# BÀI 3. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

## **A.** KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Cho hàm số  với tập xác định .

- Hàm số  được gọi là hàm số chẵn nếu  thì  và .

- Hàm số  được gọi là hàm số lẻ nếu  thì  và .

Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng, đồ thị hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

### 2. Hàm số tuần hoàn

Cho hàm số  với tập xác định . Hàm số  được gọi là tuần hoàn nếu tồn tại một số  khác 0 sao cho với mọi , ta có:

-  và ;

- .

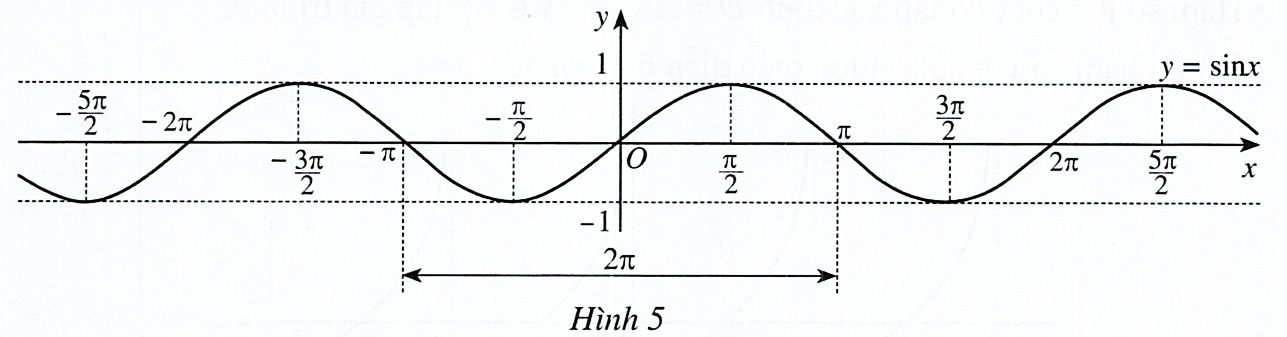
Số  dương nhỏ nhất (nếu có) thoả mãn các tính chất trên được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn đó.

### 3. Một số hàm số lượng giác cơ bản

a) Hàm số 

- Hàm số  có tập xác định là ; tập giá trị là đoạn .

- Đồ thị hàm số  được biểu diễn ở Hình 5 :

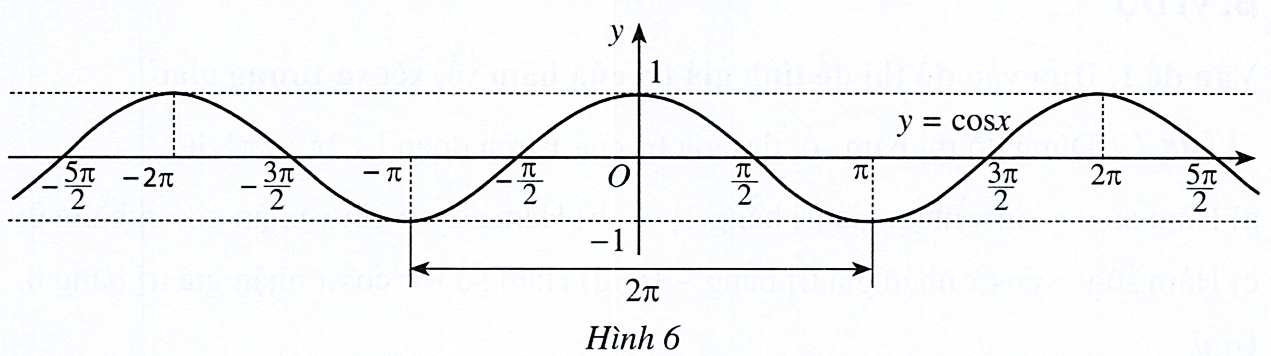


- Tính chất: Hàm số  là hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ ; tuần hoàn chu kì ; đồng biến trên mỗi khoảng  và nghịch biến trên mỗi khoảng  với .

b) Hàm số 

- Hàm số  có tập xác định là ; tập giá trị là đoạn .

- Đồ thị hàm số  được biểu diễn ở Hình 6 :

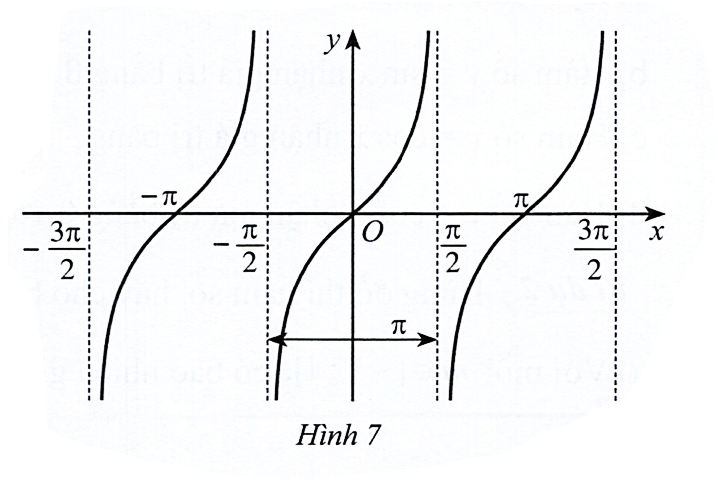


- Tính chất: Hàm số  là hàm số chẵn, có đồ thị đối xứng qua trục tung; tuần hoàn chu kì ; đồng biến trên mỗi khoảng  và nghịch biến trên mỗi khoảng  với .

c) Hàm số 

- Hàm số  có tập xác định là  tập giá trị là .

- Đồ thị hàm số  được biểu diễn ở Hình 7:

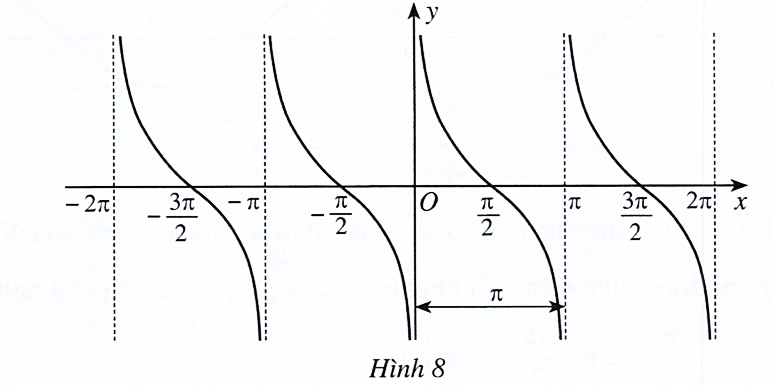


- Tính chất: Hàm số  là hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ ; tuần hoàn chu kì ; đồng biến trên mỗi khoảng  với .

d) Hàm số 

- Hàm số  có tập xác định ; tập giá trị là .

• Đồ thị hàm số  được biểu diễn ở Hình 8 :



- Tính chất: Hàm số  là hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ ; tuần hoàn chu kì ; nghịch biến trên mỗi khoảng  với .

## **B.** VÍ DỤ

### Vấn đề 1. Dựa vào đồ thị để tính giá trị của hàm số, xét sự tương giao

**Ví dụ 1.** Dùng đồ thị hàm số, tìm giá trị của  trên đoạn  để:

a) Hàm số  nhận giá trị bằng 1 ;

b) Hàm số  nhận giá trị bằng 0 ;

c) Hàm số  nhận giá trị bằng;

d) Hàm số  nhận giá trị bằng 0 .

**Giải**

Trên đoạn ,

a) Hàm số  nhận giá trị bằng 1 với .

b) Hàm số  nhận giá trị bằng 0 với .

c) Hàm số  nhận giá trị bằng  với .

d) Hàm số  nhận giá trị bằng 0 với .

**Ví dụ 2.** Dùng đồ thị hàm số, hãy cho biết:

a) Với mỗi , có bao nhiêu giá trị  sao cho ;

b) Với mỗi , có bao nhiêu giá trị  sao cho .

**Giải**

a) Số giá trị  sao cho  bằng số giao điểm của đồ thị hàm số  trên đoạn  và đường thẳng . Căn cứ vào đồ thị hàm số, với mỗi , có đúng một giá trị  sao cho .

b) Số giá trị  sao cho tan  bằng số giao điểm của đồ thị hàm số  trên khoảng  và đường thẳng . Căn cứ vào đồ thị hàm số, với mỗi , có đúng một giá trị  sao cho tan .

### Vấn đề 2. Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số lượng giác

**Ví dụ 3.** Xét sự biến thiên của mỗi hàm số sau trên các khoảng tương ứng:

a)  trên khoảng ;

b)  trên khoảng .

**Giải**

a) Ta có:

. Do hàm số  đồng biến trên khoảng  nên hàm số đó cũng đồng biến trên khoảng .

Do hàm số  nghịch biến trên khoảng  nên hàm số đó cũng nghịch biến trên khoảng .

b) Ta có:

- .

Do hàm số  nghịch biến trên khoảng  nên hàm số đó cũng nghịch biến trên khoảng .

- .

Do hàm số  đồng biến trên khoảng  nên hàm số đó cũng đồng biến trên khoảng .

### Vấn đề 3. Xét tính chã̃n, lẻ của hàm số

**Ví dụ 4.** Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:

a) 

b) ;

c) .

**Giải**

a) Hàm số  là hàm số lẻ vì:

- Tập xác định là .

-  thì  và .

b) Hàm số  là hàm số lẻ vì:

- Tập xác định là .

-  thì  và .

c) Hàm số  là hàm số chẵn vì:

- Tập xác định là .

-  thì  và .

### Vấn đề 4. Ứng dụng

**Ví dụ 5.** Một dao động điều hòa có phương trình li độ dao động là: , trong đó  là thời gian tính bằng giây,  là biên độ dao động và  là li độ dao động đều được tính bằng centimét, . Khi đó, chu kì  của dao động là . Xác định giá trị của li độ khi  và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hòa trên đoạn  trong trường hợp:

a) ;

b) ;

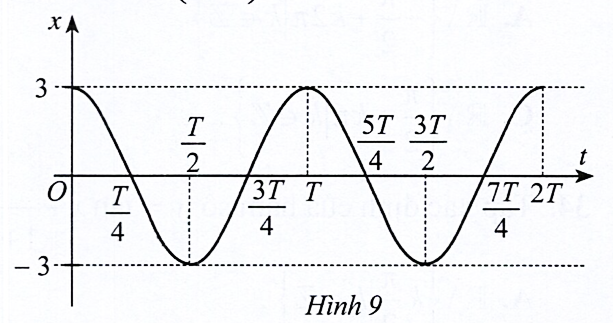
c) .

**Giải**

a) Khi , ta có: .

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 9:

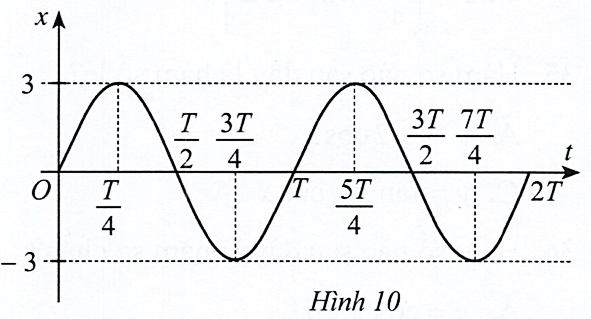
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 |  |  |  |  |
|  | 3 | 0 |  | 0 | 3 |



b) Khi , ta có: .

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 10:

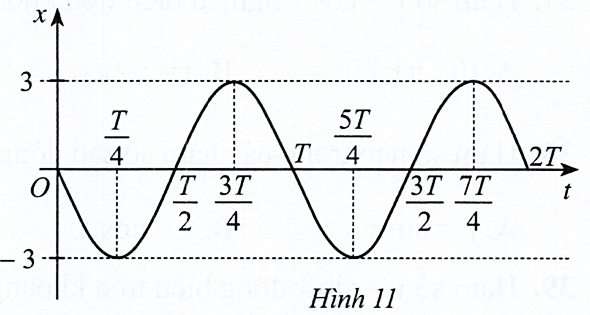
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 |  |  |  |  |
|  | 0 | 3 | 0 |  | 0 |



c) Khi , ta có: .

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 11 :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 |  |  |  |  |
|  | 0 |  | 0 | 3 | 0 |



## C. BÀI TẬP

**Câu 31.** Tập xác định của hàm số  là:

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 32.** Tập xác định của hàm số  là:

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 33.** Tập xác định của hàm số  là:

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 34.** Tập xác định của hàm số  là:

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 35.** Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 36.** Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 37**. Hàm số  nghịch biến trên khoảng:

**A.** .

**B.** .

**C.** 

**D.** .

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 38.** Hàm số nào trong các hàm số sau đồng biến trên khoảng  ?

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 39.** Hàm số  đồng biến trên khoảng:

**A.** 

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 40.** Số giá trị  sao cho  là:

**A.** 1 .

**B.** 2 .

**C.** 3 .

**D.** 4 .

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 41.** Tìm tập xác định của các hàm số:

a) ;

b) 

c) 

d) 

e) 

g) 

**Lời giải**

a) .

b) .

c) .

d) 

e) .

g) .

**Câu 42.** Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:

a) 

b) ;

c) 

d) 

e) 

g) 

**Lời giải**

a) Hàm số lẻ.

b) Hàm số chẵn.

c) Hàm số chẵn.

d) Hàm số chẵn.

e) Hàm số lẻ.

g) Hàm số lẻ.

**Câu 43**. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

a) 

b) ;

c) 

d) .

**Lời giải**

a) Tập xác định của hàm số là .

Ta có:  thì . Do đó, .

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 8 khi  hay ; giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2 khi  hay .

b) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng  khi  hay ; giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 3 khi  hay .

c) Ta có: .

Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 5 khi  hay ; giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 3 khi  hay .

d) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng  khi  hay ; giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng  khi  hay .

**Câu 44**. Xét sự biến thiên của mỗi hàm số sau trên các khoảng tương ứng:

a)  trên khoảng 

b)  trên khoảng .

**Lời giải**

a) Hàm số  nghịch biến trên khoảng ; đồng biến trên khoảng .

b) Hàm số  đồng biến trên khoảng ; nghịch biến trên khoảng .

**Câu 45**. Từ đồ thị hàm số , cho biết:

a) Có bao nhiêu giá trị của  trên đoạn  để ;

b) Có bao nhiêu giá trị của  trên khoảng  để .

**Lời giải**

a) 3 giá trị.

b) 2 giá trị.

**Câu 46**. Từ đồ thị hàm số , tìm:

a) Các giá trị của  để ;

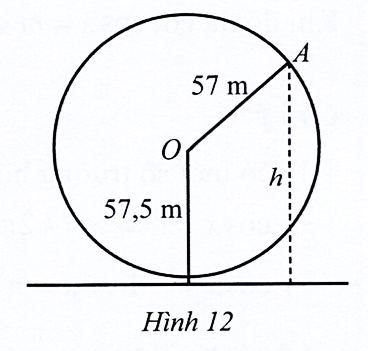
b) Các khoảng giá trị của  để hàm số  nhận giá trị dương.

**Lời giải**

a) Giá trị của  để  là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số  và đường thẳng . Dựa vào đồ thị, ta có  khi  và  với .

b) Hàm số  nhận giá trị dương tương ứng với phần đồ thị hàm số đó nằm phía trên trục hoành. Dựa vào đồ thị, ta có hàm số  nhận giá trị dương khi  với .

**Câu 47**. Một vòng quay trò chơi có bán kính , trục quay cách mặt đất , quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách  từ một cabin gắn tại điểm  của vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức:  với  là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút  (Hình 12).



a) Tính chu kì của hàm số  ?

b) Khi  (phút) thì khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng bao nhiêu?

c) Khi quay một vòng lần thứ nhất tính từ thời điểm  (phút), tại thời điểm nào của  thì cabin ở vị trí cao nhất? Ở vị trí đạt được chiều cao là  ?

**Lời giải**

a) Vì vòng quay trò chơi quay mỗi vòng hết 15 phút nên chu kì của hàm số  bằng 15 phút.

b) Khi  thì . Vậy khi đó khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng .

c) Khi quay một vòng, cabin ở vị trí cao nhất khi  hay  (phút); cabin đạt được chiều cao là  lần đầu tiên khi  (phút).