4b + c} + \frac{b}{4b + 4c + a} + \frac{c}{4c + 4a + b} \leq \frac{1}{3}$$

Phân tích: Để ý đến phép biến đổi

$$\frac{4a(a + b + c)}{4a + 4b + c} = \frac{a(4a + 4b + c) + 3ca}{4a + 4b + c} = a + \frac{3ca}{4a + 4b + c}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{4a(a+b+c)}{4a+4b+c} + \frac{4b(a+b+c)}{4b+4c+a} + \frac{4c(a+b+c)}{4c+4a+b} \leq \frac{4(a+b+c)}{3}$$

Ta có

$$\frac{4a(a+b+c)}{4a+4b+c} = \frac{a(4a+4b+c) + 3ca}{4a+4b+c} = a + \frac{3ca}{4a+4b+c}$$

Tương tự ta có

$$\frac{4b(a+b+c)}{4b+4c+a} = b + \frac{3bc}{4b+4c+a}; \quad \frac{4c(a+b+c)}{4c+4a+b} = c + \frac{3ba}{4b+4c+a}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{9ca}{4a+4b+a} + \frac{9ab}{4b+4c+a} + \frac{9bc}{4b+4c+a} \leq a+b+c$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{9}{4a+4b+c} = \frac{(2+1)^2}{2(2a+b) + (2b+c)} \leq \frac{4}{2(2a+b)} + \frac{1}{2b+c} = \frac{2}{2a+b} + \frac{1}{2b+c}$$

Do đó ta được

$$\frac{9ca}{4a+4b+c} \leq \frac{2ca}{2a+b} + \frac{ca}{2b+c}$$

Hoàn toàn tương tự

$$\frac{9ab}{4b+4c+a} \leq \frac{2ab}{2b+c} + \frac{ab}{2c+a}; \quad \frac{9bc}{4b+4c+a} \leq \frac{2bc}{2c+a} + \frac{bc}{2a+b}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \frac{9ca}{4a+4b+a} + \frac{9ab}{4b+4c+a} + \frac{9bc}{4b+4c+a} \\ \leq \frac{2ca}{2a+b} + \frac{ca}{2b+c} + \frac{2ab}{2b+c} + \frac{ab}{2c+a} + \frac{2bc}{2c+a} + \frac{bc}{2a+b} = a+b+c \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 138. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{abc} \geq 30$$

Phân tích: Chú ý là theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{abc} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab+bc+ca}$$

Ta quy bài toán về chứng minh $\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9}{ab + bc + ca} \geq 30$

Lời giải

Cách 1: Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c) = 3abc(a + b + c)^3 \geq 3abc \cdot 27abc = 81(abc)^2$$

Suy ra $ab + bc + ca \geq 9abc$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{abc} &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{9abc} + \frac{1}{9abc} + \frac{7}{9abc} \\ &\geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + 2.9abc} + \frac{7}{\frac{(a+b+c)^3}{3}} \\ &\geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)} + 21 = 30\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Cách 2: Với giả thiết $a + b + c = 1$, biểu thức P được viết lại thành

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{abc} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab+bc+ca}$

Do đó ta có $\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{abc} \geq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9}{ab+bc+ca}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki và bất đẳng thức $ab+bc+ca \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$

Ta được

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9}{ab+bc+ca} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{7}{ab+bc+ca} \\ &\geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)} + \frac{7}{ab+bc+ca} \geq \frac{9}{(a+b+c)^2} + \frac{7.3}{(a+b+c)^2} = 30\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 139. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab}$$

Phân tích: Chú ý đến đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxi

$$\frac{a+b}{c^2+ab} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)(c^2+ab)} = \frac{(a+b)^2}{b(a^2+c^2)+a(b^2+c^2)} \leq \frac{a^2}{b(a^2+c^2)} + \frac{b^2}{a(b^2+c^2)}$$

Hoặc phép biến đổi tương đương.

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a+b}{c^2+ab} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)(c^2+ab)} = \frac{(a+b)^2}{b(a^2+c^2)+a(b^2+c^2)} \leq \frac{a^2}{b(a^2+c^2)} + \frac{b^2}{a(b^2+c^2)}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{b+c}{a^2+bc} \leq \frac{b^2}{c(a^2+b^2)} + \frac{c^2}{b(a^2+c^2)}$$

$$\frac{c+a}{b^2+ca} \leq \frac{c^2}{a(b^2+c^2)} + \frac{a^2}{c(c^2+a^2)}$$

Mà ta lại có

$$\frac{b^2}{c(a^2+b^2)} + \frac{c^2}{b(a^2+c^2)} + \frac{c^2}{a(b^2+c^2)} + \frac{a^2}{c(b^2+a^2)} + \frac{a^2}{b(a^2+c^2)} + \frac{b^2}{a(b^2+c^2)} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Do đó ta được

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Biến đổi tương đương bất đẳng thức như sau

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &\geq \frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} - \frac{a+b}{c^2+ab} \right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{b+c}{a^2+bc} \right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{c+a}{b^2+ca} \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (c^2 - a^2) \left[\frac{1}{a(c^2+ab)} - \frac{1}{c(a^2+bc)} \right] + \frac{(b-c)(b-a)}{b^3+abc} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(c-a)^2(c+a)(bc+ab-ab)}{ca(a^2+bc)(c^2+ab)} + \frac{(b-c)(b-a)}{b^3+abc} &\geq 0 \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử b là số lớn nhất trong ba số a, b, c khi đó ta được

$$bc + ab - ca \geq 0; \quad \frac{(b-c)(b-a)}{b^3+abc} \geq 0$$

Do vậy bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 140. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 - bc}{2a^2 + ab + ac} + \frac{b^2 - ca}{2b^2 + bc + ba} + \frac{c^2 - ab}{2c^2 + ca + cb} \leq 0$$

Phân tích: Để ý đến phép biến đổi

$$\frac{bc - a^2}{2a^2 + ab + ac} + 1 = \frac{a^2 + ab + bc + ca}{2a^2 + ab + ac} = \frac{(a+b)(c+a)}{2a^2 + ab + ac}$$

Lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{bc - a^2}{2a^2 + ab + ac} + \frac{ca - b^2}{2b^2 + bc + ba} + \frac{ab - c^2}{2c^2 + ca + cb} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{bc - a^2}{2a^2 + ab + ac} + 1 + \frac{ca - b^2}{2b^2 + bc + ba} + 1 + \frac{ab - c^2}{2c^2 + ca + cb} + 1 &\geq 3 \\ \Leftrightarrow \frac{(a+b)(a+c)}{a(2a+b+c)} + \frac{(a+b)(b+c)}{b(a+2b+c)} + \frac{(b+c)(c+a)}{c(a+b+2c)} &\geq 3 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{(a+b)(a+c)}{a(2a+b+c)} + \frac{(a+b)(b+c)}{b(a+2b+c)} + \frac{(b+c)(c+a)}{c(a+b+2c)} \geq \sqrt[3]{\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{abc(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)}}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{abc(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)} \geq 1$$

Hay
$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq abc(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)$$

Hay
$$(ab+bc+ca)^2(a+b+c) \geq 2abc(a+b+c)^2 + 3abc(ab+bc+ca)$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{(ab+bc+ca)^2(a+b+c)}{3} \geq \frac{9abc(ab+bc+ca)}{3} = 3abc(ab+bc+ca)$$

$$\frac{2(ab+bc+ca)^2(a+b+c)}{3} \geq 2abc(a+b+c)(a+b+c) = 3abc(a+b+c)^2$$

Cộng theo về hai bất đẳng thức trên ta được

$$(ab+bc+ca)^2(a+b+c) \geq 2abc(a+b+c)^2 + 3abc(ab+bc+ca)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{bc}{2a^2+ab+ac} + \frac{ca}{2b^2+bc+ba} + \frac{ab}{2c^2+ca+cb} \geq \frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{bc}{2a^2+ab+ac} + \frac{ca}{2b^2+bc+ba} + \frac{ab}{2c^2+ca+cb} &\geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{bc(2a^2+ab+ac) + ca(2b^2+bc+ba) + ab(2c^2+ca+cb)} \\ &= \frac{(ab+bc+ca)^2}{4abc(a+b+c)} \geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b} \leq \frac{3}{4}$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{1}{2a+b+c} = \frac{1}{a+b+a+c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right) \Rightarrow \frac{a}{2a+b+c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} \right)$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned} \frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b} &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+c} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{c}{a+c} + \frac{c}{b+c} \right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 141. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b(2c+a)} + \frac{b^3}{c(2a+b)} + \frac{c^3}{a(2b+c)} \geq 1$$

Lời giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a^3}{b(2c+a)} + \frac{b}{3} + \frac{2c+a}{9} \geq a \Rightarrow \frac{a^3}{b(2c+a)} \geq \frac{8a-3b-2c}{9}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{b^3}{c(2a+b)} \geq \frac{8b-3c-2a}{9}; \quad \frac{c^3}{a(2b+c)} \geq \frac{8c-3a-2b}{9}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3}{b(2c+a)} + \frac{b^3}{c(2a+b)} + \frac{c^3}{a(2b+c)} \geq \frac{a+b+c}{3} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a^3}{b(2c+a)} + \frac{b^3}{c(2a+b)} + \frac{c^3}{a(2b+c)} \\ &= \frac{(\sqrt{a^3})^2}{b(2c+a)} + \frac{(\sqrt{b^3})^2}{c(2a+b)} + \frac{(\sqrt{c^3})^2}{a(2b+c)} \geq \frac{(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3})^2}{3(ab+bc+ca)} \end{aligned}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} & (\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3})(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq (a+b+c)^2 \\ &= 3\sqrt{3(a+b+c)} \geq 3(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \end{aligned}$$

Nên $\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3} \geq 3$

Mà theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 = 9 \Rightarrow ab+bc+ca \leq 3$$

Do đó ta được $\frac{(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3})^2}{3(ab+bc+ca)} \geq 1$ hay bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3: Biểu thức vế trái được viết lại thành $\frac{a^4}{ab(2c+a)} + \frac{b^4}{bc(2a+b)} + \frac{c^4}{ca(2b+c)}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^4}{ab(2c+a)} + \frac{b^4}{bc(2a+b)} + \frac{c^4}{ca(2b+c)} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b+6abc}$$

Mà ta có

$$\begin{aligned} & a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b+6abc \\ &= (a+b+c)(ab+bc+ca) + 3abc = 3(ab+bc+ca) + 3abc \end{aligned}$$

Áp dụng một bất đẳng thức quen thuộc ta được

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{3} \geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{3} \geq abc(a + b + c) = 3abc$$

$$\frac{2(a^2 + b^2 + c^2)^2}{3} \geq \frac{(a + b + c)^2(a^2 + b^2 + c^2)}{9} = 3(ab + bc + ca)$$

Cộng theo về hai bất đẳng thức trên ta được $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(ab + bc + ca) + 3abc$

Do đó ta được $\frac{a^3}{b(2c + a)} + \frac{b^3}{c(2a + b)} + \frac{c^3}{a(2b + c)} \geq 1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 142. Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm ta có:

$$\sqrt{\frac{ab + bc + ca}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{(a + b)(b + c)(c + a)}{8}}$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta thu được:

$$abc = \sqrt[3]{abc} \cdot \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \leq \frac{a + b + c}{3} \cdot \frac{ab + bc + ca}{3} = \frac{(ab + bc + ca)(a + b + c)}{9}.$$

Dễ thấy $(ab + bc + ca)(a + b + c) = (a + b)(b + c)(c + a) + abc$.

Do đó ta có $8(ab + bc + ca)(a + b + c) \leq 9(a + b)(b + c)(c + a)$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\sqrt[3]{(a + b)(b + c)(c + a)} \leq (a + b) + (b + c) + (c + a) = 2(a + b + c).$$

từ đó suy ra

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq \frac{8}{9}(ab + bc + ca)(a + b + c)$$

$$\geq \frac{8}{9}(ab + bc + ca) \cdot \frac{3}{2} \sqrt[3]{(a + b)(b + c)(c + a)}$$

Hay tương đương $\sqrt{\frac{ab + bc + ca}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{(a + b)(b + c)(c + a)}{8}}.$

Bài toán được chứng minh xong.

Bài 143. Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $(a + b)^3 + 4ab \geq 2$. Chứng minh rằng:

$$3(a^4 + b^4 + a^2b^2) - 2(a^2 + b^2) + 1 \geq \frac{9}{16}$$

Lời giải

Dễ thấy với mọi a, b ta luôn có $(a + b)^2 \geq 4ab$. Kết hợp với bất đẳng thức giả thiết

$(a + b)^3 + 4ab \geq 2$, ta được $(a + b)^3 + (a + b)^2 \geq 2 \Leftrightarrow a + b \geq 1$

Do đó ta được $a^2 + b^2 \geq \frac{(a + b)^2}{2} \geq \frac{1}{2}$

Khi đó ta được bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
3(a^4 + b^4 + a^2b^2) - 2(a^2 + b^2) + 1 &= 3\left[(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2\right] - 2(a^2 + b^2) + 1 \\
&\geq 3\left[(a^2 + b^2)^2 - \frac{(a^2 + b^2)^2}{4}\right] - 2(a^2 + b^2) + 1 = \frac{9}{4}(a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2) + 1
\end{aligned}$$

Mà ta lại có

$$\begin{aligned}
\frac{9}{4}(a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2) + 1 &= \frac{(a^2 + b^2)^2}{4} + \frac{4(a^2 + b^2)^2 - 4(a^2 + b^2) + 1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{(a^2 + b^2)^2}{4} + \frac{[2(a^2 + b^2) - 1]^2}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{9}{16}
\end{aligned}$$

Do đó ta được $3(a^4 + b^4 + a^2b^2) - 2(a^2 + b^2) + 1 \geq \frac{9}{16}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}$.

Bài 144. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab + bc + ca + 1}{(a + b + c + 1)^2} + \frac{3}{8} \sqrt[3]{\frac{(a + b)(b + c)(c + a)}{abc}} \geq 1$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Bất đẳng thức có chứa căn bậc ba nên suy nghĩ rất tự nhiên là đánh giá làm mất căn bậc ba. Tuy nhiên ta không đánh giá theo hướng đó được vì đại lượng trong căn có dạng tích nên không thể dùng bất đẳng thức Cauchy để đánh giá, ngoài ra ta cũng không thể sử dụng phép đặt ẩn phụ vì như vậy đại lượng ngoài căn sẽ có bậc cao.

Để ý đến đại lượng $\frac{(a + b)(b + c)(c + a)}{abc}$ trong căn bậc ba, nếu ta đánh giá được đại lượng

$\frac{ab + bc + ca + 1}{(a + b + c + 1)^2}$ về $\frac{abc}{(a + b)(b + c)(c + a)}$ thì khi đó ta có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy để chứng minh bất đẳng thức. Với ý tưởng như vậy và chú ý đến dấu đẳng thức xảy ra ta tập trung chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{ab + bc + ca + 1}{(a + b + c + 1)^2} \geq \frac{2abc}{(a + b)(b + c)(c + a)}$$

+ Hướng 1: Ta biến đổi tương đương bất đẳng thức trên thì được

$$\begin{aligned}
&(a^2 + b^2 + c^2 + 1 - ab - bc - ca)(a + b + c + abc) + 2abc(ab + bc + ca) \\
&\quad + (ab + bc + ca)(a + b + c) \geq 4abc(a + b + c) + 3abc
\end{aligned}$$

Dễ thấy $(a^2 + b^2 + c^2 + 1 - ab - bc - ca)(a + b + c + abc) \geq 0$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned}
& 2abc(ab+bc+ca) + \frac{2(ab+bc+ca)(a+b+c)}{3} \\
& \geq 2\sqrt{\frac{4abc(ab+bc+ca)^2(a+b+c)}{3}} \\
& \geq 4\sqrt{\frac{abc \cdot 3abc(a+b+c)(a+b+c)}{3}} = 4abc(a+b+c)
\end{aligned}$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{(ab+bc+ca)(a+b+c)}{3} \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \cdot \sqrt[3]{abc} = 3abc$$

Cộng theo vế của ba bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned}
& (a^2+b^2+c^2+1-ab-bc-ca)(a+b+c+abc) + 2abc(ab+bc+ca) \\
& + (ab+bc+ca)(a+b+c) \geq 4abc(a+b+c) + 3abc
\end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức $\frac{ab+bc+ca+1}{(a+b+c+1)^2} \geq \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ được chứng minh.

+ Hướng 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned}
& (ab+bc+ca+1)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+1\right) \geq (a+b+c+1)^2 \\
& (ab+bc+ca+1)\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+1\right) \geq (b+c+a+1)^2
\end{aligned}$$

Cộng theo vế hai bất đẳng thức này ta được

$$(ab+bc+ca+1) \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq 2(a+b+c+1)^2$$

Từ đó suy ra $\frac{ab+bc+ca+1}{(a+b+c+1)^2} \geq \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

Như vậy với bất đẳng thức $\frac{ab+bc+ca+1}{(a+b+c+1)^2} \geq \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} + \frac{3}{8} \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned}
& \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} + \frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} \\
& \geq 2\sqrt{\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \cdot \frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}} \\
& = \sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}} = \sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}
\end{aligned}$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} + \frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$$

Do đó ta suy ra được

$$\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} + \frac{3}{8} \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}} \geq 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 145. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b + c}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + b + c}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + a + b}} \leq \sqrt{3}$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Để ý đến đại lượng $a^2 + b + c$ có thể đánh giá bằng bất đẳng thức Bunhiacopxki như sau

$$(a^2 + b + c)(1 + b + c) \geq (a + b + c)^2$$

Khi đó ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b + c}} \leq \frac{a\sqrt{1 + b + c}}{a + b + c}.$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b + c}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + b + c}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + a + b}} \leq \frac{a\sqrt{1 + b + c} + b\sqrt{1 + c + a} + c\sqrt{1 + a + b}}{a + b + c}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a\sqrt{1 + b + c} + b\sqrt{1 + c + a} + c\sqrt{1 + a + b}}{a + b + c} \leq \sqrt{3}$$

Hay

$$a\sqrt{1 + b + c} + b\sqrt{1 + c + a} + c\sqrt{1 + a + b} \leq \sqrt{3}(a + b + c)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} & a\sqrt{1 + b + c} + b\sqrt{1 + c + a} + c\sqrt{1 + a + b} \\ & \leq \sqrt{(a + b + c)(a + ab + ac + b + bc + ab + c + ca + bc)} \\ & = \sqrt{(a + b + c)[a + b + c + 2(ab + cb + ca)]} \end{aligned}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 9 \Rightarrow a + b + c \leq 3$$

Do đó ta được

$$2(ab + cb + ca) \leq \frac{2(a + b + c)^2}{3} \leq 2(a + b + c)$$

Suy ra

$$\sqrt{(a + b + c)[a + b + c + 2(ab + cb + ca)]} \leq \sqrt{3(a + b + c)^2} = \sqrt{3}(a + b + c)$$

Từ đó ta có

$$a\sqrt{1 + b + c} + b\sqrt{1 + c + a} + c\sqrt{1 + a + b} \leq \sqrt{3}(a + b + c)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2: Trước hết để làm mất các dấu căn bậc hai ta chú ý đến đánh giá

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b + c}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + b + c}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + a + b}} \leq \sqrt{(a + b + c) \left(\frac{a}{a^2 + b + c} + \frac{b}{b^2 + c + a} + \frac{c}{c^2 + a + b} \right)}$$

Ta quy bài toán về chứng minh

$$(a + b + c) \left(\frac{a}{a^2 + b + c} + \frac{b}{b^2 + c + a} + \frac{c}{c^2 + a + b} \right) \leq 3$$

Theo đánh giá như cách 1 ta có $a + b + c \leq 3$ nên ta được

$$(a + b + c) \left(\frac{a}{a^2 + b + c} + \frac{b}{b^2 + c + a} + \frac{c}{c^2 + a + b} \right) \leq 3 \left(\frac{a}{a^2 + b + c} + \frac{b}{b^2 + c + a} + \frac{c}{c^2 + a + b} \right)$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a}{a^2 + b + c} + \frac{b}{b^2 + c + a} + \frac{c}{c^2 + a + b} \leq 1$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{a}{a^2 + b + c} + \frac{b}{b^2 + c + a} + \frac{c}{c^2 + a + b} \leq \frac{a(1 + b + c) + b(1 + c + a) + c(1 + a + b)}{(a + b + c)^2}$$

Theo một đánh giá quen thuộc ta có

$$a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} = 3 = a^2 + b^2 + c^2$$

Khi đó ta được

$$\begin{aligned} \frac{a(1 + b + c) + b(1 + c + a) + c(1 + a + b)}{(a + b + c)^2} &= \frac{a + b + c + 2(ab + bc + ca)}{(a + b + c)^2} \\ &\leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)}{(a + b + c)^2} = 1 \end{aligned}$$

Từ đó ta được $\frac{a}{a^2 + b + c} + \frac{b}{b^2 + c + a} + \frac{c}{c^2 + a + b} \leq 1$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 146. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1 - ab}{(a + b)^2} + \frac{1 - bc}{(b + c)^2} + \frac{1 - ca}{(c + a)^2} \geq \frac{3}{2}$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Chú ý đến giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{1 - ab}{(a + b)^2} &= \frac{2(a^2 + b^2 + c^2) - 2ab}{2(a + b)^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + (a - b)^2}{2(a + b)^2} + \frac{c^2}{(a + b)^2} \\ &\geq \frac{1}{2(a + b)^2} + \frac{c^2}{2(a + b)^2} \end{aligned}$$

Khi đó ta được

$$\frac{1-ab}{(a+b)^2} + \frac{1-bc}{(b+c)^2} + \frac{1-ca}{(c+a)^2} \geq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{c^2}{(a+b)^2} + \frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2}{(c+a)^2} \right]$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{c^2}{(a+b)^2} + \frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2}{(c+a)^2} \geq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2} \geq \frac{9}{4(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{c^2}{(a+b)^2} + \frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2}{(c+a)^2} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)^2 \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Cộng theo về hai bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{c^2}{(a+b)^2} + \frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2}{(c+a)^2} \geq 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Cách 2: Để ý ta thấy $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ suy ra $\frac{1-ab}{(a+b)^2} \geq \frac{1-\frac{(a+b)^2}{4}}{(a+b)^2} = \frac{1}{(a+b)^2} - \frac{1}{4}$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{1-ab}{(a+b)^2} + \frac{1-bc}{(b+c)^2} + \frac{1-ca}{(c+a)^2} \geq \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} - \frac{3}{4}$$

Mà ta lại có

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2} \geq \frac{9}{4(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{9}{4}$$

Do đó ta được $\frac{1-ab}{(a+b)^2} + \frac{1-bc}{(b+c)^2} + \frac{1-ca}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3: Để ý đến đánh giá $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, khi đó ta được

$$2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned}\frac{1-ab}{(a+b)^2} &= \frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca-2ab}{2(a+b)^2} \\ &= \frac{(a-b)^2+(b+c)(c+a)}{2(a+b)^2} \geq \frac{(b+c)(c+a)}{2(a+b)^2}\end{aligned}$$

Áp dụng tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{1-ab}{(a+b)^2} + \frac{1-bc}{(b+c)^2} + \frac{1-ca}{(c+a)^2} \geq \frac{(b+c)(c+a)}{2(a+b)^2} + \frac{(a+b)(c+a)}{2(b+c)^2} + \frac{(b+c)(a+b)}{2(c+a)^2}$$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{(b+c)(c+a)}{2(a+b)^2} + \frac{(a+b)(c+a)}{2(b+c)^2} + \frac{(b+c)(a+b)}{2(c+a)^2} \geq \frac{3}{2}$$

Do đó ta được

$$\frac{1-ab}{(a+b)^2} + \frac{1-bc}{(b+c)^2} + \frac{1-ca}{(c+a)^2} \geq \frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 147. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2(1+bc)} + \frac{1}{b^2(1+ca)} + \frac{1}{c^2(1+ab)} \leq \frac{1}{4}$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \sqrt{3}$. Biến đổi giả thiết ta được $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$. Đến đây rất tự nhiên ta nghĩ đến phép đổi biến $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, khi đó giả thiết trở thành $xy + yz + zx = 1$ và bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{x^2yz}{1+yz} + \frac{y^2zx}{1+zx} + \frac{z^2xy}{1+xy} \leq \frac{1}{4}$$

Hay

$$\frac{x^2yz}{xy+yz+xz+yz} + \frac{y^2zx}{xy+yz+xz+zx} + \frac{z^2xy}{xy+yz+xz+xy} \leq \frac{1}{4}$$

Đặt $m = xy$; $n = yz$; $p = zx \Rightarrow m + n + p = 1$ và bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{mp}{m+n+n+p} + \frac{mn}{m+p+n+p} + \frac{np}{m+n+m+p} \leq \frac{1}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned}\frac{mp}{m+n+n+p} &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{mp}{m+n} + \frac{mp}{n+p} \right) \\ \frac{mn}{m+p+n+p} &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{mn}{m+p} + \frac{mn}{n+p} \right) \\ \frac{np}{m+n+m+p} &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{np}{m+n} + \frac{np}{m+p} \right)\end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{mp}{m+n+n+p} + \frac{mn}{m+p+n+p} + \frac{np}{m+n+m+p} \leq \frac{m+n+p}{4} = 1$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \sqrt{3}$.

Cách 2: Để ý đến giả thiết $a + b + c = abc$ ta được

$$\frac{1}{a^2(1+bc)} = \frac{1}{a(a+abc)} = \frac{1}{a(a+b+a+c)}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{1}{a+b+a+c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right) \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Suy ra
$$\frac{1}{a^2(1+bc)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{a(a+c)} \right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{b^2(1+ca)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{b(a+b)} \right); \quad \frac{1}{c^2(1+ab)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c(c+b)} + \frac{1}{c(c+a)} \right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2(1+bc)} + \frac{1}{b^2(1+ca)} + \frac{1}{c^2(1+ab)} \\ & \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{a(a+c)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(c+b)} + \frac{1}{c(c+a)} \right) \end{aligned}$$

Lại có $\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)} = \frac{1}{ab}$, do đó ta được

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{a(a+c)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(c+b)} + \frac{1}{c(c+a)} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$$

Suy ra ta được

$$\frac{1}{a^2(1+bc)} + \frac{1}{b^2(1+ca)} + \frac{1}{c^2(1+ab)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) = \frac{a+b+c}{4abc} = \frac{1}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 148. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b(1+a^2)} + \frac{b}{c(1+b^2)} + \frac{c}{a(1+c^2)} \geq \frac{9}{4}$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Bất đẳng thức cần chứng minh có

dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, do đó ta thử tiếp cận với bất đẳng thức đó xem sao?

$$\frac{a}{b(1+a^2)} + \frac{b}{c(1+b^2)} + \frac{c}{a(1+c^2)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab(1+a^2) + bc(1+b^2) + ca(1+c^2)}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$9(a+b+c)^2 \geq 4[ab(1+a^2) + bc(1+b^2) + ca(1+c^2)]$$

Bất đẳng thức trên không đồng bậc và ta cần phải đánh giá đại lượng có bậc 4 về phải về đại lượng trội hơn, tuy nhiên đánh giá không khả thi, nên ta tạm dừng đánh giá này ở đây.

Chú ý đến giả thiết $ab + bc + ca = 1$ khi đó ta viết được $1 + a^2 = (a + b)(c + a)$, hoàn toàn tương tự ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{a}{b(a+b)(a+c)} + \frac{b}{c(a+b)(b+c)} + \frac{c}{a(c+a)(b+c)} \geq \frac{9}{4}$$

Hay bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{a^2c(b+c) + b^2a(c+a) + c^2b(a+b)}{abc(a+b)(a+c)(b+c)} \geq \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + abc(a+b+c)}{abc(a+b)(a+c)(b+c)} \geq \frac{9}{4}$$

Dễ thấy $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + abc(a+b+c) = (ab + bc + ca)^2 - abc(a+b+c)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$abc(a+b)(b+c)(c+a) \leq \frac{8(ab + bc + ca)^3}{27} = \frac{8}{27}$$

$$abc(a+b+c) \leq \frac{(ab + bc + ca)^2}{3} = \frac{1}{3}$$

Khi đó ta được

$$\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + abc(a+b+c)}{abc(a+b)(a+c)(b+c)} \geq \frac{27\left(1 - \frac{1}{3}\right)}{8} = \frac{9}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 149. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c}{a + b + c^2}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + a}{b + c + a^2}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2 + b}{c + a + b^2}} \geq 3$$

Phân tích và lời giải

Trước hết ta dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh thì suy nghĩ đầu tiên là làm mất các căn bậc hai. Để ý đến chiều bất đẳng thức ta có các đánh giá như sau

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c}{a + b + c^2}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + a}{b + c + a^2}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2 + b}{c + a + b^2}} \geq 3 \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c}{a + b + c^2} \cdot \frac{b^2 + c^2 + a}{b + c + a^2} \cdot \frac{c^2 + a^2 + b}{c + a + b^2}}}$$

Hoặc là
$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c}{a + b + c^2}} = \frac{a^2 + b^2 + c}{\sqrt{(a + b + c^2)(a^2 + b^2 + c)}} \geq \frac{2(a^2 + b^2 + c)}{a + b + c^2 + a^2 + b^2 + c}$$

Ta đi tìm hiểu xem trong các đánh giá trên thì đánh giá nào giải quyết được bài toán + Với đánh thứ nhất ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{a^2 + b^2 + c}{a + b + c^2} \cdot \frac{b^2 + c^2 + a}{b + c + a^2} \cdot \frac{c^2 + a^2 + b}{c + a + b^2} \geq 1$$

Hay $(a^2 + b^2 + c)(b^2 + c^2 + a)(c^2 + a^2 + b) \geq (a + b + c^2)(b + c + a^2)(c + a + b^2)$

Tuy nhiên đánh giá quá phức tạp, như vậy cách thứ nhất không khả thi.

+ Với đánh giá thứ hai ta được bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c}{a + b + c^2}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + a}{b + c + a^2}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2 + b}{c + a + b^2}} \geq \frac{4(a^2 + b^2 + c^2) + 2(a + b + c)}{a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c}$$

Ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{4(a^2 + b^2 + c^2) + 2(a + b + c)}{a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c} \geq 3$$

Hay ta phải chứng minh được

$$4(a^2 + b^2 + c^2) + 6 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2 + 3) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng vì $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 3$.

Như vậy bài toán được chứng minh.

Bài 150. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3abc$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \left[\frac{a^4}{(ab+1)(ac+1)} + \frac{b^4}{(bc+1)(ab+1)} + \frac{c^4}{(ca+1)(bc+1)} \right] \geq \frac{27}{4}$$

Phân tích và lời giải

Dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Quan sát bất đẳng thức ta nhận thấy được sự phức tạp của bài toán. Bất đẳng thức trên có một số ý tưởng tiếp cận như đổi biến, sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski dạng phân thức

Cách 1: Trước hết ta tiếp cận bài toán với ý tưởng đổi biến

Nhận thấy giả thiết của bài toán có thể viết lại được $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 3$, đến đây hoàn toàn tự nhiên ta nghĩ đến phép đổi biến $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$ khi đó giả thiết được viết lại thành $xy + yz + zx = 1$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(x + y + z)^2 \left[\frac{yz}{x^2(1+xy)(1+xz)} + \frac{zx}{y^2(1+yz)(1+xy)} + \frac{xy}{z^2(1+zx)(1+yz)} \right] \geq \frac{27}{4}$$

Ta thấy sau khi đổi biến thì thu được một bất đẳng thức còn phức tạp hơn cả bất đẳng thức ban đầu nên ta tạm dừng ý tưởng này lại.

Cũng từ giả thiết ta thử đổi biến $x = \frac{1}{bc}$; $y = \frac{1}{ca}$; $z = \frac{1}{ab}$ xem sao? Việc ta cần làm đó là đánh giá sao cho xuất hiện các đại lượng ab ; bc ; ca .

Dễ thấy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} = \frac{3}{abc}$, khi đó gọi P là vế trái của bất đẳng thức thì ta thu được đánh giá

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{9}{a^2b^2c^2} \left[\frac{a^4}{(ab+1)(ac+1)} + \frac{b^4}{(bc+1)(ab+1)} + \frac{c^4}{(ca+1)(bc+1)} \right] \\ &= 9 \left[\frac{a^2}{b^2c^2(ab+1)(ac+1)} + \frac{b^2}{c^2a^2(bc+1)(ab+1)} + \frac{c^2}{a^2b^2(ca+1)(bc+1)} \right] \\ &= 9 \left[\frac{a^2bc}{b^3c^3(ab+1)(ac+1)} + \frac{b^2ca}{c^3a^3(bc+1)(ab+1)} + \frac{c^2ab}{a^3b^3(ca+1)(bc+1)} \right] \end{aligned}$$

Đến đây ta có thể thay $ab = \frac{1}{z}$; $bc = \frac{1}{x}$; $ca = \frac{1}{y}$ vào bất đẳng thức trên thì bất đẳng thức trở thành

$$P \geq 9 \left[\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \right]$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$$

Bất đẳng thức trên đã được chứng minh trong kỹ thuật thêm bớt trong bất đẳng thức Cauchy.

Cách 2: Nhận thấy bất đẳng thức có dấu hiệu sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức, khi đó áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a^4}{(ab+1)(ac+1)} + \frac{b^4}{(bc+1)(ab+1)} + \frac{c^4}{(ca+1)(bc+1)} \\ & \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(ab+1)(ac+1) + (bc+1)(ab+1) + (ca+1)(bc+1)} \end{aligned}$$

Hay ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a^4}{(ab+1)(ac+1)} + \frac{b^4}{(bc+1)(ab+1)} + \frac{c^4}{(ca+1)(bc+1)} \\ & \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{abc(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) + 3} \end{aligned}$$

$$\text{Dễ thấy } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \text{ và } a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 \left[\frac{a^4}{(ab+1)(ac+1)} + \frac{b^4}{(bc+1)(ab+1)} + \frac{c^4}{(ca+1)(bc+1)} \right] \\ & \geq \left(\frac{9}{a+b+c} \right)^2 \left[\frac{\frac{1}{3}(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)}{abc(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) + 3} \right] \\ & = \frac{27(a^2+b^2+c^2)}{abc(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) + 3} \end{aligned}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{27(a^2+b^2+c^2)}{abc(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) + 3} \geq \frac{27}{4}$$

Hay ta cần chứng minh $4(a^2+b^2+c^2) \geq abc(a+b+c) + 2(ab+bc+ca) + 3$

Để ý đến giả thiết $a+b+c = 3abc$ ta quy bài toán về chứng minh

$$12(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 + 6(ab+bc+ca) + 9$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $3abc = a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \geq 1$.

Dễ thấy

$$\begin{aligned}3(a^2 + b^2 + c^2) &\geq (a + b + c)^2 \\6(a^2 + b^2 + c^2) &\geq 6(ab + bc + ca) \\3(a^2 + b^2 + c^2) &\geq 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 9\end{aligned}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$12(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 + 6(ab + bc + ca) + 9$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 151. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{3a^2 + 4b^2 + 5}} + \frac{1}{\sqrt{3b^2 + 4c^2 + 5}} + \frac{1}{\sqrt{3c^2 + 4a^2 + 5}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{abc}}$$

Phân tích và lời giải

Dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Trước hết ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\sqrt{\frac{abc}{3a^2 + 4b^2 + 5}} + \sqrt{\frac{abc}{3b^2 + 4c^2 + 5}} + \sqrt{\frac{abc}{3c^2 + 4a^2 + 5}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quan sát bất đẳng thức trên thì suy nghĩ rất tự nhiên là đánh giá làm mất các dấu căn bậc hai, chú ý đến chiều bất đẳng thức ta có đánh giá theo bất đẳng thức Bunhiacopxki là

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{abc}{3a^2 + 4b^2 + 5}} + \sqrt{\frac{abc}{3b^2 + 4c^2 + 5}} + \sqrt{\frac{abc}{3c^2 + 4a^2 + 5}} \\&\leq \sqrt{3 \left(\frac{abc}{3a^2 + 4b^2 + 5} + \frac{abc}{3b^2 + 4c^2 + 5} + \frac{abc}{3c^2 + 4a^2 + 5} \right)}\end{aligned}$$

Đến đây ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{abc}{3a^2 + 4b^2 + 5} + \frac{abc}{3b^2 + 4c^2 + 5} + \frac{abc}{3c^2 + 4a^2 + 5} \leq \frac{1}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $3a^2 + 4b^2 + 5 \geq 2ab + 4a + 6b$

$$\text{Do đó ta được } \frac{abc}{3a^2 + 4b^2 + 5} \leq \frac{abc}{2ab + 4a + 6b}$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{1}{2ab + 4a + 6b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2ab + 4a} + \frac{1}{6b} \right) \leq \frac{1}{72} \left(\frac{1}{ab} + \frac{2}{a} \right) + \frac{1}{24b} = \frac{1}{72ab} + \frac{1}{36a} + \frac{1}{24b}$$

$$\text{Do đó ta được } \frac{abc}{3a^2 + 4b^2 + 5} \leq \frac{c}{72} + \frac{bc}{36} + \frac{ac}{24}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{abc}{3b^2 + 4c^2 + 5} \leq \frac{a}{72} + \frac{ca}{36} + \frac{ba}{24}; \quad \frac{abc}{3c^2 + 4a^2 + 5} \leq \frac{b}{72} + \frac{ab}{36} + \frac{bc}{24}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{abc}{3a^2 + 4b^2 + 5} + \frac{abc}{3b^2 + 4c^2 + 5} + \frac{abc}{3c^2 + 4a^2 + 5} \leq \frac{a + b + c}{72} + \frac{5(ab + bc + ca)}{72}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a + b + c}{72} + \frac{5(ab + bc + ca)}{72} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 3$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng vì $ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 3$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 152. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab\sqrt{2(a^2 + b^2)} + bc\sqrt{2(b^2 + c^2)} + ca\sqrt{2(c^2 + a^2)}$$

Dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Quan sát bất đẳng thức trên ta có một số hướng tiếp cận như sau

Cách 1: Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử c là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c . Khi đó ta cố gắng đánh giá bất đẳng thức xoay quanh biến c . Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} bc\sqrt{2(b^2 + c^2)} &= c\sqrt{2b^2(b^2 + c^2)} \leq \frac{c(3b^2 + c^2)}{2} \\ ca\sqrt{2(c^2 + a^2)} &= c\sqrt{2a^2(c^2 + a^2)} \leq \frac{c(3a^2 + c^2)}{2} \end{aligned}$$

Ta quy bài toán về chứng minh

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab\sqrt{2(a^2 + b^2)} + \frac{3c(a^2 + b^2)}{2} + c^3$$

Hay

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + 3abc &\geq ab\sqrt{2(a^2 + b^2)} + \frac{3c(a^2 + b^2)}{2} \\ \Leftrightarrow 2a^3 + 2b^3 - 2ab\sqrt{2(a^2 + b^2)} &\geq 3c(a - b)^2 \end{aligned}$$

Ta cần biến đổi về trái của bất đẳng thức trên sao cho xuất hiện đại lượng $(a - b)^2$.

Ta có

$$\begin{aligned} 2a^3 + 2b^3 - 2ab\sqrt{2(a^2 + b^2)} &= 2(a + b)(a^2 + b^2 - ab) - 2ab\sqrt{2(a^2 + b^2)} \\ &= (a + b)(a - b)^2 + (a + b)(a^2 + b^2) - 2ab\sqrt{2(a^2 + b^2)} \\ &= (a + b)(a - b)^2 + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \left[(a + b)\sqrt{2(a^2 + b^2)} - 4ab \right] \end{aligned}$$

Theo giả sử trên ta có $a + b \geq 2c$ do đó ta được

$$(a + b)(a - b)^2 \geq 2c(a - b)^2$$

Mặt khác

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq 2; (a + b)\sqrt{2(a^2 + b^2)} - 4ab \geq (a + b)(a + b) - 4ab = (a - b)^2$$

$$\text{Suy ra ta được } \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \left[(a + b)\sqrt{2(a^2 + b^2)} - 4ab \right] \geq 3c(a - b)^2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Cũng với ý tưởng sắp thứ tự các biến, ta giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó ta chú ý đến các đánh giá sau

$$\begin{aligned}
2ab\sqrt{2(a^2 + b^2)} &\leq a(a^2 + b^2) + 2ab^2 \\
2bc\sqrt{2(b^2 + c^2)} &\leq c(b^2 + c^2) + 2cb^2 \\
2ca\sqrt{2(c^2 + a^2)} &\leq \frac{ca(c^2 + a^2)}{b} + 2abc
\end{aligned}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned}
2ab\sqrt{2(a^2 + b^2)} + 2bc\sqrt{2(b^2 + c^2)} + 2ca\sqrt{2(c^2 + a^2)} \\
\leq a^3 + c^3 + 3b^2(a + c) + \frac{ca(c^2 + a^2)}{b} + 2abc
\end{aligned}$$

Ta quy bài toán về chứng minh

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 + c^3 + 3abc &\geq a^3 + c^3 + 3b^2(a + c) + \frac{ca(c^2 + a^2)}{b} + 2abc \\
\text{Hay } a^3 + 2b^3 + c^3 + 4abc &\geq 3b^2(a + c) + \frac{ca(c^2 + a^2)}{b}
\end{aligned}$$

Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$(a - b)(b - c) \left(\frac{a^2 + c^2}{b} - 2b + a + c \right) \geq 0$$

Đánh giá trên là một đánh giá đúng vì

$$(a - b)(b - c) \geq 0; \quad \frac{a^2 + c^2}{b} - 2b + c + a \geq \frac{a^2}{b} + a - 2b \geq 0$$

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 153. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)(ab + bc + ca)^2 \geq 8a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{a^2 + b^2}{2ab} \cdot \frac{b^2 + c^2}{2bc} \cdot \frac{c^2 + a^2}{2ca} \geq \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \right)^2$$

Không thể đánh giá bất đẳng thức trên bằng bất đẳng thức Cauchy hay Bunhiacopxki vì sẽ thu được những đánh giá ngược chiều nhau. Do đó ta hướng đến phép biến đổi tương đương. Khi đó bất đẳng thức trên tương đương với

$$\left[1 + \frac{(a - b)^2}{2ab} \right] \left[1 + \frac{(b - c)^2}{2bc} \right] \left[1 + \frac{(c - a)^2}{2ca} \right] \geq \left[1 + \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{2(ab + bc + ca)} \right]^2$$

Đến đây để có cách đánh giá dễ dàng hơn ta có thể sắp thứ tự các biến, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó ta được

$$\left[1 + \frac{(a - b)^2}{2ab} \right] \left[1 + \frac{(b - c)^2}{2bc} \right] \geq 1 + \frac{(a - b)^2}{2ab} + \frac{(b - c)^2}{2bc} \geq 1 + \frac{(a - c)^2}{2(ab + bc)}$$

Như vậy ta cũng cần đánh giá vế phải về đại lượng $(a - c)^2$

Ta có $(a-b)^2 + (b-c)^2 = (a-c)^2 - 2(a-b)(b-c) \leq (a-c)^2$

Bài toán quy về chứng minh

$$\left[1 + \frac{(a-c)^2}{2(ab+bc)}\right] \left[1 + \frac{(c-a)^2}{2ca}\right] \geq \left[1 + \frac{(c-a)^2}{ab+bc+ca}\right]^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\left[1 + \frac{(a-c)^2}{2(ab+bc)}\right] \left[1 + \frac{(c-a)^2}{2ca}\right] \geq \left[1 + \frac{(c-a)^2}{2\sqrt{ca(ab+bc)}}\right]^2$$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy ta được $2\sqrt{ca(ab+bc)} \leq ab+bc+ca$ nên ta có

$$1 + \frac{(c-a)^2}{2\sqrt{ca(ab+bc)}} \geq 1 + \frac{(c-a)^2}{ab+bc+ca}$$

Do đó ta được
$$\left[1 + \frac{(a-c)^2}{2(ab+bc)}\right] \left[1 + \frac{(c-a)^2}{2ca}\right] \geq \left[1 + \frac{(c-a)^2}{ab+bc+ca}\right]^2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \geq 8\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

Đến đây ta đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, khi đó bất đẳng thức trên trở thành

$$(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2)(x + y + z)^2 \geq 8(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$

Ta thấy vế trái của bất đẳng thức có chứa đại lượng $(x + y + z)^2$ nên ta đánh giá nó về x^2, y^2, z^2 để có thể đổi biến tiếp.

Dễ thấy $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ và theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$2xy + 2yz + 2zx \geq \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4y^2z^2}{y^2 + z^2} + \frac{4z^2x^2}{z^2 + x^2}$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned} &(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2)(x + y + z)^2 \\ &\geq (x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2)\left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4y^2z^2}{y^2 + z^2} + \frac{4z^2x^2}{z^2 + x^2}\right) \end{aligned}$$

Ta quy bài toán về chứng minh.

$$\begin{aligned} &(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2)\left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4y^2z^2}{y^2 + z^2} + \frac{4z^2x^2}{z^2 + x^2}\right) \\ &\geq 8(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \end{aligned}$$

Đặt $m = x^2$; $n = y^2$; $p = z^2$, khi đó ta cần chứng minh

$$(m+n)(n+p)(p+m) \left(m+n+p + \frac{4mn}{m+n} + \frac{4np}{n+p} + \frac{4pm}{p+m} \right) \geq 8(mn+np+pm)$$

Khai triển và thu gọn ta được

$$mn(m-n)^2 + np(n-p)^2 + pm(p-m)^2 \geq 0$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Bài 154. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{c(c+a)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ca}{b(b+c)} \geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Để ý là $\frac{c}{a+c} + \frac{a}{c+a} = 1$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{ab}{c(c+a)} + \frac{c}{c+a} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{a}{a+b} + \frac{ca}{b(b+c)} + \frac{b}{b+c} \geq 3$$

Hay

$$\frac{c^2+ab}{c(c+a)} + \frac{a^2+bc}{a(a+b)} + \frac{b^2+ca}{b(b+c)} \geq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{c^2+ab}{c(c+a)} + \frac{a^2+bc}{a(a+b)} + \frac{b^2+ca}{b(b+c)} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{c^2+ab}{c(c+a)} \cdot \frac{a^2+bc}{a(a+b)} \cdot \frac{b^2+ca}{b(b+c)}}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{c^2+ab}{c(c+a)} \cdot \frac{a^2+bc}{a(a+b)} \cdot \frac{b^2+ca}{b(b+c)} \geq 1$$

Hay ta cần chứng minh

$$(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab) \geq abc(a+b)(b+c)(c+a)$$

Ta có $(a^2+bc)(b^2+ca) - ab(a+c)(b+c) = c(a+b)(a-b)^2$ do đó ta được

$$(a^2+bc)(b^2+ca) \geq ab(a+c)(b+c)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$(b^2+ca)(c^2+ab) \geq bc(a+b)(a+c); (c^2+ab)(a^2+bc) \geq ca(a+b)(b+c)$$

Nhân theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab) \geq abc(a+b)(b+c)(c+a)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{\frac{b}{c}}{1+\frac{c}{a}} + \frac{\frac{c}{a}}{1+\frac{a}{b}} + \frac{\frac{a}{b}}{1+\frac{b}{c}} \geq \frac{1}{1+\frac{c}{a}} + \frac{1}{1+\frac{a}{b}} + \frac{1}{1+\frac{b}{c}}$$

Đặt $x = \frac{a}{b}$; $y = \frac{b}{c}$; $z = \frac{c}{a}$, khi đó ta được $xyz = 1$. Bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{y}{1+z} + \frac{z}{1+x} + \frac{x}{1+y} = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với $\frac{x-1}{1+y} + \frac{y-1}{1+z} + \frac{z-1}{1+x} \geq 0$ hay

$$(x^2 - 1)(z + 1) + (y^2 - 1)(x + 1) + (z^2 - 1)(y + 1) \geq 0$$

Khai triển và thu gọn ta được $xy^2 + yz^2 + zx^2 + x^2 + y^2 + z^2 \geq x + y + z + 3$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và một đánh giá quen thuộc thì ta được

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 \geq 3; x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x + y + z)(x + y + z)}{3} \geq x + y + z$$

Cộng theo về hai bất đẳng thức trên ta được

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 + x^2 + y^2 + z^2 \geq x + y + z + 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3: Dễ thấy $\frac{ab}{c(c+a)} - \frac{a}{c+a} = \frac{a(b-c)}{c(c+a)}$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{a(b-c)}{c(c+a)} + \frac{b(c-a)}{a(a+b)} + \frac{c(a-b)}{b(b+c)} \geq 0$$

Đến đây ta đặt $x = \frac{a+b}{2b}$; $y = \frac{b+c}{2c}$; $z = \frac{c+a}{2a}$.

Dễ thấy $xyz \geq 1$, khi đó ta được $\frac{a(b-c)}{c(c+a)} = \frac{\frac{b+c}{2c} - 1}{\frac{c+a}{2a}} = \frac{y-1}{z}$. Hoàn toàn tương tự ta viết lại được

bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{x-1}{y} + \frac{y-1}{z} + \frac{z-1}{x} \geq 0 \text{ hay } \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x}{y} + \frac{x}{y} + \frac{z}{x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{xz}{y^2}} = \frac{3}{y}; \frac{y}{z} + \frac{y}{z} + \frac{x}{y} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{xy}{z^2}} = \frac{3}{z}; \frac{z}{x} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{yz}{x^2}} = \frac{3}{x}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên và thu gọn ta được

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 155. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}} + \frac{bc}{\sqrt{bc+ca}} + \frac{ca}{\sqrt{ca+ab}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Để ý là theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta luôn có

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a+c}} \leq \frac{a\sqrt{2b}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$$

Hoàn toàn tương tự ta được bất đẳng thức

$$\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}} + \frac{bc}{\sqrt{bc+ca}} + \frac{ca}{\sqrt{ca+ab}} \leq \frac{a\sqrt{2b}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} + \frac{b\sqrt{2c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{c\sqrt{2a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

Ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{2a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} + \frac{2b\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{2c\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \leq 1 = a+b+c$$

Đặt $x = \sqrt{a}$; $y = \sqrt{b}$; $z = \sqrt{c}$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{2x^2y}{x+z} + \frac{2y^2z}{x+y} + \frac{2z^2x}{y+z} \leq x^2 + y^2 + z^2$$

Để ý đến phép biến đổi $\frac{2x^2y}{z+x} = 2xy - \frac{2xyz}{z+x}$ nên bất đẳng thức trên trở thành

$$2xy + 2yz + 2zx - \left(\frac{2xyz}{x+z} + \frac{2xyz}{x+y} + \frac{2xyz}{y+z} \right) \leq x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{Hay } x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz \left(\frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \right) \geq 2xy + 2yz + 2zx$$

$$\text{Hay } 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2xyz \left(\frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \right) \geq (x+y+z)^2$$

Lại thấy $2x^2 + \frac{2xyz}{y+z} = \frac{2x(xy+yz+zx)}{y+z}$, hoàn toàn tương tự ta thu được bất đẳng thức

$$2(xy+yz+zx) \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) \geq (x+y+z)^2$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} & 2(xy+yz+zx) \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) \\ &= \left[x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) \right] \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) \geq (x+y+z)^2 \end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhacopxki ta được

$$\begin{aligned} & \left(\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}} + \frac{bc}{\sqrt{bc+ca}} + \frac{ca}{\sqrt{ca+ab}} \right)^2 \\ & \leq (ab+bc+ca) \left(\frac{ab}{ab+bc} + \frac{bc}{bc+ca} + \frac{ca}{ca+ab} \right) \\ & = ab+bc+ca + \frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a} \end{aligned}$$

Ta quy bài toán về chứng minh

$$2(ab + bc + ca) + 2\left(\frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a}\right) \leq 1 = (a+b+c)^2$$

Hay

$$2\left(\frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a}\right) \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{2ab^2}{a+b} \leq \frac{b(a+b)^2}{2(a+b)} = \frac{b(a+b)}{2}$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$2\left(\frac{ab^2}{a+b} + \frac{bc^2}{b+c} + \frac{ca^2}{c+a}\right) \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{2}$$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{2} \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Hay $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$, đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 3: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} & \left(\frac{ab}{\sqrt{ab+bc}} + \frac{bc}{\sqrt{bc+ca}} + \frac{ca}{\sqrt{ca+ab}} \right)^2 \\ &= \left(\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{\frac{ab^2}{(a+b)(a+c)}} + \sqrt{b+c} \cdot \sqrt{\frac{bc^2}{(a+b)(b+c)}} + \sqrt{c+a} \cdot \sqrt{\frac{ca^2}{(b+c)(c+a)}} \right)^2 \\ &\leq 2(a+b+c) \left(\frac{ab^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{bc^2}{(a+b)(b+c)} + \frac{ca^2}{(b+c)(c+a)} \right) \end{aligned}$$

Bài toán quy về chứng minh

$$\frac{ab^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{bc^2}{(a+b)(b+c)} + \frac{ca^2}{(b+c)(c+a)} \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Hay} \quad \frac{ab^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{bc^2}{(a+b)(b+c)} + \frac{ca^2}{(b+c)(c+a)} \leq \frac{a+b+c}{4}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$4a^2b(b+c) + 4b^2c(c+a) + 4c^2a(a+b) \leq (a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)$$

Khai triển và thu gọn ta được

$$ab(a-b)^2 + bc(b-c)^2 + ca(c-a)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 156. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(a+1)^2(b+c)} + \frac{1}{(b+1)^2(c+a)} + \frac{1}{(c+1)^2(a+b)} \leq \frac{3}{8}$$

Phân tích và lời giải

Cách 1: Từ giả thiết $abc = 1$, khi đó tồn tại các số dương sao cho $a = \frac{y}{x}$; $b = \frac{z}{y}$; $c = \frac{x}{z}$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^2yz}{(x+y)^2(xy+z^2)} + \frac{y^2zx}{(y+z)^2(yz+x^2)} + \frac{z^2xy}{(z+x)^2(zx+y^2)} \leq \frac{3}{8}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$xy + z^2 \geq 2z\sqrt{xy}$$

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \geq 2\sqrt{2xy(x^2 + y^2)}$$

Do đó ta được
$$\frac{x^2yz}{(x+y)^2(xy+z^2)} \leq \frac{x}{4\sqrt{2(x^2 + y^2)}}$$

Hoàn toàn tương tự ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + x^2}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Hay
$$\sqrt{\frac{2x^2}{x^2 + y^2}} + \sqrt{\frac{2y^2}{y^2 + z^2}} + \sqrt{\frac{2z^2}{z^2 + x^2}} \leq 3$$

Bất đẳng thức trên đã được chứng minh bằng bất đẳng thức Bunhiacopxki bằng cách đối xứng hóa bất đẳng thức hoán vị.

Cách 2: Đặt $a = x^2$; $b = y^2$; $c = z^2$ với $x, y, z > 0$, suy ra $xyz = 1$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{(x^2 + 1)^2(y^2 + z^2)} + \frac{1}{(y^2 + 1)^2(z^2 + x^2)} + \frac{1}{(z^2 + 1)^2(x^2 + y^2)} \leq \frac{3}{8}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + z^2)} \geq xy + z = \frac{1}{z} + z = \frac{z^2 + 1}{z}$$

$$\sqrt{(1 + x^2)(y^2 + z^2)} \geq y + zx = y + \frac{1}{y} = \frac{y^2 + 1}{y}$$

Do đó ta được
$$(x^2 + 1)(y^2 + z^2) \geq \frac{(y^2 + 1)(z^2 + 1)}{yz}$$

Suy ra
$$\frac{1}{(x^2 + 1)^2(y^2 + z^2)} \leq \frac{yz}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{1}{(x^2 + 1)^2(y^2 + z^2)} + \frac{1}{(y^2 + 1)^2(z^2 + x^2)} + \frac{1}{(z^2 + 1)^2(x^2 + y^2)} \leq \frac{xy + yz + zx}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)}$$

Ta quy bài toán về chứng minh

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) \geq \frac{8}{3}(xy + yz + zx)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) \geq (x + y)^2; (y^2 + 1)(z^2 + 1) \geq (y + z)^2; (z^2 + 1)(x^2 + 1) \geq (z + x)^2$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) \geq (x + y)(y + z)(z + x)$$

Đề ý đến bất đẳng thức $(x+y)(y+z)(z+x) \geq \frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx)$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx) \geq \frac{8}{3}(xy+yz+zx)$$

Hay $x+y+z \geq 3$, đánh giá cuối cùng là một đánh giá đúng do $xyz = 1$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 157. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2 + (c+a)^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{c^2 + (a+b)^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2 + (b+c)^2}} \leq \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$A = \sqrt{\frac{a^2}{5[b^2 + (c+a)^2]}} + \sqrt{\frac{b^2}{5[c^2 + (a+b)^2]}} + \sqrt{\frac{c^2}{5[a^2 + (b+c)^2]}} \leq \frac{3}{5}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$5[b^2 + (c+a)^2] = (1+4)[b^2 + (c+a)^2] \geq [b+2(c+a)]^2$$

Do đó ta được
$$\sqrt{\frac{a^2}{5[b^2 + (c+a)^2]}} \leq \sqrt{\frac{a^2}{[b+2(c+a)]^2}} = \frac{a}{b+2(c+a)}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{\frac{b^2}{5[c^2 + (a+b)^2]}} \leq \frac{b}{c+2(a+b)}; \quad \sqrt{\frac{c^2}{5[a^2 + (b+c)^2]}} \leq \frac{c}{a+2(b+c)}$$

Từ đó ta được
$$A \leq \frac{a}{b+2(c+a)} + \frac{b}{c+2(a+b)} + \frac{c}{a+2(b+c)},$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{a}{b+2(c+a)} + \frac{b}{c+2(a+b)} + \frac{c}{a+2(b+c)} \leq \frac{3}{5} \text{ hay}$$

$$\frac{b+2c}{b+2(c+a)} + \frac{c+2a}{c+2(a+b)} + \frac{a+2b}{a+2(b+c)} \geq \frac{9}{5}.$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned}
& \frac{b+2c}{b+2(c+a)} + \frac{c+2a}{c+2(a+b)} + \frac{a+2b}{a+2(b+c)} \\
&= \frac{(b+2c)^2}{(b+2c)[b+2(c+a)]} + \frac{(c+2a)^2}{(c+2a)[c+2(a+b)]} + \frac{(a+2b)^2}{(a+2b)[a+2(b+c)]} \\
&\geq \frac{9(a+b+c)^2}{(b+2c)[b+2(c+a)] + (c+2a)[c+2(a+b)] + (a+2b)[a+2(b+c)]} \\
&= \frac{9(a+b+c)^2}{5(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)} = \frac{9}{5}
\end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Bài 158. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{4(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^2} \geq 4(a+b+c)$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(a^3+b^3+c^3)(a+b+c) \geq (a^2+b^2+c^2)^2$$

Do đó ta được

$$\begin{aligned}
\frac{4(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2} &= \frac{4(a^3+b^3+c^3)(a+b+c)}{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)} \\
&\geq \frac{4(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)} = \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}
\end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$, cho nên

$$8(a+b+c)(ab+bc+ca) = 8(a+b)(b+c)(c+a) + 8abc \leq 9(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\text{Do đó } \frac{9(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^2} \geq \frac{8(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} = \frac{8(ab+bc+ca)}{a+b+c}$$

Từ các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned}
& \frac{4(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^2} \\
&\geq \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c} + \frac{8(ab+bc+ca)}{a+b+c} = 4(a+b+c)
\end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Bài 159. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c = abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b}{a\sqrt{b^2+1}} + \frac{c}{b\sqrt{c^2+1}} + \frac{a}{c\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Từ giả thiết $a + b + c = abc$ suy ra $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$.

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, Khi đó giả thiết của bài toán trở thành $xy + yz + zx = 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{x}{\sqrt{y^2 + 1}} + \frac{y}{\sqrt{z^2 + 1}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq \frac{3}{2}$.

Dễ thấy $\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + xy + yz + zx} = \sqrt{(x + y)(x + z)}$

Tương tự ta được $\sqrt{y^2 + 1} = \sqrt{(y + z)(y + x)}$; $\sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{(z + x)(z + y)}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{y^2 + 1}} + \frac{y}{\sqrt{z^2 + 1}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \frac{x}{\sqrt{(y + x)(y + z)}} + \frac{y}{\sqrt{(z + x)(z + y)}} + \frac{z}{\sqrt{(x + y)(x + z)}} \\ &\geq \frac{2x}{x + 2y + z} + \frac{2y}{x + y + 2z} + \frac{2z}{2x + y + z} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $\frac{2x}{x + 2y + z} + \frac{2y}{x + y + 2z} + \frac{2z}{2x + y + z} \geq \frac{3}{2}$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x + 2y + z} + \frac{2y}{x + y + 2z} + \frac{2z}{2x + y + z} &= \frac{2x^2}{x(x + 2y + z)} + \frac{2y^2}{y(x + y + 2z)} + \frac{2z^2}{z(2x + y + z)} \\ &\geq \frac{2(x + y + z)^2}{(x + y + z)^2 + xy + yz + zx} \geq \frac{2(x + y + z)^2}{(x + y + z)^2 + \frac{(x + y + z)^2}{3}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \sqrt{3}$.

Bài 160. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 3bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 3ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 3ab}} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 3bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 3ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 3ab}} &= \frac{a^2}{a\sqrt{a^2 + 3bc}} + \frac{b^2}{b\sqrt{b^2 + 3ca}} + \frac{c^2}{c\sqrt{c^2 + 3ab}} \\ &\geq \frac{(a + b + c)^2}{a\sqrt{a^2 + 3bc} + b\sqrt{b^2 + 3ca} + c\sqrt{c^2 + 3ab}} \end{aligned}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopski ta được

$$\begin{aligned} &a\sqrt{a^2 + 3bc} + b\sqrt{b^2 + 3ca} + c\sqrt{c^2 + 3ab} \\ &= \sqrt{a}\sqrt{a^3 + 3abc} + \sqrt{b}\sqrt{b^3 + 3abc} + \sqrt{c}\sqrt{c^3 + 3abc} \leq \sqrt{(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3 + 9abc)} \end{aligned}$$

Do vậy ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 3bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 3ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 3ab}} \geq \frac{(a + b + c)^2}{\sqrt{(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3 + 9abc)}}$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+9abc)}} \geq \frac{3}{2}$$

Hay
$$\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3+9abc} \geq \frac{9}{4}$$

Thực hiện biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được

$$12[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)] \geq 5(a^3+b^3+c^3) + 57abc$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$

Do đó
$$6(a^3+b^3+c^3+9abc) \geq 5(a^3+b^3+c^3) + 57abc$$

Như vậy ta cần chứng minh

$$2[ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)] \geq a^3+b^3+c^3+9abc$$

Hay
$$(3a-b-c)(b-c)^2 + (b+c-a)(a-b)(a-c) \geq 0$$

Do a, b, c có tính đối xứng, nên không mất tính tổng quát ta chọn a lớn nhất, khi đó bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Bài 161. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{abc}{a+b-c}} + \sqrt{\frac{abc}{b+c-a}} + \sqrt{\frac{abc}{c+a-b}} \geq a+b+c$$

Lời giải

Đặt
$$\begin{cases} x = b+c-a \\ y = c+a-b \\ z = a+b-c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = y+z \\ 2b = z+x \\ 2c = x+y \end{cases}$$

Khi đó bất đẳng thức cần minh tương đương với

$$\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right) \geq x+y+z$$

Bình phương hai vế và quy đồng ta được

$$(x+y)(y+z)(z+x) \left(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \right)^2 \geq 8xyz(x+y+z)^2$$

Hay
$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8xyz} \geq \left(\frac{x+y+z}{\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}} \right)^2$$

Để ý rằng với $m \geq n > 0$; $k > 0$, ta có tính chất $\frac{m}{n} \geq \frac{m+k}{n+k}$

Do đó ta có

$$\frac{x+y}{2\sqrt{xy}} \geq \frac{x+y+z}{2\sqrt{xy}+z}; \quad \frac{y+z}{2\sqrt{yz}} \geq \frac{x+y+z}{2\sqrt{yz}+x}; \quad \frac{z+x}{2\sqrt{zx}} \geq \frac{x+y+z}{2\sqrt{zx}+y}$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8xyz} \geq \frac{(x+y+z)^3}{(2\sqrt{xy}+z)(2\sqrt{yz}+x)(2\sqrt{zx}+y)}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(x+y+z)^3}{(2\sqrt{xy}+z)(2\sqrt{yz}+x)(2\sqrt{zx}+y)} \geq \left(\frac{x+y+z}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}} \right)^2$$

Hay $(2\sqrt{xy}+z)(2\sqrt{yz}+x)(2\sqrt{zx}+y) \leq (x+y+z)(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})^2$

Khai triển và thu gọn ta được $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2(\sqrt{z}-\sqrt{x})^2 \geq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Bài 162. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{12(a+b+c)} + \sqrt[3]{abc}$$

Lời giải

Cách 1: Nhân hai vế với $12(a+b+c)$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$a^2 + b^2 + c^2 + 5(ab+bc+ca) \geq 6\sqrt[3]{abc}(a+b+c)$$

Hay $(a+b+c)^2 + 3(ab+bc+ca) \geq 6\sqrt[3]{abc}(a+b+c)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$(a+b+c)^2 + 3(ab+bc+ca) \geq 2(a+b+c)\sqrt{3(ab+bc+ca)} \geq 6\sqrt[3]{abc}(a+b+c)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{2(a+b+c)^2}{6(a+b+c)} - \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{6(a+b+c)} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Hay $(a+b+c)^2 + 3(ab+bc+ca) \geq 6\sqrt[3]{abc}(a+b+c)$

Đặt $x = \frac{3a}{a+b+c}$; $y = \frac{3b}{a+b+c}$; $z = \frac{3c}{a+b+c} \Rightarrow x+y+z=3$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $\frac{9}{(a+b+c)^2}$ và đổi biến ta được bất đẳng thức sau

$$(x+y+z)^2 + 3(xy+yz+zx) \geq 6\sqrt[3]{xyz}(x+y+z)$$

Hay $3+xy+yz+zx \geq 6\sqrt[3]{xyz}$

Mặt khác ta lại có $xy+yz+zx \geq \sqrt{3xyz}(x+y+z) = 3\sqrt[3]{xyz}$

Ta cần chứng minh $1+\sqrt[3]{xyz} \geq 2\sqrt[3]{xyz}$

Đặt $t = \sqrt[3]{xyz} \Rightarrow t \leq 1$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$1+t^3 \geq 2t^2 \Leftrightarrow (1-t)(1+t-t^2) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Bài 163. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+2b}{2a+4b+3c^2} + \frac{b+2c}{2b+4c+3a^2} + \frac{c+2a}{2c+4a+3b^2} \leq 1$$

Lời giải

Biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được

$$\frac{2(a+2b)}{2a+4b+3c^2} + \frac{2(b+2c)}{2b+4c+3a^2} + \frac{2(c+2a)}{2c+4a+3b^2} \leq 2$$

Hay $1 - \frac{2(a+2b)}{2a+4b+3c^2} - 1 + \frac{2(b+2c)}{2b+4c+3a^2} + 1 - \frac{2(c+2a)}{2c+4a+3b^2} \geq 1$

Hay $\frac{c^2}{2a+4b+3c^2} + \frac{a^2}{2b+4c+3a^2} + \frac{b^2}{2c+4a+3b^2} \geq \frac{1}{3}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{c^2}{2a+4b+3c^2} + \frac{a^2}{2b+4c+3a^2} + \frac{b^2}{2c+4a+3b^2} \\ &= \frac{\frac{c^2}{c^3}}{\frac{2a+4b+3c^2}{c^3}} + \frac{\frac{a^2}{a^3}}{\frac{2b+4c+3a^2}{a^3}} + \frac{\frac{b^2}{b^3}}{\frac{2c+4a+3b^2}{b^3}} \\ &= \frac{1}{c(2a+4b+3c^2)} + \frac{1}{a(2b+4c+3a^2)} + \frac{1}{b(2c+4a+3b^2)} \\ &\geq \frac{(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3})^2}{3(a^3 + b^3 + c^3) + 6(ab + bc + ca)} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $\frac{(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3})^2}{3(a^3 + b^3 + c^3) + 6(ab + bc + ca)} \geq \frac{1}{3}$

Hay $\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{b^3c^3} + \sqrt{c^3a^3} \geq ab + bc + ca$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^3b^3} + \sqrt{b^3c^3} + \sqrt{c^3a^3} \\ &= (\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{ab}) + (\sqrt{b^3c^3} + \sqrt{bc}) + (\sqrt{c^3a^3} + \sqrt{ca}) - (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \\ &\geq 2(ab + bc + ca) - (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \\ &\geq ab + bc + ca + 3 - \sqrt{3(ab + bc + ca)} = ab + bc + ca \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Bài 164. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) \geq 1$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(10a^3 - 5a^5 - a) + (10b^3 - 5b^5 - b) + (10c^3 - 5c^5 - c) \geq 0$$

Đề ý rằng $10a^3 - 9a^5 - a = a(1 - a^2)(9a^2 - 1)$

Do đó bất đẳng thức trở thành

$$a(1 - a^2)(9a^2 - 1) + b(1 - b^2)(9b^2 - 1) + c(1 - c^2)(9c^2 - 1) \geq 0$$

Đề ý tiếp ta lại thấy

$$(1 + a)(9a^2 - 1) - \frac{8}{3}(3a - 1) = \frac{1}{3}(3a + 5)(3a - 1)^2 \geq 0$$

Hay
$$(1+a)(9a^2-1) \geq \frac{8}{3}(3a-1)$$

Do đó ta có $a(1-a^2)(9a^2-1) = a(1-a)(1+a)(9a^2-1) \geq a(1-a) \cdot \frac{8}{3}(3a-1)$

Áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned} & a(1-a^2)(9a^2-1) + b(1-b^2)(9b^2-1) + c(1-c^2)(9c^2-1) \\ & \geq a(1-a) \cdot \frac{8}{3}(3a-1) + b(1-b) \cdot \frac{8}{3}(3b-1) + c(1-c) \cdot \frac{8}{3}(3c-1) \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh $a(1-a)(3a-1) + b(1-b)(3b-1) + c(1-c)(3c-1) \geq 0$

Hay
$$4(a^2+b^2+c^2) - 3(a^3+b^3+c^3) \geq 1$$

Do $a+b+c=1$ nên bất đẳng thức trên trở thành

$$4(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) - 3(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b+c)^3$$

Triển khai và thu gọn ta được

$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geq 6abc$$

Hay
$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a=b=c=\frac{1}{3}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 64$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 4(a^2 + b^2 + c^2)$$

Bài 2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^7+b^7}{a^5+b^5} + \frac{b^7+c^7}{b^5+c^5} + \frac{c^7+a^7}{c^5+a^5} \geq \frac{1}{3}$$

Bài 3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a+b+c$.

Chứng minh rằng: $5(a+b+c) \geq 7+8abc$

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{a+b+1} + \frac{b}{b+c+1} + \frac{c}{c+a+1} \leq 1$

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{25}{27} \leq (1-4ab)^2 + (1-4bc)^2 + (1-4ca)^2 \leq 3$

Bài 6. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{ab+c}{a+b} + \frac{bc+a}{b+c} + \frac{ca+b}{c+a} \geq 2$

Bài 7. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=2abc$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a(2a-1)^2} + \frac{1}{b(2b-1)^2} + \frac{1}{c(2c-1)^2} \geq \frac{1}{2}$

Bài 8. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{abc} + \frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Bài 9. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$2\sqrt{ab+bc+ca} \leq \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Bài 10. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-2ab+b^2} + \frac{b^2+c^2}{b^2-2bc+c^2} + \frac{c^2+a^2}{c^2-2ca+a^2} \geq \frac{5}{2}$$

Bài 11. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)} + \frac{b^3}{(2b^2+c^2)(2b^2+a^2)} + \frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)} \leq \frac{1}{a+b+c}$$

Bài 12. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a+b+c} \left(\frac{\sqrt{a}}{b+c} + \frac{\sqrt{b}}{c+a} + \frac{\sqrt{c}}{a+b} \right) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bài 13. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{1+c} + \frac{bc}{1+a} + \frac{ca}{1+b} \leq \frac{1}{4}$$

Bài 14. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) (a+b+c) \geq 3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Bài 15. Cho a, b, c là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}$$

Bài 16. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$64abc(a+b+c)^3 \leq 27[(a+b)(b+c)(c+a)]^2$$

Bài 17. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 3 + \frac{(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}{abc(a+b+c)}$$

Bài 18. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(b+c)^2} + \frac{b^2}{(c+a)^2} + \frac{c^2}{(a+b)^2} + \frac{10abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Bài 19. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{abc} + \frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 20. Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=1$.

Chứng minh rằng: $abcd \leq (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$

Bài 21. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{3a+b}{\sqrt{a^2+2b^2+c^2}} + \frac{3b+c}{\sqrt{b^2+2c^2+a^2}} + \frac{3c+a}{\sqrt{c^2+2a^2+b^2}} \leq 6$$

Bài 22. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a, b, c \in [0; 1]$. Chứng minh rằng:

$$2(a^3+b^3+c^3) - (a^2b+b^2c+c^2a) \leq 3$$

Bài 23. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{abc}}$$

Bài 24. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^4+b^4}{1+ab}} + \sqrt{\frac{b^4+c^4}{1+bc}} + \sqrt{\frac{c^4+a^4}{1+ca}} \geq 3$$

Bài 25. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \geq (1+ab^2)(1+bc^2)(1+ca^2)$$

Bài 26. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2+ab} + \frac{1}{2+bc} + \frac{1}{2+ca}$$

Bài 27. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)} + \frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)} + \frac{c^4+a^4}{ac(c^3+a^3)} \geq 1$$

Bài 28. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a, b, c \geq 0$; $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$-\frac{\sqrt{3}}{18} \leq (a-b)(b-c)(c-a) \leq \frac{\sqrt{3}}{18}$$

Bài 29. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ca} + \frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2}$$

Bài 30. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a, b, c \in [3; 5]$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{ab+1} + \sqrt{bc+1} + \sqrt{ca+1} > a + b + c$$

Bài 31. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{3(b+c)}{2a} + \frac{4a+3c}{3b} + \frac{12(b-c)}{2a+3c}$$

Bài 32. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$(ab+bc+ca) \left(\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right) \geq 4$$

Bài 33. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2-2b+3} + \frac{b^2}{c^2-2c+3} + \frac{c^2}{a^2-2a+3} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 34. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + a + b + c \geq 6$$

Bài 35. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}$$

Bài 36. Cho a, b là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P = \frac{a^3+b^3+7ab(a+b)}{ab\sqrt{a^2+b^2}}$$

Bài 37. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

Bài 38. Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2} \geq \frac{32(a^2 + b^2)}{(a+b)^4}$$

Bài 39. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a^3 + b^3 + c^3 + a^2 + b^2 + c^2 + abc$$

Bài 40. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + 2b + 4c = 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2ab}{a+2b} + \frac{8bc}{2b+4c} + \frac{4ca}{4c+a}$$

Bài 41. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $(1-a)(1-b)(1-c) = 8abc$.

Chứng minh rằng: $a + b + c \geq 1$

Bài 42. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 3abc$.

Chứng minh rằng: $3a + 2b + c + \frac{8}{a} + \frac{6}{b} + \frac{4}{c} \geq 21$

Bài 43. Cho các số thực dương a, b, c lớn hơn 1 và thỏa mãn $a + b + c = abc$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = \frac{a-2}{b^2} + \frac{b-2}{c^2} + \frac{c-2}{a^2}$

Bài 44. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ca} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} \leq 1$$

Bài 45. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{27}{8}$$

Bài 46. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+4a} + \frac{c+a}{a+c+16b}$$

Bài 47. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{1-c^2} + \frac{bc}{1-a^2} + \frac{ca}{1-b^2} \leq \frac{3}{8}$$

Bài 48. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} + \frac{1}{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \geq a + b + c$$

Bài 49. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{1+ab+bc} + \frac{b^2}{1+bc+ca} + \frac{c^2}{1+ca+ab}$$

Bài 50. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}$$

Bài 51. Cho các số thực a, b, c $\in [0; 1]$ và $a + b + c \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ca+1} \leq \frac{5}{a+b+c}$$

Bài 52. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}$$

Bài 53. Cho các số thực $a, b, c \in [0;1]$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b+c} \geq \frac{1}{3} + (1-a)(1-b)(1-c)$$

Bài 54. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt[3]{4(a^3 + b^3)} + \sqrt[3]{4(b^3 + c^3)} + \sqrt[3]{4(c^3 + a^3)} + 2\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2}\right)$$

Bài 55. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+3c}{3a+3b+2c} + \frac{a+3b+c}{3a+2b+3c} + \frac{3a+b+c}{2a+3b+3c} \geq \frac{15}{8}$$

Bài 56. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b}{2a+b} + \frac{b^2c}{2b+c} + \frac{c^2a}{2c+a} \leq 1$$

Bài 57. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \right)$$

Bài 58. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$a^3 \left(\frac{b+c}{2} \right)^4 + b^3 \left(\frac{c+a}{2} \right)^4 + c^3 \left(\frac{a+b}{2} \right)^4 \leq \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Bài 59. Cho a, b, c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+bc+c^2} + \frac{b^2(a+c)}{c^2+ca+a^2} + \frac{c^2(a+b)}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

Bài 60. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 3 + \sqrt{\frac{1}{a^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + 1}$$

Bài 61. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{4}{a^2+7} + \frac{4}{b^2+7} + \frac{4}{c^2+7}$$

Bài 62. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{c+6ab} + \frac{bc}{a+6bc} + \frac{ca}{b+6ca} \leq \frac{1}{3}$$

Bài 63. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b(1+a^2)} + \frac{b}{c(1+b^2)} + \frac{c}{a(1+a^2)} \geq \frac{9}{4}$$

Bài 64. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a^2+b^2+1} + \frac{1}{b^2+c^2+1} + \frac{1}{c^2+a^2+1} \geq 1$.

Chứng minh rằng: $ab+bc+ca \leq 3$

Bài 65. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+5} + \frac{b^2}{c+5} + \frac{c^2}{a+5} \leq \frac{1}{2}$$

Bài 66. Cho a, b, c là các thực dương thỏa mãn $(a+b+c)^2 = 9abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1+3a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+3b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+3c^2}} \leq \frac{3}{2}$$

Bài 67. Cho a, b, c là các thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{a+8c}} + \sqrt{\frac{b}{b+8a}} + \sqrt{\frac{c}{c+8b}} \geq 1$$

Bài 68. Cho a, b, c là các thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 12$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{5}$$

Bài 69. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq \frac{3}{4}$. Chứng minh rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a) + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq 25$$

Bài 70. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{ab}{c}} + 1 + \sqrt{\frac{bc}{a}} + 1 + \sqrt{\frac{ca}{b}} + 1 \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

Bài 71. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1$$

Bài 72. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $\min\{a+b; b+c; c+a\} > 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{ab}{a^2+b^2}} + \sqrt{\frac{bc}{b^2+c^2}} + \sqrt{\frac{ca}{c^2+a^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bài 73. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + a + b + c \geq 4\sqrt{3}$$

Bài 74. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+1}{b^2+1} + \frac{b^2+1}{c^2+1} + \frac{c^2+1}{a^2+1} \leq \frac{7}{2}$$

Bài 75. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$a^2\sqrt{1-bc} + b^2\sqrt{1-ca} + c^2\sqrt{1-ab} \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Bài 76. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\left(3a + \frac{2}{b+c}\right)^2 + \left(3b + \frac{2}{c+a}\right)^2 + \left(3c + \frac{2}{a+b}\right)^2 \geq 48$$

Bài 77. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(6a^2 - 6a + 5 + \frac{2}{ab+ac}\right)^3 + \left(6b^2 - 6b + 5 + \frac{2}{bc+ba}\right)^3 + \left(6c^2 - 6c + 5 + \frac{2}{ca+cb}\right)^3$$

Bài 78. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$a\sqrt[3]{1+b-c} + b\sqrt[3]{1+c-a} + c\sqrt[3]{1+a-b} \leq 1.$$

Bài 79. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \sqrt{\frac{a}{6a^2+9}} + \sqrt{\frac{b}{6b^2+9}} + \sqrt{\frac{c}{6c^2+9}}.$$

Bài 80. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{ab}{2a^2 + 3b^2 + 7}} + \sqrt{\frac{bc}{2b^2 + 3c^2 + 7}} + \sqrt{\frac{ca}{2c^2 + 3a^2 + 7}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Bài 81. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{3}{2}abc$$

Bài 82. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{a^2 - ab + b^2}}{a^2 + b^2} + \frac{\sqrt{b^2 - bc + c^2}}{b^2 + c^2} + \frac{\sqrt{c^2 - ca + a^2}}{c^2 + a^2} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 83. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{a(1+bc)} + \frac{ca}{b(1+ca)} + \frac{ab}{c(1+ab)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Bài 84. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b^2}{ab^2 + 2a^2} + \frac{a^2}{ac^2 + 2c^2} + \frac{c^2}{bc^2 + 2b^2} \geq 1$$

Bài 85. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$a \left(\frac{1}{3a+b} + \frac{1}{3a+c} + \frac{1}{2a+b+c} \right) + \frac{b}{3a+c} + \frac{c}{3a+b} < 2.$$

Bài 86. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}$$

Bài 87. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{b^2 + c^2 + bc} + \frac{bc}{c^2 + a^2 + ca} + \frac{ca}{a^2 + b^2 + ab} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$$

Bài 88. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{3a+1} + \frac{b^3}{3b+1} + \frac{c^3}{3c+1} \geq 24 \left(\frac{a^2}{9a+1} + \frac{b^2}{9b+1} + \frac{c^2}{9c+1} \right)^2$$

Bài 89. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2ab}{(a+c)(b+c)} + \frac{2bc}{(a+b)(c+a)} + \frac{3ca}{(b+c)(c+a)} \geq \frac{5}{3}$$

Bài 90. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \geq 1$$

Bài 91. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca \leq 3abc$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{c+a}} + 3 \leq \sqrt{2} (\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a})$$

Bài 92. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + ab} + \frac{b^2 + c^2}{b^2 + c^2 + bc} + \frac{c^2 + a^2}{c^2 + a^2 + ca} \leq \frac{6(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^2}$$

Bài 93. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^5(b^2 + c^2)^2} + \frac{1}{b^5(c^2 + a^2)^2} + \frac{1}{c^5(a^2 + b^2)^2} \geq \frac{81}{4}$$

Bài 94. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{(b+2)(b^2-b+2)}} + \frac{b}{\sqrt{(c+2)(c^2-c+2)}} + \frac{c}{\sqrt{(a+2)(a^2-a+2)}} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 95. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a} \geq \frac{2}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Bài 96. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$8\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 9 \geq 10(a^2 + b^2 + c^2)$$

Bài 97. Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{(b-1)^2} + \frac{b^4}{(c-1)^2} + \frac{c^4}{(a-1)^2} \geq 48$$

Bài 98. Cho a, b, c là các số thực dương không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = (a^2 - ab + b^2) + (b^2 - bc + c^2) + (c^2 - ca + a^2).$$

Bài 99. Cho x, y, z là những số dương thỏa mãn $x + y + z \geq 6$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{x+z} + \frac{z^3}{x+y} \geq 6$$

Bài 100. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + 8)(b^2 + 8)(c^2 + 8) \leq (a + b + c)^2$$

Bài 101. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 3xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{y^2}{xy^2 + 2x^2} + \frac{x^2}{xz^2 + 2z^2} + \frac{z^2}{yz^2 + 2y^2} \geq 1.$$

HƯỚNG DẪN BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xét biểu thức $a^3 - 6a^2 + 32 = (a - 4)^2(a + 2) \geq 0$, do $a > 0$.

Do đó $a^3 + 32 \geq 6a^2$, tương tự ta có $b^3 + 32 \geq 6b^2$; $c^3 + 32 \geq 6c^2$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta được $a^3 + b^3 + c^3 + 96 \geq 6(a^2 + b^2 + c^2)$.

Như vậy ta cần chứng minh

$$6(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4(a^2 + b^2 + c^2) + 96 \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 96$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2.3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 2.3\sqrt[3]{64^2} = 96$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 4$.

Bài 2. Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $\frac{a^7 + b^7}{a^5 + b^5} \geq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

Thật vậy, do $a > 0$; $b > 0$ nên

$$\begin{aligned}\frac{a^7 + b^7}{a^5 + b^5} \geq \frac{a^2 + b^2}{2} &\Leftrightarrow 2(a^7 + b^7) \geq (a^2 + b^2)(a^5 + b^5) \\ &\Leftrightarrow (a - b)^2(a + b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \geq 0\end{aligned}$$

Tương tự ta có $\frac{b^7 + c^7}{b^5 + c^5} \geq \frac{b^2 + c^2}{2}$; $\frac{c^7 + a^7}{c^5 + a^5} \geq \frac{c^2 + a^2}{2}$.

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^7 + b^7}{a^5 + b^5} + \frac{b^7 + c^7}{b^5 + c^5} + \frac{c^7 + a^7}{c^5 + a^5} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Ta cần chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$. Tuy nhiên bất đẳng thức này đúng vì

$$a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{3} = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{(a + b + c)^2}{3} = \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{3} \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 3. Từ giả thiết ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c \Leftrightarrow ab + bc + ca = abc(a + b + c)$.

Mặt khác cũng từ giả thiết trên ta được

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c} \Rightarrow a + b + c \geq 3$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}5(a + b + c)^2 &\geq 7(a + b + c) + 8abc(a + b + c) \\ &\Leftrightarrow 5(a + b + c)^2 \geq 7(a + b + c) + 8(ab + bc + ca)\end{aligned}$$

Mà ta có $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$, ta cần chứng minh

$$5(a + b + c)^2 \geq 7(a + b + c) + \frac{8(a + b + c)^2}{3}$$

Đặt $t = a + b + c \geq 3$, bất đẳng thức trên trở thành $7t^2 - 21t \geq 0 \Leftrightarrow 7t(t - 3) \geq 0$, bất đẳng thức cuối cùng đúng với mọi $t \geq 3$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 4. Sử dụng giả thiết $a + b + c = 3$, ta thấy rằng bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{4-c} + \frac{b}{4-a} + \frac{c}{4-b} \leq 1. \text{ Quy đồng hai vế và rút gọn ta được bất đẳng thức sau}$$

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq 4.$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a(a-c)(b-c) \leq 0 \Leftrightarrow a^2b + c^2a \leq a^2c + abc$.

Khi đó ta có $a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq b^2c + a^2c + 2abc = c(a+b)^2$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$c(a+b)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2c(a+b)(a+b) \leq \frac{(2a+2b+2c)^3}{54} = 4$$

Hay $a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq 4$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 5. + Trước hết ta chứng minh $(1-4ab)^2 + (1-4bc)^2 + (1-4ca)^2 \leq 3$.

Từ giả thiết $a + b + c = 1$, ta có $1 = a + b + c \geq a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

Do đó $0 \leq 1 - 4ab \leq 1$, nên $(1-4ab)^2 \leq 1$.

Áp dụng tương tự ta được $(1-4bc)^2 \leq 1$; $(1-4ca)^2 \leq 1$. Cộng theo vế ba bất đẳng thức đó ta được

$$(1-4ab)^2 + (1-4bc)^2 + (1-4ca)^2 \leq 3.$$

+ Chứng minh $\frac{25}{27} \leq (1-4ab)^2 + (1-4bc)^2 + (1-4ca)^2$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$3 - 4(ab + bc + ca) + 16(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq \frac{25}{27}$$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ca - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \leq \frac{7}{27}$$

$$\text{Đề ý ta có } ab - 2a^2b^2 = -2\left(ab - \frac{1}{9}\right) + \frac{5}{9}\left(ab - \frac{1}{9}\right) + \frac{7}{81} \leq \frac{5}{9}\left(ab - \frac{1}{9}\right) + \frac{7}{81}$$

$$\text{Tương tự ta có } bc - 2b^2c^2 \leq \frac{5}{9}\left(bc - \frac{1}{9}\right) + \frac{7}{81}; ca - 2c^2a^2 \leq \frac{5}{9}\left(ca - \frac{1}{9}\right) + \frac{7}{81}.$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$ab + bc + ca - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \leq \frac{5}{9}\left(ab + bc + ca - \frac{1}{3}\right) + \frac{7}{27}$$

$$\text{Mặt khác ta lại có } ab + bc + ca \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3}$$

Do đó $ab + bc + ca - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \leq \frac{7}{27}$. Tức là bất đẳng thức trên được chứng minh.

Bài 6. Đề ý rằng $ab + c = ab + c(a+b+c) = (a+c)(b+c)$. Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a+c)(b+c)}{a+b} + \frac{(a+b)(c+b)}{a+c} + \frac{(b+a)(c+a)}{b+c} \geq 2$$

Áp dụng bất đẳng thức dạng $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ ta được

$$\frac{(a+c)(b+c)}{a+b} + \frac{(a+b)(c+b)}{a+c} + \frac{(b+a)(c+a)}{b+c} \geq b+c+a+b+c+a=2.$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 7. Giả thiết của bài toán tương đương với $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$. Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, khi đó ta được $x+y+z=2$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^3}{(2-x)^2} + \frac{y^3}{(2-y)^2} + \frac{z^3}{(2-z)^2} \geq \frac{1}{2},$$

Chú ý là $x, y, z < 2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được $\frac{x^3}{(2-x)^2} + \frac{2-x}{8} + \frac{2-x}{8} \geq \frac{3x}{4}$.

Từ đó suy ra $\frac{x^3}{(2-x)^2} \geq x - \frac{1}{2}$. Thiết lập các bất đẳng thức tương tự và cộng theo vế ta được

$$\frac{x^3}{(2-x)^2} + \frac{y^3}{(2-y)^2} + \frac{z^3}{(2-z)^2} \geq x+y+z - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 8. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{abc} + \frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)} &= \frac{1}{2abc} + \frac{1}{2abc} + \frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2(a+b)(b+c)(c+a)}} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{abc(ac+bc)(ab+ac)(bc+ba)}} \end{aligned}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a^2b^2c^2 \leq \frac{(ab+bc+ca)^3}{27} - \frac{1}{27} \Rightarrow abc \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$(ab+ac)(bc+ba)(ca+cb) \leq \frac{8(ab+bc+ca)^3}{27} = \frac{8}{27}$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{abc} + \frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{27 \cdot 3\sqrt{3}}{8}} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 9. Để ý ta có đẳng thức $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$.

Theo một đánh giá quen thuộc thì

$$a+b+c \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)}; abc \leq \sqrt{\frac{(ab+bc+ca)^3}{27}}$$

Do đó

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &\geq (ab+bc+ca)\sqrt{3(ab+bc+ca)} - \sqrt{\frac{(ab+bc+ca)^3}{27}} \\ &= 8\sqrt{\frac{(ab+bc+ca)^3}{27}}\end{aligned}$$

Lấy căn bậc ba hai vế ta được bất đẳng thức

$$2\sqrt{ab+bc+ca} \leq \sqrt[3]{3(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 10. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}&\frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{(a-b)^2} + \frac{(b+c)^2 + (b-c)^2}{(b-c)^2} + \frac{(c+a)^2 + (c-a)^2}{(c-a)^2} \geq 5 \\ \Leftrightarrow &\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} + \frac{(b+c)^2}{(b-c)^2} + \frac{(c+a)^2}{(c-a)^2} \geq 2\end{aligned}$$

Đặt $x = \frac{a+b}{a-b}$; $y = \frac{b+c}{b-c}$; $z = \frac{c+a}{c-a}$, khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2$$

Ta có

$$\begin{aligned}xy + yz + zx &= \frac{a+b}{a-b} \cdot \frac{b+c}{b-c} + \frac{b+c}{b-c} \cdot \frac{c+a}{c-a} + \frac{c+a}{c-a} \cdot \frac{a+b}{a-b} \\ &= -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -1\end{aligned}$$

Mà $(x+y+z)^2 \geq 0$, do vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq -2(xy + yz + zx) = 2$.

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 11. Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(2a^2 + b^2)(2a^2 + c^2) = (a^2 + a^2 + b^2)(a^2 + c^2 + a^2) \geq (a^2 + ab + ac)^2 = a^2(a+b+c)^2$$

Do đó $\frac{a^3}{(2a^2 + b^2)(2a^2 + c^2)} \leq \frac{a}{(a+b+c)^2}$, chứng minh tương tự ta được

$$\frac{b^3}{(2b^2 + c^2)(2b^2 + a^2)} \leq \frac{b}{(a+b+c)^2}; \quad \frac{c^3}{(2c^2 + a^2)(2c^2 + b^2)} \leq \frac{c}{(a+b+c)^2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^3}{(2a^2 + b^2)(2a^2 + c^2)} + \frac{b^3}{(2b^2 + c^2)(2b^2 + a^2)} + \frac{c^3}{(2c^2 + a^2)(2c^2 + b^2)} \leq \frac{1}{a+b+c}$$

Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 12. Biến đổi vế trái của bất đẳng thức như sau

$$\sqrt{a+b+c} \left(\frac{\sqrt{a}}{b+c} + \frac{\sqrt{b}}{c+a} + \frac{\sqrt{c}}{a+b} \right) = \left(\frac{\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}}{\frac{b+c}{a+b+c}} + \frac{\sqrt{\frac{b}{a+b+c}}}{\frac{c+a}{a+b+c}} + \frac{\sqrt{\frac{c}{a+b+c}}}{\frac{a+b}{a+b+c}} \right)$$

Đặt $x = \sqrt{\frac{a}{a+b+c}}$; $y = \sqrt{\frac{b}{a+b+c}}$; $z = \sqrt{\frac{c}{a+b+c}}$, suy ra $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x}{y^2 + z^2} + \frac{y}{z^2 + x^2} + \frac{z}{x^2 + y^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Ta có thể chứng minh bất đẳng thức trên như sau

Từ điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ta được

$$\frac{x}{y^2 + z^2} + \frac{y}{z^2 + x^2} + \frac{z}{x^2 + y^2} = \frac{x}{1 - x^2} + \frac{y}{1 - y^2} + \frac{z}{1 - z^2}$$

$$\text{Xét } \frac{x}{1 - x^2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 = \frac{2x - 3\sqrt{3}x^2(1 - x^2)}{2(1 - x^2)} = \frac{x(\sqrt{3}x + 2)(\sqrt{3}x - 1)^2}{2(1 - x^2)} \geq 0$$

Từ đó suy ra $\frac{x}{1 - x^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$, chứng minh tương tự ta được

$$\frac{y}{1 - y^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}y^2; \quad \frac{z}{1 - z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}z^2$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$\frac{x}{1 - x^2} + \frac{y}{1 - y^2} + \frac{z}{1 - z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 13. Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc dạng $\frac{4}{x + y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ta được

$$\begin{aligned} \frac{ab}{1 + c} + \frac{bc}{1 + a} + \frac{ca}{1 + b} &= \frac{ab}{a + c + b + c} + \frac{bc}{a + b + a + c} + \frac{ca}{a + b + b + c} \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{ab}{a + c} + \frac{ab}{b + c} + \frac{bc}{a + b} + \frac{bc}{a + c} + \frac{ca}{a + b} + \frac{ca}{b + c} \right) \\ &= \frac{a + b + c}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 14. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{bc} + \frac{c^2}{ca} \geq \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca}$$

$$\text{Do đó } \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) (a + b + c) \geq \frac{(a + b + c)^3}{ab + bc + ca}$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{(a + b + c)^3}{ab + bc + ca} &\geq 3\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \\ \Leftrightarrow (a + b + c)^3 &\geq 3(ab + bc + ca)\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \end{aligned}$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= (a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca) + (ab + bc + ca) \\ &\geq 3\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)^2} \end{aligned}$$

Lũy thừa bậc ba hai về ta được

$$(a + b + c)^6 \geq 27(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)^2$$

Lấy căn bậc hai hai về bất đẳng thức trên ta được

$$(a + b + c)^3 \geq 3(ab + bc + ca)\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 15. Ta có $\frac{a^2 - b^2}{a + b} + \frac{b^2 - c^2}{b + c} + \frac{c^2 - a^2}{c + a} = a - b + b - c + c - a = 0$

Do đó $\frac{a^2}{a + b} + \frac{b^2}{b + c} + \frac{c^2}{c + a} = \frac{b^2}{a + b} + \frac{c^2}{b + c} + \frac{a^2}{c + a}$

Khi đó ta cần chứng minh $\frac{2a^2}{b + c} + \frac{2b^2}{c + a} + \frac{2c^2}{a + b} \geq \frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a}$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{2a^2 - b^2 + c^2}{b + c} + \frac{2b^2 - c^2 + a^2}{c + a} + \frac{2c^2 - a^2 + b^2}{a + b} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(a - b)^2(a + b)}{(a + c)(b + c)} + \frac{(b - c)^2(b + c)}{(a + b)(a + c)} + \frac{(c - a)^2(c + a)}{(a + b)(b + c)} \geq 0 \end{aligned}$$

Như vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 16. Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq \frac{8}{9}(a + b + c)(ab + bc + ca)$$

Thật vậy, khai triển và rút gọn ta được bất đẳng thức sau

$$c(a - b)^2 + b(c - a)^2 + a(b - c)^2 \geq 0$$

Do đó bất đẳng thức trên được chứng minh.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$27[(a + b)(b + c)(c + a)]^2 \geq 27 \cdot \frac{64}{81}(a + b + c)^2(ab + bc + ca)^2$$

Mặt khác theo một đánh giá quen thuộc ta được

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$$

Do đó ta được bất đẳng thức

$$27[(a + b)(b + c)(c + a)]^2 \geq 64abc(a + b + c)^3$$

Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 17. Biến đổi tương đương bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a + b}{c} + \frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} \geq 3 + \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)}{abc(a + b + c)} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{a + b}{c} + \frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} \right) + 3 - \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)}{abc(a + b + c)} \geq 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 3abc}{abc} - \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)}{abc(a+b+c)} \geq 6 \\
&\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc} - \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(ab+bc+ca)}{abc(a+b+c)} \geq 6 \\
&\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2(ab+bc+ca)}{abc(a+b+c)} - \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(ab+bc+ca)}{abc(a+b+c)} \geq 6 \\
&\Leftrightarrow \frac{2(ab+bc+ca)^2}{abc(a+b+c)} \geq 6 \Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức đúng theo một đánh giá quen thuộc là

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$$

Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Bài 18. Đặt $x = \frac{a}{b+c}$; $y = \frac{b}{c+a}$; $z = \frac{c}{a+b}$,

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $x^2 + y^2 + z^2 + 10xyz \geq 2$

Để dàng chứng minh được $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Do đó ta được $x + y + z \geq \frac{3}{2}$, từ đó ta suy ra

$$x^2 + y^2 + z^2 + 10xyz = x^2 + y^2 + z^2 + 6xyz + 4xyz \geq x^2 + y^2 + z^2 + \frac{6xyz}{x+y+z} + 4xyz$$

Mặt khác ta lại chứng minh được $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{6xyz}{x+y+z} \geq 2(xy+yz+zx)$

Từ đó suy ra $x^2 + y^2 + z^2 + 10xyz \geq 2(xy+yz+zx) + 4xyz$

Ta cần chứng minh $xy + yz + zx + 2xyz = 1$

Hay $\frac{a}{b+c} \cdot \frac{b}{c+a} + \frac{b}{c+a} \cdot \frac{c}{a+b} + \frac{c}{a+b} \cdot \frac{a}{b+c} + 2 \frac{a}{b+c} \cdot \frac{b}{c+a} \cdot \frac{c}{a+b} = 1$

Đẳng thức trên được chứng minh dễ dàng.

Vậy bất đẳng thức ban đầu được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Bài 19. Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $3 = ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow abc \leq 1$

$$(ab+ac)(ab+bc)(ac+bc) \leq \left(\frac{ab+ca+ab+bc+ca+bc}{3} \right)^3 = 8$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{abc} + \frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{1}{2abc} + \frac{1}{2abc} + \frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\
&\geq \frac{1}{2abc} + 2\sqrt{\frac{1}{2abc} \cdot \frac{4}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \\
&= \frac{1}{2abc} + 2\sqrt{\frac{2}{(ac+bc)(ab+ac)(bc+ab)}} \geq \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Bài 20. Từ giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ suy ra $0 < a, b, c, d < 1$.

Xét

$$\begin{aligned}
2(1-a)(1-b) &= 2 - 2a - 2b + 2ab \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2a - 2b + 2ab - 2cd + 2cd \\
&= (a+b-1)^2 + (c-d)^2 + 2cd \geq 2cd
\end{aligned}$$

Hay $(1-a)(1-b) \geq cd$.

Chứng minh tương tự ta được $(1-c)(1-d) \geq ab$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $abcd \leq (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = d = \frac{1}{2}$.

Bài 21. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{3a+b}{\sqrt{a^2+2b^2+c^2}} + \frac{3b+c}{\sqrt{b^2+2c^2+a^2}} + \frac{3c+a}{\sqrt{c^2+2a^2+b^2}} \right)^2 \\
&\leq 3 \left(\frac{(3a+b)^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{(3b+c)^2}{b^2+2c^2+a^2} + \frac{(3c+a)^2}{c^2+2a^2+b^2} \right)
\end{aligned}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{(3a+b)^2}{a^2+2b^2+c^2} \leq \frac{9a^3}{a^2+b^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{9a^3}{a^2+b^2+c^2} + 1$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned}
&\frac{(3a+b)^2}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{(3b+c)^2}{b^2+2c^2+a^2} + \frac{(3c+a)^2}{c^2+2a^2+b^2} \\
&\leq \frac{9a^3}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9b^3}{b^2+c^2+a^2} + \frac{9c^3}{c^2+a^2+b^2} + 3 = 12
\end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \left(\frac{3a+b}{\sqrt{a^2+2b^2+c^2}} + \frac{3b+c}{\sqrt{b^2+2c^2+a^2}} + \frac{3c+a}{\sqrt{c^2+2a^2+b^2}} \right)^2 \leq 3.12 = 26$$

$$\text{Hay } \frac{3a+b}{\sqrt{a^2+2b^2+c^2}} + \frac{3b+c}{\sqrt{b^2+2c^2+a^2}} + \frac{3c+a}{\sqrt{c^2+2a^2+b^2}} \leq 6$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Bài 22. Từ giả thiết $a, b, c \in [0; 1]$, suy ra $0 \leq a, b, c \leq 1$.

Khi đó $(1-a^2)(1-b^2) \geq 0$ hay $1+a^2b \geq a^2+b$. Áp dụng tương tự ta được

$$3+a^2b+b^2c+c^2a \geq a^2+b^2+c^2+a+b+c \quad (1)$$

Mặt khác cũng từ giả thiết $0 \leq a, b, c \leq 1$, ta được

$$\begin{cases} a \geq a^2 \geq a^3 \\ b \geq b^2 \geq b^3 \\ c \geq c^2 \geq c^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+a^2 \geq 2a^3 \\ b+b^2 \geq 2b^3 \\ c+c^2 \geq 2c^3 \end{cases}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$a^2+b^2+c^2+a+b+c \geq 2a^3+2b^3+2c^3 \quad (2)$$

Từ kết quả của (1) và (2) ta được $3+a^2b+b^2c+c^2a \geq 2(a^3+b^3+c^3)$

$$\text{Hay } 2(a^3+b^3+c^3) - (a^2b+b^2c+c^2a) \leq 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Bài 23. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $27[(a+b)(b+c)(c+a)]^2 \geq 64abc$

Để dàng chứng minh được

$$9(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Nên ta được $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc \Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng, do đó phép chứng minh hoàn tất.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 24. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho vế trái của bất đẳng thức ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{a^4+b^4}{1+ab}} + \sqrt{\frac{b^4+c^4}{1+bc}} + \sqrt{\frac{c^4+a^4}{1+ca}} = \sqrt{\frac{2(a^4+b^4)}{2+2ab}} \sqrt{\frac{2(b^4+c^4)}{2+2bc}} \sqrt{\frac{2(c^4+a^4)}{2+2ca}} \\ & \geq \frac{a^2}{\sqrt{2+2ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{2+2bc}} + \frac{c^2}{\sqrt{2+2ca}} + \frac{b^2}{\sqrt{2+2ab}} + \frac{c^2}{\sqrt{2+2bc}} + \frac{a^2}{\sqrt{2+2ca}} \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki và bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{\sqrt{2+2ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{2+2bc}} + \frac{c^2}{\sqrt{2+2ca}} & \geq \frac{2(a+b+c)^2}{2\sqrt{2+2ab} + 2\sqrt{2+2bc} + 2\sqrt{2+2ca}} \\ & \geq \frac{2(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+9} \geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Tương tự ta có $\frac{b^2}{\sqrt{2+2ab}} + \frac{c^2}{\sqrt{2+2bc}} + \frac{a^2}{\sqrt{2+2ca}} \geq \frac{3}{2}$

Cộng hai bất đẳng thức ta được $\sqrt{\frac{a^4+b^4}{1+ab}} + \sqrt{\frac{b^4+c^4}{1+bc}} + \sqrt{\frac{c^4+a^4}{1+ca}} \geq 3$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 25. Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức sau: Với mọi số thực dương x, y, z ta có

$$(1+x^3)(1+y^3)(1+z^3) \geq (1+xyz)^3$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với

$$1+x^3+y^3+z^3+x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+x^3y^3z^3 \geq 1+3xyz+3x^2y^2z^2+x^3y^3z^3$$

Hay $x^3+y^3+z^3+x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3 \geq 3xyz+3x^2y^2z^2$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz; \quad x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3 \geq 3x^2y^2z^2$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$x^3+y^3+z^3+x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3 \geq 3xyz+3x^2y^2z^2$$

Vậy bất đẳng thức trên được chứng minh.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) & \geq (1+ab^2)^3 \\ (1+b^3)(1+c^3)(1+a^3) & \geq (1+bc^2)^3 \\ (1+c^3)(1+a^3)(1+b^3) & \geq (1+ca^2)^3 \end{aligned}$$

Nhân từng vế của ba bất đẳng thức trên ta được

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \geq (1+ab^2)(1+bc^2)(1+ca^2)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 26. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta có

$$P = \frac{1}{2+ab} + \frac{1}{2+bc} + \frac{1}{2+ca} \geq \frac{9}{ab+bc+ca+6}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

Do đó
$$P \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + 6} \geq \frac{9}{3+6} = 1$$

Bài toán được hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 27. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$a^4 + a^4 + a^4 + b^4 \geq 4a^3b; \quad b^4 + b^4 + b^4 + a^4 \geq 4ab^3$$

Suy ra $2a^4 + 2b^4 \geq a^4 + b^4 + a^3b + ab^3 = (a^3 + b^3)(a + b)$

Áp dụng tương tự và kết hợp với giả thiết $ab + bc + ca = abc$, ta được

$$\begin{aligned} \frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ac(c^3 + a^3)} &\geq \frac{a+b}{2ab} + \frac{b+c}{2bc} + \frac{c+a}{2ac} \\ &= \frac{ab+bc+ca}{abc} = 1 \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$

Bài 28. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\left[(a-b)(b-c)(c-a)\right]^2 \leq \frac{1}{108}$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$.

Ta có biến đổi sau

$$\left[(a-b)(b-c)(c-a)\right]^2 \leq \left[(a-b)ab\right]^2 \leq \frac{\left(\sqrt[3]{2ab \cdot 2ab(a-b)^2}\right)^3}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{\left(\sqrt[3]{2ab \cdot 2ab(a-b)^2}\right)^3}{4} \leq \frac{\left(\frac{2ab + 2ab + (a-b)^2}{3}\right)^3}{4} = \frac{(a+b)^6}{4 \cdot 3^3} \leq \frac{(a+b+c)^6}{108}$$

Từ đó suy ra $\left[(a-b)(b-c)(c-a)\right]^2 \leq \frac{1}{108}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$

Bài 29. Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc dạng $\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, ta được

$$\frac{a}{a^2 + bc} = \frac{a^2}{a^3 + abc} \leq \frac{a^2}{a^3 + a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{a^2}{4} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^2 + b^2 + c} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c} \right)$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 1 \right)$$

Ta cần chứng minh
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 1$$

Thật vậy, Áp dụng một đánh giá quen thuộc và kết hợp với giả thiết, ta được

$$1 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} \geq \frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$

Bài 30. Do $a, b, c \in [3; 5]$, nên ta được $|a - b| \leq 2 \Leftrightarrow (a - b)^2 \leq 4$

Khi đó ta được $4ab + 4 \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$

Hay $2\sqrt{ab + 1} \geq a + b$

Chứng minh tương tự ta được $2\sqrt{bc + 1} \geq b + c$; $2\sqrt{ca + 1} \geq c + a$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{ab + 1} + \sqrt{bc + 1} + \sqrt{ca + 1} \geq a + b + c$$

Do dấu đẳng thức ở các bất đẳng thức trên không đồng thời xảy ra.

Do đó ta được $\sqrt{ab + 1} + \sqrt{bc + 1} + \sqrt{ca + 1} > a + b + c$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 31. Đặt $x = 2a$; $y = 3b$; $z = 3c$

Biểu thức đã cho viết lại như sau

$$\begin{aligned} P &= \frac{y+z}{x} + \frac{2x+z}{y} + \frac{4y-4z}{x+z} = \frac{y+z+x-x}{x} + \frac{2x+z}{y} + \frac{4y+4x-4x-4z}{x+z} \\ &= \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z+x}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{4x}{x+z} + \frac{4y}{x+z} - 5 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2; \quad \frac{z+x}{x} + \frac{4x}{x+z} \geq 4; \quad \frac{x+z}{y} + \frac{4y}{x+z} \geq 4$$

Do đó ta được $P \geq 10 - 5 = 5$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x = y = z \Leftrightarrow 2a = 3b = 3c \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}b = \frac{3}{2}c$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 5, đạt được tại $a = \frac{3}{2}b = \frac{3}{2}c$.

Bài 32. Vì vai trò của a, b, c như nhau nên ta có thể giả sử c là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c. Khi đó ta được

$$ab + bc + ca \geq ab; \quad \frac{1}{(b-c)^2} \geq \frac{1}{b^2}; \quad \frac{1}{(c-a)^2} \geq \frac{1}{a^2}$$

$$\text{Do đó ta cần chứng minh } ab \left(\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \geq 4 \text{ hay } \frac{ab}{(a-b)^2} + \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 2$$

Đánh giá cuối cùng đúng theo bất đẳng thức Cauchy.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} c = 0 \\ ab = (a-b)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 3ab \\ c = 0 \end{cases}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 33. Áp dụng giả thiết ta có biến đổi như sau

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b^2 - 2b + 3} &= \frac{3a^2}{3b^2 - 3.2b + 3^2} = \frac{3a^2}{3b^2 - (a+b+c).2b + (a+b+c)^2} \\ &= \frac{3a^2}{a^2 + 2b^2 + c^2 + 2ac} \end{aligned}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được } \frac{3a^2}{a^2 + 2b^2 + c^2 + 2ac} \geq \frac{3a^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a^2}{b^2 - 2b + 3} + \frac{b^2}{c^2 - 2c + 3} + \frac{c^2}{a^2 - 2a + 3} \geq \frac{3}{2} \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right) = \frac{3}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$

Bài 34.

Cách 1: Đặt $a + b + c = 3 - t^2 \Rightarrow -\sqrt{3 - \sqrt{3}} < t < \sqrt{3 - \sqrt{3}}$

$$\text{Ta có } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + a + b + c - 6 \geq \frac{2(3 - t^2)^2}{(3 - t)^2 - 3} - 3 - t^2 = \frac{t^4(5 - t^2)}{t^4 - 6t^2 + 6} \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{(a + b + c)^2}{ab + bc + ca} = \frac{3}{ab + bc + ca} + 2$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} \frac{3}{ab + bc + ca} + a + b + c \geq 4 &\Leftrightarrow \frac{6}{(a + b + c)^2 - 3} + a + b + c - 4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a + b + c - 3)^2(a + b + c + 2) \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng, do đó bài toán được chứng minh xong.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$

Bài 35. Ta có biến đổi biểu thức như sau $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} = \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2 + ab + b^2}$

Dễ dàng chứng minh được $a^2 - ab + b^2 \geq \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$3(a^2 - ab + b^2) \geq a^2 + ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

Áp dụng bất đẳng thức vừa chứng minh trên ta được $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} = \frac{1}{3}(a + b)$

Áp dụng tương tự kết hợp với bất đẳng thức Cauchy ta được

$$P = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{2}{3}(a + b + c) \geq 2\sqrt[3]{abc} = 2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2, đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 36. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt{2ab} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + 2ab) = \frac{1}{2}(a + b)^2$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{ab} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \leq \frac{(a + b)^2}{2\sqrt{2}}$$

$$P = \frac{a^3 + b^3 + 7ab(a + b)}{ab\sqrt{a^2 + b^2}} \geq \frac{2\sqrt{2}[a^3 + b^3 + 7ab(a + b)]}{\sqrt{ab}(a + b)^2}$$

Do đó ta được

$$= \frac{2\sqrt{2}[(a + b)(a^2 + b^2 + 6ab)]}{\sqrt{ab}(a + b)^2} = \frac{2\sqrt{2}[(a + b)^2 + 4ab]}{\sqrt{ab}(a + b)}$$

Mặt khác lại theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$(a+b)^2 + 4ab \geq 4\sqrt{ab}(a+b)$$

Do đó ta có

$$P \geq \frac{2\sqrt{2}[(a+b)^2 + 4ab]}{\sqrt{ab}(a+b)} \geq \frac{8\sqrt{2} \cdot \sqrt{ab}(a+b)}{\sqrt{ab}(a+b)} = 8\sqrt{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $8\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

Bài 37. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Ta cần chứng minh

$$\sqrt[3]{\frac{1}{abc(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq \frac{9}{2(a+b+c)^2}$$

Hay

$$8(a+b+c)^6 \geq 729abc(a+b)(b+c)(c+a)$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$27abc \leq (a+b+c)^3; \quad 27(a+b)(b+c)(c+a) \leq 8(a+b+c)^3$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên ta được

$$8(a+b+c)^6 \geq 729abc(a+b)(b+c)(c+a)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 38. Ta có

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{4}{a^2 + b^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2b^2(a^2 + b^2)} + \frac{4a^2b^2}{a^2b^2(a^2 + b^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2b^2(a^2 + b^2)} + \frac{4a^2b^2}{a^2b^2(a^2 + b^2)} \geq \frac{(a^2 + b^2 + 2ab)^2}{2a^2b^2(a^2 + b^2)} = \frac{(a+b)^4}{2a^2b^2(a^2 + b^2)}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(a+b)^4}{2a^2b^2(a^2 + b^2)} \geq \frac{32(a^2 + b^2)}{(a+b)^4}$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$(a+b)^8 \geq 64a^2b^2(a^2 + b^2)^2$$

Hay $(a+b)^4 \geq 8ab(a^2 + b^2)$. Triển khai và thu gọn ta được $(a-b)^4 \geq 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng đúng với mọi số thực a, b.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Bài 39. Xét đẳng thức sau

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$abc = \frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca$$

Khi đó ta được

$$P = \frac{4}{3}(a^3 + b^3 + c^3) + ab + bc + ca$$

Để ý ta thấy khi $a + b + c = 3$ thì $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a^3 + a^3 + 1 \geq 3a^2; \quad b^3 + b^3 + 1 \geq 3b^2; \quad c^3 + c^3 + 1 \geq 3c^2$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + 3 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) + 3$$

Nên ta được

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Suy ra

$$P \geq \frac{4}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca = \frac{1}{2}(a + b + c)^2 + \frac{5}{6}(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{9}{2} + \frac{5}{2} = 7$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 7. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 40. Đổi biến $x = a$; $y = 2b$; $z = 4c$, khi đó ta được $x + y + z = 12$ và biểu thức P được viết lại thành

$$P = \frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$P = \frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} \leq \frac{(x+y)^2}{4(x+y)} + \frac{(y+z)^2}{4(y+z)} + \frac{(z+x)^2}{4(z+x)} = \frac{x+y+z}{2} = 6$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 6. Đẳng thức xảy ra tại $x = y = z = 4 \Leftrightarrow a = 4$; $b = 2$; $c = 1$.

Bài 41. Giả sử $a + b + c < 1$. Khi đó ta có

$$(1-a)(1-b)(1-c) > (b+c)(c+a)(a+b)$$

Dễ dàng chứng minh được $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Do đó ta có $8abc > 8abc$ vô lí. Vậy $a + b + c \geq 1$.

Bài 42. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} 3a + 2b + c + \frac{8}{a} + \frac{6}{b} + \frac{4}{c} &= a + \frac{b}{2} + 2\left(a + \frac{4}{a}\right) + \frac{3}{2}\left(b + \frac{4}{b}\right) + c + \frac{4}{c} \\ &\geq a + \frac{b}{2} + 2 \cdot 4 + \frac{3}{2} \cdot 4 + 4 = \frac{2a+b}{2} + 18 \end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có

$$3abc = a^2 + 2b^2 + 3c^2 = a^2 + c^2 + 2(b^2 + c^2) \geq 2ab + 2bc \Rightarrow \frac{3}{2} \geq \frac{2}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{9}{2a+b}$$

Do đó ta được $2a + b \geq 6$, suy ra $\frac{2a+b}{2} + 18 \geq 21$.

Từ đó ta được $3a + 2b + c + \frac{8}{a} + \frac{6}{b} + \frac{4}{c} \geq 21$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 43. Ta có $a + b + c = abc \Leftrightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$. Ta viết lại biểu thức P thành

$$\begin{aligned} P &= \frac{a-1+b-1}{b^2} - \frac{1}{b} + \frac{b-1+c-1}{c^2} - \frac{1}{c} + \frac{c-1+a-1}{a^2} - \frac{1}{a} \\ &= (a-1)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + (b-1)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + (c-1)\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) \end{aligned}$$

Do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$P \geq \frac{2(a-1)}{ab} + \frac{2(b-1)}{bc} + \frac{2(c-1)}{ca} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)$$

Dễ thấy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \sqrt{3\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)} = \sqrt{3}$. Do đó ta được $P \geq \sqrt{3} - 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{3} - 2$, đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{3}$

Bài 44. Bất đẳng thức tương đương với $\frac{bc}{2a^2 + bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab} \geq 1$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức để chứng minh bất đẳng thức trên.

Bài 45. Từ giả thiết $a + b + c = 1$ ta suy ra $abc \leq \frac{1}{27}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(1-ab)(1-bc) + (1-bc)(1-ca) + (1-ca)(1-ab)}{(1-ab)(1-bc)(1-ca)} \leq \frac{27}{8}$$

Hay
$$\frac{3 - 2(ab + bc + ca) + abc(a + b + c)}{1 - (ab + bc + ca) + abc(a + b + c) - a^2b^2c^2} \leq \frac{27}{8}$$

Hay
$$8[3 - 2(ab + bc + ca) + abc] \leq 27[1 - (ab + bc + ca) + abc - a^2b^2c^2]$$

Hay

$$\begin{aligned} 3 - 11(ab + bc + ca) + 19abc - 27a^2b^2c^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 4[3 + 19abc - 27a^2b^2c^2] &\geq 11.4(ab + bc + ca) \end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức quen thuộc $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc$ suy ra

$$(1 - 2a)(1 - 2b)(1 - 2c) \leq abc$$

Hay
$$11.4(ab + bc + ca) \leq 11.(1 + 9abc)$$

Ta cần chứng minh
$$4[3 + 19abc - 27a^2b^2c^2] \geq 11(1 + 9abc)$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với $(1 - 27abc)(1 + 4abc) \geq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do $abc \leq \frac{1}{27}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Bài 46.

Đặt
$$\begin{cases} x = a + b + c \\ y = b + c + 4a \\ z = c + a + 16b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = y - x \\ 15b = z - x \\ 15c = 21x - 5y - z \end{cases}$$

Khi đó biểu thức P được viết lại là

$$P = \frac{-6x + 5y + z}{15x} + \frac{20x - 5y}{15y} + \frac{16x - z}{15z} = \frac{y}{3x} + \frac{3x}{4y} + \frac{z}{15x} + \frac{16x}{15z} - \frac{4}{5}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{y}{3x} + \frac{4x}{3y} \geq \frac{4}{3}$; $\frac{z}{15x} + \frac{16x}{15z} \geq \frac{8}{15}$

Do đó ta được $P \geq \frac{4}{3} + \frac{8}{15} - \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{5c}{7}$; $b = \frac{3c}{7}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{16}{15}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{5c}{7}$; $b = \frac{3c}{7}$.

Bài 47. Từ giả thiết $a + b + c = 1$ ta có

$$1 - c^2 = (a + b + c)^2 - c^2 = a^2 + b^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 2(ab + bc) + 2(ab + ca)$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{ab}{2(ab+bc)+2(ab+ca)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{ab}{2(ab+bc)} + \frac{ab}{2(ab+ca)} \right)$$

Do đó ta có

$$\frac{ab}{1-c^2} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{ab}{ab+bc} + \frac{ab}{ab+ca} \right)$$

Áp dụng tương tự

$$\frac{bc}{1-a^2} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{bc}{bc+ca} + \frac{bc}{ab+bc} \right); \quad \frac{ca}{1-b^2} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{ca}{ca+ab} + \frac{ca}{bc+ca} \right)$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} \frac{ab}{1-c^2} + \frac{bc}{1-a^2} + \frac{ca}{1-b^2} \\ \leq \frac{1}{8} \left(\frac{ab}{ab+bc} + \frac{ab}{ab+ca} + \frac{bc}{bc+ca} + \frac{bc}{ab+bc} + \frac{ca}{ca+ab} + \frac{ca}{bc+ca} \right) = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Bài 48. Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \geq 2 \left(a - \frac{a^2}{a+b} \right) + 2 \left(b - \frac{b^2}{b+c} \right) + 2 \left(c - \frac{c^2}{c+a} \right)$$

Hay

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \geq \frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{2ab}{2\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}; \quad \frac{2bc}{b+c} \leq \frac{2bc}{2\sqrt{bc}} = \sqrt{bc}; \quad \frac{2ca}{c+a} \leq \frac{2ca}{2\sqrt{ca}} = \sqrt{ca}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \geq \frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2ca}{c+a}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 49. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki a được

$$P = \frac{a^2}{1+ab+bc} + \frac{b^2}{1+bc+ca} + \frac{c^2}{1+ca+ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3+2(ab+bc+ca)}$$

Để ý ta thấy, do $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ nên ta có $3+2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2$

Suy ra

$$\frac{(a+b+c)^2}{3+2(ab+bc+ca)} = 1$$

Do đó ta được $P = \frac{a^2}{1+ab+bc} + \frac{b^2}{1+bc+ca} + \frac{c^2}{1+ca+ab} \geq 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 1.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 50. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} = \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 9ab(1+6ab)}}{9\sqrt[3]{abc}} \leq \frac{4+9bc+6ab}{9\sqrt[3]{abc}}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} \leq \frac{4+9ca+6bc}{9\sqrt[3]{abc}}; \quad \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{4+9ab+6ca}{9\sqrt[3]{abc}}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{12 + 15(ab + bc + ca)}{9\sqrt[3]{abc}} = \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$$

Ta cần chứng minh $\frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \leq \frac{1}{abc}$ hay $3\sqrt[3]{(abc)^2} \leq 1$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vì từ giả thiết ta được

$$1 = ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = 3\sqrt[3]{(abc)^2}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 51. Không mất tính tổng quát ta giả sử $1 \geq a \geq b \geq c \geq 0$.

Khi đó ta có $\frac{a}{ab+1} \leq \frac{a}{bc+1}; \quad \frac{c}{ca+1} \leq \frac{c}{bc+1}$

Suy ra

$$\frac{a}{ab+1} + \frac{b}{bc+1} + \frac{c}{ca+1} \leq \frac{a+b+c}{bc+1} \leq \frac{1+b+c+(1-b)(1-c)+bc}{bc+1} = 2$$

Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{ab+1} + \frac{b+c}{bc+1} + \frac{c+a}{ca+1} &= \left(\frac{a+b}{ab+1} - 1 \right) + \left(\frac{b+c}{bc+1} - 1 \right) + \left(\frac{c+a}{ca+1} - 1 \right) + 3 \\ &= 3 - \left[\frac{(1-a)(1-b)}{ab+1} + \frac{(1-b)(1-c)}{bc+1} + \frac{(1-c)(1-a)}{ca+1} \right] \\ &\leq 3 \end{aligned}$$

Cộng theo về hai bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a+b+c}{ab+1} + \frac{a+b+c}{bc+1} + \frac{a+b+c}{ca+1} \leq 5$$

Hay

$$\frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ca+1} \leq \frac{5}{a+b+c}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1; c = 0$ và các hoán vị.

Bài 52. Do a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$ nên $0 < a, b, c < 1$.

Suy ra

$$1-a, 1-b, 1-c > 0$$

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ ta được

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} \geq \frac{4}{2-a-b} = \frac{4}{1+c}$$

Chứng minh tương tự ta có

$$\frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{4}{1+a}; \quad \frac{1}{1-c} + \frac{1}{1-a} \geq \frac{4}{1+b}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 53. Không mất tính tổng quát ta giả sử $1 \geq a \geq b \geq c > 0$, khi đó ta có $\frac{a}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$3 = 1 - b + 1 - c + 1 + b + c \geq 3\sqrt[3]{(1-b)(1-c)(1+b+c)}$$

Suy ra $1 \geq (1-b)(1-c)(1+b+c)$

Do đó ta được $1 - a \geq (1-a)(1-b)(1-c)(1+b+c)$

Hay $\frac{1-a}{1+b+c} \geq (1-a)(1-b)(1-c)$

Mặt khác ta lại có $\frac{1-a}{a+b+c} \geq \frac{1-a}{1+b+c}$

Nên ta được $\frac{1-a}{a+b+c} \geq (1-a)(1-b)(1-c)$

Suy ra $\frac{1}{a+b+c} \geq (1-a)(1-b)(1-c) + \frac{a}{a+b+c} \geq \frac{1}{3} + (1-a)(1-b)(1-c)$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 54. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} 4(a^3 + b^3) &= (a^3 + b^3) + 3(a^3 + b^3) = (a^3 + b^3) + 3(a+b)(a^2 + b^2 - ab) \\ &\geq (a^3 + b^3) + 3ab(a+b) = (a+b)^3 \end{aligned}$$

Do đó ta được $\sqrt[3]{4(a^3 + b^3)} \geq a + b$

Áp dụng tương tự ta được $\sqrt[3]{4(b^3 + c^3)} \geq b + c$; $\sqrt[3]{4(c^3 + a^3)} \geq c + a$

Từ đó ta có bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} P &= \sqrt[3]{4(a^3 + b^3)} + \sqrt[3]{4(b^3 + c^3)} + \sqrt[3]{4(c^3 + a^3)} + 2\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2}\right) \\ &\geq 2\left(a + b + c + \frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2}\right) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a + b + c + \frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq 3\sqrt[3]{abc} + \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq 6$$

Suy ra $P \geq 12$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 12.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 55.

Cách 1: Đặt $x = 2a + 3b + 3c$; $y = 3a + 2b + 3c$; $z = 3a + 3b + 2c$.

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{7}{8}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \geq \frac{42}{8}$

Bất đẳng thức trên đúng do $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 6$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Cách 2: Biến đổi về trái của bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned}
& \frac{a+b+3c}{3a+3b+2c} + \frac{a+3b+c}{3a+2b+3c} + \frac{3a+b+c}{2a+3b+3c} \\
&= 1 + \frac{7}{3} \left(\frac{c}{3a+3b+2c} + \frac{b}{3a+2b+3c} + \frac{a}{2a+3b+3c} \right) \\
&= 1 + 7(a+b+c) \left(\frac{1}{3a+3b+2c} + \frac{1}{3a+2b+3c} + \frac{1}{2a+3b+3c} \right) \\
&\geq 1 + 7(a+b+c) \frac{9}{8(a+b+c)} = \frac{15}{8}
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $a = b = c$.

Bài 56. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^2b}{2a+b} = \frac{a^2b}{a+a+b} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{a^2b}{a} + \frac{a^2b}{a} + \frac{a^2b}{b} \right) = \frac{1}{9} (2ab + a^2)$$

Áp dụng tương tự ta được $\frac{a^2b}{2a+b} + \frac{b^2c}{2b+c} + \frac{c^2a}{2c+a} \leq \frac{(a+b+c)^2}{9} = 1$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Bài 57.

Cách 1: Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a(b+b)(b-c)^2}{b^2c^2} + \frac{b(c+a)(c-a)^2}{c^2a^2} + \frac{c(a+b)(a-b)^2}{a^2b^2} \geq 0$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Do đó bài toán được chứng minh.

Cách 2: Quy đồng và phá dấu ngoặc ta được

$$\begin{aligned}
& 2(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) \geq a^2b^2(bc+ca) + b^2c^2(ca+ab) + c^2a^2(ab+bc) \\
& \Leftrightarrow 2(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) \geq abc^2(bc+ca) + a^2bc(ca+ab) + ab^2c(ab+bc)
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $x^3 + y^3 \geq xy(x+y)$ ta được điều phải chứng minh.

Bài 58. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned}
a^3 \left(\frac{b+c}{2} \right)^4 &= a^2(b+c)^2 \cdot \frac{2a(b+c)(b+c)}{2^5} \\
&\leq a^2 \cdot 2(b^2+c^2) \cdot \frac{8(a+b+c)^3}{2^5 \cdot 27} = \frac{a^2b^2 + a^2c^2}{2}
\end{aligned}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$a^3 \left(\frac{b+c}{2} \right)^4 + b^3 \left(\frac{c+a}{2} \right)^4 + c^3 \left(\frac{a+b}{2} \right)^4 \leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Bài 59. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$4(ab+bc+ca)(b^2+c^2+bc) \leq (ab+bc+ca+bc+b^2+c^2)^2 = (b+c)^2(a+b+c)^2$$

Suy ra $\frac{a^2(b+c)}{b^2+bc+c^2} \geq \frac{4a^2(ab+bc+ca)}{(b+c)(a+b+c)^2}$, áp dụng tương tự ta được

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+bc+c^2} + \frac{b^2(a+b)}{c^2+ca+a^2} + \frac{c^2(a+b)}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{4(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right)$$

Ta cần chứng minh $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{2(ab+bc+ca)}$

Hay $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^3}{2(ab+bc+ca)} - (a+b+c)$

Hay $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + a+b+c \geq \frac{(a+b+c)^3}{2(ab+bc+ca)}$

Bất đẳng thức trên tương đương với $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức.
Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 60.

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + 1} \leq \sqrt{3\left(3 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}$$

Ta cần chứng minh được

$$\begin{aligned} \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} &\geq 3 + \sqrt{3\left(3 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} - 3\right)^2 &\geq 3\left(3 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2 - 3}{a^2b^2c^2} &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{a^2b^2c^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng. Vậy bài toán được chứng minh xong.

Cách 2: Kết hợp với giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} &= (ab+bc+ca)\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = 3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \\ &= 3 + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{a} + \frac{a+c}{a} + \frac{b+c}{b} + \frac{b+a}{b} + \frac{c+a}{c} + \frac{c+b}{c}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) - 3 \\ &\geq 3 + \sqrt{\frac{a+b}{a} \cdot \frac{a+c}{a}} + \sqrt{\frac{b+c}{b} \cdot \frac{b+a}{b}} + \sqrt{\frac{c+a}{c} \cdot \frac{c+b}{c}} + \frac{1}{2} \cdot 6 - 3 \\ &= 3 + \sqrt{\frac{a^2+ab+bc+ca}{a^2}} + \sqrt{\frac{a^2+ab+bc+ca}{a^2}} + \sqrt{\frac{a^2+ab+bc+ca}{a^2}} \\ &= 3 + \sqrt{\frac{a^2+1}{a^2}} + \sqrt{\frac{b^2+1}{b^2}} + \sqrt{\frac{c^2+1}{c^2}} = 3 + \sqrt{\frac{1}{a^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{b^2} + 1} + \sqrt{\frac{1}{c^2} + 1} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 61. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} &\geq \frac{4}{a+2b+c} = \frac{8}{2a+2b+2b+2c} \\ &\geq \frac{8}{a^2+1+b^2+1+b^2+1+c^2+1} = \frac{8}{b^2+7} \end{aligned}$$

Hoàn toàn tương tự

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{8}{c^2+7}; \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{8}{a^2+7}$$

Cộng theo về ba bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh.

Bài 62. Ta có $c + 6ab = c(a + b + c) + 6ab = ab + bc + ca + c^2 + 2ab + 3ab$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{ab}{c+6ab} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{ab}{ab+bc+ca} + \frac{ab}{c^2+2ab} + \frac{1}{3} \right)$$

Hoàn toàn tương tự

$$\frac{ab}{c+6ab} + \frac{bc}{a+6bc} + \frac{ca}{b+6ca} \leq \frac{1}{9} \left(2 + \frac{ab}{c^2+2ab} + \frac{bc}{a^2+2bc} + \frac{ca}{b^2+2ca} \right)$$

Phép chứng minh hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$\frac{ab}{c^2+2ab} + \frac{bc}{a^2+2bc} + \frac{ca}{b^2+2ca} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{c^2}{c^2+2ab} + \frac{b^2}{a^2+2bc} + \frac{c^2}{b^2+2ca} \geq 1$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức.

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 63. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{b(1+a^2)} + \frac{b}{c(1+b^2)} + \frac{c}{a(1+a^2)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+abc(a+b+c)}$$

Đề ý là $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 3$; $abc(a+b+c) \leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{3} = 3$

Ta được $\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+abc(a+b+c)} \geq \frac{9}{4}$. Suy ra bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 64. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(a^2+b^2+1)(1+1+c^2) \geq (a+b+c)^2$$

Do đó ta được $\frac{1}{a^2+b^2+1} = \frac{1+1+c^2}{(a^2+b^2+1)(1+1+c^2)} \leq \frac{2+c^2}{(a+b+c)^2}$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$1 \leq \frac{1}{a^2+b^2+1} + \frac{1}{b^2+c^2+1} + \frac{1}{c^2+a^2+1} \leq \frac{6+a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$$

Hay $ab+bc+ca \leq 3$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 65. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $b+5 = b+2+3 \leq 2\sqrt{3(b+2)}$.

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{a^2}{b+5} + \frac{b^2}{c+5} + \frac{c^2}{a+5} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{a^2}{\sqrt{b+2}} + \frac{b^2}{\sqrt{c+2}} + \frac{c^2}{\sqrt{a+2}} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\frac{a^2}{\sqrt{b+2}} + \frac{b^2}{\sqrt{c+2}} + \frac{c^2}{\sqrt{a+2}} \leq \sqrt{(a^3+b^3+c^3)} \left(\frac{a}{b+2} + \frac{b}{c+2} + \frac{c}{a+2} \right)$$

Ta quy bài toán về chứng minh.

$$\frac{a}{b+2} + \frac{b}{c+2} + \frac{c}{a+2} \leq 1 \Leftrightarrow a^2c + b^2a + c^2b + 2(a^2+b^2+c^2) \leq 8+abc$$

Dễ dàng chứng minh được $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$; $a^2c + b^2a + c^2b \leq 2 + abc$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.

Bài 66.

Cách 1: Dễ thấy $9abc = (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \Rightarrow 3abc \geq ab + bc + ca$

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c} \Rightarrow x + y + z \leq 3 \Rightarrow xy + yz + xz \leq 3$.

Bất đẳng thức được viết lại thành $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 3}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 3}} \leq \frac{3}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} \leq \frac{x}{\sqrt{x^2 + xy + yz + zx}} = \frac{x}{\sqrt{(x + y)(z + x)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x + y} + \frac{x}{z + x} \right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 3}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 3}} \leq \frac{3}{2}$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Cách 2: Đặt $a = xy$; $b = yz$; $c = zx$ khi đó giả thiết trở thành

$$9x^2y^2z^2 = (xy + yz + zx)^2 \Leftrightarrow 3xyz = xy + yz + zx \text{ và } xyz \geq 1.$$

Khi đó về trái được viết lại thành

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + 3y^2z^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 3z^2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 3x^2y^2}} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3x^2y^2z^2}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 3z^2x^2y^2}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 3x^2y^2z^2}} \\ &\leq \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3xyz}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 3xyz}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 3xyz}} \end{aligned}$$

Ta quy bài toán về chứng minh $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 3xyz}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 3xyz}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 3xyz}} \leq \frac{3}{2}$

Đến đây chú ý đến $3xyz = xy + yz + zx$ ta chứng minh được bất đẳng thức tương tự như cách 1

Bài 67. Từ giả thiết $abc = 1$, ta đặt $a = \frac{x}{y}$; $b = \frac{y}{z}$; $c = \frac{z}{x}$ ($x; y; z > 0$). Khi đó bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 8yz}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 8zx}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 8xy}} \geq 1$$

Bất đẳng thức trên chính là bất đẳng thức ở bài 27.

Bài 68.

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{1 + ab} + \frac{1}{1 + bc} + \frac{1}{1 + ca} \geq \frac{9}{3 + ab + bc + ca} \geq \frac{9}{3 + a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{5}$$

Bất đẳng thức được chứng minh

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{1}{1 + ab} + \frac{1 + ab}{25} \geq \frac{2}{25}$

Áp dụng tương tự ta được

$$\frac{1}{1 + ab} + \frac{1}{1 + bc} + \frac{1}{1 + ca} \geq \frac{6}{5} - \frac{3 + ab + bc + ca}{25}$$

Ta quy bài toán về chứng minh $ab + bc + ca \leq 12$. Bất đẳng thức cuối cùng đúng do

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 = 12$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 69. Từ giả thiết ta có $\frac{3}{4} \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow abc \leq \frac{1}{8}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$(a+b)(b+c)(c+a) + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq 8abc + \frac{3}{abc} = 8abc + \frac{1}{8abc} + \frac{23}{8abc} \geq 2 + 23 = 25$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 70. Áp dụng giả thiết và bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\sqrt{\frac{ab}{c}} + 1 = \sqrt{\frac{ab+c}{c}} = \sqrt{\frac{ab+c(a+b+c)}{c}} = \sqrt{\frac{(b+c)(c+a)}{c}} \geq \frac{\sqrt{ac} + \sqrt{bc}}{\sqrt{c}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Hoàn toàn tương tự ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 71. Chú ý đến $a^2 + 2 = a^2 + 1 + 1 \geq 2a + 1$.

Áp dụng tương tự ta quy bài toán về chứng minh $2(a+b+c) \geq 6$.

Bài 72. Để ý là $\sqrt{\frac{ab}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{ab(a^2+b^2)}{a^2+b^2}} \geq \frac{\sqrt{2ab}}{a^2+b^2}$, áp dụng tương tự ta quy bài toán về chứng minh

$$\frac{2ab}{a^2+b^2} + \frac{2bc}{b^2+c^2} + \frac{2ca}{c^2+a^2} \geq 1$$

Bất đẳng thức trên tương đương với $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} + \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2} \geq 4$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} + \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2} \geq \frac{4(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} = 2 + \frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} = 4$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 73. Từ giả thiết ta được $abc \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3\sqrt{3} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 6\sqrt{3}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta lại có

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 3(a+b+c) \geq 3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} + 3\sqrt[3]{abc}\right) \geq 6\sqrt{3}$$

Cộng thoe về hai bất đẳng thức trên và thu gọn ta được

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + a + b + c \geq 4\sqrt{3}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 74. Giả sử a là số lớn nhất trong ba số a, b, c suy ra $\frac{1}{3} \leq a \leq 1$.

Khi đó biến đổi tương đương ta chứng minh được

$$\frac{b^2+1}{c^2+1} + \frac{c^2+1}{a^2+1} \leq (b+c)^2 + 1 + \frac{1}{a^2+1} \text{ và } \frac{a^2+1}{b^2+1} \leq a^2+1$$

Từ đó ta quy bài toán về chứng minh

$$a^2 + (b+c)^2 + \frac{1}{a^2+1} + 2 \leq \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{(1-a)(1-3a-4a^3)}{2(a^2+1)} \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 75. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2\sqrt{2-2bc} + b^2\sqrt{2-2ca} + c^2\sqrt{2-2ab} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Ta có $a^2\sqrt{2-2bc} \geq a^2\sqrt{2-(b^2+c^2)} = a^2\sqrt{1+a^2} = \sqrt{a^4+a^6}$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$a^2\sqrt{2-2bc} + b^2\sqrt{2-2ca} + c^2\sqrt{2-2ab} \geq \sqrt{a^4+a^6} + \sqrt{b^4+b^6} + \sqrt{c^4+c^6}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{a^4+a^6} + \sqrt{b^4+b^6} + \sqrt{c^4+c^6} &\geq \sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2 + (a^3+b^3+c^3)^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + (a^3+b^3+c^3)^2} \geq \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}(a^3+b^3+c^3)} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$a^3+b^3+c^3 \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a+b+c} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Suy ra $a^2\sqrt{2-2bc} + b^2\sqrt{2-2ca} + c^2\sqrt{2-2ab} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 76. Ta có

$$\begin{aligned} &\left(3a + \frac{2}{b+c}\right)^2 + \left(3b + \frac{2}{c+a}\right)^2 + \left(3c + \frac{2}{a+b}\right)^2 \\ &= 9(a^2+b^2+c^2) + 12\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) + 4\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Neibizt và bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} &\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \\ &\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2} \geq \frac{9}{4(a^2+b^2+c^2)} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Suy ra ta được $\left(3a + \frac{2}{b+c}\right)^2 + \left(3b + \frac{2}{c+a}\right)^2 + \left(3c + \frac{2}{a+b}\right)^2 \geq 48.$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 77. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} 6a^2 - 6a + 5 + \frac{2}{ab+ac} &= 5(a^2+1) - 6a + a^2 + \frac{2}{ab+ac} \geq 4a + a^2 + \frac{2}{ab+ac} \\ &= 2a + 2a + a^2 + \frac{2}{ab+ac} \geq 3\sqrt[3]{2a \cdot 2a \left(a^2 + \frac{2}{ab+ac}\right)} \end{aligned}$$

Do đó ta được $\left(6a^2 - 6a + 5 + \frac{2}{ab+ac}\right)^3 \geq 27\left(4a^4 + \frac{8a}{b+c}\right)$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$P \geq 108(a^4 + b^4 + c^4) + 216\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right) \\ \geq \frac{108(a^2 + b^2 + c^2)^2}{3} + 216 \cdot \frac{3}{2} = 648$$

Vật giá trị nhỏ nhất của P là 648, đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$.

Bài 78. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a\sqrt[3]{1+b-c} = a\sqrt[3]{1.1.(1+b-c)} \leq \frac{a(3+b-c)}{3} = a + \frac{ab-ca}{3}$$

Hoàn toàn tương tự ta được $a\sqrt[3]{1+b-c} + b\sqrt[3]{1+c-a} + c\sqrt[3]{1+a-b} \leq 1$.

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 79. Bạn đọc tự giải

Bài 80. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{2a^2+3b^2+7}} + \sqrt{\frac{bc}{2b^2+3c^2+7}} + \sqrt{\frac{ca}{2c^2+3a^2+7}}\right)^2 \\ \leq 3\left(\frac{ab}{2a^2+3b^2+7} + \frac{bc}{2b^2+3c^2+7} + \frac{ca}{2c^2+3a^2+7}\right)$$

Từ $a + b + c = 3$ suy ra $ab + bc + ca \leq 3$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{ab}{2a^2+3b^2+7} = \frac{ab}{2(a^2+1)+3(b^2+1)+2} \leq \frac{ab}{4a+6b+2} \leq \frac{ab}{4}\left(\frac{1}{6b} + \frac{1}{4a+2}\right)$$

Lại có
$$\frac{1}{4a+2} = \frac{1}{2a+2a+2} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\right)$$

Do đó ta được
$$\frac{ab}{2a^2+3b^2+7} \leq \frac{a}{24} + \frac{b}{36} + \frac{ab}{72}$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{ab}{2a^2+3b^2+7} + \frac{bc}{2b^2+3c^2+7} + \frac{ca}{2c^2+3a^2+7} \\ \leq \frac{a+b+c}{24} + \frac{a+b+c}{36} + \frac{ab+bc+ca}{72} \leq \frac{3}{24} + \frac{3}{36} + \frac{3}{72} = \frac{1}{4}$$

Suy ra
$$\left(\sqrt{\frac{ab}{2a^2+3b^2+7}} + \sqrt{\frac{bc}{2b^2+3c^2+7}} + \sqrt{\frac{ca}{2c^2+3a^2+7}}\right)^2 \leq \frac{3}{4}$$

Hay bất đẳng thức được chứng minh

Bài 81. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3abc} = \frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2+3abc(a+b+c)} \\ \geq \frac{(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)^2}$$

Từ giả thiết và áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$(a+b+c)^2 \leq 9; (ab+bc+ca)^2 \leq 9; (a+b+c)^3 \geq 27abc$$

Do đó ta được
$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{3}{2}abc$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 82. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$(a+b)\sqrt{a^2-ab+b^2} = \sqrt{(a+b)(a^3+b^3)} \geq a^2+b^2$$

Do đó ta được $\frac{\sqrt{a^2-ab+b^2}}{a^2+b^2} \geq \frac{1}{a+b}$, hoàn toàn tương tự ta được

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a^2-ab+b^2}}{a^2+b^2} + \frac{\sqrt{b^2-bc+c^2}}{b^2+c^2} + \frac{\sqrt{c^2-ca+a^2}}{c^2+a^2} \\ \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 83. Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$, khi đó giả thiết được viết lại thành $xy + yz + zx = 1$.

Suy ra $x + y + z \geq \sqrt{3}$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $\frac{x}{yz+1} + \frac{y}{zx+1} + \frac{z}{xy+1} \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\begin{aligned} \frac{x}{yz+1} + \frac{y}{zx+1} + \frac{z}{xy+1} &\geq \frac{(x+y+z)^2}{3xyz+x+y+z} = \frac{(x+y+z)^3}{3xyz(x+y+z) + (x+y+z)^2} \\ &\geq \frac{(x+y+z)^3}{(xy+yz+zx)^2 + (x+y+z)^2} = \frac{(x+y+z)^3}{1 + (x+y+z)^2} \end{aligned}$$

Đặt $t = x + y + z \geq \sqrt{3}$, khi đó dễ dàng chứng minh được $\frac{t^3}{1+t^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 84. Bạn đọc tự chứng minh

Bài 85. Nếu $x, y, z > 0, x < y$ thì $\frac{x}{y} < \frac{x+z}{y+z}$

Do đó

$$\begin{aligned} a\left(\frac{1}{3a+b} + \frac{1}{3a+c} + \frac{1}{2a+b+c}\right) + \frac{b}{3a+c} + \frac{c}{3a+b} \\ = \frac{a+c}{3a+b} + \frac{a+b}{3a+c} + \frac{2a}{2a+b+c} < \frac{2a+2b}{4a+b+c} + \frac{2a+2c}{4a+b+c} + \frac{4a}{4a+b+c} = 2 \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Bài 86. Đặt $a = k\frac{x}{y}$; $b = k\frac{y}{z}$; $c = k\frac{z}{x}$. Khi đó bài toán quy về chứng minh

$$\frac{yz}{kzx+k^2xy} + \frac{zx}{kxy+k^2yz} + \frac{xy}{kyz+k^2zx} \geq \frac{3}{1+k^3}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta chứng minh được bài toán.

Bài 87. Để ý ta thấy $\frac{a^2}{ab+bc+ca} - \frac{ab}{b^2+c^2+bc} = \frac{ac(ca-b^2)}{(ab+bc+ca)(b^2+c^2+bc)}$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{ac(ca-b^2)}{b^2+c^2+bc} + \frac{ab(ab-c^2)}{c^2+a^2+ca} + \frac{bc(bc-a^2)}{a^2+b^2+ab} \geq 0$$

Lại thấy $\frac{ac(ca - b^2)}{b^2 + c^2 + bc} = \frac{c^2a(a + b + c)}{b^2 + c^2 + bc} - ca$, do đó ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh thành

$$\frac{c^2a}{b^2 + c^2 + bc} + \frac{a^2b}{c^2 + a^2 + ca} + \frac{b^2c}{a^2 + b^2 + ab} \geq \frac{ab + bc + ca}{a + b + c}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} & \frac{c^2a}{b^2 + c^2 + bc} + \frac{a^2b}{c^2 + a^2 + ca} + \frac{b^2c}{a^2 + b^2 + ab} \\ & \geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{a(b^2 + c^2 + bc) + b(c^2 + a^2 + ca) + c(a^2 + b^2 + ab)} = \frac{ab + bc + ca}{a + b + c} \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 88. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{a^2}{9a + 1} = \frac{a^2}{3a + 1 + 6a} \leq \frac{a^2}{2\sqrt{6a(3a + 1)}} = \frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{6(3a + 1)}}$$

Do đó ta được

$$24 \left(\frac{a^2}{9a + 1} + \frac{b^2}{9b + 1} + \frac{c^2}{9c + 1} \right) \leq 6 \left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{6(3a + 1)}} + \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{6(3b + 1)}} + \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{6(3c + 1)}} \right)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được

$$\left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{6(3a + 1)}} + \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{6(3b + 1)}} + \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{6(3c + 1)}} \right)^2 \leq \frac{a + b + c}{6} \left(\frac{a^3}{3a + 1} + \frac{b^3}{3b + 1} + \frac{c^3}{3c + 1} \right)$$

Suy ra ta được
$$\frac{a^3}{3a + 1} + \frac{b^3}{3b + 1} + \frac{c^3}{3c + 1} \geq 24 \left(\frac{a^2}{9a + 1} + \frac{b^2}{9b + 1} + \frac{c^2}{9c + 1} \right)$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 98. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$6ab(a + b) + 6bc(b + c) + 9ca(c + a) \geq 5(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$\Leftrightarrow ab(a + b) + bc(b + c) + 4ca(c + a) \geq 10abc \Leftrightarrow \frac{a + b}{c} + \frac{b + c}{a} + \frac{4(c + a)}{b} \geq 10$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\frac{a + b}{c} + \frac{b + c}{a} + \frac{4(c + a)}{b} = \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{4c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \geq 10$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 90. Dễ dàng chứng minh được $2(a^4 + b^4) \geq ab(a^3 + b^3)$, do đó ta có

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} \geq \frac{a + b}{2ab} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Hoàn toàn tương tự ta được

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ca}{abc} = 1$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 91. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned}
& \sqrt{2} \left(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \right) \\
&= \sqrt{2 \left(\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{2ab}{a+b} \right)} + \sqrt{2 \left(\frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{2bc}{b+c} \right)} + \sqrt{2 \left(\frac{c^2+a^2}{c+a} + \frac{2ca}{c+a} \right)} \\
&\geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}} + \sqrt{\frac{2ab}{a+b}} + \sqrt{\frac{2bc}{b+c}} + \sqrt{\frac{2ca}{c+a}}
\end{aligned}$$

Bài toán quy về chứng minh $\sqrt{\frac{2ab}{a+b}} + \sqrt{\frac{2bc}{b+c}} + \sqrt{\frac{2ca}{c+a}} \geq 3$

Giả thiết được viết lại thành $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$. Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c} \Rightarrow x + y + z \leq 3$.

Bất đẳng thức trên trở thành $\sqrt{\frac{2}{x+y}} + \sqrt{\frac{2}{y+z}} + \sqrt{\frac{2}{z+x}} \geq 3$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki và kết hợp với $x + y + z \leq 3$, ta có

$$\sqrt{\frac{2}{x+y}} + \sqrt{\frac{2}{y+z}} + \sqrt{\frac{2}{z+x}} \geq \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}} \geq \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{3 \cdot 2(x+y+z)}} \geq 3$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 92. Ta có $\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+ab} = 2 - \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+ab}$. Khi đó áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned}
& \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+ab} + \frac{b^2+c^2}{b^2+c^2+bc} + \frac{c^2+a^2}{c^2+a^2+ca} \\
&= 6 - \left[\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+ab} + \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+bc} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+ca} \right]
\end{aligned}$$

Bài toán quy về chứng minh.

$$\frac{6(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} + \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+ab} + \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+bc} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+ca} \geq 6$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+ab} + \frac{(b+c)^2}{b^2+c^2+bc} + \frac{(c+a)^2}{c^2+a^2+ca} \geq \frac{4(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2) + ab + bc + ca}$$

Ta cần chứng minh được

$$\frac{4(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2) + ab + bc + ca} + \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} \geq 6$$

Đặt $x = a^2 + b^2 + c^2$; $y = ab + bc + ca \Rightarrow x \geq y$ và bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{4(x+2y)}{2x+y} + \frac{6x}{x+2y} \geq 6 \Leftrightarrow \frac{4(x+2y)}{2x+y} + \frac{4(2x+y)}{x+2y} \geq 8$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng theo bất đẳng thức Cauchy.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 93. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{1}{a^5(b^2+c^2)^2} + \frac{81a(b^2+c^2)}{8} + \frac{81a(b^2+c^2)}{8} \geq \frac{27\sqrt[3]{9}}{4a}$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta lại có $\frac{27\sqrt[3]{9}}{4a} \geq \frac{81}{4\left(a^3 + \frac{2}{3}\right)}$

$$\text{Do đó ta được } \frac{1}{a^5(b^2 + c^2)^2} + \frac{81a(b^2 + c^2)}{8} + \frac{81a(b^2 + c^2)}{8} \geq \frac{81}{4\left(a^3 + \frac{2}{3}\right)}$$

Áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^5(b^2 + c^2)^2} + \frac{1}{b^5(c^2 + a^2)^2} + \frac{1}{c^5(a^2 + b^2)^2} \\ & \geq \frac{81}{4\left(a^3 + \frac{2}{3}\right)} + \frac{81}{4\left(a^3 + \frac{2}{3}\right)} + \frac{81}{4\left(a^3 + \frac{2}{3}\right)} - \frac{81(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2)}{4} \end{aligned}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} & \frac{81}{4\left(a^3 + \frac{2}{3}\right)} + \frac{81}{4\left(a^3 + \frac{2}{3}\right)} + \frac{81}{4\left(a^3 + \frac{2}{3}\right)} \geq \frac{81.9}{4(a^3 + b^3 + c^3) + 8} = \frac{243}{4} \\ & \frac{81(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2)}{4} \leq \frac{81.2(a^3 + b^3 + c^3)}{4} = \frac{162}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{a^5(b^2 + c^2)^2} + \frac{1}{b^5(c^2 + a^2)^2} + \frac{1}{c^5(a^2 + b^2)^2} \geq \frac{243}{4} - \frac{162}{4} = \frac{81}{4}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 94. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $(b+2)(b^2 - b + 2) \leq \frac{b^2 + 4}{2}$

Do đó ta được $\frac{a}{\sqrt{(b+2)(b^2 - b + 2)}} \geq \frac{2a}{b^2 + 4}$. Áp dụng tương tự ta được

$$\begin{aligned} & \frac{a}{\sqrt{(b+2)(b^2 - b + 2)}} + \frac{b}{\sqrt{(c+2)(c^2 - c + 2)}} + \frac{c}{\sqrt{(a+2)(a^2 - a + 2)}} \\ & \geq \frac{2a}{b^2 + 4} + \frac{2b}{c^2 + 4} + \frac{2c}{a^2 + 4} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh được $\frac{a}{b^2 + 4} + \frac{b}{c^2 + 4} + \frac{c}{a^2 + 4} \geq \frac{3}{4}$.

Đến đây áp dụng kỹ thuật Cauchy ngược dấu để chứng minh bất đẳng thức trên.

Bài 95. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a}\right) \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Ta có

$$\begin{aligned} & (a+b+c)\left(\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a}\right) \\ & = \frac{c}{2a+b} + \frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} + \frac{a}{2c+a}\right) + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{c}{2a+b} + \frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}$$

$$\frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} + \frac{a}{2c+a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = 1$$

Như vậy ta cần chứng minh được $\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} + 2 \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}$

Mà theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} + 2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}}$

Phép chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được

$$3\sqrt[3]{\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}} \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Hay $9(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca)$

Đây là một đánh giá đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 96. Không mất tính tổng quát, giả sử a là số lớn nhất trong ba số trên.

Từ giả thiết $a+b+c=3$, suy ra $1 \leq a < 3$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$8\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 42(a+b+c) - 117 \geq 10(a^2+b^2+c^2)$$

Hay $\left(-10b^2 + 42b + \frac{8}{b} - \frac{69}{2}\right) + \left(-10c^2 + 42c + \frac{8}{c} - \frac{69}{2}\right) \geq 10a^2 - 42a + \frac{8}{a} + 48$

Hay $\frac{(2b-1)^2(16-5b)}{b} + \frac{(2c-1)^2(16-5c)}{c} \geq \frac{(a-2)^2(20a-4)}{a}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\begin{aligned} \frac{(2b-1)^2(16-5b)}{b} + \frac{(2c-1)^2(16-5c)}{c} &= \frac{(2b-1)^2}{\frac{b}{16-5b}} + \frac{(2c-1)^2}{\frac{c}{16-5c}} \\ &\geq \frac{(2b+2c-2)^2}{\frac{b}{16-5b} + \frac{c}{16-5c}} = \frac{4(a-2)^2}{\frac{b}{16-5b} + \frac{c}{16-5c}} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{4(a-2)^2}{\frac{b}{16-5b} + \frac{c}{16-5c}} \geq \frac{(a-2)^2(20a-4)}{a} \Leftrightarrow \frac{(a-2)^2}{\frac{b}{16-5b} + \frac{c}{16-5c}} \geq \frac{(a-2)^2(5a-1)}{a}$$

Thật vậy, vì $a \geq b$; $a \geq c$, do đó ta có

$$\frac{b}{16-5b} + \frac{c}{16-5c} \leq \frac{b}{16-5a} + \frac{c}{16-5a} = \frac{3-a}{16-5a}$$

Cho nên

$$\frac{\frac{(a-2)^2}{b} + \frac{c}{16-5b}}{\frac{c}{16-5c} + \frac{3-a}{16-5a}} \geq \frac{(a-2)^2}{3-a} = \frac{(a-2)^2(16-5a)}{3-a}$$

Bây giờ ta cần chỉ ra được

$$\frac{(a-2)^2(16-5a)}{3-a} \geq \frac{(a-2)^2(5a-1)}{a}$$

Đánh giá trên tương đương với $(a-2)^2(16-5a)a \geq (a-2)^2(5a-1)(3-a)$

Hay $3(a-2)^2 \geq 0$, đánh giá cuối cùng luôn đúng với mọi a .

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = 2$; $b = c = \frac{1}{2}$ và các hoán vị của nó.

Bài 97. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức ta được

$$\frac{a^4}{(b-1)^2} + \frac{b^4}{(c-1)^2} + \frac{c^4}{(a-1)^2} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{a-1} \right)$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{a-1} \geq 12$$

Thật vậy, ta có

$$(b-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow b \leq \frac{b^2+4}{4} \Leftrightarrow b-1 \leq \frac{b^2}{4}$$

Do đó $\frac{a^2}{b-1} \geq \frac{4a^4}{b^2}$. Áp dụng tương tự ta được $\frac{b^2}{c-1} \geq \frac{4b^2}{c^2}$; $\frac{c^2}{a-1} \geq \frac{4c^2}{a^2}$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{a-1} \geq 4 \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \right) \geq 4 \cdot 3 = 12$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 2$.

Bài 98. Giả sử $a = \min\{a, b, c\}$. ta có $b + c = 3 - a \leq 3$.

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned} P &= (a(a-b) + b^2)(b^2 - bc + c^2)(a(a-c) + c^2) \\ &\leq b^2(b^2 - bc + c^2)c^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2}bc \cdot \frac{3}{2}bc(b^2 - bc + c^2) \\ &\leq \frac{4}{9} \cdot \left[\frac{\frac{3}{2}bc + \frac{3}{2}bc + (b^2 - bc + c^2)}{3} \right]^3 = \frac{4}{9} \cdot \left[\frac{(b+c)^2}{3} \right]^3 \leq 12 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$ và các hoán vị.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 12.

Bài 99.

Cách 1. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{y+z} + \frac{x^3}{y+z} + \frac{(y+z)^2}{8} &\geq \frac{3}{2}x^2 \\ \frac{y^3}{z+x} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{(z+x)^2}{8} &\geq \frac{3}{2}y^2 \\ \frac{z^3}{x+y} + \frac{z^3}{x+y} + \frac{(z+y)^2}{8} &\geq \frac{3}{2}z^2 \end{aligned}$$

Cộng về với về các bất đẳng thức trên, ta có:

$$2\left(\frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y}\right) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx) \geq \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y}\right) \geq \frac{5}{4}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{4}(xy + yz + zx)$$

Mặt khác ta có

$$\frac{5}{4}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{1}{4}(xy + yz + zx) \geq \frac{5}{12}(x+y+z)^2 - \frac{1}{12}(x+y+z)^2$$

$$= \frac{1}{3}(x+y+z)^2 \geq 12$$

Do đó $\frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y} \geq 6$. Bài toán được chứng minh xong.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\frac{x^4}{x(y+z)} + \frac{y^4}{y(z+x)} + \frac{z^4}{z(x+y)} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{2(xy + yz + zx)} \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \geq \frac{(x+y+z)^2}{6} = 6$$

Do đó $\frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y} \geq 6$. Bài toán được chứng minh xong.

Bài 100. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{(a^2 + 8)(b^2 + 8)(c^2 + 8)}{(a+b+c)^6} = \frac{(a^2 + 8abc)(b^2 + 8abc)(c^2 + 8abc)}{(a+b+c)^6}$$

$$= \frac{(a+8bc)(b+8ca)(c+8ab)}{(a+b+c)^6} \leq \frac{[a+b+c+8(ab+bc+ca)]^3}{27(a+b+c)^6}$$

$$\leq \frac{\left[a+b+c+\frac{8}{3}(a+b+c)\right]^3}{27(a+b+c)^6} = \frac{1}{27}\left(\frac{1}{a+b+c} + \frac{8}{3}\right)^3 \leq \frac{1}{27}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} + \frac{8}{3}\right)^3 = 1$$

Do đó $(a^2 + 8)(b^2 + 8)(c^2 + 8) \leq (a+b+c)^6$. Bài toán được chứng minh xong.

Bài 101. Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$ thì giả thiết được viết lại là $a+b+c=3$

Khi đó ta có:

$$\frac{y^2}{xy^2 + 2x^2} + \frac{x^2}{xz^2 + 2z^2} + \frac{z^2}{yz^2 + 2y^2} = \frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2}$$

$$= a+b+c - \left(\frac{2ab^2}{a+2b^2} + \frac{2bc^2}{b+2c^2} + \frac{2ca^2}{c+2a^2}\right) \geq a+b+c - \frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^2c^2} + \sqrt[3]{c^2a^2}\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\sqrt[3]{a^2b^2} = \sqrt[3]{ab.ab.1} \leq \frac{ab+ab+1}{3}$

Tương tự $\sqrt[3]{b^2c^2} \leq \frac{bc+bc+1}{3}; \sqrt[3]{c^2a^2} \leq \frac{ca+ca+1}{3}$

Từ đó ta có $a+b+c - \frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^2c^2} + \sqrt[3]{c^2a^2}\right) \geq a+b+c - \frac{2}{9}(2ab+2bc+2ca+3) \geq 1$

Bài toán được chứng minh xong.