Mục lục

Chương 1

Đề thi Olympic Toán học Hùng vương

1.1 Olympic Toán học Hùng vương lần thứ 1, năm 2005

Câu 1. Các số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 lập thành một cấp số cộng tăng. Hỏi lập được bao nhiêu cấp số cộng thoả mãn điều kiện $a_1 > 50$ và $a_5 < 100$?
Câu 2. Các số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 lập thành một cấp số nhân tăng. Hỏi lập được bao nhiêu cấp số nhân thoả mãn điều kiện $a_5 < 100$?
Câu 3. Các số dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 thoả mãn các điều kiện

(i) $2a_1, 2a_2, 2a_3, 2a_4, 2a_5$ là các số nguyên dương,

(ii) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 99$.

Tìm giá trị lớn nhất của tích $P = a_1a_2a_3a_4a_5$.
Câu 4. Giả sử tam thức bậc hai $f(x)$ luôn luôn dương với mọi x. Chứng minh rằng $f(x)$ viết được dưới dạng tổng bình phương của hai nhị thức bậc nhất.
Câu 5. Giả sử hàm trùng phương $g(x) = x^4 + bx^2 + c$ luôn luôn dương với mọi x. Chứng minh rằng $g(x)$ viết được dưới dạng tổng bình phương của hai tam thức bậc hai.
Câu 6. Cho hình vuông $ABCD$. Tìm quỹ tích các điểm M thuộc hình vuông (phần bên trong và biên của hình vuông) sao cho diện tích các tam giác MAB và MAC bằng nhau.

Câu 7. Cho hình vuông $ABCD$. Giả sử E là trung điểm cạnh CD và F là một điểm ở bên trong hình vuông. Xác định vị trí điểm Q thuộc cạnh AB sao cho $\widehat{AQE} = \widehat{BQF}$.

1.2 Olympic Toán học Hùng vương lần thứ 2, năm 2006

Câu 1. Số đo các góc trong của một ngũ giác lồi có tỷ lệ 2 : 3 : 3 : 5 : 5. Số đo của góc nhỏ nhất bằng

[(A)] 20^0 , [(B)] 40^0 , [(C)] 60^0 , [(D)] 80^0 [(E)] 90^0.

Câu 2. Cho $a \neq 0$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{2005} + y^{2005} + z^{2005} = a^{2005} \\ x^{2006} + y^{2006} + z^{2006} = a^{2006} \\ x^{2007} + y^{2007} + z^{2007} = a^{2007}. \end{cases}$$

Câu 3. Xác định bộ số dương a, b, c sao cho

$$ax^9y^{12} + by^9z^9 + cz^{11}x^8 \geqslant 15x^4y^8z^7, \;\; \forall x > 0, y > 0, z > 0.$$

Câu 4. Cho tam giác ABC và điểm M thuộc BC. Xét hình bình hành $APMN$, trong đó P thuộc AB và N thuộc AC và hình bình hành $ABDC$ với đường chéo AD và BC. O là giao điểm của BN và CP. Chứng minh rằng $\widehat{PMO} = \widehat{NMO}$ khi và chỉ khi $\widehat{BDM} = \widehat{CDM}$.

Câu 5. Cho số dương M. Xét các tam thức bậc hai $g(x) = x^2 + ax + b$ có nghiêm thực x_1, x_2 và các hệ số thoả mãn điều kiện

$$\max\{|a|, |b|, 1\} = M.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$(1 + |x_1|)(1 + |x_2|).$$

1.3 Olympic Toán học Hùng vương lần thứ 3, năm 2007

Câu 1. Một đa giác lồi có nhiều nhất là bao nhiêu góc nhọn?

(A) 2; **(B)** 3; **(C)** 4; **(D)** 5; **(E)** 6.

Câu 2. Một đa giác lồi có nhiều nhất là bao nhiêu góc không tù?
(A) 2; **(B)** 3; **(C)** 4; **(D)** 5; **(E)** 6.

Câu 3. Xác định hai chữ số tận cùng của số sau

$$M = 2^3 + 20^{2006} + 200^{2007} + 2006^{2008}?$$

(A) 04; **(B)** 34; **(C)** 24; **(D)** 14; **(E)** Khác các đáp số đã nêu.

Câu 4. Có n viên bi trong hộp được gắn nhãn lần lượt là $1, 2, \ldots, n$. Người ta lấy ra một viên bi thì tổng các nhãn của số bi còn lại là 5048. Hỏi viên bi đó được gắn nhãn là số nào?
(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4; **(E)** 5.

Câu 5. Cho số tự nhiên $\overline{abc}$ chia hết cho 37. Chứng minh rằng các số $\overline{bca}$ và $\overline{cab}$ cũng chia hết cho 37.

Câu 6. Cho $0 < a \leqslant 2$. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = ay \\ y + \dfrac{1}{y} = az \\ z + \dfrac{1}{z} = ax. \end{cases}$$

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB < BC$. Đường phân giác BP của góc $\angle ABC$ cắt AD ở P. Biết rằng ΔPBC là tam giác cân, $PB = PC = 6$cm và $PD = 5$cm. Tính độ dài các cạnh của hình bình hành.

Câu 8. Chứng minh rằng tam thức bậc hai $g(x) = 3x^2 - 2ax + b$ có nghiệm khi và chỉ khi tồn tại bộ số α, β, γ sao cho

$$\begin{cases} a = \alpha + \beta + \gamma \\ b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha. \end{cases}$$

Câu 9. Cho ba số dương a_1, a_2, a_3. Các số nguyên $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ và $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ cho trước thoả mãn các điều kiện

$$\begin{cases} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = a_1x^{\alpha_1}y^{\beta_1} + a_2x^{\alpha_2}y^{\beta_2} + a_3x^{\alpha_3}y^{\beta_3},\ \ x > 0,\ y > 0.$$

Câu 10. Tính

$$M = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}} + \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{5}}.$$

Chương 2

Đáp án Olympic Toán học Hùng vương

2.1 Đáp án Olympic Toán học Hùng vương lần thứ 1

Câu 1. (7 điểm)

Các số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 lập thành một cấp số cộng tăng. Có bao nhiêu cấp số cộng thoả mãn điều kiện $a_1 > 50$, $a_5 < 100$?

Giải. Ta có $a_5 = a_1 + 4d$ với d nguyên dương sao cho

$$\begin{cases} a_1 > 50 \\ a_1 + 4d < 100 \end{cases} \tag{2.1}$$

Nếu $d \geqslant 13$ thì $a_5 > 50 + 4.13 > 100$. Vậy, $1 \leqslant d \leqslant 12$. Từ đây ta có tính toán cụ thể cho từng trường hợp:

$d = 1$. Có 45 dãy.

$d = 2$. Có 41 dãy.

$d = 3$. Có 37 dãy.

$d = 4$. Có 33 dãy.

$d = 5$. Có 29 dãy.

$d = 6$. Có 25 dãy.

$d = 7$. Có 21 dãy.

$d = 8$. Có 17 dãy.

$d = 9$. Có 13 dãy.

$d = 10$. Có 9 dãy.

$d = 11$. Có 5 dãy.

$d = 12$. Có 1 dãy.

Có $1 + 5 + 9 + \cdots 41 + 45 = (1 + 45) \times 6 = 276$ dãy.

Cách khác: Sau khi chứng minh $1 \leqslant d \leqslant 12$, ta xây dựng công thức tổng quát

$$S = 49 \times 12 - 4\sum_{d=1}^{12} d$$

và thu được $S = 276$.

Câu 2. (7 điểm)

Các số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 lập thành một cấp số nhân tăng. Có bao nhiêu cấp số nhân thoả mãn điều kiện $a_5 < 100$?

Giải. Giả sử $\dfrac{n}{m}$ là công bội của cấp số nhân thoả mãn điều kiện bài toán, $n > m$, $(m, n) = 1$. Khi đó $a_5 = a_1\dfrac{n^4}{m^4}$, nên $a_1 = km^4$ với k nguyên dương. Các số hạng của cấp số nhân đó là

$$km^4,\ km^3n,\ km^2n^2,\ kmn^3,\ kn^4.$$

Nếu $n > 4$ thì $kn^4 \geqslant n^4 > 256 > 100$. Vì vậy $n = 2$ và $n = 3$.

$n = 3$ và $m = 2$ thì $81k < 100$ nên $k = 1$. Có một cấp số

$$(16, 24, 36, 54, 81).$$

$n = 3$ và $m = 1$ thì $81k < 100$ nên $k = 1$. Có một cấp số

$$(1, 3, 9, 27, 81).$$

$n = 2$ và $m = 1$ thì $16k < 100$ nên $k = 1, 2, \ldots, 6$. Có 6 cấp số:

$$(1, 2, \ldots), (2, 4, \ldots), (3, 6, \ldots), (4, 8, \ldots), (5, 10, \ldots), (6, 12, \ldots).$$

Vậy tổng cộng có 8 cấp số nhân thoả mãn điều kiện $a_5 < 100$.

Câu 3. (7 điểm)

Các số dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 thoả mãn các điều kiện

(i) $2a_1, 2a_2, 2a_3, 2a_4, 2a_5$ là các số nguyên dương

(ii) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 99.$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của tích $P = a_1a_2a_3a_4a_5$?

Giải. Viết bài toán dưới dạng

Các số nguyên dương x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 thoả mãn các điều kiện

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 198.$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của tích $P = \frac{1}{2^5}x_1x_2x_3x_4x_5$?

Không giảm tổng quát, giả sử $x_1 \leq x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_5$. Khi đó $x_3 + x_4 + x_5 \geqslant \dfrac{3.198}{5} = 118.$

Nếu $x_3 + x_4 + x_5 = 118$ thì $x_1 + x_2 = 40$. Dễ thấy vô lý.

Nếu $x_3 + x_4 + x_5 = 119$ thì cũng không xảy ra. Do vậy, ta xét $x_3 + x_4 + x_5 \geqslant 120$. áp dung bất dẳng thức Cauchy, ta có

$$\sqrt[5]{(40x_1)(40x_2)(39x_3)(39x_4)(39x_5)} \leqslant \frac{40(x_1 + x_2) + 39(x_3 + x_4 + x_5)}{5}$$
$$= \frac{40(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) - (x_3 + x_4 + x_5)}{5}$$
$$\leqslant \frac{40 \times 198 - 120}{5} = 1560.$$

Từ đó suy ra $P_{\max} = 3042000$ khi $a_1 = a_2 = 19,5$ và $a_3 = a_4 = a_5 = 20$.

Câu 4. (7 điểm)

Giả sử tam thức bậc hai $f(x)$ luôn dương với mọi x. Chứng minh rằng $f(x)$ viết được dưới dạng tổng bình phương của hai nhị thức bậc nhất.

Giải. Theo giả thiết, ta có

$$f(x) = ax^2 + bx + c > 0, \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra

$$f(x) = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} > 0, \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sử dụng đồng nhất thức

$$A^2 + B^2 = \Big(\frac{A+B}{\sqrt{2}}\Big)^2 + \Big(\frac{A-B}{\sqrt{2}}\Big)^2,$$

ta có ngay điều phải chứng minh.

Câu 5. (7 điểm)

Giả sử hàm trùng phương $g(x) = x^4 + bx^2 + c$ luôn luôn dương với mọi x. Chứng minh rằng $g(x)$ viết được dưới dạng tổng bình phương của hai tam thức bậc hai.

Giải. Nhận xét rằng $c > 0$.

Khi $\Delta < 0$, ta nhận được kết quả như Câu 4.

Khi $\Delta \geq 0$ tức là $b^2 - 4c \geq 0$ hay $b - 2\sqrt{c} \geq 0$, khi đó ta sử dụng biến đổi sau

$$g(x) = (x^2 + \sqrt{c})^2 + (b - 2\sqrt{c})x^2.$$

Câu 6. (7 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$. Tìm quỹ tích các điểm M thuộc hình vuông (phần bên trong và biên của hình vuông) sao cho diện tích các tam giác MAB và MAC bằng nhau.

Giải. Giả sử tồn tại điểm M thoả mãn yêu cầu bài toán. Nối AM, ký kiệu I là giao điểm của AM với BC. Hạ các đường BH, CK vuông góc với AM.

1) Xét trường hợp M thuộc tam giác ABC. Từ giả thiết suy ra $BH = CK$. Do đó, ta có hai tam giác bằng nhau $\triangle BHI = \triangle CKI$. Vậy, I cần phải nằm trên đoạn thẳng AI. Ngược lại, dễ dàng chưng minh được rằng, nếu $M \in AI$ thì $S(MAB) = S(MAC)$.

2) Xét trường hợp M thuộc tam giác ADC. Từ giả thiết suy ra $BH = CK$. Do đó, $M \in AD$. Vậy, M cần phải nằm trên cạnh AD. Ngược lại, dễ dàng chứng minh được rằng nếu $M \in AD$ thì hai tam giác MAB và MAC có diện tích bằng nhau.

Câu 7. (7 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$. Giả sử E là trung điểm cạnh CD và F là một điểm ở bên trong hình vuông. Xác định vị trí điểm Q thuộc cạnh AB sao cho $\widehat{AQE} = \widehat{BQF}$.

Giải.

Giả sử tồn tại điểm $Q \in AB$ thoả mãn điều kiện bài toán. Ký hiệu P là điểm giữa cạnh AB và K là chân đường vuông góc của F lên AB.

Xét trường hợp $K \in PB$. Dễ dàng chứng minh $Q \in PB$. Gọi F' là điểm đối xứng của F qua AB. Dễ dàng thấy rằng $\widehat{FQB} = \widehat{F'QB}$. Suy ra $\widehat{AQE} = \widehat{B'QF'}$. Do đó, ba điểm E, Q, F' thẳng hàng. Hay, Q là giao điểm của EF' với AB.

Xét trường hợp $K \in AP$. Dễ dàng chứng minh $Q \in AP$. Tương tự như trường hợp trên, ta chứng minh được Q là giao điểm của EF' với AB.

2.2 Đáp án Olympic Toán học Hùng vương lần thứ 3

Câu 1. Số đo các góc trong của một ngũ giác lồi có tỷ lệ 2 : 3 : 3 : 5 : 5. Số đo của góc nhỏ nhất bằng

[(A)] 20^0 , [(B)] 40^0 , [(C)] 60^0 , [(D)] 80^0 [(E)] 90^0.

Giải. [(C)].

Tổng các góc trong của ngũ giác lồi có số đo bằng 540^0. Khi đó

$$2x + 3x + 3x + 5x + 5x = 540^0.$$

Suy ra $x = 30^0$. Vậy, số đo góc nhỏ nhất bằng 60^0.

Câu 2. Cho $a \neq 0$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{2005} + y^{2005} + z^{2005} = a^{2005} \\ x^{2006} + y^{2006} + z^{2006} = a^{2006} \\ x^{2007} + y^{2007} + z^{2007} = a^{2007}. \end{cases}$$

Giải. Trước hết ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{2005} + y^{2005} + z^{2005} = 1 \\ x^{2006} + y^{2006} + z^{2006} = 1 \\ x^{2007} + y^{2007} + z^{2007} = 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Từ phương trình thứ 2 trong hệ (2.2) dễ dàng suy ra $x, y, z \in [-1, 1]$. Trừ phương trình thứ 2 cho phương trình thứ ba trong hệ đó ta thu được

$$x^{2006}(1-x) + y^{2006}(1-y) + z^{2006}(1-z) = .0$$

Dễ dàng suy ra $x = 0, 1; y = 0, 1; z = 0, 1$. Thử lại ta được ba nghiệm của hệ (2.2) là

$$(x, y, z) = (1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1).$$

Bây giờ ta giải bài toán. Đặt

$$x' = \frac{x}{a},\ \ y' = \frac{y}{a},\ \ z' = \frac{z}{a}.$$

Khi đó (x', y', z') là nghiệm của phương trình (2.2). Vậy nghiệm của bài toán là

$$(x, y, z) = (a, 0, 0); (0, a, 0); (0, 0, a).$$

Câu 3. Xác định bộ số dương a, b, c sao cho

$$ax^9y^{12} + by^9z^9 + cz^{11}x^8 \geqslant 15x^4y^8z^7,\ \ \forall x > 0, y > 0, z > 0.$$

Giải.

Sử dụng bất đẳng thức giữa các trung bình cộng và nhân

$$\frac{au + bv + cw}{a + b + c} \geqslant (u^a v^b w^c)^{1/(a+b+c)},\ \ \forall a, b, c;\ \ u.v, w > 0. \qquad (2)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $u = v = w = 1$. Ta cần chọn các số dương a, b, c sao cho đồng thời xảy ra

$$\begin{cases} \dfrac{ax^9 + b.1 + cx^8}{15} \geqslant x^4,\ \ \forall x > 0, \\[2ex] \dfrac{ay^{12} + by^9 + c.1}{15} \geqslant y^8,\ \ \forall y > 0, \\[2ex] \dfrac{a.1 + bz^9 + cz^{11}}{15} \geqslant z^7,\ \ \forall z > 0. \end{cases}$$

Theo (2) thì

$$\begin{cases} a + b + c = 15 \\ \dfrac{9a + 8c}{15} = 4 \\ \dfrac{12a + 9b}{15} = 8 \\ \dfrac{9b + 11c}{15} = 7. \end{cases}$$

Hệ phương trình tuyến tính này cho ta nghiệm duy nhất $a = 4$, $b = 8$ và $c = 3$.

Thế các giá trị a, b, c vào vế trái của (1), ta thu được

$$4x^9y^{12} + 8y^9z^9 + 3z^{11}x^8 \geqslant 15x^4y^8z^7,\ \ \forall x > 0, y > 0, z > 0$$

là đúng.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}&\frac{4x^9y^{12}+8y^9z^9+3z^{11}x^8}{15}=\\&\frac{(x^9y^{12}+\cdots+x^9y^{12})+(y^9z^9+\cdots+y^9z^9)+(z^{11}x^8+z^{11}x^8+z^{11}x^8)}{15}\\&\geqslant\Big[x^{4.9+3.8}y^{4.12+8.9}z^{8.9+3.11}\Big]^{1/15}=x^4y^8z^7,\end{aligned}$$

tức là

$$4x^9y^{12}+8y^9z^9+3z^{11}x^8\geqslant 15x^4y^8z^7,\ \ \forall x>0,y>0,z>0,$$

điều phải chứng minh.

Câu 4. Cho tam giác ABC và điểm M thuộc BC. Xét hình bình hành $APMN$, trong đó P thuộc AB và N thuộc AC và hình bình hành $ABDC$ với đường chéo AD và BC. O là giao điểm của BN và CP. Chứng minh rằng $\widehat{PMO}=\widehat{NMO}$ khi và chỉ khi $\widehat{BDM}=\widehat{CDM}$.

Giải. Ta chứng minh các điểm O,M,D thẳng hàng. Giả sử đường thẳng chứa OM cắt BD và CD lần lượt tại D_1 và D_2 tương ứng. Ta chứng minh $D_1\equiv D_2\equiv D$. Gọi K là giao điểm của MP và BN, L là giao điểm của MN và CP. Khi đó thì

$$\frac{NK}{NB}=\frac{AP}{AB}=\frac{NL}{NM}.$$

Suy ra

$$\frac{NK}{NB}=\frac{NL}{NM}.$$

Do đó $KL\parallel BC$. Vậy nên

$$\frac{OM}{OD_1}=\frac{OK}{OB}=\frac{OL}{OC}=\frac{OM}{OD_2}.$$

Điều đó chứng tỏ $D_1\equiv D_2\equiv D$ hay các điểm O,M,D thẳng hàng. Khi đó hiển nhiên $\widehat{MPO}=\widehat{NPO}$ khi và chỉ khi $\widehat{BDP}=\widehat{CDP}$.

Câu 5. Cho số dương M. Xét các tam thức bậc hai $g(x)=x^2+ax+b$ có nghiệm thực x_1,x_2 và các hệ số thoả mãn điều kiện

$$\max\{|a|,|b|,1\}=M.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$(1+|x_1|)(1+|x_2|).$$

Giải. Ta có
$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2},\ \ x_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$
và
$$(1 + |x_1|)(1 + |x_2|) = 1 + |x_1x_2| + |x_1| + |x_2| = 1 + |b| + |x_1| + |x_2|.$$
Nếu $b \geqslant 0$ thì $|x_1| + |x_2| = |x_1 + x_2| = |a|$. Do đó
$$(1 + |x_1|)(1 + |x_2|) \leqslant 1 + |b| + |a| \leqslant 1 + 2M. \quad (1)$$
Nếu $b < 0$ thì $x_1 < 0$, và $x_2 > 0$. Khi đó
$$|x_1| = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$
$$|x_2| = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$
Suy ra
$$|x_1| + |x_2| = \sqrt{a^2 - 4b} \leqslant \sqrt{M^2 + 4M}.$$
Do đó
$$(1 + |x_1|)(1 + |x_2|) \leqslant 1 + M + \sqrt{M^2 + 4M}. \quad (2)$$
So sánh (1) và (2), ta thu được
$$\max[(1 + |x_1|)(1 + |x_2|)] = 1 + M + \sqrt{M^2 + 4M}$$
và đạt được khi $a = \pm M$, $b = -M$. Lúc đó phương trình bậc hai có dạng
$$x^2 \pm Mx - M = 0.$$

2.3 Đáp án Olympic Toán học Hùng vương lần thứ 3

Câu 1. Một đa giác lồi có nhiều nhất là bao nhiêu góc nhọn?
(A) 2; **(B)** 3; **(C)** 4; **(D)** 5; **(E)** 6.

Giải. **(B)** 3.

Câu 2. Một đa giác lồi có nhiều nhất là bao nhiêu góc không tù?
(A) 2; **(B)** 3; **(C)** 4; **(D)** 5; **(E)** 6.

Giải. **(C)** 4.

Câu 3. Xác định hai chữ số tận cùng của số sau

$$M = 2^3 + 20^{2006} + 200^{2007} + 2006^{2008}?$$

(A) 04; **(B)** 34; **(C)** 24; **(D)** 14; **(E)** Khác các đáp số đã nêu.

Giải. **(C)** 24.

Câu 4. Có n viên bi trong hộp được gắn nhãn lần lượt là $1, 2, \ldots, n$. Người ta lấy ra một viên bi thì tổng các nhãn của số bi còn lại là 5048. Hỏi viên bi đó được gắn nhãn là số nào?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4; **(E)** 5.

Giải. **(B)** 2. Ta có

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vậy nên

$$\frac{n(n+1)}{2} - k = 5048$$

hay

$$n(n+1) - 2k = 10096.$$

Ta có đẳng thức sau:

$$100.101 - 22 = 10096.$$

Câu 5. Cho số tự nhiên $\overline{abc}$ chia hết cho 37. Chứng minh rằng các số $\overline{bca}$ và $\overline{cab}$ cũng chia hết cho 37.

Giải. Ta có, theo giả thiết thì

$$M = (100a + 10b + c) \vdots 37$$

và

$$N = 11\overline{bca} = 1100b + 110c + 11a.$$

Suy ra

$$M + N = 111(a + 10b + c) \vdots 37.$$

Tiếp theo, ta có

$$P = 101\overline{cab} = 10100c + 1010a + 101b$$

nên

$$M + P = 111(a + b + 273c) \vdots 37.$$

Câu 6. Cho $0 < a \leqslant 2$. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = ay \\ y + \dfrac{1}{y} = az \\ z + \dfrac{1}{z} = ax. \end{cases}$$

Giải. Chỉ cần xét $x, y, z > 0$. Từ bài ra, do $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$, nên chỉ cần xét $x, y, z \geqslant 1$. Gọi $x = \max\{x, y, z\}$.

Nếu $y \geqslant z$ thì

$$ax \geqslant ay \geqslant az$$

nên

$$z + \frac{1}{z} \geqslant x + \frac{1}{x} \geqslant y + \frac{1}{x}.$$

Do $x, y, z \geqslant 1$ nên

$$\frac{1}{z} \leqslant \frac{1}{x}$$

hay $x \leqslant z$. Suy ra $x = y = z$ và từ đó ta có

- Nếu $0 < a \leqslant 1$ thì hệ vô nghiệm,
- Nếu $1 < a \leqslant 2$ thì

$$x = y = z = \sqrt{\frac{1}{a-1}}.$$

Nếu $z \geqslant y$ thì

$$z + \frac{1}{z} \geqslant y + \frac{1}{y}$$

và ta cũng thu được kết quả như đã có ở trên.

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB < BC$. Đường phân giác BP của góc $\angle ABC$ cắt AD ở P. Biết rằng ΔPBC là tam giác cân, $PB = PC = 6$cm và $PD = 5$cm. Tính độ dài các cạnh của hình bình hành.

Giải. Ta có $\Delta ABP \sim \Delta PBC$ nên

$$\frac{x}{6} = \frac{6}{x+5}.$$

Giải phương trình này ta thu được $x = 4$.

Câu 8. Chứng minh rằng tam thức bậc hai $g(x) = 3x^2 - 2ax + b$ có nghiệm khi và chỉ khi tồn tại bộ số α, β, γ sao cho

$$\begin{cases} a = \alpha + \beta + \gamma \\ b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha. \end{cases}$$

Giải. Điều kiện đủ là hiển nhiên vì

$$\Delta' = a^2 - 3b = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \geqslant 0$$

ứng với mọi bộ α, β, γ.

Ngược lại, nếu $g(x)$ có hai nghiệm là u, v. Nếu $u = v$ thì chỉ cần chọn $\alpha = \beta = \gamma = u$. Nếu $u \neq v$ thì chọn $\alpha = u$, $\beta = v$ và $\gamma = \dfrac{u+v}{2}$.

Câu 9. Cho ba số dương a_1, a_2, a_3. Các số nguyên $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ và $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ cho trước thoả mãn các điều kiện

$$\begin{cases} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = 0 \\ a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = a_1x^{\alpha_1}y^{\beta_1} + a_2x^{\alpha_2}y^{\beta_2} + a_3x^{\alpha_3}y^{\beta_3},\ \ x > 0,\, y > 0.$$

Giải. Ta có

$$\frac{1}{a_1 + a_2 + a_3}(a_1x^{\alpha_1}y^{\beta_1} + a_2x^{\alpha_2}y^{\beta_2} + a_3x^{\alpha_3}y^{\beta_3})$$
$$\geqslant x^{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3}y^{a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3} = 1.$$

Vậy nên $M \geqslant a_1 + a_2 + a_3$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Câu 10. Tính

$$M = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}} + \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{5}}.$$

Giải. Dễ thấy phương trình $\cos 3x + \cos 2x = 0$ có nghiệm

$$x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi;\ \ x = \pi + 2k\pi.$$

Mặt khác, phương trình trên tương đương với

$$4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 3\cos x - 1 = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad (\cos x + 1)(4\cos^2 x - 2\cos x - 1) = 0.$$

Do đó $\cos\dfrac{\pi}{5}$, $\cos\dfrac{3\pi}{5}$ là hai nghiệm của phương trình $4t^2 - 2t - 1 = 0$. Suy ra $\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}; \dfrac{1}{\cos\frac{3\pi}{5}}$ là hai nghiệm của phương trình

$$4\frac{1}{t^2} - 2\frac{1}{t} - 1 = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad t^2 + 2t - 4 = 0.$$

Sử dụng định lý Viet, ta thu được $M = -2$.

Nhận xét 2.1. *Trong SGK có bài tập: Biết rằng* $\cos 36^0 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. *Tính* $\sin 18^0$. *Do đó, có thể học sinh sử dụng kết quả này để tính* M.

Chương 3

Olympic Toán học Hà Nội mở rộng

3.1 Olympic Toán học Hà Nội mở rộng năm 2006

3.1.1 Lớp 8 (Junior Section)

Chủ Nhật, 09 tháng 04 năm 2006 14h00-15h30

Câu 1. Hãy xác định hai chữ số cuối của số

$$(11 + 12 + 13 + \cdots + 2006)^2?$$

Câu 2. Hãy xác định hai chữ số cuối của tổng

$$2005^{11} + 2005^{12} + \cdots + 2005^{2006}.$$

Câu 3. Hãy xác định số lượng các bộ ba số nguyên dương phân biệt (x, y, z) thoả mãn đồng thời các phương trình

$$x^2 + y - z = 100 \quad \text{và} \quad x + y^2 - z = 124.$$

Câu 4. Giả sử x và y là hai số thực thoả mãn các hệ thức

$$x + y - xy = 155 \quad \text{và} \quad x^2 + y^2 = 325.$$

Tìm các giá trị của biểu thức $|x^3 - y^3|$.

Câu 5. Cho số nguyên dương n và xét các bộ ba số tuỳ ý có tổng bằng $3n+1$ được chọn từ tập $\{1, 2, 3, \ldots, 3n+1\}$.

Tìm giá trị lớn nhất của tích các số từ bộ ba số đó?

Câu 6. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Tìm quỹ tích các điểm M nằm trong hình lục giác đó sao cho

$$\text{Diện tích } \Delta MAC = \text{Diện tích } \Delta MCD.$$

Câu 7. Trên đường tròn (O) bán kính 15cm cho hai điểm A, B. Đường cao OH của tam giác OAB cắt (O) tại C. Tính độ dài AC biết rằng $AB = 16cm$?

Câu 8. Trong ΔABC cho $PQ//BC$, trong đó P và Q lần lượt thuộc AB và AC tương ứng. Các đoạn thẳng PC và QB cắt nhau tại G. Biết rằng $EF//BC$, trong đó $G \in EF$, $E \in AB$ và $F \in AC$ trong đó $PQ = a$ và $EF = b$. Tính độ dài BC.

Câu 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$x^2 + y^2 - x - y - xy?$$

3.1.2 Lớp 10 (Senior Section)

Chủ Nhật, 09 tháng 04 năm 2006 *14h00-15h30*

Câu 1. Hãy xác định ba chữ số cuối cùng của tổng

$$11! + 12! + 13! + \cdots + 2006!$$

Câu 2. Hãy xác định ba chữ số cuối cùng của tổng

$$2005^{11} + 2005^{12} + \cdots + 2005^{2006}.$$

Câu 3. Biết rằng

$$a^{\log_b c} + b^{\log_c a} = m.$$

Tính giá trị của biểu thức

$$c^{\log_b a} + a^{\log_c b}?$$

Câu 4. So sánh hai số

$$2^{\sqrt{2}}, \quad 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \text{và} \quad 3.$$

Câu 5. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Tìm quỹ tích các điểm M nằm trong hình lục giác đó sao cho

$$\text{Diện tích } \Delta MAC = \text{Diện tích } \Delta MCD.$$

Câu 6. Trên đường tròn bán kính 30cm are cho hai điểm A, B với $AB = 16$cm và C là trung điểm của AB. Tính độ dài đường vuông góc hạ từ C tới đường tròn?

Câu 7. Trong ΔABC cho $PQ//BC$, trong đó P và Q lần lượt thuộc AB và AC tương ứng. Các đoạn thẳng PC và QB cắt nhau tại G. Biết rằng $EF//BC$, trong đó $G \in EF$, $E \in AB$ và $F \in AC$ trong đó $PQ = a$ và $EF = b$. Tính độ dài BC.

Câu 8. Xác định các đa thức $P(x)$ thoả mãn điều kiện

$$P(x) + Pig(\frac{1}{x}ig) = x + \frac{1}{x}, \quad \forall x \neq 0.$$

Câu 9. Xét các số x, y, z thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$|x^3 + y^3 + z^3 - xyz|?$$

3.2 Olympic Toán học Hà Nội mở rộng năm 2007

3.2.1 Lớp 8 (Junior Section)

Sunday, 15 April 2007 09h00-11h00

Câu 1. Xác định hai chữ số cuối cùng của số

$$(3 + 7 + 11 + \cdots + 2007)^2?$$

(A) 01; (B) 11; (C) 23; (D) 37; (E) None of the above.

Câu 2. Xác định số nguyên dương n lớn nhất thoả mãn bất đẳng thức: $n^{2006} < 7^{2007}$?

(A) 7; (B) 8; (C) 9; (D) 10; (E) 11.

Câu 3. Số các đường chéo có thể có của một đa giác lồi là bao nhiêu?

(A) 02; (B) 21; (C) 32; (D) 54; (E) 63.

Câu 4. Let m and n denote the number of digits in 2^{2007} and 5^{2007} when expressed in base 10. What is the sum $m+n$?

(A) 2004; (B) 2005; (C) 2006; (D) 2007; (E) 2008.

Câu 5. Let be given an open interval $(\alpha; eta)$ with $eta - \alpha = \dfrac{1}{2007}$. Determine the maximum number of irreducible fractions $\dfrac{a}{b}$ in $(\alpha; eta)$ with $1 \leq b \leq 2007$?

(A) 1002; (B) 1003; (C) 1004; (D) 1005; (E) 1006.

Câu 6. In triangle ABC, $\angle BAC = 60^0$, $\angle ACB = 90^0$ and D is on BC. If AD bisects $\angle BAC$ and $CD = 3cm$. Then DB is

(A) 3; (B) 4; (C) 5; (D) 6; (E) 7.

Câu 7. Nine points, no three of which lie on the same straight line, are located inside an equilateral triangle of side 4. Prove that some three of these points are vertices of a triangle whose area is not greater than $\sqrt{3}$.

Câu 8. Let a, b, c be positive integers. Prove that

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Câu 9. A triangle is said to be the Heron triangle if it has integer sides and integer area. In a Heron triangle, the sides a, b, c satisfy the equation $b = a(a-c)$. Prove that the triangle is isosceles.

Câu 10. Let a, b, c be positive real numbers such that $\dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} + \dfrac{1}{ab} \geq 1$. Prove that $\dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ca} + \dfrac{c}{ab} \geq 1$.

Câu 11. How many possible values are there for the sum $a+b+c+d$ if a, b, c, d are positive integers and $abcd = 2007$.

Câu 12. Calculate the sum

$$\frac{5}{2.7} + \frac{5}{7.12} + \cdots + \frac{5}{2002.2007}.$$

Câu 13. Let be given triangle ABC. Find all points M such that area of ΔMAB= area of ΔMAC.

Câu 14. How many ordered pairs of integers (x, y) satisfy the equation

$$2x^2 + y^2 + xy = 2(x+y)?$$

Câu 15. Let $p = \overline{abc}$ be the 3-digit prime number. Prove that the equation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

has no rational roots.

3.2.2 Senior Section

Sunday, 15 April 2007 09h00-11h00

Câu 1. What is the last two digits of the number

$$\left(11^2 + 15^2 + 19^2 + \cdots + 2007^2\right)^2?$$

(A) 01; (B) 21; (C) 31; (D) 41; (E) None of the above.

Câu 2. Which is largest positive integer n satisfying the following inequality:

$$n^{2007} > (2007)^n.$$

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4; (E) None of the above.

Câu 3. Find the number of different positive integer triples (x, y, z) satsfying the equations

$$x + y - z = 1 \quad \text{and} \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4; (E) None of the above.

Câu 4. List the numbers $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, , $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$ and $\sqrt[6]{6}$ in order from greatest to least.

Câu 5. Suppose that A, B, C, D are points on a circle, AB is the diameter, CD is perpendicular to AB and meets AB at E, AB and CD are integers and $AE - EB = \sqrt{3}$. Find AE?

Câu 6. Let $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ and $|P(x)| \leq 1$ for all x such that $|x| \leq 1$. Prove that $|a| + |b| \leq 5$.

Câu 7. Find all sequences of integers $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ such that ij divides $x_i + x_j$ for any two distinct positive integers i and j.

Câu 8. Let ABC be an equilateral triangle. For a point M inside ΔABC, let D, E, F be the feet of the perpendiculars from M onto BC, CA, AB, respectively. Find the locus of all such points M for which $\angle FDE$ is a right angle.

Câu 9. Let $a_1, a_2, \ldots, a_{2007}$ be real numbers such that

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007} \geq (2007)^2 \text{ and } a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2007}^2 \leq (2007)^3 - 1.$$

Prove that $a_k \in [2006; 2008]$ for all $k \in \{1, 2, \ldots, 2007\}$.

Câu 10. What is the smallest possible value of

$$x^2 + 2y^2 - x - 2y - xy?$$

Câu 11. Find all polynomials $P(x)$ satisfying the equation

$$(2x - 1)P(x) = (x - 1)P(2x), \ \forall x.$$

Câu 12. Calculate the sum

$$\frac{1}{2.7.12} + \frac{1}{7.12.17} + \cdots + \frac{1}{1997.2002.2007}.$$

Câu 13. Let ABC be an acute-angle triangle with $BC > CA$. Let O, H and F be the circumcenter, orthocentre and the foot of its altitude CH, respectively. Suppose that the perpendicular to OF at F meet the side CA at P. Prove $\angle FHP = \angle BAC$.

Câu 14. How many ordered pairs of integers (x, y) satisfy the equation

$$x^2 + y^2 + xy = 4(x + y)?$$

Câu 15. Let $p = \overline{abcd}$ be the 4-digit prime number. Prove that the equation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

has no rational roots.

3.2.3 Junior Section

Sunday, 09 April 2006 14h00-15h30

Q1. What is the last two digits of the number

$$(11 + 12 + 13 + \cdots + 2006)^2?$$

Q2. Find the last two digits of the sum

$$2005^{11} + 2005^{12} + \cdots + 2005^{2006}.$$

Q3. Find the number of different positive integer triples (x, y, z) satisfying the equations

$$x^2 + y - z = 100 \quad \text{and} \quad x + y^2 - z = 124.$$

Q4. Suppose x and y are two real numbers such that

$$x + y - xy = 155 \quad \text{and} \quad x^2 + y^2 = 325.$$

Find the value of $|x^3 - y^3|$.

Q5. Suppose n is a positive integer and 3 arbitrary numbers are choosen from the set $\{1, 2, 3, \ldots, 3n+1\}$ with their sum equal to $3n + 1$.

What is the largest possible product of those 3 numbers?

Q6. The figure $ABCDEF$ is a regular hexagon. Find all points M belonging to the hexagon such that

$$\text{Area of triangle } MAC = \text{Area of triangle } MCD.$$

Q7. On the circle (O) of radius 15cm are given 2 points A, B. The altitude OH of the triangle OAB intersect (O) at C. What is AC if $AB = 16cm$?

Q8. In ΔABC, $PQ//BC$ where P and Q are points on AB and AC respectively. The lines PC and QB intersect at G. It is also given $EF//BC$, where $G \in EF$, $E \in AB$ and $F \in AC$ with $PQ = a$ and $EF = b$. Find value of BC.

Q9. What is the smallest possible value of

$$x^2 + y^2 - x - y - xy?$$

3.2.4 Senior Section

Sunday, 09 April 2006 *14h00-15h30*

Q1. What is the last three digits of the sum

$$11! + 12! + 13! + \cdots + 2006!$$

Q2. Find the last three digits of the sum

$$2005^{11} + 2005^{12} + \cdots + 2005^{2006}.$$

Q3. Suppose that

$$a^{\log_b c} + b^{\log_c a} = m.$$

Find the value of

$$c^{\log_b a} + a^{\log_c b}?$$

Q4. Which is larger

$$2^{\sqrt{2}}, \quad 2^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \text{and} \quad 3.$$

Q5. The figure $ABCDEF$ is a regular hexagon. Find all points M belonging to the hexagon such that

$$\text{Area of triangle } MAC = \text{Area of triangle } MCD.$$

Q6. On the circle of radius 30cm are given 2 points A, B with $AB = 16$cm and C is a midpoint of AB. What is the perpendicular distance from C to the circle?

Q7. In ΔABC, $PQ//BC$ where P and Q are points on AB and AC respectively. The lines PC and QB intersect at G. It is also given $EF//BC$, where $G \in EF$, $E \in AB$ and $F \in AC$ with $PQ = a$ and $EF = b$. Find value of BC.

Q8. Find all polynomials $P(x)$ such that

$$P(x) + Pig(\frac{1}{x}ig) = x + \frac{1}{x}, \quad \forall x \neq 0.$$

Q9. Let x, y, z be real numbers such that $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Find the largest possible value of

$$|x^3 + y^3 + z^3 - xyz|?$$

3.3 Olympic Toán học Hà Nội mở rộng năm 2007

3.3.1 Junior Section

Sunday, 15 April 2007 09h00-11h00

Q1. What is the last two digits of the number

$$(3 + 7 + 11 + \cdots + 2007)^2?$$

(A) 01; (B) 11; (C) 23; (D) 37; (E) None of the above.

Q2. What is largest positive integer n satisfying the following inequality: $n^{2006} < 7^{2007}$?

(A) 7; (B) 8; (C) 9; (D) 10; (E) 11.

Q3. Which of the following is a possible number of diagonals of a convex polygon?

(A) 02; (B) 21; (C) 32; (D) 54; (E) 63.

Q4. Let m and n denote the number of digits in 2^{2007} and 5^{2007} when expressed in base 10. What is the sum $m+n$?

(A) 2004; (B) 2005; (C) 2006; (D) 2007; (E) 2008.

Q5. Let be given an open interval $(\alpha; eta)$ with $eta - \alpha = \dfrac{1}{2007}$. Determine the maximum number of irreducible fractions $\dfrac{a}{b}$ in $(\alpha; eta)$ with $1 \leq b \leq 2007$?

(A) 1002; (B) 1003; (C) 1004; (D) 1005; (E) 1006.

Q6. In triangle ABC, $\angle BAC = 60^0$, $\angle ACB = 90^0$ and D is on BC. If AD bisects $\angle BAC$ and $CD = 3cm$. Then DB is

(A) 3; (B) 4; (C) 5; (D) 6; (E) 7.

Q7. Nine points, no three of which lie on the same straight line, are located inside an equilateral triangle of side 4. Prove that some three of these points are vertices of a triangle whose area is not greater than $\sqrt{3}$.

Q8. Let a, b, c be positive integers. Prove that

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Q9. A triangle is said to be the Heron triangle if it has integer sides and integer area. In a Heron triangle, the sides a, b, c satisfy the equation $b = a(a-c)$. Prove that the triangle is isosceles.

Q10. Let a, b, c be positive real numbers such that $\dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} + \dfrac{1}{ab} \geq 1$. Prove that $\dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ca} + \dfrac{c}{ab} \geq 1$.

Q11. How many possible values are there for the sum $a+b+c+d$ if a, b, c, d are positive integers and $abcd = 2007$.

Q12. Calculate the sum

$$\frac{5}{2.7} + \frac{5}{7.12} + \cdots + \frac{5}{2002.2007}.$$

Q13. Let be given triangle ABC. Find all points M such that
area of ΔMAB= area of ΔMAC.

Q14. How many ordered pairs of integers (x, y) satisfy the equation

$$2x^2 + y^2 + xy = 2(x + y)?$$

Q15. Let $p = \overline{abc}$ be the 3-digit prime number. Prove that the equation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

has no rational roots.

3.3.2 Senior Section

Sunday, 15 April 2007 09h00-11h00

Q1. What is the last two digits of the number

$$\left(11^2 + 15^2 + 19^2 + \cdots + 2007^2\right)^2?$$

(A) 01; (B) 21; (C) 31; (D) 41; (E) None of the above.

Q2. Which is largest positive integer n satisfying the following inequality:

$$n^{2007} > (2007)^n.$$

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4; (E) None of the above.

Q3. Find the number of different positive integer triples (x, y, z) satsfying the equations

$$x + y - z = 1 \quad \text{and} \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4; (E) None of the above.

Q4. List the numbers $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, , $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$ and $\sqrt[6]{6}$ in order from greatest to least.

Q5. Suppose that A, B, C, D are points on a circle, AB is the diameter, CD is perpendicular to AB and meets AB at E, AB and CD are integers and $AE - EB = \sqrt{3}$. Find AE?

Q6. Let $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ and $|P(x)| \leq 1$ for all x such that $|x| \leq 1$.

Prove that $|a| + |b| \leq 5$.

Q7. Find all sequences of integers $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ such that ij divides $x_i + x_j$ for any two distinct positive integers i and j.

Q8. Let ABC be an equilateral triangle. For a point M inside ΔABC, let D, E, F be the feet of the perpendiculars from M onto BC, CA, AB, respectively. Find the locus of all such points M for which $\angle FDE$ is a right angle.

Q9. Let $a_1, a_2, \ldots, a_{2007}$ be real numbers such that

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007} \geq (2007)^2 \text{ and } a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2007}^2 \leq (2007)^3 - 1.$$

Prove that $a_k \in [2006; 2008]$ for all $k \in \{1, 2, \ldots, 2007\}$.

Q10. What is the smallest possible value of

$$x^2 + 2y^2 - x - 2y - xy?$$

Q11. Find all polynomials $P(x)$ satisfying the equation

$$(2x-1)P(x) = (x-1)P(2x), \ \forall x.$$

Q12. Calculate the sum

$$\frac{1}{2.7.12} + \frac{1}{7.12.17} + \cdots + \frac{1}{1997.2002.2007}.$$

Q13. Let ABC be an acute-angle triangle with $BC > CA$. Let O, H and F be the circumcenter, orthocentre and the foot of its altitude CH, respectively. Suppose that the perpendicular to OF at F meet the side CA at P. Prove $\angle FHP = \angle BAC$.

Q14. How many ordered pairs of integers (x, y) satisfy the equation

$$x^2 + y^2 + xy = 4(x + y)?$$

Q15. Let $p = \overline{abcd}$ be the 4-digit prime number. Prove that the equation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

has no rational roots.

Chương 4

Một số phương pháp giải toán

Để giải bài toán trước hết phải căn cứ vào dạng, nội dung điều kiện mà chọn phương pháp giải thích hợp. Nếu bài toán có thể giải bằng nhiều cách, thì cần chọn phương pháp tốt nhất theo một tiêu chí nào đó.

Nội dung cơ bản của bài viết này được rút ra từ các bài giảng của tác giả tại Khối phổ thông chuyên Toán-Tin Trường đại học Khoa học Tự nhiên và một số Trường trung học phổ thông chuyên.

Bài viết gồm hai phương pháp cơ bản nhất:

- Phương pháp quy nạp,
- Phương pháp phản chứng,

và năm phương pháp đặc thù để giải các bài toán không mẫu mực. đó là:

- Phương pháp suy luận trực tiếp
- Phương pháp logic mệnh đề
- Phương pháp bảng
- Phương pháp sơ đồ
- Phương pháp đồ thị

Mỗi phương pháp đều có phần tóm tắt lý thuyết, nội dung. Song chủ yếu vẫn là thông qua hệ thống ví dụ để minh hoạ cách ứng dụng để giải toán.

Nhân dịp kỷ niệm 40 năm ngày thành lập *Khối phổ thông chuyên Toán Trường đại học Tổng hợp Hà nội* nay là Khối phổ thông chuyên Toán-Tin Trường đại học khoa học Tự nhiên, đại học Quốc gia Hà nội trong các ví dụ từ phần III trở đi tác giả mạn phép ghi lại tên một số trong các *Thầy Cô* giáo đã gắn bó và cống hiến hết mình cho sự phát triển và thăng hoa của Khối.

4.1 Phương pháp quy nạp

Phương pháp quy nạp có vai trò vô cùng quan trọng trong toán học, khoa học và cuộc sống. Đối với nhiều bài toán phổ thông phương pháp quy nạp cũng cho ta cách giải hữu hiệu.

Suy diễn là quá trình từ "tính chất" của tập thể suy ra "tính chất" của cá thể, nên luôn luôn đúng, còn quá trình ngược lại, tức là quá trình qui nạp: đi từ "tính chất" của một số cá thể suy ra "tính chất" của tập thể, thì không phải lúc nào cũng đúng. Quá trình này chỉ đúng khi nó thoả mãn một số điều kiện nào đó, tức thoả mãn nguyên lý quy nạp.

4.1.1 Nguyên lý quy nạp

Nếu khẳng định $S(n)$ thoả mãn hai điều kiện sau:

a) Đúng với $n = k_0$ (số tự nhiên nhỏ nhất mà $S(n)$ xác định).

b) Từ tính đúng đắn của $S(n)$ đối với $n = t$ (hoặc đối với mọi giá trị của $n(k_0 \leqslant n \leqslant t)$) $(t \geqslant k_0)$ suy ra tính đúng đắn của $S(n)$ đối với $n = t+1$, thì $S(n)$ đúng với mọi $n \geqslant k_0$

4.1.2 Phương pháp chứng minh bằng qui nạp

Giả sử khẳng định $T(n)$ xác định với mọi $n \geqslant t_0$. để chứng minh $T(n)$ đúng với $\forall n \geqslant t_0$ bằng qui nạp, ta cần thực hiện hai bước sau:

a) **Cơ sở quy nạp**

Thực hiện bước này tức là ta thử xem sự đúng đắn của $T(n)$ với $n = t_0$ nghĩa là xét $T(t_0)$ có đúng hay không?

b) **Quy nạp**

Giả sử khẳng định $T(n)$ đã đúng với $n = t$ (hoặc đối với mọi n $t_0 \leqslant n \leqslant t$)). Trên cơ sở giả thiết này suy ra tính đúng đắn của $T(n)$ đối với $n = t + 1$, tức $T(t+1)$ đúng.

Nếu cả hai bước trên đều thoả mãn, thì theo nguyên lý quy nạp $T(n)$ đúng với mọi số $n \geqslant 1$ $(n \geqslant t_0)$

Trong quá trình qui nạp nếu không thực hiện đầy đủ cả hai bước: Cơ sở qui nạp và quy nạp, thì có thể dẫn đến kết luận sai lầm chẳng hạn trong các ví dụ sau:

Ví dụ 4.1. *Nhà Toán học Đức vĩ đại G. V. Lepnit vào thế kỷ thứ 17 sau khi chứng minh được: Với mọi số nguyên dương n số $n^3 - n$ chia hết cho 3, số $n^5 - n$ chia hết cho 5, số $n^7 - n$ chia hết cho 7 đã bỏ qua cả khâu quy nạp và cơ sở quy nạp mà đưa ra khẳng định: Với mọi số lẻ k và với mọi số tự nhiên n số $n^k - n$*

chia hết cho n. Khẳng định này không đúng bởi vì số $2^9 - 2 = 510$ *không chia hết cho 9.*

Ví dụ 4.2. *Xét tam thức bậc hai* $T(x) = x^2 + x + 41$*. Khi thay*

$x = 0$ *ta được* $T(0) = 0^2 + 0 + 41 = 41$ *là số nguyên tố.*

$x = 1$ *ta được* $T(1) = 1^2 + 1 + 41 = 43$ *là số ngyuên tố.*

$x = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ *được các số nguyên tố tương ứng 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151. Như vậy bước cơ sở quy nạp thoả mãn, nhưng nếu bỏ qua bước quy nạp mà kết luận rằng: Khi thay x bằng số nguyên không âm tuỳ ý n số* $T(n) = n^2 + n + 41$ *là số nguyên tố, thì sẽ sai lầm. Bởi vì, nếu thay* $x = 0, 1, 2, 3, ..., 39$*, đều có* $T(x)$ *là số nguyên tố, nhưng khi* $x = 40$ *lại có* $T(40) = (40)^2 + 40 + 41 = 40[40 + 1] + 41 = 40.41 + 41 = (41)^2$ *là hợp số!*

4.1.3 Vận dụng phương pháp qui nạp để giải toán đại số và số học

phương pháp quy nạp được sử dụng trong tính toán, trong chứng minh và suy luận dưới nhiều dạng khác nhau. Sau đây sẽ thông qua hệ thống ví dụ để minh hoạ một số vận dụng phương pháp quy nạp.

Vận dụng phương pháp qui nạp trong tính toán

để giải quyết một bài tập tính toán nào đó bằng phương pháp quy nạp ta:

- Vận dụng bước quy nạp cho một vài "dạng số liệu" ban đầu. Trên cơ sở đó dự đoán "dạng số liệu tổng quát".

- Sau đó vận dụng bước quy nạp để chứng minh "dạng số liệu" dự đoán chính là "dạng số liệu" cần tìm.

Ví dụ 4.3. *Hãy tính tổng của n số tự nhiên đầu tiên.*

Giải.

Ta ký hiệu tổng của k số tự nhiên đầu tiên là S_k

1) Cơ sở quy nạp

Với $k = 1$ có $S_1 = 1 = \dfrac{1.(1+1)}{2}$

Với $k = 2$ có $S_2 = 1 + 2 = 3 = \dfrac{2.(2+1)}{2}$

Với $k = 3$ có $S_3 = 1 + 2 + 3 = 6 = \dfrac{3.(3+1)}{2}$

Trên cơ sở dạng của S_1, S_2, S_3 ta dự đoán tổng của n số tự nhiên đầu tiên S_n có dạng:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

2) Vận dụng quy nạp để chứng minh $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ là dạng cần tìm.

Thật vậy! Giả sử dạng tổng đã đúng với $n = k \geqslant 1$, tức tổng của k số tự nhiên đầu tiên đã có:

$$S_k = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}\cdot$$

Khi đó với $n = k + 1$, ta có:

$$S_{k+1} = 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Vậy đẳng thức (1) đúng với mọi số tự nhiên k, nên với $n = k$ có $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Ví dụ 4.4. *Hãy tính tổng bình phương của n số tự nhiên đầu tiên.*

Giải.

1) Cơ sở quy nạp

Dùng S_k để ký hiệu tổng bình phương của k số tự nhiên đầu tiên. Khi đó với

$k = 1$ có $S_1 = 1^2 = 1 = \dfrac{1.(1+1)(2.1+1)}{6}$

$k = 2$ có $S_2 = 1^2 + 2^3 = 5 = \dfrac{2.(2+1)(2.2+1)}{6}$

$k = 3$ có $S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = \dfrac{3.(3+1)(2.3+1)}{6}$

Trên cơ sơ dạng S_1, S_2, S_3 dự kiến tổng bình phương của k số tự nhiên đầu tiên

$$S_k = \frac{k(k+1)(2.k+1)}{6}\cdot$$

2) Vận dụng quy nạp để chứng minh $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ chính là tổng bình phương của n số tự nhiên đầu tiên.

Thật vậy, giả sử với $n = k \geqslant 1$, tức tổng bình phương của k số tự hiên đầu tiên đã có:

$$S_k = 1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 + k^2 = \frac{k(k+1)(2.k+1)}{6}$$

Khi đó với $n = k + 1$ ta có:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1^2 + 2^2 + \cdots + (k-1)^2 + k^2 + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2.k+1)}{6} + (k+1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k+1}{6}[k(2k+1)+6(k+1)] \\
&= \frac{k+1}{6}[k(2k+3)+2(2k+3)] \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên k, nên với $n = k$ có

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ví dụ 4.5. *Hãy tìm u_n, nếu biết: $u_1 = 1$ với mọi số tự nhiên $k > 1$ đều có*

$$u_k = u_{k-1} + 3. \tag{1}$$

Giải.

1) Cơ sở qui nạp: Xét ba số tự nhiên đầu tiên:
$k = 1$ có $u_1 = 1 = 3.1 - 2$
$k = 2$ có $u_2 = u_1 + 3 = 1 + 3 = 4 = 3.2 - 2$
$k = 3$ có $u_3 = u_2 + 3 = 4 + 3 = 7 = 3.3 - 2$
Trên cơ sở dạng của u_1, u_2, u_3 dự kiến

$$u_n = 3.n - 2. \tag{2}$$

2) Vận dụng quy nạp chứng minh dạng (2) đúng với mọi số tự nhiên n.
Thật vậy! Giả sử với $n = k \geqslant 1,\ u_k = 3.k - 2$. Khi đó, theo đẳng thức (1) có:

$$u_{k+1} = u_k + 3 = 3.k - 2 + 3 = 3(k+1) - 2.$$

Vậy đẳng thức (2) đúng với mọi n, nên có

$$u_n = 3n - 2.$$

Ví dụ 4.6. *Tích* $1.2\ldots n$ *được ký hiệu bằng* $n!$ *và đọc là* n *giai thừa. Dễ dàng thấy:* $1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120.$

Hãy tính

$$S_n = 1.1! + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n!$$

Giải.

1) Cơ sở quy nạp. Xét bốn tổng đầu tiên.
với $n = 1$ có $S_1 = 1.1! = 1 = 2 - 1 = 2! - 1$
$n = 2$ có $S_2 = 1.1! + 2.2! = 5 = 6 - 1 = 3! - 1$

$n = 3$ có $S_3 = 1.1! + 2.2! + 3.3! = 23 = 24 - 1 = 4! - 1$
$n = 4$ có $S_4 = 1.1! + 2.2! + 3.3! + 4.4! = 119 = 120 - 1 = 5! - 1$.
Trên cơ sở bốn tổng đầu tiên dự kiến

$$S_n = (n + 1)! - 1. \tag{1}$$

2) Vận dụng quy nạp để chứng minh đẳng thức (1) đúng với mọi số tự nhiên.
Thật vậy! Giả sử với $n = k \geqslant 1$ đã có $S_k = (k + 1)! - 1$.
Khi đó với $n = k + 1$ ta có:

$$\begin{aligned} S_{k+1} =& 1.1! + 2.2! + 3.3! + \emptyset ots + k.k! + (k + 1)(k + 1)! \\ =& S_k + (k + 1)(k + 1)! = (k + 1)! - 1 + (k + 1)(k + 1)! \\ =& (k + 1)!(k + 2) - 1 = (k + 2)! - 1. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức (1) đúng với mọi số tự nhiên n, nên có

$$S_n = (n + 1)! - 1$$

Vận dụng phương pháp quy nạp trong chứng minh

Vận dụng cơ sở quy nạp để chứng tỏ sự đúng đắn của khẳng định đối với vài số tự nhiên đầu tiên mà khẳng định thoả mãn. Sau đó dùng quy nạp để chứng minh khẳng định đúng với mọi số tự nhiên.

Ví dụ 4.7. *Hãy chứng minh rằng*

$$S_n = 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n + 1)}{2}.$$

Giải.
1) Cơ sở quy nạp
Với $n = 1$ có $S_1 = (-1)^{1-1}1^2 = 1 = (-1)^{1-1}\frac{1(1 + 1)}{2}$ đẳng thức đúng.
2) Quy nạp
Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$, nghĩa là

$$S_k = 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k + 1)}{2}$$

Do đó với $n = k + 1$ có

$$\begin{aligned} S_{k+1} =& 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k-1}k^2 + (-1)^k(k + 1)^2 \\ =& S_k + (-1)^k(k + 1)^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k + 1)}{2} + (-1)^k(k + 1)^2 \\ =& (-1)^k\left(-\frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1)^2\right) = (-1)^k\frac{(k + 1)(k + 2)}{2} \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên n, nên

$$S_n = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

Ví dụ 4.8. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

Giải.

1) Cơ sở quy nạp

Với $n = 1$ có $\dfrac{1^2}{1.3} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{1(1+1)}{2(2.1+1)}$. đẳng thức đúng

2) Quy nạp

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$, nghĩa là

$$\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \cdots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)} \tag{1}$$

Khi đó với $n = k+1$ ta có:

$$\begin{aligned}&\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \cdots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}\\ &= \frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2(k+1))(2(k+1)+1)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2(k+1)+1)}\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên n.

Ví dụ 4.9. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

Giải.

1) Cơ sở quy nạp

Với $n = 1$ ta có $\dfrac{1}{(4.1-3)(4.1+1)} = \dfrac{1}{1.5} = \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{4.1+1}$. đẳng thức thoả mãn.

2) Quy nạp

Giải sử đẳng thức đã đúng với $n = k$, nghĩa là

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \cdots + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{k}{4k+1} \tag{1}$$

Theo đẳng thức (1) với $n = k+1$ có:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1.5}+\frac{1}{5.9}+\cdots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}\\&=\frac{k}{4k+1}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k+1}{4(k+1)+1}\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức đúng với mọi n.

Vận dụng quy tắc quy nạp để xác định tính chia hết

Trước hết vận dụng cơ sở quy nạp để xét tính đúng đắn của khẳng định với những sô tự nhiên đầu tiên. Sau đó vận dụng quy nạp để xác định tính đúng đắn của khẳng định đối với mọi số tự nhiên.

Ví dụ 4.10. *Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số tự nhiên liên tiếp luôn luôn chia hết cho 9.*

Giải.

1) Cơ sở quy nạp

Với ba số tự nhiên đầu tiên 1, 2, 3 có $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$ chia hết cho 9, nên khẳng định đúng.

2) Quy nạp

Giả sử đối với số tự nhiên k nào đó khẳng định đã đúng, nghĩa là tổng lập phương

$$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$$

đã chia hết cho 9, nghĩa là tồn tại số tự nhiên t, để

$$k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9t \tag{1}$$

Khi đó theo (1) đối với số tự nhiên $k+1$ tổng lập phương

$$\begin{aligned}&(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 =\\&= (k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27\\&= k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9(k^2+3k+3)\\&= 9t + 9(k^2+3k+3)\\&= 9(t + k^2 + 3k + 3)\end{aligned}$$

chia hết cho 9, nên khẳng định đúng với tổng lập phương của ba số tự nhiên liên tiếp tuỳ ý.

Ví dụ 4.11. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên không âm n số*

$$S_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

chia hết cho 133.

Giải.

1) Cơ sở quy nạp

Với $n = 0$ số $S_0 = 11^{0+2} + 12^{2.0+1} = 11^2 + 12 = 121 + 12 = 133$ chia hết cho 133.

2) Quy nạp

Giải sử khẳng định đã đúng với $n = k \geqslant 0$, tức số

$$S_k = 11^{k+2} + 12^{2k+1}$$

đã chia hết cho 133, tức tồn tại số tự nhiên t, để

$$11^{k+2} + 12^{2k+1} = 133t. \tag{1}$$

Khi đó theo (1), với $n = k + 1$ ta có

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 11^{k+1+2} + 12^{2(k+1)+1} = 11^{k+2+1} + 12^{2k+1+2} \\ &= 11.11^{k+2} + 144.12^{2k+1} = 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133.12^{2k+1} \\ &= 133t + 133.12^{2k+1} = 133(t + 12^{2k+1}) \end{aligned}$$

chia hết cho 133.

Vậy khẳng định đúng với mọi số nguyên không âm n.

Ví dụ 4.12. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n số*

$$S_n = 4^n + 15n - 1$$

chia hết cho 9.

Giải.

1) Cơ sở quy nạp

Với $n = 1$ số $S_1 = 4^1 + 15.1 - 1 = 18$ chia hết cho 9.

2) Quy nạp

Giải sử khẳng định đã đúng với $n = k$, nghĩa là số

$$S_k = 4^k + 15.k - 1$$

đã chia hết cho 9, tức tồn tại số tự nhiên t, để $4^k + 15k - 1 = 9t$

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 4^{k+1} + 15(k-1) - 1 = 4.4^k + 15k + 14 = 4.4^k + 60k - 4 - 45k + 18 \\ &= 4(4^k + 15k - 1) - 9(5k-2) = 4.9t - 9(5k-2) = 9(4t - 5k - 2) \end{aligned}$$

chia hết cho 9.

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên dương.

Ví dụ 4.13. *Với mọi số nguyên dương n đặt*

$$A_n = 7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}} \Big\} \text{ n lần.}$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên $m \geqslant n \geqslant 2$. Hiệu $A_m - A_n$ chia hết cho 20.

Giải. Để chứng minh kết luận trên trước hết cần khẳng định rằng với mọi số nguyên $k \geqslant 2$ đều tồn tại số tự nhiên t_k, để

$$A_k = 20t_k + 3 \tag{1}$$

I) Chứng minh quan hệ (1)

1) Cơ sở quy nạp

Với $k = 2$ có $A_2 = 7^7 = 7^3.7^4 = 343.2401 = 823543 = 20.41177 + 3$.

2) Quy nạp

Giả sử khẳng định đã đúng với $k = s \geqslant 2$ nghĩa là đối với A_s đã tồn tại số tự nhiên t_s, để

$$A_s = 20t_s + 3 \tag{2}$$

Khi đó, theo (2), với $k = s + 1$ số

$$\begin{aligned} A_{s+1} =& 7^{A_s} = 7^{20t_s+3} = (7^4)^{5t_s}7^3 = (2401)^{5t_s}(3443) \\ =&(20.120 + 1)^{5t_s}(20.17 + 3) \\ =&[(20.120)^{5t_s} + C^1_{5t_s}(20.120)^{5t_s-1} + \cdots + \\ &+ C^{5t_s-1}_{5t_s}(20.120) + 1](20.17 + 3) \\ =&20.17[(20.120)^{5t_s} + C^1_{5t_s}(20.120)^{5t_s-1} + \cdots + \\ &+ C^{5t_s-1}_{5t_s}](20.120) + 1] + 20.120[(20.120)^{5t_s-1} + \\ &+ C^1_{5t_s}(20.120)^{5t_s-2} + \cdots + C^{5t_s-1}_{5t_s}] + 3 \\ =&20\{17[(20.120)^{5t_s} + C^1_{5t_s}(20.120)^{5t_s-1} + \cdots + \\ &+ C^{5t_s-1}_{5t_s}(20.120) + 1] + 120[20(120)^{5t_s-1} + C^1_{5t_s}(20.120)^{5t_s-2} \\ &+ \cdots + C^{5t_s-1}_{5t_s}]\} + 3 = 20t_{s+1} + 3. \end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với mọi số tự nhiên $k \geqslant 2$

II) Chứng minh với mọi số tự nhiên $m \geqslant n \geqslant 2$ số $A_m - A_n$ chia hết cho 20

Từ quan hệ (2) có

$$A_m - A_n = 20t_m + 3 - (20t_n + 3) = 20t_m - 20t_n = 20(t_m - t_n)$$

nên $A_m - A_n$ chia hết cho 20.

Vận dụng quy nạp để chứng minh bất đẳng thức

Vận dụng bước cơ sở quy nạp để khẳng định bất đẳng thức thoả mãn với những số tự nhiên đầu tiên mà nó xác định. Sau đó dùng quy nạp để khẳng định bất đẳng thức đúng với tất cả các số tự nhiên mà nó xác định

Ví dụ 4.14. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 1$*

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

Giải.

Dùng S_n để ký hiệu vế trái của bất đẳng thức trên,

1) Cơ sở quy nạp

Với $n = 2$ có

$$S_2 = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$$

2) Quy nạp

Giả sử bất đẳng thức đã đúng với $n = k$, nghĩa là đã có

$$S_k > \frac{13}{24}\cdot \tag{1}$$

Ta có

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k},$$
$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2},$$

nên

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} > 0$$

với mọi số tự nhiên k. Do đó

$$S_{k+1} > S_k \tag{2}$$

Từ (1) và (2) có $S_{k+1} > \dfrac{13}{24}$.

Ví dụ 4.15. *Chứng minh rằng với mọi số dương x và số tự nhiên n bất kỳ đều có bất đẳng thức*

$$x^n + x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + \frac{1}{x^{n-4}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^n} \geqslant n+1 \tag{1}$$

Giải.

1) Cơ sở quy nạp

a) Với $n = 1$ bất đẳng thức (1) thoả mãn và có dạng

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \tag{2}$$

Vì $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$, nên $x^2 + 1 \geqslant 2x$.

b) Với $n = 2$ đẳng thức (1) có dạng

$$x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} \geqslant 3 \tag{3}$$

đẳng thức (2) đúng với mọi $x > 0$, nên khi thay x bằng x^2 ta có bất đẳng thức

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2$$

Thêm 1 cả hai vế của bất đẳng thức này ta được bất đẳng thức (3)

Vậy với hai số tự nhiên đầu tiên 1 và 2 bất đẳng thức (1) thoả mãn.

2) Quy nạp

Giả sử k là số tự nhiên nào đó và bất đẳng thức đã thoả mãn với $n = k$, nghĩa là

$$x^k + x^{k-2} + \cdots + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} \geqslant k+1 \tag{4}$$

Ta cần khẳng định bất đẳng thức (1) thoả mãn với $n = k+2$, nghĩa là

$$x^k + x^{k-2} + \cdots + \frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} + + \frac{1}{x^{k+2}} \geqslant k+3 \tag{5}$$

Thật vậy! từ bất đẳng thức (2) thay x bằng x^{k+2} được bất đẳng thức

$$x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}} \geqslant 2 \tag{6}$$

nên từ (4) và (6) có

$$\begin{aligned} x^{k+2} + x^k + \cdots + \frac{1}{x^k} + \frac{1}{x^{k+2}} &= x^k + \cdots + \frac{1}{x^k} + x^{k+2} + + \frac{1}{x^{k+2}} \\ &\geqslant k + 1 + 2 = k+3 \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức (1) đúng với mọi số dương dương x và với mọi số tự nhiên.

4.1.4 Vận dụng phương pháp quy nạp để giải bài tập hình học

Tính toán bằng quy nạp

Vận dụng bước cơ sở quy nạp để tính giá trị các đại lượng tương ứng với những số tự nhiên đầu tiên mà chúng xác định. Trên cơ sở đó mà dự đoán kết quả cho trường hợp tổng quát đối với mọi số tự nhiên mà đại lượng xác định

Sau đó dùng quy nạp để khẳng định tính đúng đắn của kết quả dự đoán

Ví dụ 4.16. *Hãy tính số tam giác $T(n)$ nhận được khi chia một đa giác n cạnh bằng các đường chéo không cắt nhau.*

Giải.

1) Cơ sở quy nạp
đối với $n = 3$ có $T(3) = 1$
đối với $n = 4$, tứ giác (Hình 1)
được chia thành hai tam giác,
nên $T(4) = 2$.
Trên cơ sở $T(3)$, $T(4)$ dự đoán

$$T(n) = n - 2 \tag{1}$$

2) Vận dụng quy nạp để chứng minh tính đúng đắn của công thức (1). Giả sử mỗi số tự nhiên k $(3 \leqslant k < n)$ đã có $T(k) = k - 2$, tức mọi đa giác k - cạnh được chia thành $k - 2$ tam giác nhờ các đường chéo không cắt nhau. Xét một cách chia đa giác n cạnh $A_1A_2\dots A_n$. Giả sử đường chéo A_1A_k chia đa giác n-cạnh $A_1A_2\dots A_n$ thành hai đa giác k-cạnh $A_1A_2\dots A_k$ và đa giác $(n-k+2)$-cạnh $A_1A_kA_{k+1}\dots A_n$.

Vì $n > k \geqslant 3$, nên $3 \leqslant n-k+2 < n$. Do đó theo giải thiết quy nạp $T(k) = k-2$ và $T(n-k+2) = n-k+2-2 = n-k$.

$$T(n) = T(k) + T(n-k+2) = k - 2 + n - k = n - 2$$

Vậy công thức (1) đúng với mọi số tự nhiên $n \geqslant 3$.

Ví dụ 4.17. *Hãy tính bán kính đường tròn nội tiếp (r_n) và bán kính đường tròn ngoại tiếp (R_n) của đa giác đều 2^n-cạnh có chu vi bằng P.*

Giải.

1) Cơ sở quy nạp

Với $n = 2$ tứ giác với chu vi P có $r_2 = \dfrac{P}{8}$ và $R_2 = \dfrac{P\sqrt{2}}{8}$

2) Quy nạp

Giải sử đối với đa giác đều 2^n-cạnh với chu vi P ta đã tính được bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp r_n và R_n. Trên cơ sở đó tính bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp r_{n+1} và R_{n+1} của đa giác đều 2^{n+1}-cạnh với cùng chu vi P (Hình 2).

kip-5cm

Giả sử AC là cạnh của đa giác đều 2^n-cạnh đối với chu vi P. điểm O là tâm của đa giác, B-điểm giữa của cung AC, D- điểm giữa của dây AC, EF là đường trung bình của tam giác của tam giác ABC và I là điểm giữa của EF.

Vì $\widehat{EOF} = \widehat{EOB} + \widehat{FOB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} + \frac{1}{2}\widehat{COB} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$, nên EF bằng cạnh của đa giác đều 2^{n+1} - cạnh nội tiếp trong đường tròn bán kính OE. Ngoài ra, đa giác đều 2^{n+1} - cạnh này còn có chu vi bằng $2^{n+1}EF = 2^{n+1}\frac{AB}{2} = 2^nAB$, tức bằng P. Bởi vậy $r_{n+1} = OI$ và $R_{n+1} = OE$.

Hơn nữa, vì EF là đường trung bình của tam giác ABC, nên $BI = ID$. Bởi vậy $OB - OI = OI - OD$, nghĩa là $R_n - r_{n+1} = r_{n+1} - r_n$, nên $r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}$.

Do tam giác OEB vuông tại E, nên $OE^2 = OB.OI$, nghĩa là $R_{n+1}^2 = R_n r_{n+1}$ và $R_{n+1} = \sqrt{R_n r_{n+1}}$.

Như vậy đối với đa giác đều 2^{n+1} cạnh đối với chu vi P ta đã tính được

$$r_{n+1} = \frac{R_n + r_n}{2}, \quad R_{n+1} = \sqrt{R_n r_{n+1}}.$$

Chứng minh bằng quy nạp

Trước hết vận dụng bước cơ sở quy nạp để sét tính đúng đắn của khẳng định đối với một vài hình đơn giản nhất (tức những hình xuất phát).

Sau đó vận dụng bước quy nạp để xác định tính đúng đắn của khẳng định đối với hình tuỳ ý (thuộc phạm vi khẳng định).

Ví dụ 4.18. *(Tô mầu bằng quy nạp)*

Trên mặt phẳng cho n ($n \geqslant 1$) hình tròn. Chứng minh rằng với bất kỳ cách sắp đặt nào, thì hình nhận được cũng có thể tô bằng hai mầu để cho hai phần mặt phẳng kề nhau (có biên chung) cũng được tô bằng hai màu khác nhau.

Giải. Bài toán này cũng được giải quyết băng quy nạp

1) Cơ sở quy nạp.

Với $n = 1$, trên mặt phẳng chỉ có một hình tròn. Ta tô hình tròn bằng màu đen. Khi đó phần còn lại kề với hình tròn được để trắng, nên hai phần của mặt phẳng kề nhau có màu khác nhau.

2) Quy nạp

Giả sử khẳng định cũng đúng với bức tranh gồm n hình tròn. Giả sử trên mặt phẳng cho $n+1$ hình tròn tuỳ ý. Xoá đi một trong những hình tròn sẽ được bức tranh gồm n hình tròn (hình 3). Theo giả thiết quy nạp, bức tranh này chỉ cần sươn 2 màu, chẳng hạn đen, trắng mà hai miền kề nhau đều có hai màu khác nhau.

Khôi phục lại hình tròn đã xoá đi, tức là trở lại hình xuất phát, gồm $n+1$ hình tròn, rồi theo một phía đối với hình tròn vừa khôi phục, chẳng hạn phía trong của hình tròn này thay đổi các màu tô đã tô bằng màu ngược lại, sẽ được: bước tranh gồm $n+1$ hình tròn được tô bằng hai màu, mà hai miền kề nhau tuỳ ý đều có màu khác nhau (Hình 4).

Bài toán được giải quyết xong!

Ví dụ 4.19. *(Chắp hình bằng quy nạp)*

Cho $n (n \geqslant 1)$ hình vuông tuỳ ý. Chứng minh rằng từ các hình vuông này có thể cắt và chắp thành một hình vuông lớn.

Giải.

Bài toán được giải quyết bằng quy nạp

1) Cơ sở quy nạp

Với $n = 1$. Khi đó có một hình vuông nên hiển nhiên, khẳng định đúng

Với $n = 2$, có hai hình vuông: $ABCD$ và $abcd$. Khi đó có thể cắt và chắp thành một hình vuông như sau: giả sử hình vuông $ABCD$ không nhỏ hơn hình $abcd$. Dùng x ký hiệu độ dài cạnh hình vuông $ABCD$, y là độ dài cạnh hình vuông $abcd$, $(x \geqslant y)$. Ta cắt các hình vuông $ABCD$ và chắp thành hình vuông $A'B'C'D'$ như Hình 5

2) Quy nạp

Giả sử khẳng định đã đúng với n $(n \geqslant 1)$ hình vuông. Giả sử có $n+1$ hình vuông tuỳ ý $V_1, V_2, \ldots, V_{n+1}$.

Chúng ta chọn hai hình vuông tuỳ ý, chẳng hạn V_n và V_{n+1} và cắt và chắp thành hình vuông ${V_n}'$. Theo giả thiết quy nạp, đối với n hình vuông:

$$V_1, V_2, \ldots, {V_n}'$$

Ta có thể cắt và chắp thành một hình vuông V. Như vậy từ $n+1$ hình vuông $V_1, V_2, \ldots, V_n, V_{n+1}$ đã cắt và chắp thành hình vuông V. Vậy bài toán đã giải quyết xong.

Dựng hình vuông bằng quy nạp

Trong bước cơ sở quy nạp ta dựng hình dạng "xuất phát", tức là hình tương ứng với số tự nhiên đầu tiên mà nó xác định. Sau đó vận dụng bước quy nạp để dựng hình tuỳ ý thoả mãn các tính chất đã cho.

Ví dụ 4.20. *(Dựng hình bằng quy nạp)*

Trên mặt phẳng cho $2n+1$ ($n \geqslant 1$) điểm, không có ba điểm nào thẳng hàng. Hãy dựng một đa giác $2n+1$ đỉnh, sao cho $2n+1$ điểm đã cho trở thành trung điểm thuộc các cạnh của đa giác.

Giải. Bài toán giải quyết bằng quy nạp.

1) Cơ sở quy nạp

Với $n = 1$, trên mặt phẳng cho 3 điểm. Bài toán quy về việc dựng một tam giác khi biết trung điểm của ba cạnh. đây là bài toán quen biết đã được trình bầy trong sách hình học sơ cấp.

2) Quy nạp

Giải sử đối với $2k+1$ ($k \geqslant 1$) điểm tuỳ ý không có ba điểm nào thẳng hàng, ta đều dựng được đa giác $2k+1$ đỉnh, để các điểm này là trung điểm thuộc các cạnh của đa giác.

Xét $2(k+1)+1$ điểm tuỳ ý không có ba điểm nào thẳng hàng

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{2k},\ A_{2k+1},\ A_{2k+2},\ A_{2k+3}.$$

Giả sử các điểm này là trung điểm thuộc các cạnh của đa giác $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{2k+2},\ B_{2k+3}$ (hình 6).

Khi đó A_{2k+1}, A_{2k+2}, A_{2k+3} là trung điểm của các cạnh tương ứng $B_{2k+1}B_{2k+2}$, $B_{2k+2}B_{2k+3}$ và $B_{2k+3}B_1$. Giả sử A là trung điểm của cạnh B_1B_{2k+1}. Tứ giác $AA_{2k+1}A_{2k+2}\ A_{2k+3}$ là một hình bình hành. Hình bình hành $AA_{2k+1}A_{2k+2}A_{2k+3}$ có ba đỉnh A_{2k+1}, A_{2k+2}, A_{2k+3} cho trước nên đỉnh thứ tư A hoàn toàn có thể xác định được bằng cách qua điểm A_{2k+3}, kẻ đường thẳng a_1 song song với đoạn thẳng $A_{2k+1}A_{2k+2}$. Từ A_{2k+1} kẻ a_2 song song với đoạn thẳng $A_{2k+3}A_{2k+2}$. Giao điểm của a_1 và a_2 chính là A cần xác định.

Theo giả thiết quy nạp đối với $2k+1$ điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{2k}, A$ ta đã dựng được đa giác $B_1, B_2, \ldots, B_{2k+1}$, để A_i là trung điểm của cạnh B_iB_{i+1} ($1 \leqslant i \leqslant 2k$) và A là trung điểm của cạnh B_1B_{2k+1}. Sau đó B_1 kẻ đường thẳng song song với đoạn thẳng AA_{2k+1}, cắt đoạn thẳng $B_{2k+1}A_{2k+1}$ kéo dài tại B_{2k+2}. Từ B_{2k+1} kẻ đường song song với đoạn thẳng AA_{2k+2}, cắt đoạn thẳng B_1A_{2k+3} kéo dài tại B_{2k+3}. Vì $B_{2k+1}A = AB_1$ và AA_{2k+3} song song với B_1B_{2k+2}, nên $B_{2k+1}A_{2k+1} = A_{2k+1}B_{2k+2}$. Tương tự có $B_1B_{2k+3} = A_{2k+3}B_{2k+3}$, $B_{2k+3}A_{2k+2} = A_{2k+2}B_{2k+2}$.

Vậy đa giác $2k+3$ đỉnh $B_1B_2\ldots B_{2k+2}B_{2k+3}$ nhận các điểm đã cho A_1, A_2, $\ldots$, A_{2k+3} làm trung điểm các cạnh

Ví dụ 4.21. *Trên mặt phẳng cho n điểm. Hãy dựng một đa giác n - cạnh, mà các cạnh đó đều là đáy của các tam giác cân với đỉnh là n điểm đã cho và các góc ở đỉnh có độ lớn tương ứng là* $\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Giải.

Trước khi trình bầy lười giải chúng tôi xin lưu ý rằng trong các góc $\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ có thể có một số góc lớn hươn 150^o, nên quy ước: Nếu $\alpha_i < 180^o$ ($1 \leqslant i \leqslant n$), thì tam giác cân tương ứng nằm về phía ngoài đa giác, còn khi $\alpha_i > 180^o$ tam giác cân tương ứng nằm về phía trong của đa giác (trong đó góc ở đỉnh của tam giác này băng $360^o - \alpha_i$).

1) Cơ sở quy nạp

Với $n = 3$, khi đó đa giác cân dựng là tam giác. đối với trường hợp này sẽ trình bầy cách dựng tam giác thoả mãn các yêu cầu đã cho.

a) Giả sử tam giác cần tìm đã dựng được. Nó có đỉnh là x_1, x_2, x_3, các tam giác cân với đáy x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3 đỉnh là A_1, A_2, A_3 có góc ở đỉnh là α_1, α_2, α_3 (Hình 7).

Thực hiện phép quay mặt phẳng theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

\- một góc α_1 xung quanh điểm A_1, để x_1 trùng với x_2

\- một góc bằng α_2 xung quanh điểm A_2 để x_2 trùng với x_3

kip-6.5cm

Ta nhận thấy rằng hai phép quay này được thực hiện liên tục kế tiếp nhau, thì tương ứng với phép quay một góc $\alpha_1 + \alpha_2$ theo ngược chiều kim đồng hồ xung quanh điểm A được xác định nhờ các điểm A_1, A_2 và các góc α_1, α_2 bằng cách sau: Từ A_1, A_2 kẻ hai tia hợp với đoạn A_1A_2 các góc $\dfrac{\alpha_1}{2}$ và $\dfrac{\alpha_2}{2}$, cắt nhau tại điểm A. đây chính là tâm của phép quay mặt phẳng một góc bằng $\alpha_1 + \alpha_2$ (có thể xem trong (1)).

Trong phép quay này đỉnh x_1 chuyển sang x_3. Bởi vậy đỉnh x_3 sẽ chuyển về x_1 với phép quay mặt phẳng xung quanh A một góc $360^0 - (\alpha_1 + \alpha_2)$. Do đó điểm A chính là đỉnh của tam giác cân với cạnh đáy x_1x_2 và góc ở đỉnh là $360 - (\alpha_1 + \alpha_2)$.

b) Trên cơ sở phân tích ở trên suy ra cách xây dựng tam giác $x_1x_2x_3$ như sau:

Với $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \neq k.360$ điểm A không trùng với A_3. Khi đó từ A và A_3 kẻ về cả hai phía hợp với AA_3 các góc $\dfrac{360 - (\alpha_1 + \alpha_2)}{2}$ và $\dfrac{\alpha_3}{2}$. Cạnh của các góc này cắt nhau tại các điểm tương ứng là đỉnh x_1 và x_3. Sau đó từ điểm A_1 kẻ tia hợp với A_1x_1 góc α_1 và từ A_2 kẻ tia hợp với Ax_3 góc α_2. Giao điểm của hai tia này chính là đỉnh x_2.

Như vậy tam giác $x_1x_2x_3$ cần tìm đã dựng xong.

2) Quy nạp

Giả sử với $n = k \geqslant 3$ ta đã biết cách dựng đa giác k - cạnh mà các tam giác cân có đáy là cạnh của đa giác, đỉnh là các điểm cho trước với độ lớn các góc ở đỉnh được xác định. Trên cơ sở này ta khẳng định cho trường hợp $n = k + 1$, nghĩa là chỉ ra cách xây dựng đa giác $(k + 1)$ - cạnh thoả mãn các điều kiện của bài toán.

kip-7cm

Giả sử đa giác $(k + 1)$ - cạnh cần xây dựng là $x_1x_2...x_nx_{n+1}$ có các tam giác cân đáy là cạnh của đa giác, đỉnh là các điểm đã cho A_1, $A_2, \ldots,$ A_k, A_{k+1} và $\widehat{A}_i = \alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k + 1)$ (Hình 8).

Xét tam giác $x_1x_kx_{k+1}$. Tương tự như trong phần cơ sở quy nạp 10) khi quay mặt phẳng theo chiều ngược chiều kim đồng hồ xung quanh A_k để x_k trùng với x_{k+1} và tiếp theo quay xung quanh A_{k+1} để x_{k+1} trùng với x_1, thì cũng chính là quay mặt phẳng một điểm (A) để x_k trùng với x_1, nên khi quay mặt phẳng xung quanh điểm A một góc $360^o - (\alpha_k + \alpha_{k+1})$, thì x_1 sẽ trùng với x_k. Do đó A là đỉnh của tam giác cân với cạnh là đường chéo x_1x_2 và $\widehat{A} = 360^o - (\alpha_k + \alpha_{k+1})$. Khi đó điểm A chính là giao điểm của các tia A_ks, $A_{k+1}t$ hợp với đoạn A_kA_{k+1} các góc tương ứng $\dfrac{\alpha_k}{2}$ và $\dfrac{\alpha_{k+1}}{2}$. Như vậy theo các điểm A_k, A_{k+1} và các góc α_k, α_{k+1} cho trước ta xác định được điểm A, để đa giác k - cạnh $x_1, x_2, \ldots, x_k$ có các cạnh là đáy của các tam giác cân với đỉnh là các điểm A_1, $A_2, \ldots,$ A_{k-1}, A và các góc ở đỉnh là α_1, $\alpha_2, \ldots,$ α_{k-1}, $360^o - (\alpha_k + \alpha_{k+1})$. Bởi vậy bài toán được đưa về yêu cầu xây dựng đa giác k - cạnh (D) có cạnh là đáy các tam giác cân với đỉnh là các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}, A$ và các góc ở đỉnh là $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, 360^o - (\alpha_k + \alpha_{k+1})$. Nhưng theo giả thiết quy nạp đa giác D có k cạnh đã dựng được.

Sau khi đa giác D đã dựng xong, để xác định đỉnh thứ $k+1$ từ A_k kẻ một tia hợp với $A_k x_1$ một góc bằng α_k và từ A_{k+1} kẻ một tia hợp với $A_{k+1}x_1$ một góc bằng α_{k+1}. Giao điểm của hai tia này chính là đỉnh x_{k+1} của đa giác cần tìm.

đối với trường hợp $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k.360^o$ (k là số tự nhiên), thì bài toán không xác định.

4.2 Phương pháp phản chứng

Khi giải toán, đặc biệt các bài toán logic, một trong những phương pháp được dùng một cách rất thuận lợi đó là phương pháp phản chứng dựa trên nguyên lý Dirichlet do nhà toán học Đức nổi tiếng Preter Dirichlet (1805-1859) đề xuất, mà dạng đươn giản nhất của nguyên lý này có thể phát biểu như sau: “ Không thể nhốt 7 chú thỏ vào 3 căn lồng, sao cho mỗi lồng không có quá 2 con thỏ”. Nói cách khác: “Nếu nhốt 7 chú thỏ vào 3 cái lồng, thì có ít nhất một lồng chứa không ít hươn 3 chú thỏ”.

4.2.1 Nguyên lý Dirichlet còn được phát biểu dưới nhiều dạng tương tự khác:

Dạng tập hợp:

“Nêu tập hợp gồm n phần tử, được biểu diễn dưới dạng hợp của k tập con, thì phải có ít nhất một tập con chứa không ít hươn $\frac{n}{k}$ phần tử ”.

Dạng hình học:

1. “Nếu tổng diện tích của một số hình nhỏ hươn S, thì không thể dùng hình này để phủ lên một hình có diện tích bằng S”.

2. Nếu trên đoạn thẳng có độ dài bằng 1 phân bố một số đoạn thẳng với tổng độ dài bằng L, thì sẽ tìm được một điểm được phủ bằng không ít hươn $[L]$ đoạn thẳng.

3. Nếu các khoảng $F_1, F_2, \ldots, F_n$ có độ dài tương ứng $l_1, l_2, \ldots, l_n$ chứa trong khoảng F, có độ dài l và $l_1 + l_2 + \cdots + l_n > kl$, thì sẽ có $k+1$ khoảng nào đó trong các khoảng đã cho có điểm chung.

4. Nêu các hình $F_1, F_2, \ldots, F_n$ với diện tích tương ứng $S_1, S_2, \ldots, S_n$ chứa trong hình F có diện tích S và $S_1 + S_2 + \cdots + S_n > kS$ thì sẽ có $k+1$ hình trong các hình đã cho có điểm chung.

Dạng số học: Nếu trung bình cộng của một số số lớn hơn a, thì sẽ có ít nhất một số trong các số này lớn hơn a.

Sau đây trình bầy một số ví dụ về ứng dụng phương pháp phản chứng trong việc giải các bài toán. Trước hết chúng ta sẽ giải một số bài toán bằng cách chọn các chú thỏ thích hợp

4.2.2 Vận dụng phương pháp phản chứng để giải toán

Vận dụng phương pháp phản chứng để xác định tính chia hết

để có thể vận dụng được phương pháp phản chứng ta phải căn cứ vào đối tượng, tư liệu cho trong bài toán và quan hệ giữa chúng mà tạo ra “thỏ” và “lồng” thích hợp.

Ví dụ 4.22. *Chứng minh rằng có thể tìm được số dạng*

$$19651965.........1965000...0$$

chia hết cho 2000.

Giải.

Dùng A_m để ký hiệu số gồm m số 1965 Viết liên tiếp

$$A_m = \underbrace{19651965.........1965}_{m \text{ lần } 1965}$$

Xét dãy gồm các số A_i $(1 \leqslant i \leqslant 2000)$

$$1965,\ 1965,\ 1965, \ldots, \underbrace{19651965.........1965}_{2000 \text{ lần } 1965} \tag{1}$$

Chia các số thuộc dãy (1) cho 2000 được 2000 số dư tương ứng r_i $(1 \leqslant i \leqslant 2000)$.

Vì các số A_i $(1 \leqslant i \leqslant 2000)$ đều lẻ nên không chia hết cho 2000. Do đó 2000 số dư r_i $(1 \leqslant i \leqslant 2000)$ (thỏ) chỉ thuộc không quá 1999 loại (lồng). Bởi vậy phải có ít nhất hai số dư giống nhau. Giả sử $(1 \leqslant n,\ m \leqslant 2000)$ $m > n$ và $r_m = r_n$.

Khi đó số

$$\begin{aligned} A_m - A_n &= \underbrace{19651965.........1965}_{m \text{ lần } 1965} - \underbrace{19651965.........1965}_{n \text{ lần } 1965} \\ &= \underbrace{19651965.........1965}_{m-n \text{ lần } 1965}\underbrace{00.........00}_{4n \text{ số } 0} \end{aligned}$$

chia hết cho 2000.

Ví dụ 4.23. *Chứng minh rằng từ 11 số tự nhiên tuỳ ý luôn luôn có thể chọn ra 2 số mà hiệu bình phương của chúng chia hết cho 20.*

Giải.

đem 11 số tự nhiên tuỳ ý đã chọn ra a_i $(1 \leqslant i \leqslant 1)$ chia cho 10 được 11 số dư tương ứng r_i (THỏ), nhưng thuộc không quá 10 loại (LòNG), nên phải có ít nhất hai số dư thuộc cùng một loại.

Giả sử a_i, a_j $(1 \leqslant i, j \leqslant 11)$ có cùng số dư là r khi chia cho 10. Khi đó có các số tự nhiên s, t để

$$\begin{aligned}
&a_i = 10s + r, \quad a_j = 0t + r,\\
&a_i - a_j = 10s + r - (10t + r) = 10(s - t)\\
&a_i + a_j = 10s + r + 10t + r = 2[5(s + t) + 1]
\end{aligned}$$

Do đó

$$a_i^2 - a_j^2 = (a_i - a_j)(a_i + a_j) = 20(s - t)[5(s + t) + 1]$$

chia hết cho 20.

Vận dụng phương pháp phản chứng để giải các bài toán hình học

Vận dụng phương pháp phản chứng để suy ra kết luận B từ giả thiết A ta cần giả sử ngược lại, nghĩa là từ A suy ra kết luận ngược với B ($\overline{B}$). Trên cơ sở giả thiết phản chứng này ta lý luận để đi tới điều mâu thuẫn. Khi đó để khỏi mâu thuẫn phải bỏ giả thiết phản chứng và đi tới kết luận từ giả thiết A suy ra kết luận B.

Ví dụ 4.24. *Cho tam giác đều AOB. Trên cạnh AB lấy hai điểm C và D, sao cho $AC = CD = DB$. Chứng minh các góc $\widehat{AOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOB}$ không đồng thười bằng nhau.*

Giải.

Lấy điểm E trên cạnh AO, sao cho $OE = OC$ (Hình 9)

kip-5cm

Hình 9

Giả thiết phản chứng. Giả sử $\widehat{AOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOB} = 20^o$. Khi đó do tam giác EOC cân tại O, nên

$$\widehat{OEC} = \widehat{OCE} = \frac{180^o - 20^o}{2} = 80^0. \qquad (1)$$

Do $AC = DB$, $\widehat{OAC} = \widehat{OBD} = 60^o$, $OA = OB$, nên $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$. Bởi do $OE = OC = OD$ và $\widehat{EOC} = \widehat{COD} = 20^o$ (giả thiết phản chứng), nên $\widehat{EOC} = \widehat{COD}$. Bởi vậy $EC = CD = AC$. Do đó $\widehat{ACE}$ cân tại C, nên

$$\widehat{AEC} = \widehat{EAC} = 60^o \tag{2}$$

Từ (1) và (2) có $\widehat{AEC} + \widehat{OEC} = 60^o + 80^o = 140 < 180^o = \widehat{AEC}$. Ta đã đi đến mâu thuẫn, nên phải bỏ giả thiết phản chứng, mà đi đến kết luận ba góc $\widehat{AOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOB}$ không đồng thười bằng nhau.

Ví dụ 4.25. *Trong tam giác đều cạnh đơn vị lấy 5 điểm tuỳ ý. Chứng minh rằng có ít nhất 2 điểm trong các điểm đã lấy, mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá $\frac{1}{2}$ đơn vị.*

Giải.

Giả sử E, F, G là trung điểm các cạnh AB, BC, AC.

Nối các điểm E, F, G với nhau được 4 tam giác con đều cạnh bằng $\frac{1}{2}$, nên hai điểm tuỳ ý trong cùng một tam giác con đều cách nhau một khoảng không vượt quá $\frac{1}{2}$ đơn vị (Hình 10).

kip-5cm

Hình 10

Vì chọn ra 5 điểm trên mặt của 4 tam giác con, nên phải có ít nhất 2 điểm nằm trên cùng một tam giác con. Khi đó khoảng cách giữa hai điểm này không quá $\frac{1}{2}$ đơn vị.

4.2.3 Vận dụng phương pháp phản chứng để giải các bài toán không mẫu mực

để vận dụng phương pháp phản chứng vẫn phải phân tích để tìm ra số "thỏ" nhiều hươn số "lồng".

Ví dụ 4.26. *Cho 9 đường thẳng. Mỗi đường đều chia hình vuông $ABCD$ thành hai tứ giác với tỷ lệ diện tích là $\frac{2}{3}$. Chứng minh rằng có ít nhất 3 trong số 9 đường thẳng này đí qua một điểm.*

Giải.

kip-4.5cm

Hình 11

1) Giả sử H, K là điểm giữa các cạnh AB, CD. Khi đó $HK||AD||BC$.

Giả sử EF là một trong những đường thẳng đã cho và EF cắt HK tại điểm I. Các tứ giác $ABEF$ và $CDEF$ đều là hình thang và nhận HI, IK là đường trung bình. Do $S_{ABFE} = \dfrac{2}{3}S_{CDEF}$, nên

$$AB.\frac{AE+BF}{2} = CD\frac{DE+CF}{2} \times \frac{2}{3} = AB.\frac{DB+CF}{2} \times \frac{2}{3}.$$

Do đó $HI = \dfrac{2}{3}IK$, tức I là điểm chia đường trung bình HK của hình vuông theo tỷ lệ $\dfrac{2}{3}$. (Hình 11)

Vậy nếu đường thẳng chia hình vuông thành hai tứ giác (chỉ có thể là hình chữ nhật hoặc hình thang) có tỷ lệ $\dfrac{2}{3}$, thì nó phải đi qua điểm chia đường trung bình cuả hình vuông thuộc hai cạnh còn lại theo tỷ lệ $\frac{2}{3}$.

2) Trong hình vuông có bốn điểm (LồNG) thoả mãn tính chất trên, mà ta có 9 đường thẳng (THỏ), nên phải có ít nhất 3 đường thẳng đã cho đi qua một trong những điểm trên.

Ví dụ 4.27. *Trên cánh rừng hình vuông cạnh dài 1 km mọc 4500 cây thông đường kính 50 cm. Chứng minh rằng trong cánh rừng này có thể cắt ra một thử a đất hình chữ nhật kích thước* 10×20 m^2*, mà trên đó không mọc một cây thông nào.*

Giải.

1) Chia cánh rừng thành các ô chữ nhật kích thước 10×20 m^2 với "hình viền" có chiều rộng không nhỏ hơn 0,5 m (đường kính của mỗi cây thông) bằng cách sau:

Chia một chiều hình vuông thành 48 đoạn với độ dài 20 m. Giữa hai đoạn này đặt một đoạn ngăn cách với chiều dài 0,6 m. Hai đoạn ở hai đầu có chiều dài mỗi đoan 10,3 m.

Chia chiều còn lại thành 95 đoạn với độ dài mỗi đoạn 10 m. Giữa hai đoạn có đoạn ngăn cách với độ dài lớn hươn 0,5 m.

Khi đó cánh rừng được chia thành $48 \times 95 = 4560$ ô với kích thước 10×20 m^2 và khoảng cách gần nhất giữa hai ô đều lớn hươn 0,5 m (bảo đảm cho cây mọc ở một ô không có gốc lấn sang phần đất của ô khác).

2) Phản chứng. Trên cánh rừng số ô kích thước 10×20 m^2 (4560) lớn hươn số cây thông (4500), nên phải có ít nhất một ô (thậm chí ít nhất 60 ô) kích thước 10×20 m^2, mà trên đó không có cây thông nào.

4.3 Phương pháp suy luận trực tiếp

Trước một bài toán "không mẫu mực" cần phân tích, để chọn phương pháp giải, nhưng trước hết xem xét khả năng vận dụng các phép suy luận trong toán học và cuộc sống để suy ra điều cần khẳng định. Sau đây xin đươn cử một số ví dụ để minh hoạ việc vận dụng phương pháp suy luận trực tiếp.

Ví dụ 4.28. *Nhập học vào khối phổ thông chuyên Toán-Tin Trường đại học Khoa học tự nhiên, đại học Quốc gia Hà Nội năm 2005 có 40 em biết nhạc, 40 em biết chươi cờ và 40 em biết đá cầu (mỗi em có thể biết nhiều môn). Thầy Chủ nhiệm khối Nguyễn Vũ Lương đề nghị hai thầy Phó chủ nhiệm khối Phạm Văn Hùng và Lê đình Vinh hướng dẫn các em tự chia thành bốn nhóm sinh hoạt ngoại khoá, sao cho mỗi nhóm có đúng 10 em biết nhạc, 10 em biết chươi cờ và 10 em biết đá cầu. Hãy trình bầy cách chia nhóm của các em?*

Cách chia nhóm:

1) đầu tiên chia 40 em biết nhạc thành 40 nhóm, mỗi nhóm chỉ gồm 1 em

$$A_1,\, A_2,\, \ldots \qquad \ldots,\, A_{39},\, A_{40}$$

2) Bổ sung em biết chươi cờ vào mỗi nhóm A_i ($1 \leqslant i \leqslant 40$) (Nếu em A_i đã biết chươi cờ thì thôi) để được các nhóm

$$B_1,\, B_2,\, \ldots \qquad \ldots,\, B_{39},\, B_{40}$$

(Mỗi nhóm B_i có đúng 1 em biết nhạc, 1 em biết chươi cườ)

3) Bổ sung các em biết đá cầu chưa tham gia các nhóm vào nhóm B_i để được nhóm C_i ($1 \leqslant i \leqslant 40$), sao cho mỗi nhóm C_i có đúng một em biết nhạc, một em biết chươi cờ và không quá hai em biết đá cầu.

4) Nhập các nhóm

Gọi số nhóm C có 2 em biết đá cầu là k, có một em biết đá cầu là s và không có em nào biết đá cầu là t. Khi đó

Số nhóm C là $k + s + t = 40$

Số em biết đá cầu là $2k + 1.s + 0.t = 40$.

Suy ra hệ

$$\begin{cases} k + s + t = 40 \\ 2k + 1.s + 0.t = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = t \\ s \text{ chẵn} \end{cases}$$

Vì số nhóm hai em biết đá cầu bằng số nhóm không em nào biết đá cầu bằng nhau, số nhóm một em biết đá cầu chẵn, nên nhập mỗi nhóm hai em biết đá cầu với một nhóm không em nào biết đá cầu, hai nhóm, mỗi nhóm một em biết đá cầu với nhau, được 20 nhóm:

$$D_1,\, D_2,\, \ldots\ldots D_{19},\, D_{20}$$

Khi đó mỗi nhóm D_i ($1 \leqslant i \leqslant 20$) có đúng 2 em biết nhạc, hai em biết chươi cờ và hai em biết đá cầu.

Nhập năm nhóm D với nhau rồi bổ sung nốt các em còn lại sẽ được bốn nhóm sinh hoạt ngoại khoá, mà mỗi nhóm có đúng 10 em biết nhạc, 10 em biết chươi cờ và 10 em biết đá cầu.

Ví dụ 4.29. *Lớp chuyên Toán khoá I phát động phong trào thi đua lấy củi nộp cho bếp Xóm đình. Cuối học kỳ I thầy chủ nhiệm Phạm Văn Điều đặt ra ba giải thưởng để tặng cho ba em đạt thành tích cao nhất. Trước khi công bố ra lớp, thầy Điều đã mười 4 em đạt thành tích cao nhất: Nguyễn đình Bạn, Trần Văn Nhung, Đỗ Thanh Sươn, Nguyễn Văn Xoa đến văn phòng công bố giải thưởng.*

Khi về lớp mọi người hỏi các em trả lười như sau:

Em Nhung: "Mình đạt giải nhì hoặc ba"

Em Xoa: "Mình đạt giải"

Em Sươn: "Mình đạt giải nhất"

Em Bạn: "Mình không đạt giải"

Khi được nghe lại các câu trả lười trên thầy điền mỉm cười và nói "Chỉ có 3 bạn nói thật còn một bạn nói đùa" .

Bạn hãy cho biết em nào nói đùa và em nào đạt giải nhất?

Giải.

Trước hết cần xác định em đã nói đùa bằng cách xét câu hỏi của từng em có dẫn đến mâu thuẫn với khẳng định của thầy điều hay không.

1) Nếu em Nhung nói đùa, thì cả ba em Xoa, Sươn, Bạn đều nói thật, nên hoặc em Nhung và em Sươn đều đạt giải nhất, hoặc em Nhung và em Bạn không đạt giải. điều này vô lý, nên em Nhung nói thật.

2) Nếu em Xoa nói đùa, thì cả ba em Nhung, Sươn, Bạn đều nói thật. Như vậy cả Xoa và Bạn đều không đạt giải. điều này trái với giả thiết của bài toán, nên Xoa phải đạt giải.

3) Nếu Bạn nói đùa, thì cả ba bạn còn lại đều nói thật, nên cả bốn bạn đều đạt giải. điều này trái với giả thiết của bài toán, nên Bạn nói thật.

Vậy Sươn nói đùa. Xoa đạt giải nhất.

Bài toán này cũng có thể giải bằng phương pháp logic mệnh đề.

Ví dụ 4.30. *Trong cuộc hội ngộ giữa thầy Nguyễn Văn Mậu và ba học trò đạt huy chương vàng Olympic Toán Quốc tế: Đàm Thanh Sươn, Nguyễn Tiến Dũng, Ngô Bảo Châu, khi trao đổi về phép suy luận, thầy nói "Suy luận chẳng những là phương pháp mạnh mà còn rất gần gũi với cuộc sống thương nhật, nhiều khi "chươi mà học, học mà chươi" . Chẳng hạn, với 5 cái mũ: 3 màu đỏ, 2 màu xanh; tôi mười 3 em ngồi theo hàng dọc, để em ngồi sau cũng nhìn được đầu 2 em ngồi trước, rồi đứng từ phía sau đội lên đầu mỗi em một cái mũ, còn hai cái dấu đi.*

Các em thấy một cách hiển nhiên rằng dù bất kỳ phương án đội mũ nào vẫn có em phát hiện được màu mũ của mình.”

Bạn hãy lý giải điều hiển nhiên mà thầy Mậu nói?

Giải.

Giả sử thầy Mậu xếp em Châu ngồi trước, rồi đến em Dũng và sau cùng là em Sươn. Khi đó có 3 phương án đội mũ:

Phương án 1:	Châu	Dũng	Sươn
	đội mũ xanh	đội mũ xanh	đôi mũ đỏ

Vì chỉ có 2 mũ xanh, nên khi em Sươn nhìn thấy mũ của hai bạn ngồi trước màu xanh, thì suy ra ngay màu mũ của mình phải đỏ.

Phương án 2:	Châu	Dũng	
	đội mũ xanh	đội mũ đỏ	đ

Em Dũng nhìn thấy mũ của em Châu màu xanh, nhưng không thấy em Sươn xác định được màu mũ của mình, suy luận rằng: Nếu mũ của em màu xanh, thì bạn Sươn đã phát hiện được màu mũ của mình, nhưng bạn Sươn im lặng, chứng tỏ màu mũ của Dũng phải đỏ. Phương án 3:

Châu	Dũng	Sươn
đội mũ đỏ	đội mũ xanh (hoặc đỏ)	đôi mũ xanh (hoặc đỏ)

Khi không thấy em Sươn, em Dũng xác định được màu mũ của mình em Chau suy luận: Nếu màu mũ của em xanh, thì hoặc em Sươn hoặc em Dũng xác định được màu mũ của mình, nhưng cả hai em đều im lặng chứng tỏ mũ của em màu đỏ.

Vậy khẳng định của thầy Nguyễn Văn Mậu đã được lý giải.

Ví dụ 4.31. *Trong cuộc toạ đàm về thuật toán với hai học trò đạt huy chương vàng và huy chương bạc Olympic Tin học quốc tế Nguyễn Ngọc Huy và Nguyễn Bảo Sươn, thầy Nguyễn Xuân My nói: Thuật toán xuất hiện khắp nươi: Trong toán học, trong khoa học, trong cuộc sống thường nhật và ngay cả lúc vui chươi giải trí. Chẳng hạn, trên bàn có hai đống diêm với số lượng tương ứng 9 và 11. Hai em thực hiện bôc diêm theo nguyên tắc: Người nào đến lượt phải bốc ít nhất một que diêm và nếu bốc ở một đống thì có thể bốc với số lương tuỳ ý; còn nếu bốc ở cả hai đống, thì phải bốc số lượng bằng nhau.*

Người nào đến lượt mà hết diêm thì thua cuộc.

Nếu Huy được đi trước, thì em phải có cách bốc diêm như thế nào để thắng cuộc?

Bạn hãy nêu rõ cách bốc diêm của em Huy.

Giải.

Trước hết đưa ra thuật toán cần xác định những cặp số lượng, mà người đi đầu chắc chắn thua. Ta gọi cặp này là “cặp thua”

1) Xác định các cặp thua

Quy ước đống bên trái là đống I, đống còn lại là đống II, người đi trước là A, người còn lại là B.

Cặp (1, 2):

Nếu A bốc ở đống II một que, thì mỗi đống đều còn một que. Khi đó B bốc được hết diêm ở cả hai đống, nên A thua.

Nếu A bốc ở mỗi đống một que, thì đống II còn một que. Khi đó B bốc một que diêm còn lại, nên A thua.

Vậy (1, 2) là cặp thua.

Cặp (3, 5)

(a) A bốc cả hai đống

- Nếu A bốc ở mỗi đống

- Một que, thì được cặp (2, 4). Khi đó B bốc ở đống II ba que và dồn A về cặp (2, 1), nên A thua. Hai que, thì được cặp (1, 3). Khi đó B bốc một que ở đống II và dồn A về cặp (1, 2) nên A thua cuộc. Ba que thì được cặp (0,2). Khi đó B bốc nốt 2 que ở đống II, nên A thua cuộc.

(b) A bốc ở đống II

Nếu A bốc ở đống II:

- Một que, thì được cặp (3, 4). Khi đó B bốc ở mỗi đống 2 que và dồn A về cặp (1, 2), nên A thua.

- Hai que, thì được cặp (3, 3). Khi đó B bốc hết diêm ở cả hai đống, nên A thua.

- Ba que, thì được cặp (3, 2). Khi đó B bốc ở đống I hai que và dồn A về cặp (1, 2), nên A thua .

- Bốn que, thì được cặp (3, 1). Khi đó B bốc ở đống I một que và dồn A về cặp (1, 2), nên A thua.

- Năm que, thì được cặp (3, 0). Khi đó B bốc nốt 3 que còn lại, nên A thua.

(c) A bốc ở đống I.

Nếu A bốc ở đống I

- Một que, thì được cặp (2, 5). Khi đó B bốc ở đống II bốn que và dồn A về cặp (2, 1), nên A thua.

- Hai que, thì được cặp (1, 5). Khi đó B bốc ở đống II ba que và dồn A về cặp (1, 2), nên A thua.

- Ba que, thì được cặp (0, 5). Khi đó B bốc nốt năm que còn lại và A thua.

2) Thuật toán

Vì cặp (3, 5) là cặp thua, nên Huy bốc ở mỗi đống 6 que và dồn em Sươn phải xuất phát với cặp thua (3, 5), nên Huy thắng.

Ví dụ 4.32. *để động viên các em học sinh giải bài tập hình học, thầy Phan Cung đức đặt ra ba nhóm sưu tầm và giải bài tập hình học với tiêu đề: "Quỹ tích", "Biến* *hình" và "đồng dạng" .*

Các học sinh nam lớp 11 khối phổ thông chuyên Toán-Tin Trường đại học khoa học Tự nhiên tham gia các nhóm do thầy đức đặt ra.

Khi tìm hiểu thấy rằng có 7 em tham gia nhóm "Quỹ tích", 6 em tham gia nhóm biến hình, 5 em tham gia nhóm đồng dạng, 4 em tham gia vừa nhóm "Quỹ tích" vừa nhóm "Biến hình", 3 em tham gia vừa nhóm "Quỹ tích" vừa nhóm "đồng dạng", 2 em tham gia vừa nhóm "Biến hình" vừa nhóm "đồng dạng", 1 em tham gia cả ba nhóm.

Bạn hãy xác định giúp số học sinh nam của lớp 11 khối phổ thông chuyên Toán- Tin của Trường đại học Khoa học tự nhiên.

Giải.

Dùng 3 hình tròn "Quỹ tích", "Biến hình", "đồng dạng" để biểu thị ba khối học sinh nam của lớp 11 tham gia ba nhóm: "Quỹ tích", "Biến hình" và "đồng dạng". Khi đó

- Phần giao của cả ba hình tròn biểu thị phần học sinh tham gia đông thười cả ba nhóm.

- Phần giao của các hình tròn "Quỹ tích" và "Biến hình" biểu thị phần học sinh tham gia đông thười hai nhóm "Quỹ tích" và "Biến hình".

- Phần giao của các hình tròn "Quỹ tích" và "đồng dạng" biểu thị phần học sinh tham gia đồng thười hai nhóm "Biến hình" và "đồng dạng" .

Căn cứ vào các điều kiện của bài toán với phương pháp loại trừ xác định được số lượng các khối ghi trên hình 12. Từ đó suy ra số học sinh nam của lớp 11, Trường đại học Khoa học tự nhiên là:

$$1 + 3 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 10$$

Ví dụ 4.33. *Thầy Nguyễn Ngọc Thắng cho lớp 10A_1 Toán kiểm tra phần tam thức bậc 2. Bốn em Xuân, Hạ, Thu, đông làm bài khá nhất, trong đó có một em đạt điểm 10. Khi hỏi dự đoán*

Em Linh nói: "Theo em bạn Xuân hoặc bạn Hạ đạt điểm 10"

Em Nam nói: "Theo em bạn Hạ hoặc bạn Thu đạt điểm 10'"

Em Minh nói: "Theo em bạn Thu hoặc bạn đông đạt điểm 10"

Nghe xong thầy Thắng mỉm cười và khẳng định: "Chỉ có Minh đoán đúng một bạn, hai em còn lại đoán sai cả".

Bạn hãy xác định người đạt điểm 10.

Giải.

Nếu người em Minh dự đoán đúng là em Thu, thì em Nam cũng dự đoán đúng một người, nên mâu thuẫn với điều kiện Nam và Linh đều dự đoán sai hết. Bởi vậy người mà Minh dự đoán đúng phải là em đông. Trong trường hợp này em Linh và em Nam đều dự đoán sai hết cả, nên thoả mãn điều kiện của bài toán. Vậy em đông đạt điểm 10.

4.4 Phương pháp mệnh đề

4.4.1 Khái niệm về logic mệnh đề

Định nghĩa. Mệnh đề là một câu trọn nghĩa (một khẳng định) mà nội dung của nó phản ánh đúng hoặc sai thức tế khách quan.
Mệnh đề đúng: Nếu nội dung của mệnh đề (A) phản ánh đúng thực tế khách quan (khẳng định đúng với thực tế), thì nó được gọi là mệnh đề đúng hay mệnh đề nhận giá trị đúng và viết $A = Ø$ hoặc $A = 1$.
Mệnh đề sai: Nếu nội dung của mệnh đề (A) phản ánh sai thực tế khách quan (khẳng định sai với thực tế), thì nó được gọi là mệnh đề sai hay mệnh đề nhận giá trị sai và viết $A = S$ hoặc $A = 0$

Các giá trị Ø, $S(0, 1)$ được gọi là giá trị chân lý (hay giá trị) của mệnh đề.
Biến mệnh đề: Ký hiệu dùng để chỉ mệnh đề được gọi là biến mệnh đề. Người ta thường dùng các chữ cái in hoặc viết tay có chỉ số hoặc không, chẳng hạn a, b, $c, \ldots,$ a_1, b_1, $c_1, \ldots, x_1$, $x_2, \ldots, X_1, X_2, \ldots$ làm biến mệnh đề.

4.4.2 Các phép toán mệnh đề

Trên tập hợp mệnh đề xác định 5 phép toán:
-Phép phủ định được ký hiệu bằng $-$
-Phép hội được ký hiệu bằng $\bullet$
-Phép tuyển được ký hiệu bằng $\vee$
-Phép kéo theo được ký hiệu bằng $\Rightarrow$
-Phép tương đương được ký hiệu bằng $\Leftrightarrow$
và được xác định bằng bảng giá trị chân lý sau đây:

x	y	$\overline{x}$	$x \bullet y$	$x \vee y$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

4.4.3 Công thức của logic mệnh đề

Từ các mệnh đề và phép toán phủ định, hội, tuyển, kéo theo và tương đương lập nên các "biểu thức logic", mà một nhóm trong chúng được gọi là các công thức của logic mệnh đề và định nghĩa bằng quy nạp như sau:

Định nghĩa

a) Các biến mệnh đề: x, y, $z \ldots$, X, Y, $Z, \ldots$ được thừa nhận là các công thức của logic mệnh đề;

b) Nếu A, B là các công thức của logíc mệnh đề, thì $(\overline{A})$, $(\overline{B})$, $(A \bullet B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ là công thức của logic mệnh đề.

c) Chỉ các "biểu thức" được xác định ở mục (a) hoặc mục (b) mới là công thức của logic mệnh đề.

Giá trị của công thức

Giả sử $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một công thức của logic mệnh đề.

Giá trị chân lý β nhận được khi thay tất cả các vị trí của biến mệnh đề x_i trong công thức A bằng α_i $(\alpha_i = 0, 1)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ được gọi là giá trị chân lý (hay giá trị) của công thức A tại bộ giá trị $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ của các biến mệnh đề và viết

$$A(\alpha) = A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \beta$$

Công thức hằng đúng, hằng sai và thoả được

Công thức $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là công thức *hằng đúng (hằng sai)* và viết

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n \equiv 1(A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0)$$

nếu với mọi bộ giá trị $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ của các biến mệnh đề

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1(A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0).$$

Công thức $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là công thức thoả được, nếu tồn tại ít nhất một bộ giá trị $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ của biến mệnh đề, để

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1.$$

Công thức bằng nhau

Công thức $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và công thức $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là hai công thức bằng nhau và viết $A = B$, nếu tại mọi bộ giá trị $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ của các biến mệnh đề đều có:

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = B(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

4.4.4 Các luật của logic mệnh đề

Một số công thức đóng vai trò như các hằng đẳng thức đáng nhớ, được sử dụng thường xuyên trong khi biến đổi công thức và giải các bài tập toán logic đồng thười được gọi là các luật của logic mệnh đề.

Sau đây liệt kê 23 luật quan trong nhất của logic mệnh đề:

1. $A \to B = \overline{A} \vee B$ (thay kéo theo bằng phủ định và tuyển)
2. $A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C$ (phân phối của hội đối với tuyển)
3. $A \vee B \wedge C = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (phân phối của tuyển đối với hội)
4. $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$ (Luật DeMorgan)
5. $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$ (Luật DeMorgan)
6. $A \Leftrightarrow B = A \wedge B \vee \overline{A} \wedge \overline{B}$ (Thay phép tương đương)
7. $A \wedge (A \vee B) = A$ (Luật hấp thụ của hội đối với tuyển)
8. $A \vee A \wedge B) = A$ (Luật hấp thụ của tuyển đối với hội)
9. $A \wedge B \vee \overline{B} = A \vee \overline{B}$ (Luật hấp thụ)
10. $(A \vee B) \wedge \overline{B} = A \wedge \overline{B}$ (Luật hấp thụ)
11. $A \wedge B = B \wedge A$ (Tính giao hoán của hội)
12. $A \vee B = B \vee A$ (Tính giao hoán của tuyển)
13. $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (A \wedge C)$ (Tính kết hợp của hội)
14. $(A \vee B) \vee C = A \vee (A \vee C)$ (Tính kết hợp của tuyển)
15. $A \wedge A = A$ (Tính luỹ đẳng của hội)
16. $A \vee A = A$ (Tính luỹ đẳng của tuyển)
17. $A \wedge \overline{A} = 0$ (A và không A luôn luôn sai)
18. $A \vee \overline{A} = 1$ (A hoặc không A luôn luôn đúng)
19. $A \wedge 0 = 0$ (A và hằng sai luôn luôn sai)
20. $A \vee 0 = A$ (A hoặc hằng sai luôn là A)
21. $A \wedge 1 = A$ (A và hằng đúng luôn là A)

22. $A \vee 1 = 1$ (A hay hằng đúng luôn hằng đúng)

23. $\overline{\overline{A}} = A$ (Hai lần phủ định của mệnh đề A lại chính là A)

Phép biến đổi đồng nhất

Dựa vào các luật cơ bản người ta có thể biến đổi các công thức của logic mệnh đề thành các đại lượng tương đẳng và "đơn giản" hoặc tiện ích hơn. Nhờ đó việc giải phương trình, hệ phương trình logic, xét tính bằng nhau, tính hằng đúng của các công thức được thực hiện một cách dễ dàng hơn.

Một số khẳng định

Hội sơ cấp: Hội của các biến mệnh đề hoặc phủ định của chúng được gọi là Hội sơ cấp.

Tuyển sơ cấp: Tuyển của các biến mệnh đề hoặc phủ định của chúng được gọi là Tuyển sơ cấp.

Nhờ các luật của logic mệnh đề ta có thể suy ra các khẳng định sau đây:

Khẳng định 1: Một hội sơ cấp hằng sai khi và chỉ khi nó có chứa một biến mệnh đề nào đó cùng với phủ định của biến mệnh đề này.

Khẳng định 2: Một tuyển sơ cấp hằng đúng khi và chỉ khi nó có chứa một biến mệnh đề nào đó cùng với phủ định của biến mệnh đề này.

Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các công thức của logic mệnh đề. Khi đó có các khẳng định sau:

Khẳng định 3:

$(A_1) \wedge (A_2) \wedge \cdots \wedge (A_n) = 1$ khi và chỉ khi $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 1$

Khẳng định 4:

$(A_1) \vee (A_2) \vee \cdots \vee (A_n) = 0$ khi và chỉ khi $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 0$

Phương pháp logic mệnh đề

Phương pháp logic mệnh đề là phương pháp chuyển bài toán về dạng logic mệnh đề, rồi dùng các luật và các khẳng định của logic mệnh đề mà suy ra đáp án. Phương pháp gồm ba bước sau:

1) Chọn các biến mệnh đề thích hợp, tương ứng, diễn đạt các mối quan hệ, hiện trạng... được cho trong bài toán bằng các công thức của logic mệnh đề. Sau đó căn cứ vào mối quan hệ và các điều kiện đã cho trong bài toán mà đưa ra phương trình hoặc hệ phương trình logic thích hợp.

2) Giải phương trình hoặc hệ phương trình logic, để suy ra các "nghiệm logic".

3) Căn cứ vào sự tương ứng khi chọn biến mệnh đề, mà diễn đạt các "nghiệm logic" thành đáp án của bài toán đặt ra.

Ví dụ 4.34. *Thầy Phạm Tuấn Dương- chủ nhiệm lớp chuyên Toán khoá II phân công các em đỗ Ngọc Diệp, Nguyễn đình Hoá, Phạm Trọng Quát, Đào Trọng Thi trực khu sơ tán tại xóm Na Buồn, xã Văn Yên, huyện đại Từ, tỉnh Bắc Thái (nay là tỉnh Thái Nguyên) bốn ngày liên tiếp Ba mươi, Mồng 1, Mồng hai, Mồng ba tết năm 1966 và động viên các em ghi nguyện vọng. Các em đã đề đạt nguyện vọng như sau:*

1. *Em Thi và em Quát không thể trực nhật vào ngày ba mươi.*
2. *Nếu em Thi trực ngày Mồng một hoặc em Quát trực ngày Mồng hai, thì em Hoá trực ngày Mồng ba.*
3. *Nếu em Diệp trực ngày Mồng hai, thì em Hoá trực ngày Mồng một*
4. *Nếu em Diệp hoặc em Quát trực ngày Mồng một, thì em Thi trực ngày Mồng ba.*
5. *Nếu em Quát không trực ngày Mồng ba, thì em Diệp trực ngày Ba mươi và em Thi không trực ngày Mồng hai.*

Bạn xếp giúp lịch trực thoả mãn nguyện vọng của tất cả các em.

Giải.

1. Xác định biến mệnh đề

   Để đơn giản ta gọi các ngày Ba mươi, Mồng một, Mồng ha, Mồng ba là ngày 0, ngày 1, ngày 2, ngày 3 và dùng chữ cái đầu của tên để chỉ các em.

   Với quy ước này x_i là biến để chỉ mệnh đề "Em x trực ngày i" ($i = 0, 1, 2, 3$). Khi đó $\overline{x_i}$ là mệnh đề "Em x không trực ngày i".

2. Lập công thức diễn tả điều kiện:

   - điều kiện 1 được diễn tả bằng công thức $A = \overline{t}_0.\overline{q}_0$

   - điều kiện 2 được diễn đạt bằng công thức

   $$B = (t_1 \vee q_2) \to h_3 = \overline{t_2 \vee q_2} \vee h_3 = \overline{t}_1.\overline{q}_2 \vee h_3$$

   - điều kiện ba được diễn đạt bằng công thức:

   $$C = \overline{d}_2 \to h_1 = d_2 \vee h_1$$

   - điều kiện 4 được diễn đạt bằng công thức:

   $$D = (d_1 \vee q_1) \to t_3 = \overline{d_1 \vee q_1} \vee t_3 = \overline{d}_1.\overline{q}_1 \vee t_3$$

- điều kiện 5 được diễn đạt bằng công thức:

$$E = \overline{q}_3 \to d_0.\overline{t}_2 = q_3 \vee d_0.\overline{t}_2$$

3. Lập phương trình logic

   Vì phương án trực nhật phải thoả mãn yêu cầu của tất cả các em, nên phương án dưới dạng “ngôn ngữ logic mệnh đề” phải là nghiệm của phương trình:

$$\begin{aligned}
&A.B.C.D.E = 1 && (1)\\
&A.B = \overline{t}_0.\overline{q}_0.(\overline{t}_1.\overline{q}_2 \vee h_3) = \overline{t}_0\overline{q}_0\overline{t}_1\overline{q}_2 \vee \overline{t}_0.\overline{q}_0.h_3\\
&A.B.C = (\overline{t}_0.\overline{q}_0.\overline{t}_1.\overline{q}_2 \vee \overline{t}_0.\overline{q}_0.h_3).(d_2 \vee h_1)\\
&\ = \overline{t}_0.\overline{q}_0.\overline{t}_1.\overline{q}_2.d_2 \vee \overline{t}_0.\overline{q}_0.\overline{t}_1.\overline{q}_2.h_1 \vee \overline{t}_0\overline{q}_0.h_3d_2 \vee \overline{t}_0.\overline{q}_0.h_3.h_1
\end{aligned}$$

   Vì mỗi em chỉ trực một ngày, nên $h_3.h_1 = 0$. Do đó:

$$\begin{aligned}
A.B.C =&\overline{t}_0.\overline{q}_0.\overline{t}_1.\overline{q}_2.d_2 \vee \overline{t}_0.\overline{q}_0.\overline{t}_1.\overline{q}_2.h_1 \vee \overline{t}_0\overline{q}_0.h_3d_2\\
A.B.C.D =&(\overline{t}_0.\overline{q}_0.\overline{t}_1.\overline{q}_2.d_2 \vee \overline{t}_0.\overline{q}_0.\overline{t}_1.\overline{q}_2.h_1 \vee \overline{t}_0.\overline{q}_0.h_3.d_2)(\overline{d}_1.\overline{q}_1 \vee t_3)\\
=&\overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_1.\overline{q}_2.\overline{d}_1.d_2 \vee \overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_2.d_2.t_3 \vee \overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_1\overline{q}_2.\overline{d}_1.h_1\\
&\vee \overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_2.h_1.t_3) \vee \overline{t}_0.\overline{q}_0.\overline{q}_1.\overline{d}_1.d_2.h_3 \vee \overline{t}_0.\overline{q}_0.d_2.h_3.t_3
\end{aligned}$$

   Những hội dẫn đến mâu thuẫn: hoặc một người trực hai ngày hoặc hai người trực cùng một ngày đều phải bằng không. Bởi vậy $\begin{array}{l}\overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_1.\overline{q}_2.\overline{d}_1.d_2 = 0;\\ \overline{t}_0.\overline{q}_0.\overline{q}_1.\overline{d}_1.d_2.h_3 = 0;\end{array}$

   nên: $A.B.C.D = \overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_2.d_2.t_3 \vee \overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_1.\overline{q}_2.\overline{d}_1.h_1$

$$\begin{aligned}
A.B.C.D.E =&(\overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_2.d_2.t_3 \vee \overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_1.\overline{q}_2.\overline{d}_1.h_1)(q_3 \vee d_0\overline{t}_2)\\
=&\overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_2.d_2.t_3.q_3 \vee \overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_2.d_0.d_2.\overline{t}_2.t_3\vee\\
&\vee \overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_1.\overline{q}_2.\overline{d}_1.h_1.q_3 \vee \overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_1.\overline{q}_2.\overline{d}_1.h_1.d_0.\overline{t}_2\\
=&1
\end{aligned}$$

   Những hội dẫn đến hai người cùng trực một ngày hoặc một người trực hai ngày đều phải bằng 0, nên hội thứ nhất, thứ hai và thứ tư đều bằng o và có phương trình:

$$\overline{t}_0.\overline{t}_1\overline{q}_0.\overline{q}_1.\overline{q}_2.\overline{d}_1.h_1.q_3 = 1$$

   Suy ra

$$\begin{gathered}
\overline{t}_0 = 1;\ \overline{t}_1 = 1;\ \overline{q}_0 = \overline{q}_1 = \overline{q}_2 = \overline{d}_1 = h_1 = q_3 = 1\\
\text{hay } t_0 = t_1 = q_0 = q_1 = q_2 = d_1 = 0 = 0,\ h_1 = q_3 = 1.
\end{gathered}$$

Khi đó
Em Hoá trực ngày Mồng một
Em Quát trực ngày Mồng ba
Em Thi trực ngày Mồng hai
Em Diệp trực ngày Ba mươi.

Ví dụ 4.35. *Thầy Phan đức Chỉnh chỉ định bốn em học sinh nữ của lớp chuyên Toán khoá I: Trần Thị đệ, Hoàng Thị Lương, Văn Tâng Mạng, Phan Huy Thanh trình bầy bốn bài toán mẫu được đánh số thứ tự từ 1 đến 4. Thầy cho phép tự phân công và các em thoả thuận như sau:*

1. *Nếu đệ không trình bầy bài 1, thì Mạng không trình bày bài 2;*
2. *Nếu Lương không trình bày bài 1 và bài 4, thì đệ trình bày bài 1;*
3. *Nếu Mạng không trình bày bài 4, thì Lương trình bầy bài 3.*
4. *Nếu Thanh không trình bày bài 1, thì Lương trình bày bài1;*
5. *Nếu Thanh không trình bày bài 2, thì Lương không trình bày bài 1*

Bạn hãy xác định bài toán của mỗi em trình bày?

Giải.
1) Chọn biến mệnh đề
Dùng chữ cái đầu của tên để chỉ em học sinh tương ứng và chỉ số i ($i =$ 1, 2, 3, 4) để chỉ bài toán thứ i.
Dùng x_i để chỉ mệnh đề "Em x trình bày bài i". Khi đó $\overline{x}_i$ là mệnh đề "Em x_i không trình bày bài i".
2) Diễn đạt các điều kiện của bài toán bằng công thức của logic mệnh đề:
điều kiện thứ nhất diễn đạt bằng công thức:

$$A = \overline{d}_1 \to \overline{m}_2 = d_1 \vee \overline{m}_2$$

điều kiện thứ hai diễn đạt bằng công thức:

$$B = \overline{l}_1.\overline{l}_4 \to d_1 = l_1 \vee l_4 \vee d_1$$

điều kiện thứ ba diễn đạt bằng công thức:

$$C = \overline{m}_4 \to l_3 = m_4 \vee l_3$$

điều kiện thứ tư diễn đạt bằng công thức:

$$D = \overline{t}_1 \to l_1 = t_1 \vee l_1$$

điều kiện thứ năm diễn đạt bằng công thức:

$$E = \overline{t}_2 \to \overline{l}_1 = t_2 \vee \overline{l}_1$$

Vì bảng phân công trực phải được cả bốn em nhất trí nên có phương trình logic.

$$A.B.C.D.E = 1$$

Lần lượt các hội $A.B$, $A.B.C$, $A.B.C.D$, $A.B.C.D.E$ và để ý rằng: Các hội sơ cấp mà trong đó hai người cùng trình bày một bài tập hoặc một người trình bày hai bài tập khác nhau đều sai, ta có:

$$\begin{aligned}
A.B =&(d_1 \vee \overline{m}_2)(l_1 \vee l_4 \vee d_1)\\
=&d_1l_1 \vee d_1l_4 \vee d_1d_1 \vee \overline{m}_2l_1 \vee \overline{m}_2l_4 \vee \overline{m}_2d_1\\
=&d_1 \vee d_1l_4 \vee \overline{m}_2l_1 \vee \overline{m}_2l_4 \vee \overline{m}_2d_1\\
A.B.C =&(d_1 \vee d_1l_4 \vee \overline{m}_2l_1 \vee \overline{m}_2l_4 \vee \overline{m}_2d_1).(m_4 \vee l_3)\\
=&d_1m_4 \vee d_1l_3 \vee d_1l_4m_4 \vee d_1l_4l_3 \vee \overline{m}_2l_1m_4 \vee \overline{m}_2l_1l_3\\
&\vee \overline{m}_2l_4m_4 \vee \overline{m}_2l_4l_3 \vee \overline{m}_2d_1m_4 \vee \overline{m}_2d_1l_3\\
=&d_1m_4 \vee d_1l_3 \vee \overline{m}_2l_1m_4 \vee \overline{m}_2d_1m_4 \vee m_2d_1l_3\\
A.B.C.D =&(d_1m_4 \vee d_1l_3 \vee \overline{m}_2l_1m_4 \vee \overline{m}_2d_1m_4 \vee \overline{m}_2d_1l_3)(t_1 \vee l_1)\\
=&\overline{m}_2l_1m_4\\
A.B.C.D.E =&\overline{m}_2l_1m_4(t_2 \vee \overline{l}_1) = \overline{m}_2l_1m_4t_2 \vee \overline{m}_2l_1m_4\overline{l}_1\\
=&\overline{m}_2l_1m_4t_2 = 1
\end{aligned}$$

Khi đó: $\overline{m}_2 = 1$, $l_1 = 1$, $m_4 = 1$, $t_2 = 1$ nên $m_2 = 0$, $l_1 = 1$, $m_4 = 1$, $t_2 = 1$.

Suy ra:

Em Lương trình bày bài 1
Em Thanh trình bày bài 2
Em Mạng trình bày bài 4
Và em đệ trình bày bài 3.

4.5 Phương pháp bảng

Nhiều bài toán logic có thể giải bằng cách lập bảng mô tả mối quan hệ giữa các đối tượng được cho trong bài toán. đối với một số bài toán logic trong đó xuất hiện hai hay nhiều tệp và các cặp phần tử nói lên mối quan hệ giữ các tệp người ta có thể thiết lập một hay nhiều bảng, để mô tả mối quan hệ giữa các tệp.

Mỗi bảng này có hàng trên cùng ghi các phần tử của một tệp, còn cột tận cùng bên trái ghi các phần tử thuộc tệp kia và các vị trí trong bảng ghi mã số quan hệ giữa những phần tử thuộc các tệp. Căn cứ vào các điều kiện đã cho trong bài toán gạch bỏ đi những cặp phần tử không thích hợp. Từ đó đi đến lười giải của bài toán.

Giải bài toán logic bằng phương pháp bảng đôi khi vấp phải trường hợp bảng cần lập có chiều khá lớn hoặc phải kết hợp nhiều bảng mới đi đến kết quả. Sau đây xin minh hoạ phương pháp bằng một số ví dụ:

Ví dụ 4.36. *Thầy chủ nhiệm khối Lê đình Thịnh công bố điểm kiểm tra học sinh giỏi riêng cho bốn em Phan Vũ Diễm Hằng, Nguyễn Thị Thiều Hoa, Nguyễn Thuỳ Linh và đào Thị Thu Hằng. Khi các bạn hỏi điểm của từng người, thì được trả lười:*

- Em Diễm Hằng nói: Ở Bạn Hoa 7 điểm, bạn Linh 9 điểm, bạn Thu Hằng 8 điểm" ;

- Em Hoa nói:" Bạn Thu Hằng 10 điểm, bạn Diễm Hằng 8 điểm và bạn Linh 7 điểm";

- Em Linh nói:" Cả ba bạn đều được 8" ;

- Em Thu Hằng nói:" Cả ba bạn đều được 7".

Khi nghe các câu trả lười trên thầy Thịnh nói:" Không có em nào được hai bạn cùng nói đúng điểm".

Bạn hãy xác định điểm của từng em?

Giải.

Bài toán có hai tệp đối tượng. Tệp thứ nhất gồm các em học sinh, tệp thứ hai là điểm của các em. Bài toán này có thể giải bằng phương pháp bảng:

1) Lập bảng:

Bảng gồm 5 hàng, 5 cột. Hàng đầu từ cột thứ hai ghi tên các em học sinh, còn trên cột tận cùng bên trái từ hàng hai ghi tên câu trả lười.

2) điễn mã số quan hệ giữa các em và điểm vào vị trí của bảng:

3) Vì không có em nào cùng được hai em nói đúng điểm của mình, nên dựa vào bảng trên suy ra điểm của các em là: Em Diễm Hằng 7, em Hoa 8, em Linh 9 và em Thu Hằng 10.

Ví dụ 4.37. *Nhân dịp kỷ niệm ngày Nhà giáo Việt Nam 20 tháng 11, phó chủ nhiệm khối cô đặng Thanh Hoa chỉ đạo 4 em Cúc, đào, Hồng, Sen làm bốn bông hoa: cúc, đào, hồng, sen.*

Sau khi hoàn thành em Sen ngắm hoa và nói với các em làm hoa cúc, hoa hồng và bạn đào: Ở Thế là trong chúng ta không có ai làm hoa trùng với tên mình". Bạn hãy xác định tên hoa mà mỗi em đã làm?

1. Hàng đầu từ cột thứ hai ghi tên các em làm hoa, còn cột tận cùng bên trái từ hàng hai ghi tên hoa mà các em đã làm:

2. Gạch bỏ ô của bảng

- Do không có em nào làm loại hoa giống tên mình nên các ô nằm trên hàng và cột cùng tên đều bị gạc bỏ.

- Câu Ỏem Sen ngắm hoa và nói với các em làm hoa cúc, hoa hồng và em đào" chứng tỏ:

+ Em đào không làm hoa cúc, hoa hồng.

+ Em Sen không làm hoa cúc, hoa hồng. Khi đó các ô nằm trên hàng hồng, cột Sen và cột đào bị gạc bỏcác ô nằm trên hàng cúc cột Sen và cột đào bị gạc bỏ. Từ cột cuối cùng suy ra em Sen làm hoa đáo, nên các ô còn lại cuả hàng đào bị ghạch bỏ. Cuối cùng từ cột Cúc suy ra Cúc làm hoa hồng, từ cột hồng suy ra Hồng làm hoa cúc.

Em Cúc làm hoa hồng;
Em đào làm hoa sen;
Em Hồng làm hoa cúc;
Em Sen làm hoa đào.

Ví dụ 4.38. *Nhân dịp kỷ niệm 30 năm ngày thành lập khối phổ thông chuyên Toán- Tin trường đại học tổng hợp Hà Nội Khối phát động phong trào viết về những kỷ niệm sâu sắc trong thười học sinh. Thầy Lê đình Vinh chủ trì việc chấm bài. Kết quả có hai bài đạt giải nhất. đáp lại câu hỏi những ai đạt giải nhất có năm câu trả lười:*

1. *Em Hoàng Ngọc Hà và em Hoàng Lê Minh*
2. *Em Nguyễn Thành Nam và em Phùng Văn ổn*
3. *Em Nguyễn đăng Thành và em Nguyễn Thành Nam*
4. *Em Hoàng Ngọc Hà và em Nguyễn đăng Thành,*
5. *Em Hoàng Ngọc Hà và em Lê Quang Tiến.*

Khi nghe các câu trả lười trên thầy Vinh mỉm cười và nói gọn: "Bốn câu mỗi câu đúng một nử a, còn một câu sai hết!"

Bạn hãy xác định những người đạt giải nhất.

Giải.

I. Lập bảng diễn tả các câu trả lười

II. Lý luận để suy ra đáp án

1. Kết quả trình bày trên bảng thoả mãn điều kiện của đề bài

2. Ngược lại, kết quả không như trên bảng, thì cần xét các khả năng có thể suy ra:

i) Nếu Minh không nhất, khi đó câu 1 sai hoàn toàn, nên các câu 2, 3, 4, 5 mỗi câu phải đúng một nử a, nên Thành, Tiến nhất. Khi đó Nam và ổn không nhất, nên câu 2 lại sai cả hai ý. Ta đi tới mâu thuẫn vì có hai câu sai hoàn toàn.

ii) Nếu Thành không nhất, thì câu 4 sai hoàn toàn, nên các câu 1, 3, 5 phải đúng một nử a. Bởi vậy, Minh, Nam, Tiến phải đạt giải nhất. Ta cũng đi tới mâu thuẫn với số lượng người đạt giải nhất chỉ là 2.

iii) Nếu Tiến không nhất, thì câu 5 sai hoàn toàn nên các câu 1, 2, 3, 4 mỗi câu phải đúng một nử a, nên Minh, ổn, Thành phải đạt giải nhất. Ta cùng đi tới mâu thuẫn. Vậy em Hà phải đạt giải nhất.

a) Nếu Hà không nhất, mà theo điều kiên phải có ít nhất một trong ba người: Minh, Thành, Tiến không nhất.

b) Nếu Hà nhất và Nam nhất, thì dẫn đến mâu thuẫn vì cả 5 câu mỗi câu đúng một nử a.

c) Nếu Hà nhất và Thành nhất hoặc Tiến nhất, thì khi đó có câu đúng cả hai ý, nên cùng dẫn đến mâu thuẫn.

Ví dụ 4.39. *Thầy đường Hoàng Giang trả bài kiểm tra môn Hoá học cho lớp 11 A1 Toán. Khi bạn Thùy ở lớp 11 A1 Tin hỏi điểm của các bạn Bình, định, Linh, Nam thì nhận được các câu trả lời:*

- Bạn Bình nói: ỎBạn Nam được 7, định được 8, Linh được 9"

- Bạn định nói: ỎBạn Nam được 10, Linh được 8, Bình được 9"

- Bạn Linh nói: ỎCả ba bạn đều được 7"

- Bạn Nam nói: ỎCả ba bạn đều được 8"

Khi nghe các câu trả lời thầy Giang nói: Ỏ Không có em nào được hai bạn cùng nói đúng điểm và mỗi câu trả lời chỉ nói đúng điểm một em".

Bạn hãy xác định số điểm của từng người.

Giải.

1. Lập bảng mô tả các câu trả lời

	Bình	định	Linh	Nam
Bình trả lưới		8	9	7
định trả lưới	9		8	10
Linh trả lưới	7	7		7
Nam trả lưới	8	8	8	

2. Phân tích loại trừ để tìm ra đáp án:

   Xét các cột 2, 3, và 4. Vì không người nào được hai bạn cùng nói đúng điểm của mình nên:

- Bạn định không thể đạt được điểm 8,

- Bạn Linh không thể đạt được điểm 8,

- Bạn Nam không thể đạt được điểm 7.

Nếu bạn định được điểm 7, bạn Linh được điểm 9, bạn Nam được điểm 10, thì bạn Bình được điểm 8. Phương án này thoả mãn cả điều kiện: Mỗi câu trả lười chỉ đúng điểm của một người.

Vậy bạn Bình được 8, bạn định được 7, bạn Linh được 9 và bạn Nam được 10.

4.6 Phương pháp sơ đồ

đây là phương pháp tương tự như phương pháp bảng, song phương pháp này lợi thế hươn khi giải quyết các bài toán mà ở đó số tệp đối tượng lớn hươn 2.

1) Phương pháp sơ đồ gồm 2 bươc: Thiết lập sơ đồ

Lấy các nhóm điểm trên mặt phẳng hay trong không gian tương ứng với các tệp. Dùng ngay ký hiệu các đối tượng để ghi trên các điểm tương ứng.

2) Mỗi cặp điểm tương ứng với hai đối tượng có một quan hệ nào đó đã cho trong một bài toán được nối với nhau bằng một đoạn thẳng hoặc một đoạn cong đặc trưng cho quan hệ mà nó biểu thị và không đi qua các điểm tương ứng chung gian khác. Ta gọi sơ đồ nhận được là sơ đồ mô tả quan hệ. Dựa vào cấu trúc của sơ đồ mô tả quan hệ và điều kiện đã cho trong bài toán mà suy ra đáp án

Sau đây xin trình bày một số ví dụ minh hoạ:

Ví dụ 4.40. *Bốn em Anh, Dũng, Hằng, Việt chuẩn bị lên đường đi thi học sinh giỏi toàn quốc được thầy đỗ Thanh Sươn cho biết trước điểm môn Hình học.*

Bạn Nam muốn biết điểm của từng người. Khi hỏi được các bạn trả lười úp úp mở mở như sau:

- Anh nói: Ở Cả ba đều được 7".

- Dũng nói: Ở Bạn Hằng 7 điểm, bạn Việt 9 điểm, bạn Anh 8 điểm".

- Hằng nói: Ở Bạn Anh 10 điểm, bạn Dũng 8 điểm và bạn Việt 7 điểm".

- Việt nói: Ở Cả ba bạn đều được 8".

Bạn hãy xác định điểm của từng người? Biết rằng không có bạn nào cùng được hai bạn nói đúng điểm của mình.

Giải.

1) Thiết lập sơ đồ

Lấy hai nhóm điểm trên mặt phẳng tương ứng với hai tệp đối tưởng.

Tệp thứ nhất gồm các em Anh, Dũng, Hằng, Việt.

Tệp thứ hai gồm các điểm: 7, 8, 9, 10

Sau đó căn cứ vào câu nói của các em mà xác lập các quan hệ giữa các tệp đối tượng.

a) Theo em Anh, ba em Dũng, Hằng, Việt đều được 7, nên điểm tương ứng với Dũng, Hằng, Việt đều có đường nối với điểm ghi số 7;

b) Theo em Dũng, giữa điểm "Hằng" và điểm "7", giữa điểm "Việt" và điểm "9", giữa điểm "Anh" và điểm "8" đều có đường nối với nhau;

c) Theo em Hằng, giữa điểm "Anh" và điểm "10", giữa điểm "Dũng" và điểm "8", giữa điểm "Việt" và điểm "7" đều có đường nối với nhau;

d) Theo em Việt, giữa điểm "8" và các điểm "Anh", "Dũng", "Hằng" đều có đường nối với nhau (Hình 13);

2) Vì không có em nào được hai em đồng thười nói đúng điểm của mình, nên trong hình 13 các quan hệ song song đều bị loại bỏ, tức chỉ có quan hệ đươn mới thực hiện. Bởi vậy em Anh đạt điểm 10, em Việt đạt điểm 9, em Hằng đạt điểm 8 và em Dũng đạt điểm 7.

Ví dụ 4.41. *Thầy Phạm Quang đức ra một đề quỹ tích trong không gian trên báo tường của Khối. Sáu em An, Bình, Cường, đạt, Kiều, Minh nộp bài giải. Sau khi chấm xong thầy công bố kết quả riêng cho các em và khẳng định chỉ có hai em giải đúng.*

Câu hỏi ai đã giải đúng có năm câu trả lười:

1. *An và Cường*
2. *Bình và Kiều*
3. *Minh và Bình*
4. *An và Minh*
5. *An và đạt*

Khi nghe các câu trả lười trên Thầy đức mỉm cười và nói "Có 4 câu đúng một nử a, còn một câu sai tất cả" .

Bạn hãy xác định giúp hai bạn giải đúng

Giải.

Lấy hai nhóm điểm trên mặt phẳng tương ứng với hai tệp đối tượng:

1) Tệp thứ nhất gồm các câu trả lười;

Tệp thứ hai gồm các em An, Bình, Cường, đạt, Kiều, Minh.

2) Thiết lập quan hệ

Dùng đường nét liền để biểu thị khẳng định đúng, đường nét đứt biểu thị khẳng định sai.

Dựa vào điều kiện đã cho trong bài toán và phương pháp loại trừ mà thiết lập quan hệ giữa hai tệp đối tượng.

a) Giả sử em An và em Kiều giải đúng bài toán trên báo tường. Khi đó có sơ đồ quan hệ:

Sơ đồ quan hệ (Hình 14) thoả mãn toàn bộ điều kiện của bài toán, nên hai em An, Kiều giải đúng bài toán trên báo tường.

b) Xét các cặp còn lại

Ta xét các cặp tuỳ ý trong các cặp còn lại, chẳng hạn, giả sử cả hai em An, Bình đều giải đúng bài toán trên báo tường. Khi đó có sơ đồ quan hệ (Hình 15).

Sơ đồ quan hệ (Hình 15) không thoả mãn điều kiện: Một em nói sai cả hai ý nên hai em An, Bình không đồng thười giải đúng bài toán trên báo tường.

Các cặp còn lại xét tương tự và cũng chứng tỏ được các cặp này không thoả mãn điều kiện đặt ra.

Vậy em An và em Kiều là hai học sinh giải đúng bài toán do thầy Phạm Quang đức đặt ra.

Ví dụ 4.42. *Cô Nguyễn Thị Tính chuẩn bị cho các em học sinh nữ lớp 11 biểu diễn văn nghệ chào mừng Ngày nhà giáo Việt Nam 20 tháng 11.*

Các em Anh, Hằng, Mai mặc ba màu áo: Tím , Xanh, Hồng và có ba dây buộc tóc cùng các màu ấy.

Nhìn các em cô Tính nhận xét: "Chỉ có Anh là màu áo và màu dây buộc tóc trùng màu, áo và dây buộc tóc của Hằng đều không màu trắng, còn Mai có dây buộc tóc màu xanh" .

Bạn hãy xác định màu áo và màu dây buộc tóc của mỗi bạn.

Giải. Trong bài này có ba nhóm đối tượng:

Nhóm thứ nhất gồm ba bạn: Anh, Hằng, Mai được ký hiệu bằng ba điểm tương ứng A, H, M.

Nhóm thứ hai gồm ba màu áo: Tím Xanh, Hồng được ký hiệu bằng ba điểm tương ứng t_0, x_0, h_0;

Nhóm thứ ba gồm ba dây buộc tóc màu: tím, xanh, hồng được ký hiệu một cách tương ứng bằng t, x, h (Hình 16)

Mối quan hệ giữa các đối tượng của ba nhóm này được ký hiệu bằng;

- đường nét đứt, nếu quan hệ giữa chúng là sai,
- đường nét liền, nếu quan hệ giữa chúng là đúng.

Do Mai có dây buộc tóc màu xanh, nên điểm M và điểm x được nối bằng đường nét liền. Do áo và dây buộc tóc của Hằng đều không màu trắng, nên các cặp điểm (H, t_0), (H, t) đều nối bằng nét đứt. Từ đó suy ra cặp (H, h), (A, t) được nối bằng đường nét liền. Do Anh có màu áo và màu dây buộc tóc trùng nhau, nên cặp (A, t_0) được nối bằng nét liền. Các em Hằng, Mai đều có màu áo không trùng với màu dây buộc tóc, nên các cặp điểm (H, x_0) và (M, h_0) được nối bằng đường nét liền.

Vậy Anh mặc áo màu tím và có dây buộc tóc màu trắng,

Hằng mặc áo màu xanh và có dây buộc tóc màu hồng,

Mai mặc áo màu hồng và có dây buộc tóc màu xanh.

4.7 Phương pháp đồ thị

Rất nhiều bài toán không mẫu mực có thể giải bằng cách đưa về bài toán trên đồ thị rồi suy ra đáp án.

4.7.1 Một số khái niệm và kết quả cơ bản của lý thuyết đồ thị

Trên mặt phẳng hay không gian lấy n điểm. Giữa một số cặp điểm nối bằng những đoạn thẳng hay đoạn cong được định hướng hoặc không. Người ta gọi hình nhận được là dạng biểu diễn hình học của đồ thị hay một đồ thị. Các điểm đã chọn được gọi là đỉnh của đồ thị. Các đoạn thẳng hay đoạn cong đã nối được gọi là cạnh của đồ thị.

Nếu cạnh a nối giữa hai điểm A, B thì A, B được gọi là đỉnh của cạnh a.

Cặp đỉnh x, y được gọi là hai đỉnh kề nhau, nếu chúng khác nhau và hai đầu của cùng một cạnh.

Dãy α các đỉnh:

$$x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_i,\, x_{i+1}, \ldots, x_{m-1},\, x_m$$

được gọi là một đường, nếu với mọi chỉ số i $(1 \leqslant i \leqslant m-1)$ đều có x_i và x_{i+1} là hai đỉnh kề nhau. Các đỉnh x_1, x_m được gọi là các đỉnh đầu của đường cong. Người ta còn nói rằng đường α nối giữa đỉnh x_1 và đỉnh x_m.

Chu trình là một đường có hai đầu trùng nhau.

Chu trình mà nó đi qua mỗi đỉnh không quá một lần được gọi là chu trình sơ cấp.

Chu trình α được gọi là chu trình Hamiton, nếu nó đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị và đi qua mỗi đỉnh một lần.

đồ thị G gọi là đồ thị liên thông, nếu mỗi cặp đỉnh của nó đều có đường nối với nhau.

đồ thị G được gọi là đồ thị đầy đủ nếu mỗi cặp đỉnh của nó đều được nối với nhau bằng đúng một cạnh.

Số cạnh xuất phát từ đỉnh x được gọi là bậc của đỉnh x.

Cây là một đồ thị liên thông và không có chu trình.

Trong cây T tách ra một đỉnh được gọi là đỉnh gốc, còn các đỉnh có bậc bằng 1 và không phải là gốc được gọi là lá hay đỉnh ngọn.

định lý 1: đồ thị mà trong đó tổng bậc của hai đỉnh tuỳ ý đều không nhỏ hơn số đỉnh của đồ thị, liên thông.

định lý 2: đồ thị mà trong đó bậc của mỗi đỉnh đều không nhỏ hơn 2, luôn luôn có chu trình sơ cấp.

Hệ quả 1: Nếu trong đồ thị có đúng 2 đỉnh bậc 1, các đỉnh khác có bậc không nhỏ hơn 2, thì trong G có đường nối giữa hai đỉnh bậc 1.

định lý 3: đồ thị, mà trong đó tổng bậc của hai đỉnh tuỳ ý không nhỏ hơn số đỉnh của đồ thị, luôn luôn có chu trình Hamiton.

định lý 4: Trong một đồ thị tuỳ ý số đỉnh, mà mỗi đỉnh có bậc lẻ, luôn luôn là một số chẵn.

định lý 5: Cho dãy số nguyên dương $a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ \ldots,\ a_{n+1} = (n+1)a_n+1$. Khi đó đồ thị đầy đủ $a_n + 1$ đỉnh với các cạnh được tô bằng n màu luôn luôn có tam giác cùng màu (chu trình gồm 3 cạnh cùng màu).

định lý 6: Cho dãy số nguyên $b_2 = 3, b_3 = 6, \ldots, b_{n+1} = (b_n - 1)n + 2$. đồ thị đầy đủ G với $b_{n+1} - 1$ đỉnh $(n \geqslant 2)$ và các cạnh được đo bằng n màu, sao cho không có tam giác cùng màu, thì trong đồ thị G có hình 5 cạnh với các cạnh cùng màu và các đường chéo được tô các màu khác.

4.7.2 Phương pháp đồ thị

Để giải bài toán T bằng cách thông qua đồ thị cần thực hiện lần lượt hai bước sau:

1) Xây dựng đồ thị G mô tả các quan hệ

Lấy các điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian tương ứng với các đối tượng đã cho trong bài toán. Dùng ngay các ký hiệu đối tượng để ghi trên các điểm tương ứng...

Cặp điểm x, y được nối với nhau bằng một cạnh với "đặc điểm t", khi và chỉ khi các đối tượng a, y có quan hệ (t) với nhau. Khi đó bài toán T đã được chuyển về bài toán D trên đồ thị.

2) Dựa vào kết quả của lý thuyết đồ thị hoặc lý luận trực tiếp suy ra đáp án của bài toán D.

Nếu đáp án của bài toán D còn dưới dạng "ngôn ngữ đồ thị", thì căn cứ vào phép đặt tương ứng khi xây dựng đồ thị mà diễn đạt thành đáp án bằng ngôn ngữ thông thường (tức là đáp án của bài toán T).

Ví dụ 4.43. *Trong buổi lên lớp đầu tiên tại lớp 10 hầy Nguyễn Vũ Lương đã cho các em bài toán: Trong ngày tập trung học sinh lớp 10 đầu tiên 19 em có mặt. Mỗi em đã bắt tay ít nhất 13 em. Chứng minh rằng có ít nhất 4 em của lớp ta mà từng cặp đã bắt tay nhau trong ngày tập trung đầu tiên.*

Giải.

Bài toán được giải bằng phương pháp đồ thị

1) Xây dựng đồ thị mô tả quan hệ

a)đỉnh

Lấy 19 điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian tương ứng với 19 em học sinh đến tập trung ngày đầu tiên. Dùng ngay tên các em để ghi trên các điểm tương ứng.

b) Cạnh

Hai điểm x, y được nối bằng:

- Cạnh màu đỏ (nét liền), nếu x, y bắt tay nhau;
- Cạnh màu xanh (nét đứt), nếu x, y không bắt tay nhau.

đồ thị nhận được ký hiệu bằng G. đồ thị G mô tả toàn bộ hiện trạng các em học sinh lớp 10 đã bắt tay nhau trong ngày đầu tiên.

2) Chứng minh trong G có ít nhất một đồ thị con đầy đủ gồm 4 đỉnh với các cạnh cùng màu đỏ.

Thật vậy, vì trong ngày đầu tiên mỗi em trong 19 em có mặt đã bắt tay it nhất 13 bạn, nên trong 18 cạnh xuất phát từ mỗi đỉnh phải có không ít hươn 13 cạnh đỏ. Khi đó số cạnh xanh xuất phát từ mỗi đỉnh không vượt quá 5.

Xét đỉnh P tuỳ ý và 13 trong số các cạnh đỏ xuất phát từ P là PA_1, $PA_2, \ldots, PA_{13}$.

Vì xuất phát từ A_1 có tối đa 5 cạnh xanh. Khi đó trong các cạnh (A_1, A_i) $(2 \leqslant i \leqslant 13)$ có ít nhất 7 cạnh đỏ xuất phát từ A_1 là (A_1, A_2) $(1 \leqslant t \leqslant 8)$. Vì xuất phát từ A_2 có không quá 5 cạnh xanh, nên trong các cạnh (A_1, A_2), (A_2, A_3) $(3 \leqslant k \leqslant 8)$ có không ít hươn 2 cạnh đỏ. Bởi vậy trong các cạnh $(A_2,\ A_k)$ $(3 \leqslant k \leqslant 8)$ có ít nhất một cạnh đỏ. Giả sử $(A_2,\ A_3)$ là cạnh đỏ. Khi đó đồ thị con gồm các đỉnh P, A_1, A_2, A_3 có tất cả các cạnh đều đỏ, nên 4 học sinh tương ứng với 4 đỉnh của đồ thị con này từng cặp đã bắt tay nhau trong buổi tập trung đầu tiên.

Bộ ba số nguyên được gọi là thuần nhất, nếu hoặc chúng có ước chung từng đôi một nguyên tố cùng nhau.

Ví dụ 4.44. *Trong buổi dạy số học thầy Phạm Văn Hùng đã khẳng định: đối với 6 số nguyên tuỳ ý luôn luôn có thể tìm được ít nhất một (thậm chí hai) bộ ba thuần nhất, nhưng đối với 5 số thì có thể chỉ ra vô số bộ 5 số nguyên, trong đó không có một bộ ba thuần nhất nào.*

Bạn hãy lý giải điều thầy Hùng khẳng định.

Giải.

1) Chứng minh khẳng định thứ nhất

a) Xây dựng đồ thị mô tả quan hệ

đỉnh: Lấy 6 điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian tương ứng với 6 số đã chọn ra A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Dùng ngay các số này để ghi trên các đỉnh tương ứng.

Cạnh: Hai điểm A_i, A_k $(1 \leqslant i,\ k \leqslant 6)$ được nối bằng

- Cạnh đỏ (nét liền), nếu các số A_i, A_k có ước số chung;
- Cạnh xanh (nét đứt), nếu hai số A_i, A_k nguyên tố cùng nhau.

đồ thị nhận được ký hiệu bằng G. đồ thị G mô tả toàn bộ quan hệ ước chung trong 6 số đã chọn ra.

b) Chứng minh tam giác cùng màu

Xét đỉnh A_i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ tuỳ ý, chẳng hạn A_1.

Xuất phát từ A_1 có 5 cạnh được tô bằng hai màu (đỏ, xanh). nên phải có một màu được tô trên ít nhất ba cạnh. Giả sử màu đỏ được tô trên ít nhất ba cạnh thuộc A_1 và ba trong các cạnh này là $(A_1,\ A_2)$, $(A_1,\ A_3)$, $(A_1,\ A_4)$

Khi đó có hai khả năng cần xét:

-Nếu một trong các cạnh $(A_2,\ A_3)$, $(A_2,\ A_4)$, $(A_3,\ A_4)$ màu đỏ, chẳng hạn $(A_2,\ A_3)$ màu đỏ, ta có tam giác $A_1A_2A_3$ cùng màu (màu đỏ) (Hình 17). Khi đó ba số A_1, A_2, A_3 có ước chung từng đôi một.

-Nếu cả ba cạnh $(A_2,\ A_3)$, $(A_2,\ A_4)$, $(A_3,\ A_4)$ đều màu xanh, ta được tam giác $A_2A_3A_4$ cùng màu (màu xanh) (Hình 18). Khi đó ba số A_2, A_3, A_4 nguyên tố cùng nhau.

2) Chứng minh khẳng định thứ hai bằng phản chứng

Dùng ngũ giác có các cạnh màu đỏ, các đường chéo màu xanh trên đỉnh ghi 5 số đã chọn ra để mô tả tính có ước chung của chúng.

Dùng a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 để ký hiệu 5 số nguyên tố liên tiếp tùy ý. Khi đó trong 5 số

$$a_1.a_2,\ a_2.a_3,\ a_3.a_4,\ a_4.a_5,\ a_5.a_1$$

không có một bộ ba thuần nhất nào.

Chẳng hạn: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 11$ khẳng định bộ năm $2.3 = 6$, $3.5 = 15$, $5.7 = 35$, $7.11 = 77$, $11.2 = 22$ không có bộ ba thuần nhất có thể nhìn dễ dàng trên hình 19.

Ví dụ 4.45. *Trong giờ số học của lớp 11 thầy đặng Hùng Thắng khẳng định rằng: trong 40 số nguyên tuỳ ý, mà cứ 4 số bao giờ cũng tìm được ít nhất một số có ước chung với 3 số còn lại thì tồn tại ít nhất 37 số, mà mỗi số này có ước chung với tất cả các số còn lại.*

Bạn hãy lý giải giúp điều thầy Thắng khẳng định.

Giải.

Có thể chứng minh khẳng định tổng quát đối với n $(n \geqslant 4)$ số nguyên tuỳ ý. Bằng phản chứng có thể khẳng định rằng trong các số đã chọn ra có hai cặp số nguyên tố cùng nhau, thì hai cặp số này phải có phần tử chung, tức nếu có hai cặp số nguyên tố cùng nhau A, B; C, D thì $A \equiv C$; hoặc $A \equiv D$; hoặc $B == \equiv C$; hoặc $B \equiv D$. Giả sử $B \equiv C$.

Dùng đương nét liền để biểu thị tính có ước chung, đường nét đứt để chỉ tính nguyên tố cùng nhau.

Với E là số tuỳ ý trong các số đã chọn ra xét bộ bốn số A, B, D, E. Khi đó E phải là có ước chung với ba số còn lại (Hình 20)

Thay số D bằng số F tuỳ ý trong các số đã chọn ra (khác A, B và D). Trong bộ bốn A, B, E, F nếu F có ước chung với ba số còn lại, thì khi đó E cũng có ước chung với F, nên E cũng có ước chung với cả ba số A, B, F (Hình 21).

Vì F là số tuỳ ý trong các số chọn ra, nên E có ước chung với tất cả các số còn lại.

Vậy mỗi số đã chọn ra, trừ A, B, D đều có ước chung với tất cả các số còn lại, tức không ít hươn $n-3$ số có ước chung với tất cả các số còn lại.

Với $n = 40$ ta được khẳng định của thầy đặng Hùng Thắng.

Ví dụ 4.46. *Nhân dịp 40 năm ngày thành lập khối phổ thông chuyên Toán-Tin Trường đại học Khoa học tự nhiên, đại học quốc gia Hà Nội, thầy Lê Văn Việt tổ chức giải bóng bàn. Hai em Minh, đức vào chung kết. thầy Việt quy định: Người thắng cuộc là người đầu tiên thắng 3 ván hoặc thắng hai ván liên tiếp. Bạn hãy xác định giúp số khả năng thắng thua có thể xảy ra?*

Giải.

Dùng M ký hiệu Minh thắng, D để ký hiệu đức thắng. Dùng cây để mô tả toàn bộ hiện trạng có khả năng xảy ra.

Xây dựng cây

Xuất phát từ điểm S (gốc).

Ván đầu tiên có hai khả năng: Minh thắng hoặc đức thắng, nên lấy hai điểm, sao cho hai điểm này và S không thẳng hàng. Một trong hai điểm ghi M, điểm còn lại ghi D. Nối S với M bằng một đoạn thẳng hoặc một đoạn cong để biểu thị "Minh thắng" . Tương tự, để biểu thị "đức thắng" nối S và D bằng một đoạn thẳng hoặc đoạn cong.

Ván thứ hai cũng có hai khả năng: Minh thắng hoặc đức thắng, nên xuất phát từ M lấy hai điểm mới và ghi ký hiệu tương ứng M, D và từ Mnối với hai điểm mới thêm và từ D cũng chọn thêm hai điểm mới ghi M và D rồi từ D kẻ hai đoạn thẳng hoặc hai đoạn cong tới hai điểm mới thêm.

Tiếp theo thực hiện kéo dài các đường một cách tương tự, nhưng do quy định điều kiện thắng, nên những đường mà trên đó hoặc có hai đỉnh liên tiếp được ghi bằng cùng một ký hiệu, hoặc có 3 đỉnh được ghi bằng cùng một ký hiệu đều không được kéo dài.

Vì Minh và đức chỉ cần đấu 5 ván, thì nhất định hoặc có người thắng liên tiếp 2 ván hoặc có người thắng 3 ván. Bởi vậy những đường xuất phát từ S đều gồm không quá 5 cạnh (Hình 22).

Cây này có 10 đỉnh ngọn, nên có 10 khả năng thắng thua xảy ra.

Ví dụ 4.47. *Thầy Phạm đăng Long phát động đợt thi viết chương trình hay tại khối 10. Bốn em Bình, Minh, Nam, Thùy đạt bốn giải đầu. Có ba dự đoán xếp hạng sau đây:*

1. *Bạn Bình nhất, bạn Minh nhì;*

2. *Bạn Bình nhì, bạn Thùy ba;*

3. *Bạn Nam Nhì, bạn Thùy tư*

Khi nghe các dự đoán thầy Long nói "Mỗi dự đoán đúng được thứ tự một em"
.

Bạn hãy xác định thứ tự của các em.

Giải.

Dùng chữ cái đầu tiên của tên để ký hiệu tên và chỉ số để biểu thị thứ tự của các ban. Khi đó x_i biểu thị "em x đạt giải thứ i" $1 \leqslant i \leqslant 4$.

1) Xây dựng cây biểu hiện các dự đoán.

Vẽ cây xuất phát từ điểm O hai nhánh đầu ứng với dự đoán thứ nhất: B_1, M_2. Từ đỉnh cuối của mỗi nhánh ứng với dự đoán thứ hai: B_1, T_3. Từ đỉnh cuối của mỗi nhánh này vẽ hai nhánh ứng với đoạn thứ ba: N_2, T_4

2) Phân tích để tìm ra đáp án

Chọn đường đi từ O đến đỉnh ngọn thoả mãn các điều kiện:

- Một người không được xếp hai hạng khác nhau,

- Hai người không thể được xếp cùng một thứ hạng.

đường $B_1T_3N_2$ thoả mãn đồng thười hai điều kiện trên, nên kết quả là:

Bạn Bình xếp thứ nhất,

Bạn Nam xếp thứ hai,

Bạn Thùy xếp thứ ba,

Bạn Minh xếp thứ tư.

Ví dụ 4.48. *Thầy Nguyễn Thành Văn khi trao đổi với các em học sinh lớp 12 về Toán học rười rạ c đã khẳng định: "Lý thuyết đồ thị có ứng dụng rất tốt trong Toán phổ thông, chẳng hạn, Bài toán: Trên mặt phẳng lấy 7 điểm bất kỳ , không* *có 3 điểm nào thẳng hàng và khoảng cách giữa các cặp điểm khác nhau từng đôi một. Chứng minh rằng luôn luôn tìm được ít nhất 2 cặp điểm, mà đoạn thẳng nối giữa mỗi cặp điểm này là cạnh ngắn nhất của một tam giác nào đó, đồng thười là cạnh dài nhất của một tam giác khác trong các tam giác có đỉnh là những điểm đã cho, có thể giải một cách dễ dàng bằng phương pháp đồ thị".*

Bạn hãy lý giải giúp điều thầy Văn khẳng định.

Giải.

Không giảm tính tổng quát, ký hiệu 7 điểm đã chọn ra bằng $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,$ $A_5,\ A_6,\ A_7$.

1) Chứng minh tồn tại cặp điểm thứ nhất

Xét 6 điểm ng A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6. Vì khoảng cách giữa các cặp điểm khác nhau từng đôi một, nên bất ỳ tam giác nào có đỉnh là các điểm đã cho đều có cạnh dài nhất và cạnh ngắn nhất.

a) Tô màu các đoạn thẳng nối giữa các cặp điểm đã cho.

Ta dùng màu xanh để tô mỗi đoạn thẳng mà nó là cạnh ngắn nhất của một tam giác nào đó trong các tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Sau khi các đoạn thẳng được phép tô màu xanh đã tô xong phần đoạn thẳng còn lại tô màu đỏ. Khi đó được đồ thị đầy đủ G.

b) Lý luận để suy ra đáp án

đồ thị G đầy đủ 6 đỉnh với hai màu cạnh: Xanh, đỏ nên theo định lý 5, G có tam giác cùng màu. Giả sử $A_1A_2A_3$ là tam giác cùng màu và A_1A_2 là cạnh dài nhất.

Vì tam giác nào cũng có cạnh ngắn nhất và cạnh này được tô màu xanh trước, nên tam giác $A_1A_2A_3$ phải là tam giác xanh.

Cạnh A_1A_2 trong tam giác $A_1A_2A_3$ là cạnh dài nhất, nhưng nó có màu xanh, nên A_1A_2 đã là cạnh ngắn nhất của một tam giác nào đó trong các tam giác có đỉnh là các điểm đã cho.

2) Chứng minh tồn tại cặp điểm thứ hai

Loại điểm A_1 và kết nạp A_7. Thực hiện tương tự như phần I ta cũng khẳng định được trong 6 điểm A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 cũng tồn tại một cặp điểm thoả mãn điều kiện đặt ra và khác với cặp A_1, A_2.

Khẳng được chứng minh.

Chương 5

Phương pháp giải phương trình và hệ phương trình

5.1 Phương pháp nghiệm duy nhất

Trong phần này ta ký hiệu $I(a,b)$ là để chỉ một trong bốn miền liên thông trên trục số thực $\mathbb{R}$, đó là $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b). Xét phương trình $f(x) = g(x)$. Nếu phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm $x = x_0$ trong $I(a,b)$ và với mọi $x \neq x_0,\ x \in I(a,b)$ ta luôn có $f(x) \neq g(x)$ thì $x = x_0$ là nghiệm duy nhất $\in I(a,b)$ của phương trình đã cho.

Phương pháp nghiệm duy nhất dựa trên các nhận xét sau:

Bổ đề 5.1. *Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu thực sự (luôn luôn đồng biến hoặc luôn luôn nghịch biến) trên miền $I(a,b)$ thì trong miền đó phương trình $f(x) = f(x_0)$ có nghiệm duy nhất là $x = x_0$.*

Nghiệm $x = x_0$ nói trên thường được tìm bằng cách "đoán nhận" trong các giá trị dặc biệt của ẩn. Ta có thể xét tính đơn điệu của một hàm số bằng cách sử dụng tính chất quen biết của các hàm số sơ cấp như hàm bậc nhất, hàm mũ, hàm số logarit hoặc hàm số lượng giác, ...

Bổ đề 5.2. *Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu thực sự trong $I(a,b)$ và $x, y \in I(a,b)$ thì trong $I(a,b)$ ta luôn có:*

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Ví dụ 5.1. *Giải phương trình:*

$$|x-6,5|^{2007} + |x-7,5|^{2008} = 1. \tag{5.1}$$

Nhận xét rằng (5.1) có hai nghiệm : $x = 6,5$; $x = 7,5$.. Nếu $x < 6,5$ thì:

$$\begin{cases}|x-6,5| > 0\\|x-7,5| > 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|x-6,5|^{2007} > 0\\|x-7,5|^{2008} > 1\end{cases}$$

hay

$$|x-6,5|^{2007} + |x-7,5|^{2008} > 1.$$

Vậy, với $x < 6,5$ thì $|x-6,5|^{2007} + |x-7,5|^{2008} > 1$.

Nếu $x > 7,5$ thì:

$$\begin{cases}|x-6,5| > 1\\|x-7,5| > 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|x-6,5|^{2007} > 1\\|x-7,5|^{2008} > 0\end{cases}$$

hay

$$|x-6,5|^{2007} + |x-7,5|^{2008} > 1.$$

Vậy, với $x > 7,5$ thì $|x-6,5|^{2007} + |x-7,5|^{2008} > 1$.

Nếu $6,5, x < 7,5$ thì:

$$\begin{cases}0 < |x-6,5| < 1\\0 < |x-7,5| < 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|x-6,5|^{2007} < |x-6,5| = x-6,5\\|x-7,5|^{2008} < |x-7,5| = 7,5-x\end{cases}$$

hay

$$|x-6,5|^{2007} + |x-7,5|^{2008} < x-6,5+7,5-x = 1.$$

Vậy, với $6,5 < x < 7,5$ thì $|x-6,5|^{2007} + |x-7,5|^{2008} < 1$.

Tóm lại, với $x \neq 6,5$; $x \neq 7,5$ thì $|x-6,5|^{2007} + |x-7,5|^{2008} \neq 1$, tức là (5.1) chỉ có hai nghiệm $x = 6,5$; $x = 7,5$.

Ví dụ 5.2. *Giải phương trình*

$$\sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4} = 5. \tag{5.2}$$

Xét hàm số $f(x) := \sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4}$. Khi đó

$$(5.2) \Leftrightarrow f(x) = f(0).$$

Hàm số $f(x)$ xác định và đồng biến trên $[-2; +\infty)$ và $f(0) = 5$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 0$.

Ví dụ 5.3. *Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:*

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{1-y} = m+1 \\ \sqrt{y} + \sqrt{1-x} = m+1 \end{cases}.$$

Điều kiện: $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ 1-y \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 1-x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}.$

Với điều kiện này, ta viết hệ dưới dạng

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{1-y} & = m+1 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{1-y} - \sqrt{1-x} & = 0 \end{cases}.$$

Ta có $\sqrt{x} - \sqrt{1-x} = \sqrt{y} + \sqrt{1-y}$. Xét hàm số $f(x) := \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$. Dễ kiểm tra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0; 1]$. Vậy nên

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Ta thu được hệ

$$\begin{cases} x & = y \\ \sqrt{x} + \sqrt{1-x} & = m+1 \end{cases}$$

Dễ thấy phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = m+1$ có nghiệm duy nhất nên hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (β) có nghiệm duy nhất.
Để ý rằng nếu (β) có nghiệm $x = x_0$ thì (β) cũng có nghiệm $x = 1 - x_0$. Bởi vậy, giả sử (β) có nghiệm duy nhất $x = x_0$ thế thì

$$x_0 = 1 - x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow m+1 = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow m = \sqrt{2} - 1.$$

Ngược lại, khi $m = \sqrt{2} - 1$ thì

$$\begin{aligned}(\beta) &\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = \sqrt{2} \quad \text{(hai vế cùng } \geqslant 0)\\ &\Leftrightarrow x + 1 - x + 2\sqrt{x(1-x)} = 2\\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{x(1-x)} = 1 \quad \text{(hai vế cùng } \geqslant 0)\\ &\Leftrightarrow 4x(1-x) = 1\\ &\Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0 : \text{ có nghiệm duy nhất } x = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Tóm lại, $m = \sqrt{2} - 1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5.4. *Giải phương trình*

$$\sin x + \cos x + \sqrt{2}x - 1 = 0. \quad (7)$$

Đặt $f(x) := VT(7)$. Có $f(x)$ xác định, liên tục với mọi $x \in D = \mathbb{R},\ f(0) = 0$ và

$$f'(x) = \cos x - \sin x + \sqrt{2} \geqslant 0,\ \forall x \in D.$$

Vậy $f(x)$ là hàm số đồng biến trong D. Do đó:

$$(7) \Leftrightarrow f(x) = f(0) \Leftrightarrow x = 0 \ (\in D).$$

Đáp số : Phương trình (7) có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Ví dụ 5.5. *Giải phương trình*

$$4x^3 + 12x - 8 - \cos 3x + 9\cos x = 0. \quad (10)$$

Đặt $f(x) := VT(10)$. Có $f(x)$ xác định, liên tục với mọi $x \in D = \mathbb{R},\ f(0) = 0$ và

$$f'(x) = 12x^2 + 12 + \sin 3x - 9\sin x = 12(x^2 + 1 + \sin^3 x) > 0,\ \forall x \in D.$$

Vậy $f(x)$ là hàm số đồng biến trong D. Do đó:

$$(10) \Leftrightarrow f(x) = f(0) \Leftrightarrow x = 0 \ (\in D).$$

Đáp số : Phương trình (10) có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Ví dụ 5.6. *Giải phương trình*

$$x - \cos x - \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \quad (15)$$

Đặt $f(x) := VT(15)$. Có $f(x)$ xác định, liên tục với mọi $x \in D = \mathbb{R},\ f(\frac{\pi}{4}) = 0$ và

$$f'(x) = 1 + \sin x \geqslant 0,\ \forall x \in D.$$

Vậy $f(x)$ là hàm số đồng biến trong D. Do đó:

$$(15) \Leftrightarrow f(x) = f(\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \ \ (\in D).$$

Đáp số : Phương trình (15) có nghiệm duy nhất $x = \frac{\pi}{4}$.

Ví dụ 5.7. *Giải phương trình*

$$e^{-x} - \sin(e^{-x})\cos(e^{-x}) - \pi = 0. \quad (16)$$

Đặt $f(x) := VT(16)$. Có $f(x)$ xác định, liên tục với mọi $x \in D = \mathbb{R},\ f(-\ln\pi) = 0$ và

$$f'(x) = e^{-x}(\cos 2e^{-x} - 1) \leqslant 0,\ \forall x \in D.$$

Vậy $f(x)$ là hàm số nghịch biến trong D. Do đó:

$$(16) \Leftrightarrow f(x) = f(-\ln\pi) \Leftrightarrow x = \ \ (\in D).$$

Đáp số : Phương trình (16) có nghiệm duy nhất $x = -\ln\pi$.

Bài tập tương tự

1. Giải phương trình:
$$5^x + 12^x = 13^x.$$
2. Giải phương trình:
$$3^x = 4 - x.$$
3. Giải phương trình:
$$2x + \sqrt{x-3} = 16.$$
4. Giải phương trình:
$$\sqrt{x} + \sqrt{x-m} = \sqrt{m}.$$
5. Giải phương trình:
$$3^x(x+4) = 1.$$
6. Giải phương trình:
$$lg(x-5) = 6 - x.$$

7. Giải phương trình:
$$\log_7 x = \log_3(\sqrt{x}+2).$$

8. Giải phương trình:
$$\log_{x-1}(x+1) = \log_3 5.$$

9. Giải phương trình:
$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2x+1} = x+1.$$

10. Giải phương trình:
$$\log_2(x^2+x+1) + \log_2(x^2-x+1) = \log_2(x^4+x^2+1) + \log_2(x^4-x^2+1).$$

11. Giải phương trình:
$$3 - x + \sqrt[3]{4-x} = \sqrt{3+x} + \sqrt[3]{1+\sqrt{3+x}}.$$

12. Giải phương trình:
$$\log_2(1+\sqrt[3]{x}) = \log_7 x.$$

13. Giải phương trình:
$$3\log_3(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}) = 2\log_2\sqrt{x}.$$

14. Giải phương trình:
$$2^{x-1} - 2^{x^2-x} = (x-1)^2.$$

15. Giải và biện luận phương trình:
$$5^{x^2+2mx+2} - 5^{2x^2+4mx+m+2} = x^2+2mx+m.$$

16. Xác định số nghiệm dương của phương trình:
$$12x^5 + 6x^4 - 4x^3 - x - 34 = 0.$$

17. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+5} + \sqrt{y-2} = 7 \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{y+5} = 7 \end{cases}.$$

18. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases}\cot x - \cot y = x - y\\ 5x + 8y = 2\pi\\ 0 < x, y < \pi\end{cases}.$$

19. (VMO98-99) Giải hệ: $\begin{cases}(1+4^{2x-y})5^{1-2x+y} = 1 + 2^{2x-y+1}\\ y^3 + 4x = 1 + \ \ln(y^2 + 2x) = 0\end{cases}.$

20. (VMO93-94) Giải hệ: $\begin{cases}x^3 + 3x - 3 + \ \ln(x^2 - x + 1) = y\\ y^3 + 3y - 3 + \ \ln(y^2 - y + 1) = z\\ z^3 + 3z - 3 + \ \ln(z^2 - z + 1) = x\end{cases}.$

21. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases}\sqrt{1+x} + \sqrt{6-y} = m\\ \sqrt{1+y} + \sqrt{6-x} = m\end{cases}.$$

22. Chứng minh rằng với mọi $a_i; b_i \in \mathbb{R};\ i \in \overline{1..n}$, phương trình sau luôn có nghiệm:
$$a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx = x.$$

23. Cho $a_j > 0$ với mọi $j \in \overline{0..n}$. Chứng minh rằng với mọi $k \in \overline{1..n}$, phương trình:
$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k = a_{k+1} x^{k+1} + \cdots + a_n x^n$$
luôn có nghiệm dương duy nhất.

24. Giải phương trình:
$$3 \log_6(\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x}) = \log_4 \sqrt{x}.$$

25. Giải phương trình:
$$\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3.$$

26. Giải phương trình:
$$\log_3\left(\frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5}\right) = x^2 + 3x + 2.$$

27. Giải phương trình:
$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0.$$

5.2 Phương pháp bất đẳng thức

Phương pháp bất đẳng thức giải phương trình, bất phương trình dựa vào các nhận xét sau

Bổ đề 5.3. *Nếu với mọi $x \in I(a,b) \subseteq D_f \cap D_g$ ta luôn có*

$$\begin{cases} f(x) \leqslant A \\ g(x) \geqslant A \end{cases} \quad (\text{ với } A := Const \text{ cho trước}, \in \mathbb{R}),$$

thì trong $I(a,b)$ ta có

$$1)\ f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}.$$

$$2)\ f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}. \quad (\Leftrightarrow f(x) = g(x)\ )$$

3) $f(x) > g(x)$ *không có nghiệm $x \in I(a,b)$.*

4) $f(x) \leqslant g(x)$ *luôn đúng với mọi $x \in I(a,b)$.*

Bổ đề 5.4. *Nếu với mọi $x \in I(a,b) \subseteq D_f \cap D_g$ ta luôn có $f(x) \leqslant g(x)$ (I) và dấu bằng trong bất đẳng thức (I) xảy ra khi và chỉ khi x thoả mãn điều kiện (α) thì trong $I(a,b)$ ta có*

1) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (\alpha)$. *(xảy ra dấu "=" trong $(*)$)*

2) $f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow (\alpha)$. *(xảy ra dấu "=" trong $(*)$)*

3) $f(x) > g(x)$ *không có nghiệm $x \in I(a,b)$.*

4) $f(x) \leqslant g(x)$ *luôn đúng với mọi $x \in I(a,b)$.*

Nhận xét sau là hệ quả trực tiếp của nhận xét 5.4. Phương pháp giải phương trình, bất phương trình dựa vào nhận xét này còn được gọi là phương pháp tổng các số hạng không âm hay là phương pháp tổng các bình phương.

Bổ đề 5.5. *Nếu với mọi $x \in I(a,b)$ ta luôn có $A \geqslant 0;\ B \geqslant 0;\ C \geqslant 0$ thì trong $I(a,b)$ ta có:*

$$A + B + C = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases}.$$

Đặc biệt:

$$1)\ \ A^2+B^2+C^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases}.$$

$$2)\ A^{2n}+\sqrt[2k]{B}+|C|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases}.$$

Ví dụ 5.8. *Giải phương trình:*

$$x^2+1=\sqrt[4]{1-\sin^4 x}. \quad (1)$$

Với mọi x thuộc tập xác định ta luôn có $VT(1) \geqslant 1$, đồng thời $VP(1) \leqslant 1$. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} VT(1)=1 \\ VP(1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=1 \\ \sqrt[4]{1-\sin^4 x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=0$.

Ví dụ 5.9. *Giải phương trình:*

$$2\sin^5 x+3\cos^3 x=5. \quad (2)$$

Với mọi x thuộc tập xác định $\mathbb{R}$ ta luôn có

$$\begin{cases} 2\sin^5 x \leqslant 2.1=2 \\ 3\cos^3 x \leqslant 3.1=3 \end{cases} \Rightarrow VT(2) \leqslant 2.1+3.1=5=VP(2).$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^5 x=1 \\ \cos^3 x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x=1 \\ \cos x=1 \end{cases} \Rightarrow 1=\sin^2 x+\cos^2 x=2$: vô lý. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 5.10. *Giải phương trình:*

$$6x-x^2-2=|x-1|+|x-2|+|2x-3|+|4x-13|. \quad (3)$$

Với mọi x thuộc tập xác định $\mathbb{R}$ ta luôn có

$$\begin{aligned} VP(3) &= |x-1| + |x-2| + |2x-3| + |13-4x| \\ &\geqslant |x-1+x-2+2x-3+13-4x| = 7. \end{aligned}$$

Còn $VT(3) = 7 - (x-3)^2$ luôn $\leqslant 7$ nên

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} VT(3) = 7 \\ VP(3) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-(x-3)^2 = 7 \\ |x-1|+|x-2|+|2x-3|+|13-4x| = 7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 3$.

Ví dụ 5.11. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 &= 0 \quad (\alpha) \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 &= 0 \quad (\beta) \end{cases}. \quad (4)$$

Nếu $y = 0$ thì từ (α) ta có $x = 0$. Thay vào (β) được $3 = 0$: vô lý. Vậy $y \neq 0$. Coi (α) là phương trình bậc hai ẩn x. Ta có

$$(\alpha) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta'_{(\alpha)} = 1 - y^4 \geqslant 0 \Rightarrow -1 \leqslant y \leqslant 1. \qquad (\alpha.1)$$

Tương tự, coi (β) là phương trình bậc hai ẩn x ta cũng có

$$(\beta) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta'_{(\beta)} = -2 - 2y^3 \geqslant 0 \Rightarrow y \leqslant -1. \qquad (\beta.1)$$

Từ $(\alpha.1)$ và $(\beta.1)$ ta được $y = -1$. Thay vào (α) được $x = 1$. Các giá trị này thoả mãn hệ phương trình đã cho. Vậy hệ đã cho có nghiệm

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Ví dụ 5.12. *Giải phương trình:*

$$\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x + \tan^2 x - 2\tan x + \frac{3}{2} = 0. \quad (5)$$

Ta có

$$(5) \Leftrightarrow (\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\tan x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \tan x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $\quad x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 5.13. *Giải phương trình:*

$$\cos x + \cos y - \cos(x+y) = \frac{3}{2}. \quad (6)$$

Ta có

$$\begin{aligned} VT(6) &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - 2\cos^2\frac{x+y}{2} + 1 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\Big(2\cos\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2}\Big)^2 + \sin^2\frac{x-y}{2} \\ &\leqslant \frac{3}{2} = VP(6) \quad (\alpha). \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \Big(2\cos\dfrac{x+y}{2} - \cos\dfrac{x-y}{2}\Big)^2 + \sin^2\dfrac{x-y}{2} = 0$ hay

$$\begin{cases} 2\cos\dfrac{x+y}{2} - \cos\dfrac{x-y}{2} = 0 \\ \sin\dfrac{x-y}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2} = 1 \\ \cos\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2} = -1 \\ \cos\dfrac{x+y}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = 2k\pi \\ \dfrac{x+y}{2} = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi \end{cases}$$

tức

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2(n+k)\pi \\ y = \dfrac{\pi}{3} + 2(n-k)\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} + 2(n+k)\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{3} + 2(n-k)\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} + 2(n+k)\pi \\ y = \dfrac{2\pi}{3} + 2(n-k)\pi \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2(n+k)\pi \\ y = -\dfrac{2\pi}{3} + 2(n-k)\pi \end{cases} \end{array}\right. \quad (\text{với } k,\ n \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình (6) (xảy ra dấu bằng trong bất đẳng thức (α)) có nghiệm :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2(n+k)\pi \\ y = \dfrac{\pi}{3} + 2(n-k)\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{3} + 2(n+k)\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{3} + 2(n-k)\pi \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} + 2(n+k)\pi \\ y = \dfrac{2\pi}{3} + 2(n-k)\pi \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2(n+k)\pi \\ y = -\dfrac{2\pi}{3} + 2(n-k)\pi \end{cases}.$$

(trong đó k, n là các số nguyên.)

Bài tập tương tự

1. Giải phương trình:
$$3^{x^2} = \cos x.$$

2. Giải phương trình:
$$2\cos\frac{x^2+3x}{5} = 2^x + 2^{-x}.$$

3. Giải phương trình:
$$3x^2 - 2x^3 = \log_2(x^2+1) - \log_2 x.$$

4. Giải phương trình:
$$\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt{1-x} = 2\sqrt[4]{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

5. Giải phương trình:
$$x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy.$$

6. Giải phương trình:
$$\log_3(x^2+x+1) - \log_3 x = 2x - x^2.$$

7. Giải phương trình:
$$\sin^{2000} x + \cos^{2000} x = 1.$$

8. Giải phương trình:

$$2^{1+x} + 2^{1-x} + 3^{1+x} + 3^{1-x} = 5^{1+x} + 5^{1-x}.$$

9. Giải phương trình:

$$8^{\sin^2 x} + 8^{\cos^2 x} = 10 + \cos 2y.$$

10. Giải phương trình:

$$(8x - 4x^2 - 1)(x^2 + 2x + 1) = 4(x^2 + x + 1).$$

11. Giải phương trình:

$$16x^4 - 72x^3 + 81x^2 - 28 + 16(x - \sqrt{x-2}) = 0.$$

12. Giải phương trình:

$$x^4 - 3x^2 - 8x + 20 = 0.$$

13. Giải phương trình:

$$5x^2 + 5y^2 - 8xy - 2x - 2y + 2 = 0.$$

14. Giải phương trình:

$$\sin^2 x + \sin^2 y = \sin x . \sin y + \sin x + \sin y - 1.$$

15. Biện luận theo a số nghiệm của phương trình:

$$\sqrt{2 - x^2} \sin x + \sqrt{2 + x^2} \cos x = |a + 1| + |a - 1|.$$

16. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 1 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}.$$

17. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}.$$

18. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

5.3 Phương pháp đưa về hệ

Nếu trong phương trình đã cho có hai bộ phận có mối liên quan đặc biệt thì ta có thể đặt mỗi bộ phận là một ẩn mới, đưa phương trình đã cho về hệ hai ẩn. Phương trình thứ nhất của hệ là phương trình đã cho viết theo ẩn mới, Phương trình thứ hai của hệ thể hiện mối liên quan đặc biệt nói trên, viết theo ẩn mới. Ta cũng có thể chỉ đặt một ẩn mới, đưa về hệ hai ẩn: mới và cũ. Nếu khi đặt một ẩn mới mà thu được phương trình bậc hai đối với ẩn mới đó thì ta có thể đặt ẩn phụ tắt.

Ví dụ 5.14. *Giải phương trình :*

$$\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{1-x}. \quad (1)$$

Đặt

$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{2-x} \\ v = \sqrt{x-1} \end{cases} \quad \text{với điều kiện } v \geqslant 0\ (*).$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
(1) \to & \begin{cases} u = 1 - v \\ u^3 + v^2 = 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} v = 1 - u \\ u^3 + (1-u)^2 = 1\ (\alpha) \end{cases} . \ (1.1) \\
(\alpha) \Leftrightarrow & \ u^3 + u^2 - 2u = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee u = 1 \vee u = -2. \\
\text{Vậy } (1.1) \Leftrightarrow & \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} u = -2 \\ v = 3 \end{cases} \quad \text{(đều thoả mãn } (*)). \\
\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = 0 \\ \sqrt{x-1} = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = 1 \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = -2 \\ \sqrt{x-1} = 3 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \ x = 2 \vee x = 1 \vee x = 10.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm : $x = 2 \vee x = 1 \vee x = 10$.

Ví dụ 5.15. *Giải phương trình :*

$$3.4^x + (3x-10)2^x + 3 - x = 0. \quad (2)$$

Coi (2) là phương trình bậc hai với ẩn là 2^x. Có $\Delta = (3x-10)^2 + 12(x-3) = (3x-8)^2$ nên

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = \dfrac{-3x+10-(3x-8)}{6} = 3-x \quad (\alpha) \\ 2^x = \dfrac{-3x+10+(3x-8)}{6} = \dfrac{1}{3} \quad (\beta) \end{array}\right.$$

$(\alpha) \Leftrightarrow f(x) = 2^x + x = 3 = f(1) \Leftrightarrow x = 1$ (do $f(x)$ là hàm số đồng biến).

$$(\beta) \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{1}{3} = -\log_2 3.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 1 \ \vee \ x = \log_2 3$.

Ví dụ 5.16. *Giải phương trình :*

$$2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}. \quad (3)$$

Đặt $\sqrt{4x+5} = \alpha x + \beta$. Chọn $\alpha,\ \beta$ sao cho hệ hai ẩn $x,\ y$ thu được là hệ phương trình đối xứng loại hai ta được $\alpha = 2,\ \beta = -3$. Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 = 2y - 3 \\ 4x + 5 = 4y^2 - 12y + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 3x + 1 \ (i) \\ x = y^2 - 3y + 1 \ (ii) \end{cases}.$$

Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta được

$x - y = x^2 - y^2 - 3x + 3y \Leftrightarrow (x-y)(x+y-2) = 0 \Leftrightarrow y = x\ (\alpha) \vee y = 2 - x\ (\beta)$.

Thay (α) vào (i) được

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{3} := x_1 \ \vee \ x = 2 + \sqrt{3} := x_2.$$

Thay (β) vào (i) được

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2} := x_3 \ \vee \ x = 1 + \sqrt{2} := x_4.$$

Thử lại vào phương trình ta thấy chỉ có hai nghiệm $x_2,\ x_3$ thoả mãn. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 2 + \sqrt{3} \ \vee \ x = 1 - \sqrt{2}$.

Chú ý: Ví dụ này có thể được giải đơn giản hơn như sau:

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 \geqslant 0 \\ (2x^2 - 6x - 1)^2 = 4x + 5 \quad (a) \end{cases}. \quad (3.1)$$

$$
\begin{aligned}
(a) &\Leftrightarrow x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 1 = 0 \ (\Rightarrow 2x^2 - 6x - 1 = 2x - 3) \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \ (\Rightarrow 2x^2 - 6x - 1 = 1 - 2x) \end{array}\right. .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Vậy } (3.1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 \geqslant 0 \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 - 2x \geqslant 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant \dfrac{3}{2} \\ x = 2 - \sqrt{3} \ \vee \ x = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \ \vee \ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3} \ \vee \ x = 1 - \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 2 + \sqrt{3} \ \vee \ x = 1 - \sqrt{2}$.

Bài tập tương tự

1. Giải phương trình :

$$2 - x^2 = \sqrt{2 - x}.$$

2. Giải phương trình :

$$x = 1 - 2004(1 - 2004x^2)^2.$$

3. Giải phương trình :

$$\log_2^2 x + (x - 1)\log_2 x = 6 - 2x.$$

4. Giải phương trình :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}} = 2.$$

5. Giải phương trình :

$$(2 + \sqrt{2})^{\log_2 x} + x(2 - \sqrt{2})^{\log_2 x} = 1 + x^2.$$

6. Giải phương trình :

$$7x^2 + 7x = \sqrt{\frac{4x + 9}{28}}.$$

7. Giải phương trình :

$$2x^2 + 4x = \sqrt{\frac{x+3}{2}}.$$

8. Giải phương trình :

$$\sqrt{9x^2 + 16} \geqslant 2\sqrt{2x+4} + 4\sqrt{2-x}.$$

5.4 Phương pháp đảo ẩn

Bổ đề 5.6. *Xét phương trình $f(x; m) = 0$ (1) (ẩn x, tham số m) Ta có thể coi (1) là phương trình ẩn m, tham số x. Giải m theo x rồi quay trở lại ẩn x. Phương pháp này thường được sử dụng khi trong phương trình (1) tham số m có mặt với bậc hai và biệt thức Δ của phương trình bậc hai ẩn m đó là biểu thức chính phương. Trong một số trường hợp ta còn có thể coi số là ẩn.*

Ví dụ 5.17. *Giải phương trình*

$$x^4 - 10x^3 - 2(a-11)x^2 + 2(5a+6)x + 2a + a^2 = 0. \quad (1)$$

Coi (1) là phương trình bậc hai ẩn a:

$$a^2 - 2(x^2 - 5x - 1)a + x^4 - 10x^3 + 22x^2 + 12x = 0. \quad (1.1)$$

Có $\Delta' = (x^2 - 5x - 1)^2 - (x^4 - 10x^3 + 22x^2 + 12x) = (x-1)^2$ nên

$$(1.1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} a & = & x^2 - 4x - 2 \\ a & = & x^2 - 6x \end{array}\right..$$

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 - 4x - a - 2 & = 0 \quad (\alpha) \\ x^2 - 6x - a & = 0 \quad (\beta) \end{array}\right..$$

Xét (α) có $\Delta'_1 = a + 6$. Nếu $\Delta'_1 < 0 \Leftrightarrow a < -6$ thì (α) vô nghiệm . Nếu $\Delta'_1 \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant -6$ thì

$$(\alpha) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 - \sqrt{a+6} := x_1 \\ x = 2 + \sqrt{a+6} := x_2 \end{array}\right..$$

Xét (β) có $\Delta'_2 = a + 9$. Nếu $\Delta'_2 < 0 \Leftrightarrow a < -9$ thì (β) vô nghiệm . Nếu $\Delta'_2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant -9$ thì

$$(\alpha) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 - \sqrt{a+9} := x_3 \\ x = 3 + \sqrt{a+9} := x_4 \end{array}\right..$$

Từ đó có kết luận: +) Nếu $a < -9$ thì phương trình (1) vô nghiệm. +) Nếu $-9 \leqslant a < -6$ thì phương trình (1) có hai nghiệm: $x = x_3 \vee x = x_4$. +) Nếu $a \geqslant -6$ thì phương trình (1) có bốn nghiệm:

$$x = x_1 \vee x = x_2 \vee x = x_3 \vee x = x_4.$$

Ví dụ 5.18. *Giải phương trình*

$$x^2 + \sqrt{x+5} = 5. \quad (2)$$

Đặt $5 := a$ và coi (2) là phương trình ẩn a:

$$x^2 + \sqrt{x+a} = a. \quad (2.1)$$

Ta có

$$\begin{aligned}
(2.1) &\Leftrightarrow \sqrt{a+x} = a - x^2 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a - x^2 & \geqslant 0 \quad (*) \\ a + x & = (a-x^2)^2 = a^2 - 2x^2 a + x^4 \quad (\alpha) \end{cases}. \\
\text{Mà } (\alpha) &\Leftrightarrow a^2 - (2x^2+1)a + x^4 - x = 0 \quad (\text{ có } \Delta = (2x+1)^2\ ) \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} a & = & x^2 + x + 1 \\ a & = & x^2 - x \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Nhưng } a = 5 \text{ nên } (2) &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + x + 1 = 5 \\ 5 - x^2 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - x = 5 \\ 5 - x^2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + x - 4 = 0 \quad (\Rightarrow 5 - x^2 = x + 1) \\ x + 1 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - x - 5 = 0 \quad (\Rightarrow 5 - x^2 = -x) \\ -x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \vee \begin{cases} x \leqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{1-\sqrt{21}}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{1-\sqrt{21}}{2}.$$

Chú ý: Phương trình này còn có thể được giải như sau:

$$\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow \sqrt{x+5} = 5 - x^2 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x^2 \geqslant 0 \quad (*) \\ x + 5 = (5-x^2)^2 = x^4 - 10x^2 + 25 \quad (\alpha). \end{cases} \\
\text{Mà } (*) &\Leftrightarrow -\sqrt{5} \leqslant x \leqslant \sqrt{5}. \\
\text{Còn } (\alpha) &\Leftrightarrow x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x^2 + x - 4)(x^2 - x - 5) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 4 = 0 \\ x^2 - x - 5 = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} x = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} & (\text{ không thoả mãn } (*) \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} & (\text{ thoả mãn } (*) \\ x = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2} & (\text{ thoả mãn } (*) \\ x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2} & (\text{ không thoả mãn } (*) \end{array}\right. .
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{1-\sqrt{21}}{2}.$$

Ví dụ 5.19. *Giải phương trình*

$$a^7 - x = \sqrt[7]{a+x}. \quad (3)$$

Coi (3) là phương trình ẩn a. Ta có

$$(3) \Leftrightarrow a = \sqrt[7]{\sqrt[7]{a+x} + x} = f(f(a)). \quad (3.1)$$

Với $f(a) = \sqrt[7]{a+x}$ là hàm số đồng biến với mọi $a \in \mathbb{R}$. Do đó

$$(3.1) \Leftrightarrow f(a) = a \Leftrightarrow \sqrt[7]{a+x} = a \Leftrightarrow a + x = a^7 \Leftrightarrow x = a^7 - a.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = a^7 - a$.

Bài tập tương tự

1. Giải phương trình
$$(8a^2+1)\sin^3 x-(4a^2+1)\sin x+2a\cos^3 x=0.$$

2. Giải phương trình
$$x^2-\sqrt{a-x}=a.$$

3. Giải phương trình
$$x+\sqrt{3+\sqrt{x}}=3.$$

4. Giải phương trình
$$x^3+2\sqrt{3}x^2+3x+\sqrt{3}-1=0.$$

5. Giải phương trình
$$x^6+(c^2-b^2)x^2-bc^2=0.$$

6. Giải phương trình
$$a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3=0.$$

7. Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm thực phân biệt:
$$x^4-2mx^2-x+m^2-m=0.$$

5.5 Phương pháp sử dụng các tính chất đặc biệt của hệ thức

Trong phần này ta sử dụng các nhận xét sau:

Bổ đề 5.7. *Nếu một hệ thức là chẵn đối với x (khi thay x bởi $-x$ hệ thức không đổi) mà có nghiệm $x=\alpha$ thì nó cũng có nghiệm $x=-\alpha$. Bởi vậy, hệ thức chẵn đối với x nếu có nghiệm duy nhất thì nghiệm đó là $x=0$. Nếu một hệ thức là đối xứng đối với x và y (khi đổi chỗ x, y cho nhau thì hệ thức không đổi) mà có nghiệm $x=\alpha$; $y=\beta$ thì nó cũng có nghiệm $x=\beta$; $y=\alpha$. Bởi vậy, một hệ thức đối xứng đối với x và y mà có nghiệm duy nhất $(x;y)=(\alpha;\beta)$ thì ta phải có $\alpha=\beta$ hay là $x=y$.*

Bổ đề 5.8. *Nếu một khẳng định T nào đó đúng với mọi giá trị của chữ $x \in I(a,b)$ thì khẳng định T cũng đúng khi x nhận những giá trị cụ thể, $\in I(a,b)$, được chọn một cách thích hợp.*

Bổ đề 5.9. *Nếu đa thức bậc n mà có nhiều hơn n nghiệm thì đa thức đó đồng nhất bằng 0.*

Chú ý: Các bài tập sử dụng ba nhận xét trên thường có lời giải được trình bày theo phương pháp điều kiện cần và đủ. Các lập luận của các nhận xét này phải được trình bày rõ trong bài làm.

Bổ đề 5.10. *(ý nghĩa đại số của Min, Max)*

1. *Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trong miền liên thông $(*) \subseteq D_f$.*
   Xét phương trình: $f(x) = k$ (1).
   Gọi $m = \underset{(*)}{Min} f(x)$; $M = \underset{(*)}{Max} f(x)$; $I = \underset{(*)}{Inf} f(x)$; $S = \underset{(*)}{Sup} f(x)$. Khi đó:
   $$\text{(1) có nghiệm } x \in (*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leqslant k \leqslant M \\ m \leqslant k < S \\ I < k \leqslant M \\ I < k < S \end{array}\right.$$
   (chỉ xảy ra một trong các trường hợp này.)
   Như vậy, nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trong tập xác định D_f là miền liên thông thì tập giá trị $\mathbb{R}_f$ của nó chỉ có thể có một trong các dạng sau:
   $$[m; M]\ ;\ (m; M]\ ;\ [m; M)\ ;\ (m; M).$$

2. *Giả sử hàm số $y = f(x)$ (không yêu cầu liên tục trong $I(a,b)$) có các giá trị m, M hoặc I, S trong $I(a,b)$ ($I(a,b)$ ở đây cũng không yêu cầu liên thông).*
   Xét bất phương trình: $f(x) > k$ (2). Khi đó:
   - *(2) có nghiệm $x \in I(a,b) \Leftrightarrow k < M$ $[k < S]$.*
   - *(2) không có nghiệm $x \in I(a,b) \Leftrightarrow k \geqslant M$ $[k \geqslant S]$.*
   - *(2) luôn đúng với mọi $x \in I(a,b) \Leftrightarrow k < m$ $[k \leqslant I]$.*

   Xét bất phương trình: $f(x) \geqslant k$ (3). Khi đó:
   - *(3) có nghiệm $x \in I(a,b) \Leftrightarrow k \leqslant M$ $[k < S]$.*
   - *(3) không có nghiệm $x \in I(a,b) \Leftrightarrow k > M$ $[k \geqslant S]$.*

- *(3) luôn đúng với mọi* $x \in I(a,b) \Leftrightarrow k \leqslant m\ [k \leqslant I]$.

Xét bất phương trình: $f(x) < k$ (4)*. Khi đó:*

- *(4) có nghiệm* $x \in I(a,b) \Leftrightarrow k > m\ [k > I]$.
- *(4) không có nghiệm* $x \in I(a,b) \Leftrightarrow k \leqslant m\ [k \leqslant I]$.
- *(4) luôn đúng với mọi* $x \in I(a,b) \Leftrightarrow k > M\ [k \geqslant S]$.

Xét bất phương trình: $f(x) \leqslant k$ (5)*. Khi đó:*

- *(5) có nghiệm* $x \in I(a,b) \Leftrightarrow k \geqslant m\ [k > I]$.
- *(5) không có nghiệm* $x \in I(a,b) \Leftrightarrow k < m\ [k \leqslant I]$.
- *(5) luôn đúng với mọi* $x \in I(a,b) \Leftrightarrow k \geqslant M\ [k \geqslant S]$.

Ví dụ 5.20. *Tìm* m *để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:*

$$\begin{cases} x^2 = 2^{|x|} + |x| - y - m \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}. \quad (1)$$

Nhận xét rằng khi thay x bởi $-x$ hệ đã cho không đổi. Do đó, nếu hệ có nghiệm $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$ thì hệ cũng có nghiệm $\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \beta \end{cases}$. Bởi vậy, gỉa sử hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$, thế thì

$$\alpha = -\alpha \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow m = 0 \vee m = 2.$$

Ngược lại, khi $m = 0$, hệ đã cho có dạng

$$\begin{cases} x^2 = 2^{|x|} + |x| - y \quad (\alpha) \\ x^2 + y^2 = 1 \quad (\beta) \end{cases}. \quad (1.1)$$

Từ (β) có $-1 \leqslant y \leqslant 1$ và $0 \leqslant |x| \leqslant 1 \Rightarrow |x|(1 - |x|) \geqslant 0$.
Từ (α) có $y = 2^{|x|} + |x|(1 - |x|) \geqslant 2^0 + 0 = 1$.
Từ các đánh giá trên đối với y ta được $y = 1$. Thay vào (β) được $x = 0$. Dễ thấy nghiệm $(x; y) = (0; 1)$ thoả mãn hệ (1.1). Vậy với $m = 0$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất.
Khi $m = 2$ ta thấy ngay hệ thu được có ít nhất hai nghiệm phân biệt là

$$(x; y) = (0; -1) \text{ và } (x; y) = (1; 0),$$

tức là khi $m = 2$ hệ đã cho không có nghiệm duy nhất. Vậy chỉ có $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5.21. *Tìm a để với mọi b, hệ phương trình sau luôn có ít nhất một nghiệm :*

$$\begin{cases} (x^2+1)^a + (b^2+1)^y = 2 \quad (\alpha) \\ a + bxy + x^2y = 1 \quad (\beta) \end{cases} . \quad (2)$$

Giả sử tồn tại a để hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ với mọi b. Khi đó, nếu coi phương trình (β) là phương trình ẩn b thì nó có vô số nghiệm

$$\Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ a + x^2y = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1.$$

Ngược lại, khi $a = 1$ ta thấy ngay hệ đã cho có nghiệm $x = 0;\ y = 0$ với mọi b. Vậy $a = 1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5.22. *Cho $y = 4x^3 + mx$. Tìm m để $|y| \leqslant 1 \quad (3)$ với mọi x thoả mãn $|x| \leqslant 1$.*

Giả sử (3) đúng với mọi x thoả mãn $|x| \leqslant 1$. Khi đó (3) cũng đúng với $x = 1;\ x = \dfrac{1}{2}$. Tức là:

$$\begin{cases} |4+m| \leqslant 1 \\ \left|\dfrac{1}{2} + \dfrac{m}{2}\right| \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 \leqslant m \leqslant -3 \\ -3 \leqslant m \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow m = -3.$$

Ngược lại, khi $m = -3$, với $x| \leqslant 1$ ta có thể đặt $x = \cos t$, khi đó

$$y = 4\cos^3 t - 3\cos t = \cos 3t \Rightarrow |y| = |\cos 3t| \leqslant 1 \Rightarrow |y| \leqslant 1,\ \forall x,\ |x| \leqslant 1.$$

Vậy $m = -3$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5.23. *Tìm m để mọi $x \in [-4; 6]$ đều là nghiệm của bất phương trình sau*

$$\sqrt{(4+x)(6-x)} \leqslant x^2 - 2x + m. \quad (4)$$

Giả sử (4) đúng với mọi $x \in [-4; 6]$, thế thì (4) cũng đúng với $x = 1$, hay là

$$\sqrt{(4+1)(6-1)} \leqslant 1^2 - 2.1 + m \Rightarrow m \geqslant 6.$$

Ngược lại, với $m \geqslant 6$ và $x \in [-4; 6]$ ta có $x + 4 \geqslant 0;\ 6 - x \geqslant 0$ nên

$$\begin{cases} VT(4) & \leqslant \dfrac{4 + x + 6 - x}{2} = 5 \ \text{(bất đẳng thức Cauchy)} \\ VP(4) & = (x-1)^2 + m - 1 \geqslant 0 + 6 - 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow VT(4) \leqslant VP(4).$$

Nói cách khác, khi $m \geqslant 6$ thì (4) đúng với mọi $x \in [-4; 6]$. Vậy $m \geqslant 6$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 5.24. *Tìm m để bất phương trình*

$$x^2 - 2mx + 2|x - m| + 2 > 0 \quad (1)$$

thoả mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (|x - m|)^2 + 2|x - m| + 2 > m^2.$$

Đặt $t = |x - m|$. Với $x \in \mathbb{R}$ có $t \geqslant 0$ $(*)$. Bất phương trình đã cho (1) trở thành

$$f(t) = t^2 + 2t + 2 > m^2 \quad (1.1).$$

(1) đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ (1.1) đúng với mọi $t \in I(a, b)$ $\Leftrightarrow$ $m^2 < \cosh(*)Min\, f(t)$.
Mà với $t \in I(a, b)$ có

$$f(t) \geqslant 0^2 + 2.0 + 2 = 2 = f(0) \Rightarrow \cosh(*)Min\, f(t) = 2.$$

Vậy $m^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 5.25. *Tìm m để phương trình*

$$\sqrt{x} + \sqrt{x + 4} - m\sqrt{4 - x} = 3m \quad (2) \quad \textit{có nghiệm.}$$

Điều kiện:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x + 4 \geqslant 0 \\ 4 - x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \geqslant -4 \\ x \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 4 \ (*)$$

Với $x \in I(a,b)$ có $\sqrt{4-x}+3 \neq 0$ nên

$$(2) \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{4-x}+3} := f(x). \quad (2.1)$$

Hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên (*) nên (2.1) có nghiệm $\Leftrightarrow \cosh(*)Min\ f(x) \leqslant m \leqslant \cosh(*)Max\ f(x)$. Mà với $x \in I(a,b)$ ta có

$$\begin{cases} 0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 2 \\ 2 \leqslant \sqrt{x+4} \leqslant 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow 2 \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{x+4} \leqslant 2+2\sqrt{2} \ \ (\alpha).$$

Mặt khác có:

$$0 < 3 = 0+3 \leqslant \sqrt{4-x}+3 \leqslant 2+3 = 5 \ \ (\beta).$$

Từ (α) và (β) có

$$f(0) = \frac{2}{5} \leqslant f(x) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{4-x}+3} \leqslant \frac{2+2\sqrt{2}}{3} = f(4).$$

Vậy $\cosh(*)Min\ f(x) = \frac{2}{5}$; $\cosh(*)Max\ f(x) = \frac{2+2\sqrt{2}}{3}$. Do đó $\frac{2}{5} \leqslant m \leqslant \frac{2+2\sqrt{2}}{3}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 5.26. *Tìm a để bất phương trình*

$$x^3+3x^2-1 \leqslant a(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})^3 \quad (3) \quad \text{có nghiệm.}$$

Điều kiện

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x-1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 1 \ \ (*)$$

Với điều kiện đó ta có $\sqrt{x}+\sqrt{x-1} > 0$ nên

$$(3) \Leftrightarrow (\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3(x^3+3x^2-1) \leqslant a(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})^3.(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3 = a$$

$$\Leftrightarrow a \geqslant (\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3(x^3+3x^2-1) := f(x).$$

(3) có nghiệm $\Leftrightarrow a \geqslant \cosh(*)Min\ f(x)$. Mà với $x \in I(a,b)$ ta có

$$\begin{cases} (\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^3 \geqslant (1+0)^3 = 1 > 0 \\ x^3+3x^2-1 \geqslant 1^3+3.1^2-1 = 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \geqslant 3 = f(1) \Rightarrow \cosh(*)Min\ f(x) = 3.$$

Vậy $a \geqslant 3$ là các giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự

1. Tìm a để hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ y + \cos x = 2 \end{cases}$$
có nghiệm duy nhất.

2. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2} + |y| = m \\ \sqrt{y^2 + 2} + |x| = m \end{cases}.$$

3. Tìm a, b để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases} xyz + z = a \\ xyz^2 + z = b \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}.$$

4. Tìm a, b để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases} \left|\dfrac{x^y - 1}{x^y + 1}\right| = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}.$$

5. Tìm a để với mọi b, hệ phương trình sau luôn có ít nhất một nghiệm :
$$\begin{cases} (a-1)x^5 + y^5 = 1 \\ e^{bx} + (a+1)by^4 = a^2 \end{cases}.$$

6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (|x| + 1)a = y + \cos x \\ \sin^4 x + y^2 = 1 \end{cases}$. 1) Giải hệ khi $a = 2$. 2) Tìm a để hệ có nghiệm duy nhất.

7. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} a^2x + ay + z = a^2 \\ b^2x + by + z = b^2 \\ c^2x + cy + z = c^2 \end{cases}.$$
Trong đó a, b, c là các số thực đôi một khác nhau.

8. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} a^2x + ay + z + a^3 = 0 \\ b^2x + by + z + b^3 = 0 \\ c^2x + cy + z + c^3 = 0 \end{cases}.$$
Trong đó $a,\ b,\ c$ là các số thực đôi một khác nhau.
9. Tìm các cặp số $(a; b)$ để với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có
$$a(\cos x - 1) + b^2 + 1 - \cos(ax + b^2) = 0.$$
10. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ thoả mãn $|f(x)| \leqslant 1$ với mọi $x \in [0; 1]$. Chứng minh rằng $|f'(0)| \leqslant 8$.
11. Tìm a để phương trình sau có nghiệm
$$\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - \sqrt{4x^2 - 2x + 1} = 2a.$$
12. Tìm m để phương trình sau có nghiệm
$$\sqrt{\sin x} = m + \sqrt{\cos x}.$$
13. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm
$$\sqrt{x} + \sqrt{4 + x} - m\sqrt{4 - x} \leqslant 3m.$$

5.6 Phương pháp Lượng giác

Lượng giác là một lý thuyết Toán học liên kết giữa Hình học, Đại số và Giải tích. Các tỷ số lượng giác được xây dựng trước hết nhằm phục vụ cho việc giải các bài toán tính toán trong Hình học. Sau đó ta thu được các hàm số lượng giác như là các đối tượng nghiên cứu của Giải tích. Các bài toán ngược dẫn đến việc giải các hệ thức lượng giác và đó là công việc của Đại số. Các hàm số lượng giác là những hàm số tuần hoàn đầu tiên mà học sinh được học. Chúng mô tả một quy luật thường gặp trong tự nhiên, đó là tính lặp lại (tuần hoàn) của một số hiện tượng. Ta có thể giải các bài toán lượng giác bằng phương pháp "Đại số hoá" (bằng cách đặt ẩn phụ). Trong một số trường hợp, quy trình ngược lại: Lượng giác hoá một bài toán đại số, có thể cho ta bài toán mới đơn giản hơn do có thể sử dụng được các biến đổi, dánh giá lượng giác vốn rất phong phú. Phương pháp "Lượng giác hoá" bài toán đại số như vậy được gọi là phương pháp lượng giác. Phương pháp lượng giác có thể được dùng để giải các bài toán Đại số như là: Giải phương trình, bất phương trình, hệ ; Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức ; Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất ; v.v....

5.6.1 Cơ sở lý thuyết

Cơ sở lý thuyết của phương pháp lượng giác dựa trên nhận xét sau:

Bổ đề 5.11. *Nếu có một đại lượng x biến thiên trong miền $I(a,b)$ thì luôn có thể đặt $x=\varphi(t)$ với $t\in(*_1)$, trong đó, $\varphi(t)$ là một hàm số lượng giác nào đó, còn $(*_1)$ được chọn sao cho ánh xạ $\varphi(t)\ :\ (*_1)\to(*)$ là song ánh.*

Các chú ý

1) Một số trường hợp đổi biến lượng giác thường gặp:

1. Nếu $x\in[a,b]$ thì có thể đặt:

$$\text{Hoặc } x=\left(\frac{b-a}{2}\right)\cos t+\frac{b+a}{2} \quad \text{với } 0\leqslant t\leqslant\pi.$$
$$\text{Hoặc } x=\left(\frac{b-a}{2}\right)\sin t+\frac{b+a}{2} \quad \text{với } -\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}.$$
$$\text{Hoặc } x=(b-a)\cos^2 t+a \quad \text{với } 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}.$$
$$\text{Hoặc } x=\tan t \quad \text{với } \arctan\ a\leqslant t\leqslant\arctan\ b.$$

2. Nói chung trong mọi trường hợp đều có thể đặt $x=\tan t$ với $t\in(*_1)$ trong đó $(*_1)$ được chọn thích hợp.

3. Nếu có hai đại lượng x,y biến thiên thoả mãn: $x^2+y^2=a^2\quad(a>0)$ thì luôn có thể đặt:

$$x=a.\cos t,\quad \text{khi đó}\quad y=a.\sin t\quad \text{với } 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$
$$\text{Hoặc } x=a.\sin t,\quad \text{khi đó}\quad y=a.\cos t\quad \text{với } 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

4. Nếu $|x|\geqslant\ a(>0)$ thì có thể đặt $x=\dfrac{a}{\sin t}$ với $t\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]\setminus\{0\}$.

2) Các dấu hiệu để nhận biết một bài toán có thể giải được bằng phương pháp lượng giác:

1. Tập biến thiên $I(a,b)$ của một biến số là tập giá trị của một hàm số lượng giác nào đó. $I(a,b)$ có thể được cho trong điều kiện hoặc ta phải tự tìm (tập xác định) hoặc ta phải tự đặt để có thể áp dụng phương pháp lượng giác.

2. Có một trở ngại đại số cần khắc phục, chẳng hạn: bậc cao, căn thức, điều kiện phức tạp, khó xử lý...

3. Trong đề bài (ở giả thiết hoặc kết luận) có một bộ phận tương tự với một công thức lượng giác nào đó. Chẳng hạn:
   - Bộ phận $1+x^2$ tương tự với công thức: $1+\tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$.
   - Bộ phận $4x^3-3x$ tương tự với công thức: $4\cos^3 t - 3\cos t = \cos 3t$.
   - Bộ phận $2x^2-1$ tương tự với công thức: $2\cos^2 t - 1 = \cos 2t$.
   - Bộ phận $\dfrac{2x}{1-x^2}$ tương tự với công thức: $\tan 2t = \dfrac{2\tan t}{1-\tan^2 t}$.
   - Bộ phận $\dfrac{2x}{1+x^2}$ tương tự với công thức: $\sin 2t = \dfrac{2\tan t}{1+\tan^2 t}$.
   - Bộ phận $\dfrac{x+y}{1-xy}$ tương tự với công thức: $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta} \cdots$.

3) Cần nhớ thêm một số trường hợp gợi ý sau:

1. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C = k\pi \\ A, B, C \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi \end{cases}.$

2. $\tan A\tan B + \tan B\tan C + \tan C\tan A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ A, B, C \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi \end{cases}.$

3. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A.\cos B.\cos C = 1$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{A+B-C}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}\cos\frac{-A+B+C}{2} = 0.$$

4. $\tan A + \tan B + \tan C - \tan A.\tan B.\tan C = 1 - \tan A\tan B - \tan B\tan C - \tan C\tan A$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ A, B, C \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi \end{cases}.$$

5. $\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A} + \dfrac{1+\tan B}{1-\tan B} + \dfrac{1+\tan C}{1-\tan C} = \dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}.\dfrac{1+\tan B}{1-\tan B}.\dfrac{1+\tan C}{1-\tan C}$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ A, B, C \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi \\ A, B, C \neq \dfrac{\pi}{4} + n\pi \end{cases}.$$

6. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2(A+B) = 2 \Leftrightarrow \cos A.\cos B.\cos(A+B) = 0.$

5.6.2 Trình tự lời giải

Lời giải của một bài toán đại số sử dụng phương pháp lượng giác gồm 5 bước: **Bước 1:** Tìm điều kiện đối với biến số (nếu cần), **Bước 2:** Đặt ẩn số phụ, **Bước 3:** Đưa bài toán đại số đã cho về bài toán lượng giác mới, **Bước 4:** Giải bài toán lượng giác thu được, **Bước 5:** Quay về bài toán đại số xuất phát. Khi giải hệ thức đại số $f(x)$
$RRe\,0$ (1) bằng phương pháp lượng giác, sau khi đặt

$$x = \varphi(t)\ (2); \quad x \in I(a, b) \Leftrightarrow t \in (*_1),$$

ta thu được hệ thức lượng giác:

$$f(\varphi(t))RRe\,0 \Leftrightarrow F(t)RRe\,0 \quad (3).$$

Ta có thể:

+) Hoặc giải (3) trong $(*_1)$. Thay t tìm được vào (2) để tìm x là nghiệm của (1).

+) Hoặc biến đổi (3) để thu được hệ thức đối với $\varphi(t)$. Trong hệ thức đó thay $\varphi(t) = x$ ta sẽ thu được nghiệm của (1).

Do có thể chọn $\varphi(t)$ và $(*_1)$ bằng nhiều cách khác nhau nên trong từng bài toán cụ thể, ta nên chọn $\varphi(t)$ và $(*_1)$ theo một cách thích hợp nhất.

5.6.3 Ví dụ minh hoạ

Ví dụ 5.27. *Cho* $x, y, z > 0$; $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1 \quad (*)$. *Chứng minh rằng:*

$$1 + xyz = x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)} + x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)} + x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)}.$$

Từ điều kiện có: $0 < x; y; z < 1$ nên có thể đặt

$$x = \cos A;\ y = \cos B;\ z = \cos C \ \text{ với }\ 0 < A; B; C < \frac{\pi}{2}.\ (*_1)$$

Ta có:

$$
\begin{aligned}
(*) &\Rightarrow \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A.\cos B.\cos C = 1\\
&\overset{?}{\Rightarrow} \cos\frac{A+B+C}{2}.\cos\frac{-A+B+C}{2}.\cos\frac{A-B+C}{2}.\cos\frac{A+B-C}{2} = 0.
\end{aligned}
$$

Mà $\quad \cos\dfrac{-A+B+C}{2}.\cos\dfrac{A-B+C}{2}.\cos\dfrac{A+B-C}{2} \overset{?}{\neq} 0$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \cos\frac{A+B+C}{2} = 0\\
&\Rightarrow A+B+C = \pi\\
&\Rightarrow \cos(A+B+C) = -1\\
&\overset{?}{\Rightarrow} 1 + \cos A\cos B\cos C = \cos A\sin B\sin C + \sin A\cos B\sin C + \sin A\sin B\cos C\\
&\Rightarrow 1 + xyz = x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)} + x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)} +\\
&\qquad\qquad + x\sqrt{(1-y^2)(1-z^2)}.(\text{đpcm})
\end{aligned}
$$

Ví dụ 5.28. *Giải phương trình:*

$$x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2-2x^2}. \quad (1)$$

Điều kiện: $1 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$ $(*)$. Do $I(a,b)$ nên có thể đặt $x = \cos t \quad t \in (0;\pi)$ $(*_1)$. Do $\sin t \geqslant 0$ với mọi $t \in (*_1)$ nên:

$$(1) \rightarrow \cos^3 t + \sin^3 t = \sqrt{2}\sin t.\cos t$$

$$\Leftrightarrow (\sin t + \cos t)(1 - \sin t.\cos t) = \sqrt{2}\sin t.\cos t. \quad (2)$$

Đặt $z = \sin t + \cos t = \sqrt{2}\sin(t + \dfrac{\pi}{4})$. Với $t \in (*_1)$, ta có: $-1 \leqslant z \leqslant \sqrt{2}$ $(*_2)$.
Khi đó: $\sin t.\cos t = \dfrac{z^2-1}{2}$ và:

$$
\begin{aligned}
(2) &\Leftrightarrow z\left(1 - \frac{z^2-1}{2}\right) = \sqrt{2}\frac{z^2-1}{2}\\
&\Leftrightarrow z^3 + \sqrt{2}z^2 - 3z - \sqrt{2} = 0\\
&\Leftrightarrow (z-\sqrt{2})(z^2 + 2\sqrt{2}z + 1) = 0\\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcll} z & = & \sqrt{2} & (\text{thoả mãn } (*))\\ z & = & 1-\sqrt{2} & (\text{thoả mãn } I(a,b))\\ z & = & -1-\sqrt{2} & (\text{không thoả mãn } (*)) \end{array}\right. .
\end{aligned}
$$

Với $z = \sqrt{2}$ ta có: $\begin{cases} \sin t + \cos t = \sqrt{2} \\ \sin t . \cos t = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Vậy $x = \cos t$ là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Với $z = 1 - \sqrt{2}$ ta có: $\begin{cases} \sin t + \cos t = 1 - \sqrt{2} \\ \sin t . \cos t = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$. Vậy $x = \cos t$ là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - (1 - \sqrt{2})x + 1 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 3)}}{2}.$$

Tóm lại, (1) có các nghiệm:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2};\ x = \frac{1 - \sqrt{2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 3)}}{2}$$

$$\text{và} \quad x = \frac{1 - \sqrt{2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 3)}}{2}.$$

Ví dụ 5.29. *Giải bất phương trình:*

$$\frac{1}{1 - x^2} > \frac{3x}{\sqrt{1 - x^2}} - 1. \quad (1)$$

Điều kiện: $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ $(*)$.

Do $I(a, b)$ nên có thể đặt $x = \sin t;\quad -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$ $(*_1)$. Khi đó:

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t;\ \frac{3x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{3 \sin t}{\cos t} = 3 \tan t.$$

(vì $\cos t > 0$ với mọi $t \in (*_1)$.)

$$\begin{aligned}
(1) &\rightarrow 1 + \tan^2 t > 3 \tan t - 1 \\
&\Leftrightarrow \tan^2 t - 3 \tan t + 2 > 0 \\
&\Leftrightarrow \tan t < 1 \vee \tan t > 2 \\
&\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{4} \vee \ \arctan\ 2 < t < \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy: $(1) \Leftrightarrow \sin(-\dfrac{\pi}{2}) < \sin t = x < \sin(\dfrac{\pi}{4}) \vee\ \sin(\arctan\ 2) < x < \sin(\dfrac{\pi}{2})$

(do hàm số sin đồng biến trong ($*_1$).)

$$\Leftrightarrow -1 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \ \sin(\arctan\ 2) < x < 1.$$

$$\text{Mà: } \sin(\arctan\ 2) = \frac{\tan(\arctan\ 2)}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan\ 2)}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Nên tóm lại, ta được (1) có nghiệm:

$$-1 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \vee \ \frac{2\sqrt{5}}{5} < x < 1.$$

Ví dụ 5.30. *Giải hệ:*

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}. \quad (4)$$

Nếu $x^2 = 1$ thì từ phương trình đầu ta được $\pm 2 = 0$: vô lý. Vậy $x^2 \neq 1$. Tương tự ta cũng có $y^2 \neq 1$; $z^2 \neq 1$. Do đó

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2x}{1-x^2} \\ z = \dfrac{2y}{1-y^2} \\ x = \dfrac{2z}{1-z^2} \end{cases}. \quad (4.1)$$

Đặt $x = \tan t$ với $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \setminus \{\pm\frac{\pi}{4}\}$ $(*)$. Ta có

$$(4.1) \to \begin{cases} y = \dfrac{2\tan t}{1-\tan^2 t} = \tan 2t & (\alpha) \\ z = \dfrac{2\tan 2t}{1-\tan^2 2t} = \tan 4t & \\ x = \dfrac{2\tan 4t}{1-\tan^2 4t} = \tan 8t & (\beta) \end{cases}. \quad (4.2)$$

Từ (α) và (β) ta được

$$\tan 8t = \tan t \Leftrightarrow 8t = t + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t = \frac{k\pi}{7}.$$

Do $t \in I(a,b)$ nên ta được $k \in \overline{-3..3}$. Vậy hệ đã cho có 7 nghiệm :

$$\begin{cases} x = \tan\dfrac{k\pi}{7} \\ y = \tan\dfrac{2k\pi}{7} \\ z = \tan\dfrac{4k\pi}{7} \end{cases} \quad \text{với } k \in \overline{-3..3}.$$

Ví dụ 5.31. *Phương trình*

$$4x^3 - 3x = \sqrt{1 - x^2} \quad (5)$$

có bao nhiêu nghiệm?.

Điều kiện $1 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$ $(*)$. Với điều kiện dó ta có thể đặt $x = \cos t$ với $0 \leqslant t \leqslant \pi$ $(*_1)$. Phương trình đã cho trở thành

$$4\cos^3 t - 3\cos t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = |\sin t| = \sin t \quad (5.1)$$

$$(\text{do } t \in (*_1) \text{ nên } \sin t \geqslant 0 \Rightarrow |\sin t| = \sin t).$$

$$(5.1) \Leftrightarrow \cos 3t = \sin t = \cos(\frac{\pi}{2} - t) \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} 3t &= \frac{\pi}{2} - t + 2k\pi \\ 3t &= -\frac{\pi}{2} + t + 2n\pi \end{aligned}\right. \quad (k,\ n \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} t &= \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ t &= \frac{\pi}{4} + n\pi \end{aligned}\right.$$

Do $t \in (*_1)$ nên ta được $k = 0;\ k = 1;\ n = 0$. vậy ta được 3 nghiệm $\in (*_1)$ của phương trình (5.1) là

$$t = \frac{\pi}{8} := t_1; t = \frac{\pi}{4} := t_2; t = \frac{5\pi}{8} := t_3.$$

Do hàm số $\cos x$ nghịch biến trên $(*_1)$ và $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \pi$ nên phương trình (5) có ba nghiệm phân biệt thoả mãn $I(a, b)$ là

$$x_1 = \cos\frac{5\pi}{8} < x_2 = \cos\frac{\pi}{4} < x_1 = \cos\frac{\pi}{8}.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt.

Ví dụ 5.32. *Chứng minh rằng phương trình*

$$x^3 - 3x + 1 = 0 \quad (6)$$

có ba nghiệm $x_1 < x_2 < x_3$ thoả mãn:

$$x_3^2 = x_2 + 2.$$

Đặt $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ta có $f(x)$ xác định, liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ngoài ra,

$$f(-2) = -1 < 0;\ f(-1) = 3 > 0;\ f(1) = -1 < 0;\ f(2) = 3 > 0$$

nên theo tính chất hàm số liên tục, phương trình (6) có ít nhất 3 nghiệm phân biệt (trong mỗi khoảng $(-2;-1)$; $(-1;1)$; $(1;2)$ phương trình (6) có ít nhất một nghiệm mà ba khoảng đó đôi một rời nhau). Nhưng (6) là phương trình bậc 3 nên (6) có nhiều nhất 3 nghiệm phân biệt. Vậy (6) có đúng ba nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3$. Ngoài ra, từ trên ta thấy mọi nghiệm của (6) đều $\in (-2;2)$ nên để tìm nghiệm của (6) ta có thể đặt $x = 2\cos t$ với $0 < t < \pi$ $(*)$. Ta thu được phương trình

$$8\cos^3 t - 6\cos t + 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^3 t - 3\cos t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 3t = -\frac{1}{2}. \quad (6.1)$$

$$(6.1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3t = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 3t = -\dfrac{2\pi}{3} + 2n\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{2\pi}{9} + 2k\dfrac{\pi}{3} \\ t = -\dfrac{2\pi}{9} + 2n\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right. \ (k,\ n \in \mathbb{Z}).$$

Do $t \in I(a,b)$ nên ta được $k = 0;\ k = 1;\ n = 1$. Như vậy, (6.1) có ba nghiệm $\in I(a,b)$ là

$$t = \frac{8\pi}{9} := t_1;\ t = \frac{4\pi}{9} := t_2;\ t = \frac{2\pi}{9} := t_3 \quad (t_1 > t_2 > t_3).$$

Do hàm số $\cos x$ nghịch biến trên $I(a,b)$ nên ta được ba nghiệm phân biệt của phương trình (6) là

$$x_1 = 2\cos\frac{8\pi}{9} < x_2 = 2\cos\frac{4\pi}{9} < x_3 = 2\cos\frac{2\pi}{9}.$$

Ngoài ra,

$$x_2 + 2 = 2\cos\frac{4\pi}{9} + 2 = 2(1 + \cos\frac{4\pi}{9}) = 2.2.\cos^2\frac{2\pi}{9} = x_3^2.$$

Đó chính là điều phải chứng minh.

Ví dụ 5.33. *Tìm* m *để hệ:* $\begin{cases} |x| + |y| = 1 & (\alpha) \\ x^2 + y^2 = m & (\beta) \end{cases}$ (7) *có nghiệm.*

Từ (α) có $0 \leqslant |x|;\ |y| \leqslant 1$ nên có thể đặt $|x| = \sin^2 t \Rightarrow |y| = \cos^2 t$. Ta thu được

$$\begin{cases} \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad \text{(luôn đúng với mọi } t \in \mathbb{R}) \\ \sin^4 t + \cos^4 t = m \end{cases} \Leftrightarrow \sin^4 t + \cos^4 t = m \quad (7.1).$$

Mà $(7.1) \Leftrightarrow m = (\sin^2 t + \cos^2 t)^2 - 2\sin^2 t \cos^2 t = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2t. \quad (7.2)$, nên ta có: Phương trình (7) có nghiệm $\Leftrightarrow$(7.2) có nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1$. Vậy $\dfrac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 5.34. *Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm:*

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} > m\sqrt{x - x^2} + 1. \quad (8)$$

Điều kiện:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ 1 - x \geqslant 0 \\ x - x^2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 1. \ (*)$$

Với điều kiện đó ta có thể đặt $x = \cos^2 t$ với $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ $(*_1)$. Ta thu được bất phương trình

$$\cos t + \sin t > m.\sin t.\cos t + 1. \quad (8.1)$$

(Do từ $(*_1)$ có $|\sin t| = \sin t;\ |\cos t| = \cos t;\ |\sin t \cos t| = \sin t \cos t$.)

Lại đặt $z = \cos t + \sin t$. Với $t \in (*_1)$ ta dễ thấy $z \in [1; \sqrt{2}]$. Ngoài ra, $\sin t.\cos t = \dfrac{z^2 - 1}{2}$ và bất phương trình (8.1) trở thành:

$$2z > m(z^2 - 1) + 2 \Leftrightarrow 2(z-1) > m(z^2 - 1). \quad (8.2)$$

Nếu $z = 1$ thì $(8.2) \Leftrightarrow 2.0 > m.0$: vô lý. Vậy (8.2) không có nghiệm $z = 1$. Xét $z \in (1; \sqrt{2}]$ $(*_2)$. Khi đó $z - 1 > 0;\ z + 1 > 0$ nên

$$(8.2) \Leftrightarrow m < \frac{2}{z+1} := f(z).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: (8) có nghiệm } &\Leftrightarrow \text{(8.1) có nghiệm } t \in (*_1) \\ &\Leftrightarrow \text{(8.2) có nghiệm } z \in (*_2) \\ &\Leftrightarrow m < \cosh(*_2) Sup\, f(z). \end{aligned}$$

Dễ thấy $f(z)$ liên tục và nghịch biến trên $(*_2)$ nên $\cosh(*_2) Sup\, f(z) = f(1) = 1$. Vậy $m < 1$ là các giá trị cần tìm.

Bài tập tương tự

1. Cho $x^2 + y^2 = 1;\ u^2 + v^2 = 1$. Chứng minh rằng
$$|xu + yv| \leqslant 1$$

2. Cho $y = x^4 - x^2 + \frac{1}{8}$. 1) Chứng minh rằng $|y| \leqslant \frac{1}{8}$ với mọi $x \in [-1; 1]$. 2) Chứng minh rằng phương trình:
$$x^4 - x^2 + \frac{1}{8} = 0$$
có bốn nghiệm phân biệt $x \in [-1; 1]$.

3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của
$$y = \frac{1 + x^4}{(1 + x^2)^2}$$

4. Cho $ab; bc; ca$ cùng $\neq -1$. Chứng minh rằng
$$\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} = \frac{a-b}{1+ab}.\frac{b-c}{1+bc}.\frac{c-a}{1+ca}$$

5. Cho $a, b, c > 0;\ a > c;\ b > c$. Chứng minh rằng
$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leqslant \sqrt{ab}$$

6. Cho $0 < x, y, z < 1$ và $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

7. Chứng minh rằng với mọi $x \in (-1; 1)$ và $n \geqslant 2$, ta luôn có:
$$(1 + x)^n + (1 - x)^n < 2$$

8. Chứng minh rằng với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, ta luôn có:
$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \leqslant \frac{1}{2}$$

9. Cho $a, b, c > 0$ và $abc + a + c = b$. Tìm $MaxP$ với:

$$P = \frac{2}{a^2+1} - \frac{2}{b^2+1} + \frac{3}{c^2+1}$$

10. Cho dãy số (x_n) xác định như sau:

$$x_1 = \frac{1}{2};\ \ x_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x_n^2}}{2}}$$

Chứng minh rằng:

$$x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_{k+l} < 1,03$$

với mọi $k, l \in N^*$

11. Tìm a để phương trình : $x + \sqrt{1-x^2} = a$ có nghiệm.

12. Giải và biện luận: $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = x$.

13. Tìm nghiệm của hệ: $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z^2+t^2=9 \\ xt+yz \geqslant 6 \end{cases}$ với $x+z$ lớn nhất.

14. Giải phương trình: $x^2 + (\dfrac{x}{x-1})^2 = 1$.

15. Giải hệ:

$$\begin{cases} 3(x+\dfrac{1}{x}) = 4(y+\dfrac{1}{y}) = 5(z+\dfrac{1}{z}) \\ xy+yz+zx=1 \end{cases}$$

16. Cho $y = |x|(4x^2+m)$. Tìm m để $|y| \leqslant 1$ với mọi x; $|x| \leqslant 1$.

17. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$1 + \cos A.\cos B.\cos C \geqslant \sqrt{3}\sin A.\sin B.\sin C$$

18. Giải hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{2}(x-y)(1+4xy) = \sqrt{3} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

19. Cho dãy $\{u_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{2} - 1}{(1 - \sqrt{2})u_n + 1} \quad (n \geqslant 1) \end{cases}$$

Hãy tính u_{2004}

20. Cho $0 < x_1 < y_1$. Hai dãy $\{x_n\}$; $\{y_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \\ y_{n+1} = \sqrt{x_{n+1} y_n} \end{cases} \quad (n \geqslant 1)$$

Chứng minh rằng $\underset{n \to +\infty}{Lim} x_n = \underset{n \to +\infty}{Lim} y_n$. Hãy tìm giới hạn đó.

21. Cho dãy $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ thoả mãn:

$$\begin{cases} x_0 = 0; \ n = 50.000 \\ x_{k+1} = x_k + \frac{1}{30.000}\sqrt{1 - x_k^2} \quad (k \in \overline{0; n-1}) \end{cases}$$

Bất đẳng thức $x_n \leqslant 1$ đúng hay sai?.

22. Cho dãy các hàm số $\{T_n(x)\}$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} T_1(x) = x \\ T_2(x) = 2x^2 - 1 \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 2) \end{cases}$$

Chứng minh rằng: 1) Nếu $|x| \leqslant 1$ thì $|T_n(x)| \leqslant 1$ với mọi $n \in N^*$. 2) Phương trình $T_n(x) = 0$ có đúng n nghiệm phân biệt và các nghiệm đó đều $\in [-1; 1]$. 3) Tìm tất cả các giá trị của x để $|T_n(x)| = 1$.

23. Chứng minh rằng với $a, b \geqslant 0$, ta luôn có:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

24. Chứng minh rằng với $a > c$; $b > c$; $c > 0$ ta luôn có:

$$\sqrt{(a+c)(b+c)} + \sqrt{(a-c)(b-c)} \leqslant 2\sqrt{ab}$$

25. Rút gọn biểu thức:

$$T = \frac{\sqrt{a - \sqrt{4(a-1)}} + \sqrt{a + \sqrt{4(a-1)}}}{\sqrt{a^2 - 4(a-1)}}$$

26. Chứng minh rằng với $a > |b|$, ta luôn có

$$\sqrt{2}b\frac{2a + \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}}} = \sqrt{(a+b)^3} - \sqrt{(a-b)^3}$$

27. Giải phương trình:

$$\sqrt{\frac{4 + \sqrt{16-x}}{2}} + \sqrt{\frac{4 - \sqrt{16-x}}{2}} = \sqrt{4 + \sqrt{x}} + \sqrt{16-x}$$

28. Cho $xyz \neq 0;\ xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng

$$(x - \frac{1}{x})(y - \frac{1}{y}) + (y - \frac{1}{y})(z - \frac{1}{z}) + (z - \frac{1}{z})(x - \frac{1}{x}) = 4$$

29. Cho $x; y; z \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{3};\ x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} + \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}.\frac{3y - y^3}{1 - 3y^2}.\frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}$$

30. Cho $xyz \neq 0;\ x + y + z - xyz = 1 - xy - yz - zx$. Chứng minh rằng

$$\frac{1 - x^2}{x} + \frac{1 - y^2}{y} + \frac{1 - z^2}{z} = \frac{1}{4}.\frac{1 - x^2}{x}.\frac{1 - y^2}{y}.\frac{1 - z^2}{z}$$

31. Cho $x_1; x_2; x_3$ là các nghiệm của phương trình

$$x^3 + ax^2 + x + b = 0$$

Chứng minh rằng

$$(x_1 - \frac{1}{x_1})(x_2 - \frac{1}{x_2}) + (x_2 - \frac{1}{x_2})(x_3 - \frac{1}{x_3}) + (x_3 - \frac{1}{x_3})(x_1 - \frac{1}{x_1}) = 4$$

32. Cho $x; y; x \neq 1$ thoả mãn:

$$\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+y}{1-y}+\frac{1+z}{1-z}=\frac{1+x}{1-x}.\frac{1+y}{1-y}.\frac{1+z}{1-z}$$

Chứng minh rằng

$$a)\qquad x+y+z-xyz=xy+yz+zx-1$$

$$b)\qquad \frac{2(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$c)\qquad \frac{(1-xy)^2-(x+y)^2}{(1+x^2)(1+y)^2}=\frac{2z}{1+z^2}$$

33. Giải biện luận phương trình: $x+\sqrt{a^2-x^2}<b$ với $a, b>0$.

34. Giải hệ:

$$\begin{cases}|x+y|+|x-y|\leqslant 2\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

35. Giải hệ

$$\begin{cases}x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1\\ x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

36. Giải hệ

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{1-y}=m+1\\ \sqrt{y}+\sqrt{1-x}=m+1\end{cases}$$

37. Giải hệ

$$\begin{cases}4xy(2x^2-1)=1\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

38. Giải biện luận phương trình:

$$(a+b)\sqrt{a^2+b^2+x^2}-(a-b)\sqrt{a^2+b^2-x^2}=a^2+b^2$$

39. Giải phương trình:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{5}{12}$$

40. Giải phương trình:
$$x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}$$

41. Giải phương trình:
$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}\left(\sqrt{(1 + x)^3} - \sqrt{(1 - x)^3}\right) = 2 + \sqrt{1 - x^2}$$

42. Giải phương trình:
$$\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x} = x^2 - 6x + 11$$

43. Giải phương trình:
$$\sqrt{1 - x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1 - x^2}$$

44. Giải biện luận phương trình:
$$\left(\frac{2a}{1 + a^2}\right)^x - \left(\frac{1 - a^2}{1 + a^2}\right)^x = 1 \quad (0 < a < 1)$$

45. Giải phương trình:
$$|2x - \sqrt{1 - 4x^2}| = \sqrt{2}(8x^2 - 1)$$

46. Giải bất phương trình:
$$\sqrt{1 - x} - \sqrt{x} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$$

47. Giải bất phương trình:
$$\sqrt{x - 1} - \sqrt{x - 2} > \sqrt{3 - x}$$

48. Giải bất phương trình:
$$\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x} < 2$$

49. Cho $f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$ 1) Chứng minh rằng $|f(x)| \leqslant \frac{1}{4}$ với mọi $x;\ |x| \leqslant 1$. 2) Chứng minh rằng:
Phương trình $x^3 - \frac{3}{4}x = m$ có nghiệm $x \in [-1; 1] \Leftrightarrow |m| \leqslant \frac{1}{4}$

50. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ ta luôn có

$$\frac{|a-c|}{\sqrt{(1+a^2)(1+c^2)}} \leqslant \frac{|a-b|}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} + \frac{|b-c|}{\sqrt{(1+b^2)(1+c^2)}}$$

51. Phương trình
$$8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1) = 0$$
có bao nhiêu nghiệm $\in [0;1]$?.

52. Cho $0 \leqslant a_k \leqslant 1 \quad (k \in \overline{1;n})$. Chứng minh rằng
$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k^2) + \prod_{k=1}^{n}(1-a_k^2) \leqslant 2^n$$

53. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $y = \dfrac{x^2}{1+x^4}$.

54. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $y = |x|\sqrt{1-x^2}$.

55. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

56. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ với $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

57. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $y = x^3 - \dfrac{1}{2}x$ với $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

5.7 Sử dụng định lý Lagrange

Định lý 5.1 (Lagrange)**.** *Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a, b) thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho:*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \quad (1) \quad \textit{hay là: } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (2)$$

Các công thức (1) và (2) đều được gọi là các công thức Lagrange. Trong định lý Lagrange a có thể $= b$. Khi đó, chỉ cần điều kiện $f(x)$ khả vi tại $x = a$, ta có $c = a$ và công thức (1) vẫn đúng. Các nhận xét sau đây là các hệ quả trực tiếp của định lý Lagrange.

Bổ đề 5.12. *Nếu:*

$$\begin{cases} 1)\ f'(x)+1\neq 0 \text{ với mọi } x\in I(a,b)\subseteq D_f;\ \text{(*) liên thông.} \\ 2)\ \varphi(**)\subseteq(*);\ \psi(**)\subseteq(*). \end{cases}$$

thì trong $(**)$ *ta có:*

$$f(\varphi(x))-f(\psi(x))=\psi(x)-\varphi(x)\Leftrightarrow\varphi(x)=\psi(x)$$

Bổ đề 5.13. *Nếu:*

$$\begin{cases} 1)\ f(x) \text{đồng biến với mọi } x\in I(a,b)\subseteq D_f;\ \text{(*) liên thông.} \\ 2)\ \varphi(**)\subseteq(*);\ \psi(**)\subseteq(*). \\ 3)\ h(x)>0 \text{ với mọi } x\in(**). \end{cases}$$

thì trong $(**)$ *ta có:*

$$f(\varphi(x))-f(\psi(x))=[\psi(x)-\varphi(x)].h(x)\Leftrightarrow\varphi(x)=\psi(x)$$

Bổ đề 5.14. *Nếu:*

$$\begin{cases} 1)\ f'(x)>0;\ g'(x)\geqslant 0 \text{ với mọi } x\in I(a,b)\subseteq D_f;\ \text{(*) liên thông.} \\ 2)\ \varphi(**)\subseteq(*);\ \psi(**)\subseteq(*). \\ 3)\ h(x)\geqslant 0 \text{ với mọi } x\in(**). \end{cases}$$

thì trong $(**)$ *ta có:*

$$f(\varphi(x))-f(\psi(x))=[g(\psi(x))-g(\varphi(x))].h(x)\Leftrightarrow\varphi(x)=\psi(x)$$

Bổ đề 5.15. *Nếu* $f(x)$ *đồng biến trong* $(*)\subseteq D_f$, $(*)$ *liên thông, thì trong* $I(a,b)$ *ta có:*

$$f(f(x))=x\Leftrightarrow f(x)=x\ ;\quad f(f(f(x)))=x\Leftrightarrow f(x)=x$$

Nếu $f'(x)+1\neq 0$ *với mọi* $x\in I(a,b)\subseteq D_f$, $(*)$ *liên thông, thì trong* $I(a,b)$ *ta có:*

$$f(f(x))=x\Leftrightarrow f(x)=x\ ;\quad f(f(f(x)))=x\Leftrightarrow f(x)=x$$

Ví dụ 5.35. *Giải phương trình:*

$$x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}.\quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2}(1 + x^3)\Big)^3 = f(f(x).$$

Với $f(x) = \frac{1}{2}(1 + x^3)$. Có $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 \geqslant 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên tập xác định $\mathbb{R}$. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} x - 1 & = & 0 \\ x^2 + x - 1 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ x & = & \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ x & = & \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. .$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm

$$x = 1 \ \vee \ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \ \vee \ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ví dụ 5.36. *Giải phương trình:*

$$2^x - 2^{2x+1} = (x+1).3^x. \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = 2^x$ có $f'(x) = 2^x \ln 2,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Theo định lý Lagrange, tồn tại c nằm giữa x và $2x + 1$ sao cho

$$2^x - 2^{2x+1} = f'(c).[x - (2x+1)] = -(x+1).2^c.\ln 2. \text{ Bởi vậy:}$$

$$(2) \Leftrightarrow -(x+1).2^c.\ln 2 = (x+1).3^x \Leftrightarrow (x+1)[3^x + 2^c.\ln 2] = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

(Do $[3^x + 2^c.\ln 2] > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Ví dụ 5.37. *Chứng minh rằng phương trình:*

$$\pi.ar\cos x - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x - 1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (3)$$

luôn có nghiệm $x \in (\frac{1}{\pi}; \frac{\pi}{4})$ $(*)$.

Đặt $f(x) = VT(3)$. Xét hàm số

$$F(x) = (\pi x - 1)(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Hàm số $F(x)$ xác định, liên tục trên $[\frac{1}{\pi}; \frac{\pi}{4}]$ và có

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in I(a,b);\ F(\frac{1}{\pi}) = 0 =;\ F(\frac{\pi}{4}) = 0.$$

Vậy theo định lý Lagrange, tồn tại $x_0 \in I(a,b)$ sao cho

$$f(x_0) = \frac{F(\frac{\pi}{4}) - F(\frac{1}{\pi})}{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}} = 0.$$

Vậy, phương trình $f(x) = 0$ (3) luôn có nghiệm $x \in I(a,b)$ (đpcm).

Ví dụ 5.38. *Chứng minh rằng phương trình:*

$$(4x-3)\log_3 x + \frac{2x^2 - 3x + 1}{x\ \ln 3} = 0. \quad (4)$$

luôn có nghiệm $x \in (\frac{1}{2}; 1)$ $(*)$.

Đặt $f(x) = VT(4)$. Xét hàm số

$$F(x) = (2x^2 - 3x + 1)\log_3 x.$$

Hàm số $F(x)$ xác định, liên tục trên $[\frac{1}{2}; 1]$ và có

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in I(a,b);\ F(\frac{1}{2}) = 0;\ F(1) = 0.$$

Vậy theo định lý Lagrange, tồn tại $x_0 \in I(a,b)$ sao cho

$$f(x_0) = \frac{F(1) - F(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}} = 0.$$

Vậy, phương trình $f(x) = 0$ (4) luôn có nghiệm $x \in I(a,b)$ (đpcm).

Ví dụ 5.39. *Chứng minh rằng phương trình:*

$$2(x-1)\sin 2x - \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \quad (5)$$

luôn có nghiệm $x \in (\frac{\pi}{8}; 1)$ $(*)$.

Đặt $f(x) = VT(5)$. Xét hàm số

$$F(x) = (x-1)(\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Hàm số $F(x)$ xác định, liên tục trên $[\frac{\pi}{8}; 1]$ và có

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in I(a,b);\ F(\frac{\pi}{8}) = 0;\ F(1) = 0.$$

Vậy theo định lý Lagrange, tồn tại $x_0 \in I(a,b)$ sao cho

$$f(x_0) = \frac{F(1) - F(\frac{\pi}{8})}{1 - \frac{\pi}{8}} = 0.$$

Vậy, phương trình $f(x) = 0$ (4) luôn có nghiệm $x \in I(a,b)$ (đpcm).

Ví dụ 5.40. *Chứng minh rằng phương trình:*

$$2(x^2 - x - 2)\cos 2x = (1-2x)\sin 2x. \quad (6)$$

luôn có ít nhất 3 nghiệm phân biệt trong khoảng $(-1; 2)$ $(*)$.

$(6) \Leftrightarrow f(x) := 2(x^2 - x - 2)\cos 2x - (1-2x)\sin 2x = 0 \qquad (6.1)$. Xét hàm số

$$F(x) = 9x^2 - x - 2)\sin 2x.$$

Hàm số $F(x)$ xác định, liên tục trên $[-1; 2]$ và có

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in I(a,b);\ F(-1) = 0;\ F(0) = 0;\ F(\frac{\pi}{2}) = 0;\ F(2) = 0.$$

Vậy theo định lý Lagrange, tồn tại $x_0 \in (-1; 0)$ $(*_1)$ sao cho

$$f(x_0) = \frac{F(0) - F(-1)}{0 - (-1)} = 0.$$

Tương tự, tồn tại $x_1 \in (0; \frac{\pi}{2})$ $(*_2)$ sao cho $f(x_1) = 0$;
tồn tại $x_2 \in (\frac{\pi}{2}; 2)$ $(*_3)$ sao cho $f(x_2) = 0$. Mà các khoảng $(*_1)$; $(*_2)$; $(*_3)$ đôi một không giao nhau
nên các nghiệm x_0; x_1; x_2 cũng đôi một khác nhau. Vậy, phương trình

$$f(x) = 0 \ \ (6.1) \Leftrightarrow (6)$$

luôn có ít nhất ba nghiệm phân biệt $x \in I(a,b)$ (đpcm).

Ví dụ 5.41. *Cho phương trình:*

$$ax^2 + bx + c = 0. \quad (7)$$

Chứng minh rằng nếu

$$m > 0;\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R},\ \ \textit{thoả mãn}\ \frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0 \quad (*_1)$$

thì phương trình (7) *luôn có nghiệm* $x \in (0; 1)$ $(*)$.

Đặt $f(x) = ax^{m+1} + bx^m + cx^{m-1} = x^{m-1}(ax^2 + bx + c)$. Xét hàm số

$$F(x) = \frac{a}{m+2}x^{m+2} + \frac{b}{m+1}x^{m+1} + \frac{c}{m}x^m.$$

Hàm số $F(x)$ xác định, liên tục trên $[0; 1]$ và có

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in I(a, b);\ F(0) = 0;\ F(1) = \frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0.$$

Vậy theo định lý Lagrange, tồn tại $x_0 \in I(a, b)$ sao cho

$$f(x_0) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = 0.$$

hay là $x_0^{m-1}(ax_0^2 + bx_0 + c) = 0 \Rightarrow ax_0^2 + bx_0 + c = 0$ (vì $x_0 \in (0; 1) \Rightarrow x_0^{m-1} \neq 0$).

Vậy, phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (7) luôn có nghiệm $x \in I(a, b)$ (đpcm).

Ví dụ 5.42. *Cho phương trình:*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a - 1x + a - 0 = 0. \quad (8)$$

Chứng minh rằng nếu

$$\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \cdots + \frac{a_1}{2} + a_0 = 0 \quad (*_1)$$

thì phương trình (8) *luôn có nghiệm* $x \in (0; 1)$ $(*)$.

Đặt $f(x) = VT(8)$. Xét hàm số

$$F(x) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0x.$$

Hàm số $F(x)$ xác định, liên tục trên $[0;1]$ và có

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in I(a,b);\ F(0) = 0;\ F(1) = 0\ \text{(do } (*_1)).$$

Vậy theo định lý Lagrange, tồn tại $x_0 \in I(a,b)$ sao cho

$$f(x_0) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = 0.$$

Vậy, phương trình $f(x) = 0$ (8) luôn có nghiệm $x \in I(a,b)$ (đpcm).

Ví dụ 5.43. *Cho phương trình:*

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a - 1x + a - 0 = 0. \quad (9)$$

Chứng minh rằng nếu tồn tại $m \in N^*$ sao cho :

$$\frac{a_n}{n+m} + \frac{a_{n-1}}{n+m-1} + \cdots + \frac{a_1}{m+1} + \frac{a_0}{m} = 0 \quad (*_1)$$

thì phương trình (8) *luôn có nghiệm $x \in (0;1)$ $(*)$.*

Đặt $f(x) = VT(9)$. Xét hàm số

$$F(x) = \frac{a_n}{n+m}x^{n+m} + \frac{a_{n-1}}{n+m-1}x^{n+m-1} + \cdots + \frac{a_1}{m+1}x^{m+1} + \frac{a_0}{m}x^m.$$

Hàm số $F(x)$ xác định, liên tục trên $[0;1]$ và có

$$F'(x) = x^{m-1}.f(x),\ \forall x \in I(a,b);\ F(0) = 0;\ F(1) = 0\ \text{(do } (*_1)).$$

Vậy theo định lý Lagrange, tồn tại $x_0 \in I(a,b)$ sao cho

$$F'(x_0) = x_0^{m-1}f(x_0) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = 0.$$

$$\Rightarrow f(x_0) = 0\ \text{ do } x_0 \in (0;1) \Rightarrow x_0^{m-1} \neq 0.$$

Vậy, phương trình $f(x) = 0$ (9) luôn có nghiệm $x \in I(a,b)$ (đpcm).

Ví dụ 5.44. *Cho phương trình:*

$$a.\cos 3x + b.\cos 2x + c.\cos x + \sin x = 0. \quad (10)$$

Chứng minh rằng với mọi a, b, $c \in \mathbb{R}$ thì phương trình (10) *luôn có nghiệm* $x \in (0; 2\pi)$.

Đặt $f(x) = VT(10)$. Xét hàm số

$$F(x) = \frac{a}{3}\sin 3x + \frac{b}{2}\sin 2x + c\sin x - \cos x + 1.$$

Hàm số $F(x)$ xác định, liên tục trên $[0; 2\pi]$ và có

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in I(a,b);\ F(0) = 0;\ F(2\pi) = 0,\ \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}.$$

Vậy theo định lý Lagrange, tồn tại $x_0 \in I(a,b)$ sao cho

$$f(x_0) = \frac{F(2\pi) - F(0)}{2\pi - 0} = 0.$$

Vậy, với mọi a, b, $c \in \mathbb{R}$ phương trình $f(x) = 0$ (10) luôn có nghiệm $x \in I(a,b)$ (đpcm).

Bài tập tương tự

1. Giải phương trình:

$$2^{2x+3} - 2^{x^2} = (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{2x+3})(x^2 + 1 + 2^x)$$

2. Giải phương trình:

$$(x^3+1)^5 - (x^2+1)^5 = (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^3+1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$$

3. Giải phương trình: $x = a + \sqrt{a + \sqrt{x}}$

4. Giải phương trình: $x = \sqrt{a + \sqrt{a + x}}$

5.8 Sử dụng định lý Rolle

Định lý 5.2 (Rolle). *Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$; có đạo hàm trên khoảng (a, b) và $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

Từ định lý Rolle ta thu được các hệ quả sau:

Bổ đề 5.16. *Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$; có đạo hàm trên khoảng (a, b) thì giữa hai nghiệm (liên tiếp) $\in (a; b)$ của phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.*

Bổ đề 5.17. *Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$; có đạo hàm trên khoảng (a, b) và phương trình $f(x) = 0$ có k nghiệm $x \in (a; b)$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất $k - 1$ nghiệm $x \in (a; b)$.*

Ví dụ 5.45. *Giải phương trình:*

$$3^x + 2^x = 3x + 2. \quad (1)$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow f(x) = 3^x + 2^x - 3x - 2 = 0$. Nhận xét rằng $f(0) = 0;\ f(1) = 0 \Rightarrow$ phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm thực phân biệt. Giả sử (1) có nhiều hơn hai nghiệm thực phân biệt, khi đó, theo hệ quả của định lý Rolle , phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm thực phân biệt. Cũng theo lý do trên, phương trình $f''(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thực. Mà $f'(x) = 3^x \ln 3 + 2^x \ln 2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 3^x(\ln 3)^2 + 2^x(\ln 2)^2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Đó là điều mâu thuẫn với kết quả trên. Vậy giả sử của ta là sai, tức là (1) có không quá hai nghiệm thực phân biệt, Nói cách khác, (1) chỉ có đúng hai nghiệm là

$$x = 0;\ x = 1.$$

Ví dụ 5.46. *Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$, phương trình:*

$$a.\cos 3x + b.\cos 2x + c.\cos x + \sin x = 0. \quad (2)$$

luôn có nghiệm $x \in [0; 2\pi]$ $(*)$.

Xét hàm số

$$f(x) = \frac{a}{3}\sin 3x + \frac{b}{2}\sin 2x + c.\sin x - \cos x.$$

Ta có $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm bậc nhất:

$$f'(x) = a.\cos 3x + b.\cos 2x + c.\cos x + \sin x = VT(2)$$

với mọi $x \in I(a,b)$. Ngoài ra,

$$f(0) = f(2\pi) = a + b + c.$$

Vậy, theo định lý Rolle , tồn tại $c \in (0; 2\pi) \subset [0; 2\pi] = (*)$ sao cho $f'(c) = 0$. Nói cách khác, phương trình (2) luôn có ít nhất một nghiệm $(x = c) \ \in I(a,b)$. Đó chính là điều cần chứng minh.

Ví dụ 5.47. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$; khả vi trên $(a; b)$ và $f(a) = f(b) = 0$.*
Chứng minh rằng với mọi $k \in \mathbb{R}^*$, phương trình

$$f(x) + k.f'(x) = 0 \quad (3)$$

luôn có ít nhất một nghiệm $x \in (a; b)$.

Xét $g(x) = e^{\frac{x}{k}}.f(x)$. Ta có $g(x)$ liên tục trên $[a; b]$; khả vi trên $(a; b)$ và $g(a) = g(b) = 0$. Theo định lý Rolle , phương trình $g'(x) = 0 \quad (3.1)$ luôn có ít nhất một nghiệm $x \in (a; b)$. Mà

$$g'(x) = \frac{1}{k}e^{\frac{x}{k}}.f(x) + e^{\frac{x}{k}}.f'(x) = \frac{1}{k}e^{\frac{x}{k}}[f(x) + kf'(x)].$$

Còn $\frac{1}{k}e^{\frac{x}{k}} \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên

$$(3.1) \Leftrightarrow f(x) + k.f'(x) = 0 \quad (3).$$

Vậy phương trình (3) luôn có ít nhất một nghiệm $x \in (a; b)$. Đó chính là đpcm.

Ví dụ 5.48. *Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$, đa thức:*

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + c$$

có không quá ba nghiệm thực phân biệt.

Giả sử $P(x)$ có nhiều hơn 3 nghiệm thực phân biệt. Khi đó, do $P(x)$ xác định, liên tục và khả vi trên $\mathbb{R}$ nên theo hệ quả của định lý Rolle , đa thức $P'(x)$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt. Lập luận tương tự ta được $P'''(x)$ có ít nhất một nghiệm thực. Mà

$$P'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2ax + b \Rightarrow P''(x) = 30x^3 - 24x^2 + 12x + 2a$$

$$\Rightarrow P'''(x) = 60x^2 - 48x + 12 = 12(x^2 + (2x-1)^2) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều mâu thuẫn thu được chứng tỏ giả sử trên là sai, tức là đa thức $P(x)$ đã cho có không quá ba nghiệm thực phân biệt (đpcm),

Ví dụ 5.49. *Chứng minh rằng nếu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, đôi một khác nhau thì phương trình:*

$$(x-a)(x-b)(x-c)+(x-b)(x-c)(x-d)+(x-c)(x-d)(x-a)+(x-d)(x-a)(x-b) = 0 \quad (4)$$

luôn có ba nghiệm phân biệt.

Xét

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

Ta có $P(x)$ xác định, liên tục, khả vi trên $\mathbb{R}$ và có bốn nghiệm thực phân biệt. Theo hệ quả của định lý Rolle , phương trình $P'(x) = 0 \quad (4.1)$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt. Mặt khác, $P'(x)$ là đa thức bậc ba nên nó có không quá ba nghiệm thực phân biệt. Vậy $P'(x)$ có đúng ba nghiệm thực phân biệt. Nhưng

$$P'(x) = VT(4) \text{ nên } (4.1) \Leftrightarrow (4).$$

Nói cách khác phương trình (4) luôn có đúng ba nghiệm thực phân biệt. Đó chính là điều phải chứng minh.

Ví dụ 5.50. *Tìm số nghiệm của phương trình:*

$$3\sin x = x. \quad (5)$$

Đặt $f(x) := 3\sin x - x$. Ta có $f(x)$ xác định, liên tục, khả vi trên $\mathbb{R}$ và

$$(5) \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad (5.1)$$

Do với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ nên mọi nghiệm nếu có của phương trình (5) đều $\in (-3; 3)$ $(*)$. Nhận xét rằng $(*) \subset (-\pi; \pi) := (*_1)$. Ngoài ra, ta có

$$f'(x) = 3\cos x - 1$$

suy ra $f'(x)$ có hai nghiệm phân biệt $\in (*_1) \Rightarrow f'(x)$ có không quá hai nghiệm phân biệt $\in I(a,b)$. Sử dụng định lý Rolle ta được $f(x)$ có không quá ba nghiệm phân biệt. Mà $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 0;\ f(-\dfrac{\pi}{2}).f(-3) < 0;\ f(\dfrac{\pi}{3}).f(3) < 0$ nên $f(x)$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt. Tóm lại phương trình (5) có đúng ba nghiệm phân biệt.

Ví dụ 5.51. *Giải phương trình:*

$$2x - \sin \pi x = 0. \quad (6)$$

Đặt $f(x) := 2x - \sin \pi x$. Ta có $f(x)$ xác định, liên tục, khả vi trên $\mathbb{R}$ và

$$(6) \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad (6.1)$$

Do với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có $-1 \leqslant \sin \pi x \leqslant 1$ nên mọi nghiệm nếu có của phương trình (5) đều $\in (-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2})$ $(*)$. Nhận xét rằng $(*) \subset (-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}) := (*_1)$. Ngoài ra, ta có

$$f'(x) = 2 - \pi \sin \pi x$$

suy ra $f'(x)$ có hai nghiệm phân biệt $\in (*_1) \Rightarrow f'(x)$ có không quá hai nghiệm phân biệt $\in I(a,b)$. Sử dụng định lý Rolle ta được $f(x)$ có không quá ba nghiệm phân biệt.

$$\text{Mà } f(0) = 0;\ f(-\frac{1}{2}) = 0;\ f(\frac{1}{2}) = 0$$

nên $f(x)$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt. Tóm lại phương trình (5) có đúng ba nghiệm phân biệt là

$$x = 0;\ x = -\frac{1}{2};\ x = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 5.52. *Chứng minh rằng phương trình:*

$$2^x = x^2 + 1. \quad (7)$$

có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Đặt $f(x) := 2^x - x^2 - 1$. Ta có $f(x)$ xác định, liên tục, khả vi trên $\mathbb{R}$ và

$$(7) \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad (7.1)$$

Có $f(0) = f(1) = 0;\ f(2) = -1,\ f(5) = 6 \Rightarrow f(2).f(5) = -6 < 0 \Rightarrow f(x)$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt. Giả sử $f(x)$ có $\geqslant 4$ nghiệm phân biệt. Theo hệ quả của định lý Rolle , $f''(x)$ có $\geqslant 2$ nghiệm phân biệt. Mà $f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x$; $f''(x) = 2^x(\ln 2)^2 - 2 \Rightarrow f''(x)$ có đúng một nghiệm. Ta thu được hai kết quả mâu thuẫn nhau. Điều đó chứng tỏ rằng $f(x)$ có không quá ba nghiệm phân biệt. Vậy $f(x)$ có đúng ba nghiệm phân biệt. Từ đó thu được đpcm.

Bài tập tương tự

1. Giải và biện luận phương trình: $a^x = (a-1)x + 1 \quad (a > 0; \neq 1)$

2. Giải phương trình:
$$\sum_{k=2}^{n+1} k^x = n + \frac{n(n+1)}{2}x$$

3. Giải bất phương trình: $\dfrac{lg\dfrac{5+x}{5-x}}{2^x - 3x + 1} < 0$

4. Giải phương trình: $(4^x + 2)(2 - x) = 6$

5. Tìm nghiệm $x \geqslant 1$ của phương trình:
$$(x+1)\ln\frac{x+1}{x} + x - 1 = x(x^2+1)\ln\frac{x^2+1}{x^2}$$

6. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, phương trình:
$$a.\sin 6x + b.\cos 5x + c.\sin 4x + d.\cos 3x + e.\sin x = 0$$
luôn có nghiệm .

7. Cho $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Chứng minh rằng nếu tồn tại $m \in N^*$ sao cho:
$$\frac{a_n}{m+n} + \frac{a_{n-1}}{m+n-1} + \cdots + \frac{a_1}{m+1} + \frac{a_0}{m} = 0$$
thì phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm $x \in (0; 1)$

8. Cho $f(x)$ xác định, liên tục và dương trên $[a; b]$; khả vi trên $(a; b)$.
1) Chứng minh rằng $\exists\, c \in (a; b)$ sao cho:
$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$$

2) Chứng minh rằng phương trình:

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)}\frac{f'(x)}{f(x)}$$

luôn có nghiệm $x \in (a;b)$.

9. Chứng minh rằng với mọi $a_k; b_k \in \mathbb{R};\ a_n + b_n \neq 0$, phương trình:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k \sin kx + b_k \cos kx) = 0$$

luôn có ít nhất một nghiệm.

10. Chứng minh rằng với mọi $a \in \mathbb{R}$, giữa hai nghiệm của đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ luôn có ít nhất một nghiệm của đa thức $f'(x) + a.f(x)$.

11. Giải phương trình: $(1 + \cos x)(2 + 4^{\cos x}) = 3.4^{\cos x}$

12. Chứng minh rằng nếu n chẵn thì với mọi $p, q \in \mathbb{R}$, phương trình: $x^n + px + q = 0$ không thể có quá hai nghiệm thực phân biệt.

13. Giải phương trình: $4^{x-1} - 2^{x^2-x} = \log_2 x - 1$

14. Giải phương trình: $x^2 + x + 6\sqrt{x+2} = 18$

15. Giải phương trình: $x^4 + x^3 + 5\sqrt{x+1} = 2 + 5\sqrt{2}$

16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp $n-1$ trên đoạn $[x_0; x_n]$ và có đạo hàm đến cấp n trên khoảng $(x_0; x_n)$. Ngoài ra:

$$f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) \text{ với } x_0 < x_1 < \cdots < x_n$$

Chứng minh rằng khi đó, phương trình: $f^{(k)}(x) = 0$ có ít nhất $n - k + 1$ nghiệm trong khoảng $(x_0; x_n)$; $(k \in \overline{1;n})$.
Đặc biệt, phương trình $f^{(n)}(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(x_0; x_n)$.

17. Biết rằng đa thức: $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ (với $a_n \neq 0;\ n \geqslant 2$) có n nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng phương trình $P^{(k)}(x) = 0$ có đúng $n - k$ nghiệm thực phân biệt.

18. Biết rằng phương trình $t^2 + \alpha x + \beta = 0$ $(\alpha; \beta \in \mathbb{R})$ có nghiệm thực và đa thức $P(x)$ (bậc $n \geqslant 1$; $\in \mathbb{R}[x]$) có các nghiệm đều thực. Chứng minh rằng phương trình:
$$P(x) + \alpha P'(x) + \beta P''(x) = 0$$
cũng có các nghiệm đều thực.

19. Cho $x_1 < x_2 < x_3$ là các nghiệm của đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$.
Chứng minh rằng nếu tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + ax + b$ có các nghiệm nằm ngoài đoạn $[x_1; x_2]$ thì phương trình:
$$P''(x) + aP'(x) + bP(x) = 0$$
có nghiệm trong đoạn $[x_1; x_3]$

20. Xét phương trình với hệ số thực:
$$P(x) = x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(1 + a^2)x^{n-2} + a_1x^{n-3} + \cdots + a_{n-2} = 0$$
Tìm a để phương trình trên có các nghiệm đều thực.

21. Cho đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ bậc n và có tất cả các nghiệm đều thực. Chứng minh rằng phương trình
$$P'(x) = 0$$
có các nghiệm đều thực ($n - 1$ nghiệm đều thực.)

22. Cho $P(x)$ là đa thức bậc n có n nghiệm thực phân biệt: $x_1; x_2; \cdots; x_n$. Chứng minh rằng:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_n)}{P'(x_n)} = 0$$

5.9 Hệ phương trình dạng hoán vị vòng quanh

Xét hệ :
$$\begin{cases} f(x_1) = g(x_2) \\ f(x_2) = g(x_3) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ f(x_{n-1}) = g(x_n) \\ f(x_n) = g(x_1) \end{cases} \qquad (1)$$

Hệ (1) được gọi là hệ phương trình dạng hoán vị vòng quanh (khi hoán vị vòng quanh các ẩn số

$$x_1 \sim x_2 \sim x_3 \sim \cdots x_{n-1} \sim x_n \sim x_1$$

thì hệ không đổi)

Định lý 5.3. *Nếu $f(x)$ và $g(x)$ cùng tính đơn điệu trên miền $I(a,b)$ liên thông, $(*) \subseteq D := D_f \cap D_g$ còn $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ là nghiệm của hệ (1) với các số $x_j \in I(a,b), j \in \overline{1;n}$ thì:*

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

Chứng minh. Giả sử $f(x), g(x)$ đồng biến và $x_1 = Min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Ta có:

$$\begin{array}{rc} x_1 \leqslant x_2 & \\ RRightarrow & f(x_1) \leqslant f(x_2) \\ RRightarrow & g(x_2) \leqslant g(x_3) \\ RRightarrow & x_2 \leqslant x_3 \\ RRightarrow & \cdots \\ RRightarrow & x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_1 \\ RRightarrow & \text{(đpcm)} \end{array}$$

Định lý 5.4. *Nếu $f(x)$ và $g(x)$ khác tính đơn điệu trên miền $I(a,b)$ liên thông, $(*) \subseteq D := D_f \cap D_g$ còn $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ là nghiệm của hệ (1) với các số $x_j \in I(a,b), j \in \overline{1;n}$ thì:*
Khi n lẻ thì:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$$

Khi n chẵn thì:

$$x_1 = x_3 = \cdots = x_{n-1}$$

$$x_2 = x_4 = \cdots = x_n$$

Chứng minh định lý này hoàn toàn tương tự như chứng minh định lý trên.

Ví dụ 5.53. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^3+3x-3+\ \ln(x^2-x+1)=y \\ y^3+3y-3+\ \ln(y^2-y+1)=z \\ z^3+3z-3+\ \ln(z^2-z+1)=x \end{cases}. \quad (1)$$

Đặt $f(t) := t^3+3t-3+\ \ln(t^2-t+1)$, có $f(t)$ xác định, liên tục với mọi $t \in \mathbb{R}$ và

$$f'(t) = 3t^3+3+\frac{2t-1}{t^2-t+1} = 3t^2+\frac{3t^2-t+2}{t^2-t+1} > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vậy $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ z=f(y) \\ x=f(z) \end{cases}$$

nên theo định lý trên thì $x=y=z=t$ là nghiệm của phương trình

$$f(t)=t \Leftrightarrow g(t) := t^3+2t-3+\ \ln(t^2-t+1)=0. \quad (1.2)$$

Nhưng

$$g'(t) = 3t^2+2+\frac{2t-1}{t^2-t+1} = 3t^2+\frac{2t^2+2}{t^2-t+1} > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

nên $g(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $g(1)=0$ nên (1.2) có nghiệm duy nhất là $t=1$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là

$$x=y=z=1.$$

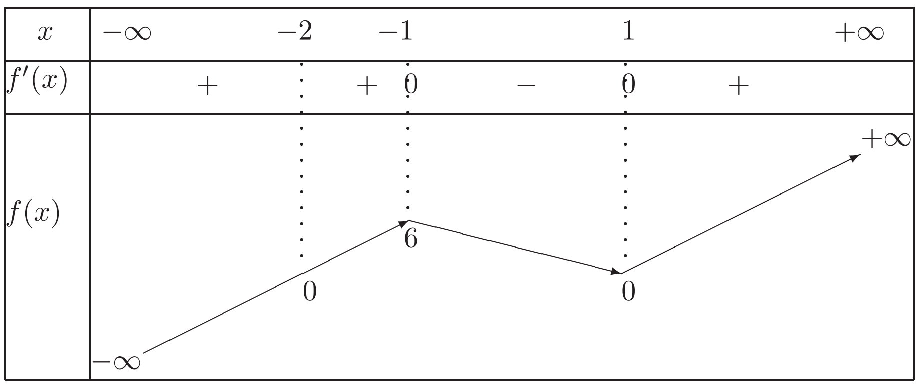
Ví dụ 5.54. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x_1^3-3x_1=2x_2 \\ x_2^3-3x_2=2x_3 \\ x_3^3-3x_3=2x_4 \\ \ldots\ \ \ldots\ \ \ldots \\ x_{99}^3-3x_{99}=2x_{100} \\ x_{100}^3-3x_{100}=2x_1 \end{cases}. \quad (2)$$

Xét các hàm số $f(t) := t^3 - 3t + 2;\ g(t) := 2t$. Có $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$f'(t) = 3t^2 - 3.\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \ \vee \ t = 1.$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên tập xác định $\mathbb{R}$.



Gọi $x_1 := Min\{x_1;\ x_2; \cdots ; x_n\}$. Ta có: Nếu $x_1 > 1$ thì $x_j > 1,\ \forall j \in \overline{1..100}$. Mà trên $(1; +\infty)$ cả hai hàm số $f(t)$ và $g(t)$ đều đồng biến nên theo định lý ta được $x_1 = x_2 = \cdots = x_{100} := t$ là nghiệm $t > 1$ của phương trình

$$t^3 - 3t^2 = 2 = 2t \Rightarrow t = 2.$$

Nếu $x_1 < 0$ thì

$$g(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_{100}) < 0 \Rightarrow x_{100} < -2 \Rightarrow g(x_{100}) < -4 < 0 \Rightarrow f(x_{99}) < 0 \Rightarrow x_{99} < -2.$$

Tương tự ta được $x_j < -2$ với mọi $j \in \overline{1..100}$. Mà trên $(-\infty; -2)$ cả hai hàm số cùng đồng biến nên ta có $x_1 = x_2 = \cdots = x_{100} := t$ là nghiệm $t < -2$ của phương trình

$$t^3 - 3t^2 = 2 = 2t \Rightarrow t = -1 - \sqrt{2}.$$

Nếu $x_1 \in [0; 1]$ thì từ bảng biến thiên ta có $x_j \in [0; 1],\ \forall j \in \overline{1..100}$. Mà trên $[0; 1]$ ta có hàm số $f(t)$ nghịch biến, còn hàm số $g(t)$ đồng biến. Ngoài ra 100 là số chẵn nên theo định lý ta được

$$x_1 = x_3 = \cdots = x_{99} := x \text{ và } x_2 = x_4 = \cdots = x_{100} := y$$

trong đó x, y là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 3x + 2 = 2y \\ y^3 - 3y + 2 = 2x \end{cases}.$$

Giải hệ này ta được các nghiệm $(x; y)$ với $x; y \in [0; 1]$ là

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} - 1 \\ y = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Tóm lại ta được các nghiệm của hệ phương trình đã cho là:

$$\left[\begin{array}{lcl} x_1 = x_2 = \cdots = x_{100} & = & 2; \\ x_1 = x_2 = \cdots = x_{100} & = & -1 - \sqrt{2}; \\ x_1 = x_2 = \cdots = x_{100} & = & \sqrt{2} - 1; \\ \begin{cases} x_1 = x_3 = \cdots = x_{99} = 0 \\ x_2 = x_4 = \cdots = x_{100} = 1 \end{cases} & ; & \\ \begin{cases} x_1 = x_3 = \cdots = x_{99} = 1 \\ x_2 = x_4 = \cdots = x_{100} = 0 \end{cases} & & \end{array}\right. .$$

Bài tập tương tự

1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y4^{2x^3+x^2} = 1 \\ z4^{2y^3+y^2} = 1 \\ x4^{2z^3+z^2} = 1 \end{cases}$$

2. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x_1^2 = x_2^3 - 4x_2^2 + ax_2 \\ x_2^2 = x_3^3 - 4x_3^2 + ax_3 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{n-1}^2 = x_n^3 - 4x_n^2 + ax_n \\ x_n^2 = x_1^3 - 4x_1^2 + ax_1 \end{cases} \quad (\text{với } n \in N;\ n > 1)$$

3. Cho $n \in N;\ n > 1;\ a \neq 0$. Chứng minh rằng hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1^2 = x_2 + \dfrac{a^2}{x_2} \\ 2x_2^2 = x_3 + \dfrac{a^2}{x_3} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ 2x_{n-1}^2 = x_n + \dfrac{a^2}{x_n} \\ 2x_n^2 = x_1 + \dfrac{a^2}{x_1} \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất.

4. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1^2 = ax_2 + 1 \\ x_2^2 = ax_3 + 1 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{999}^2 = ax_{1000} + 1 \\ x_{1000}^2 = ax_1 + 1 \end{cases}$$

   với a là tham số, $|a| > 1$.

5. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (S - x_1)^{2k-1} = x_1 \\ (S - x_2)^{2k-1} = x_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ (S - x_n)^{2k-1} = x_n \end{cases}$$

   trong đó $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n;\ k \in N^*$

6. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x_3 + x_4 + x_5)^5 = 3x_1 \\ (x_4 + x_5 + x_1)^5 = 3x_2 \\ (x_5 + x_1 + x_2)^5 = 3x_3 \\ (x_1 + x_2 + x_3)^5 = 3x_4 \\ (x_2 + x_3 + x_4)^5 = 3x_5 \end{cases}$$

7. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{cases}$$

8. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - y^2 - y = \dfrac{1}{3} \\ y^3 - z^2 - z = \dfrac{1}{3} \\ z^3 - x^2 - x = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

9. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0 \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0 \end{cases}$$

10. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = y \\ 2y^3 - 7y^2 + 8y - 2 = z \\ 2z^3 - 7z^2 + 8z - 2 = x \end{cases}$$

11. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 2y \\ (y-1)^2 = 2z \\ (z-1)^2 = 2t \\ (t-1)^2 = 2x \end{cases}$$

12. Chứng minh rằng với mọi $a \in \mathbb{R}$ hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 = y^3 + y + a \\ y^2 = z^3 + z + a \\ z^2 = x^3 + x + a \end{cases} \quad \text{luôn có nghiệm duy nhất.}$$

13. Tìm a để hệ:

$$\begin{cases} x^2 = y + a \\ y^2 = z + a \\ z^2 = x + a \end{cases}$$

chỉ có nghiệm dạng: $x = y = z$.

5.10 Các phương pháp khác

Trong phần này ta sẽ xét một số phương pháp khác, ít gặp hơn

5.10.1 Sử dụng phép biến đổi hệ quả

Xét hai hệ thức (α) và (β) cùng ẩn x. Nếu $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ thì $N(\alpha) \subseteq N(\beta)$. Có thể xảy ra khả năng $N(\beta) \setminus N(\alpha) \neq \emptyset$, tức là có những nghiệm của (β) mà không là nghiệm của (α). Các nghiệm đó được gọi là các nghiệm ngoại lai. Bởi vậy, khi giải một hệ thức bằng phương pháp biến đổi hệ quả, ta bắt buộc phải thử lại nghiệm. Vì vậy, tuyệt đối không được dùng phương pháp biến đổi hệ quả để giải bất phương trình và cũng hết sức hạn chế sử dụng phương pháp này để giải phương trình. Tuy nhiên, trong một số trường hợp, khi phép biến đổi tương đương là phức tạp, ta cũng có thể giải phương trình bằng phương pháp biến đổi hệ quả. Ngoài ra, ta có thể sử dụng các nhận xét sau:

Bổ đề 5.18. *Nếu $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ và (β) vô nghiệm thì (α) vô nghiệm.*

Bổ đề 5.19. *Nếu* $\begin{cases} 1)\ \textit{Phương trình } (\alpha) \Rightarrow \textit{phương trình } (\beta)\ ; \\ 2)\ \textit{Phương trình } (\alpha) \textit{ có } k \textit{ nghiệm phân biệt}\ ; \\ 3)\ \textit{Phương trình } (\beta) \textit{ cũng có } k \textit{ nghiệm phân biệt.} \end{cases}$ *thì* $(\alpha) \Leftrightarrow (\beta)$.

Ví dụ minh hoạ

Ví dụ 5.55. *Giải và biện luận phương trình*

$$2\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} = \sqrt{a - x + \sqrt{x(a+x)}}. \quad (1)$$

Ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Rightarrow 4(a+x) + a - x - 4\sqrt{(a+x)(a-x)} = a - x + \sqrt{x(a+x)} \\
&\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{a+x} = 0 & (\alpha) \\ 4\sqrt{a+x} - 4\sqrt{a-x} = \sqrt{x} & (\beta) \end{array}\right. . \\
(\alpha) &\Rightarrow x = -a := x_1. \\
(\beta) &\Rightarrow 16(a+x) + 16(a-x) - 32\sqrt{(a+x)(a-x)} = x \\
&\Rightarrow 32\sqrt{a^2 - x^2} = 32a - x \\
&\Rightarrow 32^2(a^2 - x^2) = (32a - x)^2 = 32^2a^2 - 64ax + x^2 \\
&\Rightarrow 1025x^2 = 64ax \\
&\Rightarrow x = 0 := x_2 \ \vee \ x = \frac{64a}{1025} := x_3.
\end{aligned}$$

Thay các nghiệm vừa tìm được vào phương trình đã cho ta được: +) $x = x_1$ là nghiệm của (1) $\Leftrightarrow -2\sqrt{2a} = \sqrt{2a} \Leftrightarrow a = 0$. Khi đó $x_1 = 0$. +) $x = x_2$ là nghiệm của (1) $\Leftrightarrow 2\sqrt{a}-\sqrt{a}=\sqrt{a}\Leftrightarrow a\geqslant 0$. +) $x=x_3$ là nghiệm của (1) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{a+\frac{64a}{1025}}-\sqrt{a-\frac{64a}{1025}}=\sqrt{a-\frac{64a}{1025}+\sqrt{\frac{64a}{1025}(a+\frac{64a}{1025})}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1089a}-\sqrt{961a}=\sqrt{961a+\sqrt{64a.1089a}}$$

$$\Leftrightarrow 66\sqrt{a}-31\sqrt{a}=\sqrt{1225a}=35\sqrt{a}\Leftrightarrow a\geqslant 0.$$

Tổng hợp các kết quả trên ta được: +) Với $a<0$ thì phương trình đã cho vô nghiệm. +) Với $a\geqslant 0$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x=0;\ x=\frac{64a}{1025}.$$

5.10.2 Sử dụng tính chất của hàm số liên tục

Bổ đề 5.20. *Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm $x\in(a;b)$.*

Ta thường sử dụng tính chất này để chứng minh một phương trình có nghiệm hoặc có nghiệm trên một khoảng cho trước.

Ví dụ minh hoạ

Ví dụ 5.56. *Chứng minh rằng phương trình*

$$\cos x+m\cos 2x=0\quad (2)$$

luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Đặt $f(x):=\cos x+m\cos 2x$. Có $f(x)$ xác định, liên tục với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ xác định, liên tục trên $[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}]$. Mà

$$\begin{cases} f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ f(\frac{3\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\quad \forall m\Rightarrow f(\frac{\pi}{4}).f(\frac{3\pi}{4})=-\frac{1}{2}<0,\ \forall m\in\mathbb{R}.$$

Vậy theo tính chất của hàm số liên tục ta có phương trình $f(x)=0$ luôn có ít nhất một nghiệm $x\in(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4})$ với mọi $m\in\mathbb{R}$. Nói cách khác, phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m. Đó chính là đpcm.

Ví dụ 5.57. *Chứng minh rằng phương trình*

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = m \quad (3)$$

luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

$$(3) \Leftrightarrow f(x) := \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} - m = 0. \quad (3.1)$$

Hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $(\frac{\pi}{2}; \pi)$. Ngoài ra, ta còn có:

$$\cosh x \to \frac{\pi}{2}^{+} \lim f(x) = -\infty,\ \forall m \Rightarrow \exists \alpha \text{ đủ gần } \frac{\pi}{2},\ \alpha > \frac{\pi}{2}$$

sao cho $f(\alpha) < 0,\ \forall m$. Lại có

$$\cosh x \to \pi^{-} \lim f(x) = +\infty,\ \forall m \Rightarrow \exists \beta \text{ đủ gần } \pi,\ \pi > \beta > \alpha > \frac{\pi}{2}$$

sao cho $f(\beta) > 0,\ \forall m$. Hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $[\alpha; \beta]$, có $f(\alpha).f(\beta) < 0$ với mọi m nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $\in (\alpha; \beta)$ với mọi m. Nói cách khác, với mọi m, phương trình (3) luôn có nghiệm (đpcm).

5.10.3 Đẳng cấp hoá

Ví dụ 5.58. *Giải phương trình*

$$2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}. \quad (5)$$

Để ý rằng

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1;\ (x + 1) + (x^2 - x + 1) = x^2 + 2.$$

Ngoài ra tập điều kiện của phương trình đã cho là $x \geqslant -1$ và

$$x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $u := x + 1;\ v := x^2 - x + 1$ ($\Rightarrow v > 0$) ta được phương trình

$$2(u + v) = 5\sqrt{uv} \Leftrightarrow 2\frac{u}{v} - 5\sqrt{\frac{u}{v}} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{u}{v}} = 2\\ \sqrt{\dfrac{u}{v}} = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u = 4v\\ 4u = v\end{array}\right..$$

Vậy

$$\text{Vậy } (5) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcll}4x^2 - 5x + 3 & = & 0 & \quad (\text{vô nghiệm do } \Delta = -23 < 0)\\ x^2 - 5x - 3 & = & 0 &\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{5 - \sqrt{37}}{2} \ \vee \ x = \frac{5 + \sqrt{37}}{2}.$$

Hai nghiệm này cùng thoả mãn điều kiện $x \geqslant -1$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x = \frac{5 - \sqrt{37}}{2} \ \vee \ x = \frac{5 + \sqrt{37}}{2}.$$

Ví dụ 5.59. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}2x^3 - 9y^3 & = (x - y)(2xy + 3)\\ x^2 - xy + y^2 & = 3\end{cases}. \quad (6)$$

$$(6) \Leftrightarrow \begin{cases}2x^3 - 9y^3 & = (x - y)(2xy + x^2 - xy + y^2) = x^3 - y^3 \quad (\alpha)\\ x^2 - xy + y^2 & = 3 \quad (\beta)\end{cases}. \quad (6.1)$$

Mà $(\alpha) \Leftrightarrow x^3 = 8y^3 \Leftrightarrow x = 2y$. Thay vào (β) được

$$4y^2 - 2y^2 + y^2 = 3 \Leftrightarrow 3y^2 = 3 \Leftrightarrow y = 1 \ \vee \ y = -1.$$

Với $y = 1$ có $x = 2$, với $y = -1$ có $x = -2$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm

$$\begin{cases}x = 2\\ y = 1\end{cases} \vee \begin{cases}x = -2\\ y = -1\end{cases}.$$

Ví dụ 5.60. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\sqrt{3x}(1 + \dfrac{1}{x + y}) & = 2\\ \sqrt{7y}(1 - \dfrac{1}{x + y}) & = 4\sqrt{2}\end{cases}. \quad (7)$$

Với điều kiện $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x+y \neq 0 \end{cases}$ và từ hệ ta có $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ $(*)$. Do đó:

$$(7) \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{1}{x+y} &= \dfrac{2}{\sqrt{3x}} \\ 1-\dfrac{1}{x+y} &= \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+y} &= \dfrac{1}{\sqrt{3x}} - \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \\ 1 &= \dfrac{1}{\sqrt{3x}} + \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \quad (\alpha) \end{cases}.$$

Nhân từng vế các phương trình của hệ cuối ta được

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x+y} = \Big(\frac{1}{\sqrt{3x}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\Big).\Big(\frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\Big) \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{x+y} = \frac{1}{3x} - \frac{8}{7y} \\ \Leftrightarrow &\ 21xy = (x+y)(7y-24x) \\ \Leftrightarrow &\ (y-6x)(7y+4x) = 0 \\ \Leftrightarrow &\ y = 6x \quad (\text{do từ điều kiện } I(a,b) \text{ ta có } 7y+4x>0) \end{aligned}$$

Thay vào phương trình (α) ta được

$$\begin{aligned} (\alpha) &\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7.6x}} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{21x} = 2+\sqrt{7} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{11+4\sqrt{7}}{21} \Rightarrow y = \frac{22+8\sqrt{7}}{7}. \end{aligned}$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện $(*)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm

$$\begin{cases} x = \dfrac{11+4\sqrt{7}}{21} \\ y = \dfrac{22+8\sqrt{7}}{7} \end{cases}.$$

5.10.4 Sử dụng hình học, vectơ, toạ độ

Ta thường sử dụng các nhận xét sau:

Bổ đề 5.21. *1.* $|\vec{u}+\vec{v}| \leqslant |\vec{u}|+|\vec{v}|$ $(=: \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}\,)$

2. $|\vec{u}.\vec{v}| \leqslant |\vec{u}|.|\vec{v}| \quad (=: \vec{u} \| \vec{v})$
3. $\vec{u}^2 \geqslant 0 \quad (=: \vec{u} = \vec{0})$
4. *Với ba điểm A, B, C bất kỳ, luôn có: $AB + BC \geqslant AC \quad (=: \overrightarrow{A, B, C})$*
5. *Với ba điểm A, B, C bất kỳ, luôn có: $AB + BC \geqslant AC \quad (=: \overline{A, B, C}$ và C nằm ngoài đoạn AB).*

Ví dụ 5.61. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x + y + z & = 3 \quad (\alpha) \\ x^2 + y^2 + z^2 & = 3 \quad (\beta) \\ x^5 + y^5 + z^5 & = 3 \quad (\gamma) \end{cases}. \quad (8)$$

Đặt các vectơ với các toạ độ như sau:

$$\vec{u}(x; y; z); \ \vec{v}(y; z; x).$$

Ta có:

$$\vec{u}.\vec{v} = xy + yz + zx = \frac{1}{2}\Big((x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)\Big) = \frac{1}{2}(3^2 - 3) = 3$$

(sử dụng (α) và (β)).

Mà $\begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ |\vec{v}| = \sqrt{y^2 + z^2 + x^2} \end{cases} \Rightarrow |\vec{u}|.|\vec{v}| = x^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad$ (theo (β)).

Từ đó có $\qquad \vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}| \quad (*)$.

$$\begin{aligned} \text{Mà } (*) &\Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v} \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} \; (= \frac{x+y+z}{y+z+x} = 1) \\ &\quad \text{(theo tính chất tỷ lệ thức)} \\ &\Leftrightarrow x = y = z = 1 \quad (\text{do } (\alpha)\,) \end{aligned}$$

Nghiệm $x = y = z = 1$ thoả mãn (γ). Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm

$$x = y = x = 1.$$

Ví dụ 5.62. *Giải phương trình*

$$\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 + 2x + 10} = \sqrt{29}. \quad (9)$$

Đặt các vectơ: $\vec{u}(x-1;2)$; $\vec{v}(-1-x;3)$. Ta có

$$|\vec{u}| = \sqrt{(x-1)^2+2^2} = \sqrt{x^2-2x+5};\ |\vec{v}| = \sqrt{(-1-x)^2+3^2} = \sqrt{x^2+2x+10}.$$

Ngoài ra,

$$\vec{u}+\vec{v} = (-2;5) \Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2+5^2} = \sqrt{29}.$$

Nhưng ta có $|\vec{u}|+|\vec{v}| \geqslant |\vec{u}+\vec{v}| \Rightarrow VT(9) \geqslant VP(9)$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v} \Leftrightarrow \frac{x-1}{-x-1} = \frac{2}{3} > 0.$$

$$\text{Vậy } (9) \Leftrightarrow \frac{x-1}{-x-1} = \frac{2}{3} > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{1}{5}$.

Ví dụ 5.63. *Giải phương trình*

$$\sqrt{2x^2-2x+1} + \sqrt{2x^2-(\sqrt{3}-1)x+1} + \sqrt{x^2+(\sqrt{3}+1)x+1} = 3. \quad (10)$$

Nhân hai vế của phương trình (1) với $\sqrt{2}$ ta được phương trình mới tương đương:

$$\sqrt{4x^2-4x+2} + \sqrt{4x^2-2(\sqrt{3}-1)x+2} + \sqrt{2x^2+2(\sqrt{3}+1)x+2} = 3\sqrt{2}. \quad (10.1)$$

Đặt các vectơ

$$\vec{u}(1;1-2x);\ \vec{v}(1-\sqrt{3}x;x+1);\ \vec{w}(1+\sqrt{3}x;x+1).$$

Ta có

$$\begin{aligned}
|\vec{u}| &= \sqrt{1^2+(1-2x)^2} = \sqrt{4x^2-4x+2}\\
|\vec{v}| &= \sqrt{(1-\sqrt{3}x)^2+(x+1)^2} = \sqrt{4x^2-2(\sqrt{3}-1)x+2}\\
|\vec{u}| &= \sqrt{(1+\sqrt{3}x)^2+(x+1)^2} = \sqrt{2x^2+2(\sqrt{3}+1)x+2}\\
&\Rightarrow VT(10.1) = |\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}|.
\end{aligned}$$

Mà $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w} = (3;3) \Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2} = VP(10.1)$. Từ bất đẳng thức

$$|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}| \geqslant |\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|,\ (=: \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v} \uparrow\uparrow \vec{w}).$$

Ta được $VT(10.1) \geqslant VP(10.1)$. Vậy phải xảy ra dấu bằng, tức là

$$
\begin{aligned}
(10.1) &\Leftrightarrow \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v} \uparrow\uparrow \vec{w} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1-\sqrt{3}x} = \dfrac{1-2x}{x+1} \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{1-\sqrt{3}x} = \dfrac{1+\sqrt{3}x}{x+1} \geqslant 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{1-\sqrt{3}x} = \dfrac{1-2x}{x+1} \geqslant 0 \\ 1-2x = 1+\sqrt{3}x \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = 0.
\end{aligned}
$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 0$.

5.10.5 Sử dụng hàm số

Bổ đề 5.22. *Bằng cách xét tính đơn điệu hoặc lập bảng biến thiên của một hàm số cụ thể ta có thể lập được các phương trình có thể giải được bằng cách sử dụng hàm số đó.*

Ví dụ 5.64. *Giải phương trình*

$$x^2 - x - 1 = x^2 e^{x+1} - (x+1)e^{x^2}. \quad (11)$$

Ta sẽ giải bài toán tổng quát hơn:
Bài toán: Cho $g(x)$, $h(x)$ là hai hàm số bất kỳ. Khi đó

$$h(x).e^{g(x)} - g(x).e^{h(x)} = h(x) - g(x) \quad (I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x).h(x) = 0 \\ g(x) = h(x) \neq 0 \end{array}\right. .$$

Chứng minh: Xét hàm số $f(t) := \dfrac{e^t - 1}{t}$ xác định, liên tục với mọi $t \neq 0$. Có

$$f'(t) = \frac{te^t - e^t + 1}{t^2} := \frac{\varphi(t)}{t^2}.$$

Mà $\varphi'(t) = e^t + te^t - e^t = te^t$. $\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Lại có

$$\varphi''(t) = e^t(t+1) \Rightarrow \varphi''(0) = 1 > 0$$

nên hàm số $\varphi(t)$ đạt cực tiểu và cũng là giá trị nhỏ nhất $= 0$ tại $t = 0$. Nói cách khác $\varphi(t) > 0$, $\forall t \neq 0$. Từ đó có $f'(t) > 0$, $\forall t \neq 0$, tức là hàm số $f(t)$ đồng biến trong hai khoảng $(-\infty; 0)$; $(0; +\infty)$. Xét phương trình (I). Thấy ngay nếu $g(x).h(x) = 0$ thì (I) đúng. Nếu $g(x).h(x) \neq 0$, khi đó

$$(I) \Leftrightarrow \frac{e^{g(x)} - 1}{g(x)} = \frac{e^{h(x)} - 1}{h(x)} \quad (I.1).$$

Từ nhận xét rằng hàm số $f(t)$ đồng biến trong hai khoảng $(-\infty; 0)$; $(0; +\infty)$ và $\cosh x \to 0 \lim f(t) = 1$ ta được: Khi $t < 0$ ta có $f(t) < 1$, còn khi $t > 0$ thì $f(t) > 1$. Bởi vậy, nếu $(I.1)$ có nghiệm thì $g(x)$ và $h(x)$ phải cùng dấu vì nếu chúng trái dấu thì $(I.1)$ có một vế lớn hơn 1 còn vế kia nhỏ hơn 1. Thế nhưng nếu $g(x)$, $h(x)$ cùng dương thì $(I.1) \Leftrightarrow g(x) = h(x)$ (vì $f(t)$ đồng biến trong $(0; +\infty)$). Tương tự, nếu $g(x)$, $h(x)$ cùng âm thì ta cũng có $(I.1) \Leftrightarrow g(x) = h(x)$ (vì $f(t)$ đồng biến trong $(-\infty; 0)$). Tóm lại, trong mọi trường hợp, khi $g(x).h(x) \neq 0$ ta luôn có $(I.1) \Leftrightarrow g(x) = h(x)$. Từ các lập luận trên ta thu được kết quả của bài toán đã nêu trên.

Trở lại ví dụ đang xét, áp dụng bài toán với $g(x) = x^2$; $h(x) = x + 1$ ta được

$$(11) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2(x+1) = 0 \\ x^2 = x + 1 \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là

$$x = 0;\ x = 1;\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2};\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Ví dụ 5.65. *Cho hàm số* $f(x) = x^2 + bx + 1$ *với* $b \in (3; \frac{7}{2})$ $(*)$. *Giải bất phương trình*

$$f(f(x)) > x. \quad (12)$$

Ta sử dụng nhận xét sau: Nếu $f(x)$ là đa thức thì

$$f(f(x)) - x = (f(x) - x).T(x)$$

trong đó $T(x)$ là một đa thức nào đó. Ta có

$$\begin{aligned} (12) &\Leftrightarrow f^2(x) + bf(x) + 1 - x > 0 \\ &\Leftrightarrow f^2(x) - xf(x) + xf(x) - x^2 + bf(x) - bx + x^2 + bx + 1 - x > 0 \\ &\Leftrightarrow (f(x) - x)(f(x) + x + b + 1) > 0 \\ &\Leftrightarrow [x^2 + (b-1)x + 1][x^2 + (b+1)x + b + 2] > 0. \quad (12.1) \end{aligned}$$

Xét

$$\Delta_1 = (b-1)^2 - 4 = (b+1)(b-3) \Rightarrow \Delta_1 > 0,\ \forall b \in I(a,b).$$

$$\Delta_2 = (b+1)^2 - 4(b+2) = (b-1)^2 - 8 \Rightarrow \Delta_2 < 0,\ \forall b \in I(a,b).$$

Vậy $[x^2 + (b+1)x + b + 2] > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$\begin{aligned}(12.1) &\Leftrightarrow x^2 + (b-1)x + 1 > 0\\ &\Leftrightarrow x < \frac{1-b-\sqrt{(b+1)(b-3)}}{2} \ \vee\ x > \frac{1-b+\sqrt{(b+1)(b-3)}}{2}.\end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là

$$x < \frac{1-b-\sqrt{(b+1)(b-3)}}{2} \ \vee\ x > \frac{1-b+\sqrt{(b+1)(b-3)}}{2}.$$

Bài tập tương tự

1. Giải và biện luận bất phương trình

$$\sqrt{a^2 - x} + \sqrt{b^2 - x} > a + b.$$

2. Giải và biện luận phương trình

$$\sqrt{x^2 - 4a + 16} = 2\sqrt{x^2 - 2a + 4} + \sqrt{x}.$$

3. Chứng minh rằng phương trình

$$x^3 - 3x = 1 = 0$$

có ba nghiệm phân biệt.

4. Chứng minh rằng phương trình

$$m(x-1)^3(x-2) + 2x - 3 = 0$$

luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

5. Chứng minh rằng nếu $2a + 6b + 19c = 0$ thì phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

luôn có nghiệm $x \in [0; \frac{1}{3}]$.

6. Chứng minh rằng nếu

$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0 \quad (m > 0)$$

thì phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

luôn có nghiệm $x \in (0; 1)$.

7. Chứng minh rằng nếu $2a + 3b + 6c = 0$ thì phương trình

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$$

luôn có nghiệm $x \in (k\pi; \dfrac{\pi}{4} + k\pi)$.

8. Chứng minh rằng phương trình

$$x^3 + x - 1 = 0$$

luôn có nghiệm duy nhất $x = x_0$ thoả mãn $0 < x_0 < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

9. Tìm $n \in N^*$ sao cho có thể chọn được các số dương $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ để với mọi $k \leqslant n$, phương trình

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^2 = 0$$

luôn có đúng k nghiệm thực.

10. Xác định số nghiệm dương của phương trình

$$12x^5 + 6x^4 - 4x^3 - x - 34 = 0.$$

11. Chứng minh rằng với mọi giá trị của các hệ số có mặt, phương trình

$$x^{2n+1} + ax^{2n} + bx^{2n-1} + \cdots + cx + d = 0$$

luôn có ít nhất một nghiệm thực.

12. Giải phương trình

$$|\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 10x + 50}| = 5.$$

13. Giải phương trình
$$x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}.$$

14. Giải phương trình
$$\sqrt{x^3+x^2+4x+4}=x\sqrt{x}+2.$$

15. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4+y^4+z^4 &= 1 \\ x^2+y^2+2z^2 &= \sqrt{7} \end{cases}.$$

16. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x^2+4y^2+12x &= 7 \\ x^2+y^2+z^2 &= 2x+3z-3 \end{cases}.$$

17. Giải phương trình
$$4\sin^3 x=\sin x+\cos x.$$

18. Giải phương trình
$$(x^2+3x-4)^3+(2x^2-5x+3)^3=(3x^2-2x-1)^3.$$

19. Giải phương trình
$$3x^3-9x+3+\sqrt{3x^4+3x^3+3}=0.$$

20. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3+y^3 &= 1 \\ x^5+y^5 &= x^2+y^2 \end{cases}.$$

21. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3-y^3 &= 7 \\ xy(x-y) &= 2 \end{cases}.$$

22. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x-3y &= 4\dfrac{y}{x} \\ y-3x &= 4\dfrac{x}{y} \end{cases}.$$

23. Chứng minh rằng

$$h(x)e^{g(x)} - g(x)e^{h(x)} = h(x) - g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h(x).g(x) = 0 \\ h(x) = g(x) \neq 0 \end{array}\right. .$$

24. Giải phương trình

$$e^{\frac{1}{e}}\Big(|\sin x|^{\sin x} + |\cos x|^{\cos x}\Big) = \Big(|\sin x| + |\cos x|\Big)^2.$$

25. Giải và biện luận theo tham số $a; b$ phương trình sau

$$x = a - b(a - bx^2)^2.$$

26. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$x + 3(m - 3x^2)^2 = m.$$

Chương 6

Open Singapore Mathematical Olympiad

6.1 Open Singapore Mathematical Olympiad 2004

6.1.1 Senior Section

Tuesday, 3 June 2004 0930-1200

1. Find the smallest positive integer n such that $5^n > 1000n$.
(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 8
2. Find the value of

$$\frac{12000000}{300001^2 - 299999^2}$$

(A) 100000 **(B)** 10000 **(C)** 1000 **(D)** 100 **(E)** 10
3. Peter left home at 8 am to keep an appointment in Malacca 360 km away. If he drove at an average speed of V km/h, he would be a quarter hour late for his appointment. However, if he increased his average speed by 10 km/h, he would be a quarter hour early. What time is his appointment?
(A) 11:45 am **(B)** 12 noon **(C)** 12:15 pm **(D)** 12:30 pm **(E)** 12:45 pm

4. Find the sum of the last two digits of 9^{103}.
(A) 11 **(B)** 12 **(C)** 13 **(D)** 14 **(E)** 15

5. In the following diagram (Figure 1). $\triangle ABC$ is an equilateral triangle and $AC = AD$. Suppose that $\angle CDB = x^o$. Find the value of x.
(A) 24 **(B)** 30 **(C)** 36 **(D)** 40 **(E)** 45

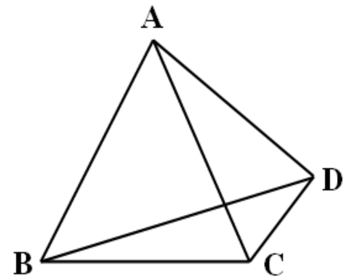


Figure 1

6. Consider the polynomial $f(x) = x^2 + ax + b$, where a, b are real constants. If $f(1) = 1$ and $f(2) = 2$, what is the value of $f(4)$?

(A) 6 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 9 **(E)** 10

7. How many real number x satisfy the equation

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 7x - 1} = \frac{x^2 - x - 6}{2x^2 + x + 15}?$$

(A) 4 **(B)** 3 **(C)** 2 **(D)** 1 **(E)** 0

8. Initilly both John and Peter have \$100 each. On the first day, John gives \$0.10 to Peter. On the second day, Peter gives \$0.30 to John. On the third day, John gives \$0.50 to Peter and so on. In particular, the person who was given money on the previous day gives \$0.20 more than what he got the previous day to the other person. How much money will John have at the end of the 101^{st} day?

(A) \$79.90 **(B)** \$89.90 **(C)** \$99.90 **(D)** \$109.90 **(E)** \$119.90

9. The diagram below shows a rectangle $ABCD$ and 2 small identical circles of radius 5 cm and a big circle of radius 8 cm. As shown in the diagram (Figure 2), the sides of the rectangle are tangents to the circles, and the two small circles touch the big circle at 2 point. Suppose $AB = 34cm$, and the area of the rectangle $ABCD$ is $x\ cm^2$. Find the value of x.

(A) 578 **(B)** 612 **(C)** 646 **(D)** 680 **(E)** 714

10. Let n be an integer. If the second last digit of n^2 is odd, what is the last digit of n^2?

(A) 1 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** none of the above.

11. Suppose x and y are two real numbers such that $x - y = 8$ and $x^2 + y^2 = 194$. Find the value of xy.

12. Suppose that $|x + y - 2| + (x - y + 1)^2 = 0$. Find the value of $y - x$.

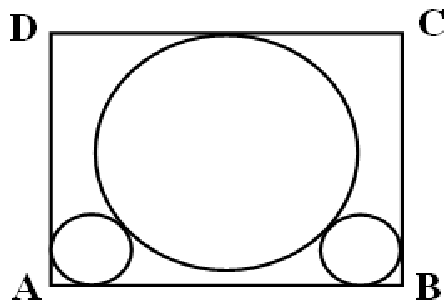


Figure 2

13. When 5 new classrooms were built in a school, the average class size was reduced by 6. When another 5 classrooms were built, the average class size was reduced by another 4. If the number of students in the school remained the same throughout, how many students were there in the school?

14. A book has n pages. The book is numbered from 1 to page n. Mary added up all the page number and got the sum equal to 3250. However she added up the numbers wrongly because there is a particular page number that she added up twice. What is the page number that she counted twice in her calculation?

15. In the diagram below (Figure 3), $\triangle ABC$ is a right-angled triangle with right angle at B. A circle of radius r cm is inscribed inside the triangle so that the three sides of the triangle are tangents to the cicle. Suppose $AB = 18$ cm and $BC = 24$ cm. Find the value of r.

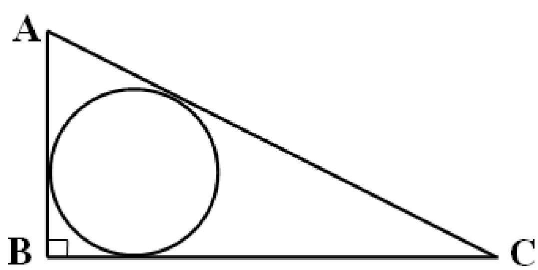


Figure 3

16. Find the largest prime factor of 99999744.

17. Suppose that $sec^6 x = 49 + tan^6 x$ and $0^o < x < 90^o$. Find the value of $secx$ $tanx$.

18. What is the product of the last two digits of 2004^{2004}?

19. Simplify $144(\sqrt{7+3\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}})$.

20. Suppose α and β are two angles such that

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\alpha\sin\beta=3.$$

Find the value of $(1+\cos\alpha)^2+(1+\cos\beta)^2$.

21. In the diagram below (Figure 4), $\angle ABC=100^o$, $AM=AN$ and $CN=CP$. Suppose that $\angle MNP=x^o$. Find the value of x.

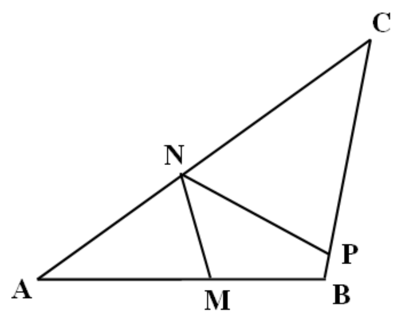


Figure 4

22. Find the two-digit integer N such that $10<N<40$, and the sum of the digits of N is equal to the sum of the digits of the product when N is multiplied by any positive one-digit integer.

23. In the diagram below (Figure 5), $ABCDEF$ is a regular hexagon with area $54cm^2$. Suppose the area of the hexagonal region common to both triangles $\triangle ACE$ and $\triangle BDF$ is Ycm^2. Find the value of Y.

24. Let x,y be real numbers such that $x+y+|x-y|=-148$. Find the smallest possible value of xy.

25. Find the value of

$$\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ+\cdots+\sin^2 360^\circ.$$

26. Suppose a and b are the roots of the quadratic equation $x^2+(\sin 10^\circ)x+1=0$, and c and d are the roots of the equation $x^2+(\cos 10^\circ)x-1=0$. Find the value of

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}.$$

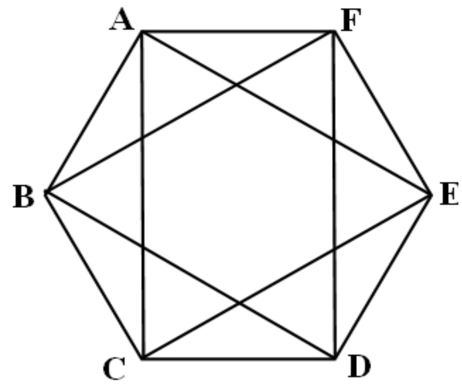


Figure 5

27. Simplify

$$\sqrt{log_2 3 \times log_2 12 \times log_2 48 \times log_2 192 + 16} - log_2 12 \times log_2 48 + 10.$$

28. In the diagram below (Figure 6), E and F lie to the sides BC and CD of the rectangle $ABCD$ respectively. Suppose that $AE = 16cm, EF = 12cm, AF = 20cm$, and the area of the trapezium $ABCF$ is xcm^2. Find the largest possible value of x.

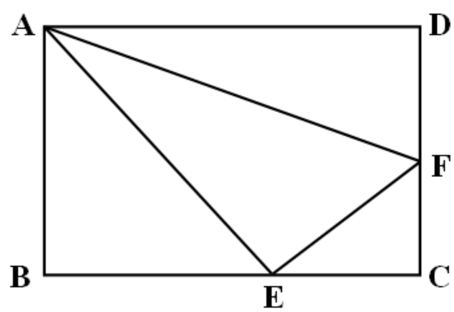


Figure 6

29. Five cards are numbered 1, 2, 3, 6, 6 respectively. Suppose those cards with the number 6 can also be used to represent the number 9. Find the number of positive integers that can be formed with some or all of the cards.

30. In the diagram below (Figure 7), E is the midpoint of BC, and M is the midpoint of AC. Suppose that D is a point on AE such that $AD = BD = CD = 169cm$, and $EM = 156cm$. If the length of DE is xcm, find the value of x.

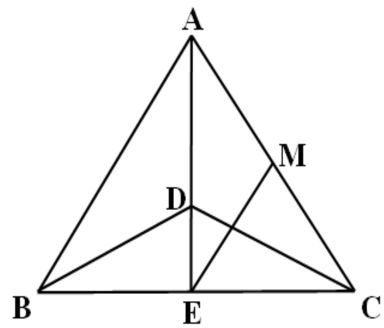


Figure 7

31. The diagram below shows and 8×8 square board. Find the number of squares which exist as part of the square board. (As an example, 14 squares exist as part of a 3×3 square board).

32. Find the number of positive integers x such that $4x^4 + 1$ is prime.

33. Find the number of integers N such that $1 \leq N \leq 2004$ and N can be expressed as the difference between the squares of two integers.

34. Find the sum of the squares of all real roots of the equation

$$x^4 + 4 + 11x^2 = 8(x^3 + 2x).$$

35. How many real solutions does the following system of simultaneous equations have?

$$\begin{cases} 8(x^3 + y^3 + z^3) & = 73 \\ 2(x^2 + y^2 + z^2) & = 3(xy + yz + zx) \\ xyz & = 1 \end{cases}$$

6.2 Open Singapore Mathematical Olympiad 2005

6.2.1 Senior Section

Tuesday, 31 May 2005 0930-1200

1. What is the smallest positive prime factor of the integer $2005^{2007} + 2007^{2005}$.

(A) 5 **(B)** 7 **(C)** 2 **(D)** 11 **(E)** 3

2. What is the value of
$$\frac{2005^2+2+1995^2}{800}$$
(A) 20000 **(B)** 2000 **(C)** 200000 **(D)** 2000000 **(E)** None of the above

3. Let p be a real number such that the equation $2y^2-8y=p$ has only one solution. Then

(A) $p<8$ am **(B)** $p=8$ **(C)** $p>-8$ **(D)** $p=-8$ **(E)** $p<-8$

4. What is the sum of the last two digits of the integer $1!+2!+3!+\cdots+2005!$?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 7

5. $5002^{2005log_{5002}2005}$ is equal to

(A) 1 **(B)** 2005^{2005} **(C)** 5002^{2005} **(D)** 2005^{5002} **(E)** 5002^{5002}

6. In the diagram, P,Q and E are three point on the circle whose centre is O. The line PO and QR are produced to meet at S. Suppose that $RS=OP$, and $\angle PSQ=12^\circ$ and $\angle POQ=x^\circ$. Find the value of x.

(A) 36 **(B)** 42 **(C)** 48 **(D)** 54 **(E)** 60

7. Let x and y be positive real numbers. What is the smallest possible value of $\frac{16}{x}+\frac{108}{y}+xy$?

(A) 16 **(B)** 18 **(C)** 24 **(D)** 30 **(E)** 36

8. In the Cartesian plane, the graph of the function $y=\frac{2x-1}{x-1}$ is reflected about the line $y=-x$. What is the equation for the graph of the image of the reflection?

(A) $y=\frac{x-1}{2x+1}$ **(B)** $y=\frac{x-1}{x+2}$ **(C)** $y=\frac{2x-1}{x+1}$ **(D)** $y=\frac{x+1}{x-2}$ **(E)** $y=\frac{-x-1}{2+x}$

9. Simplify $\sqrt{2\Big(1+\sqrt{1+\big(\frac{x^4-1}{2x^2}\big)^2}\Big)}$, where x is any positive real number.

(A) $\frac{x^2+1}{\sqrt{2}x}$ **(B)** $\frac{x^2+1}{x}$ **(C)** $\sqrt{\frac{x^2+1}{2x^2}}$ **(D)** x^2+1 **(E)** $\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}$

10. Let x and y be real numbers such that
$$x^2+y^2=2x-2y+2.$$
What is the largest possible value of x^2+y^2?

(A) $10+8\sqrt{2}$ **(B)** $8+6\sqrt{2}$ **(C)** $6+4\sqrt{2}$ **(D)** $4+2\sqrt{2}$ **(E)** None of the above.

11. Find the greatest integer less than $(2+\sqrt{3})^4$.

12. $\triangle ABC$ is a triangle such that $\angle C = 90°$. Suppose $AC = 156cm$, $AB = 169cm$ and the perpendicular distance from C to AB is xcm. Find the value of x.

13. Find the sum of all the real numbers x that satisfy the equation

$$(3^x - 27)^2 + (5^x - 625)^2 = (3^x + 5^x - 625)^2.$$

14. Three positive integers are such that they differ from each other by at most 6. It is also known that the product of these integers is 2808. What is the smallest integer among them?

15. Simplify

$$\frac{2005^2(2004^2-2003)}{(2004^2-1)(2004^3+1)} \times \frac{2003^2(2004^2+2005)}{2004^3-1)}.$$

16. Consider the function $f(x) = \dfrac{1}{3^x+\sqrt{3}}$. Find the value of

$\sqrt{3}[f(-5)+f(-4)+f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)$

17. Let A and B be two positive four-digit integer such that $A \times B = 16^5 + 2^{10}$. Find the value of $A+B$.

18. A triangle $\triangle ABC$ is inscribed in a circle of radius $4cm$. Suppose that $\angle A = 60°$, $AC - AB = 4cm$, and the area of $\triangle ABC$ is xcm^2. Find the value of x^2.

19. Let a, b and c be real numbers such that

$$a = 8 - b \text{ and } c^2 = ab - 16.$$

Find the value of $a+c$.

20. Let $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ be positive integer such that

$$a_1^2 + (2a_2)^2 + (3a_3)^2 + (4a_4)^2 + (5a_5)^2 + (6a_6)^2 + (7a_7)^2 + (8a_8)^2 = 204.$$

Find the value of $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a + 8$.

21. Find the value of the positive integer n if

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=10.$$

22. Let A and B be two positive prime integers such that

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{192}{2005^2-2004^2}.$$

Find the value of B.

23. In $\triangle ABC, AB : AC = 4 : 3$ and M is the midpoint of BC. E is a point on AB and F is a point on AC such that $AE : AF = 2 : 1$. It is also given that EF and AM intersect at G with $GF = 72cm$ and $GE = xcm$. Find the value of x.

24. It is given that $x = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$. Find the value of

$$x^6 - 2\sqrt{3}x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x - \sqrt{3}.$$

25. Let a, b and c be the lengths of the three sides of a triangle. Suppose a and b are the roots of the equation

$$x^2 + 4(c+2) = (c+4)x,$$

and the largest angle of the triangle is x^o. Find the value of x.

26. Find the largest real number x such that

$$\frac{x^2+x-1+|x^2-(x-1)|}{2}=35x-250.$$

27. How many ways can the word MATHEMATICS be partitioned so that each part contains at least one vowel? For example, MA-THE-MATICS, MATHE-MATICS, MATHEM-A-TICS and MATHEMATICS are such partitions.

28. Consider a sequence of real numbers $\{a_n\}$ defined by

$$a_1 = 1 \text{ and } a_{n+1} = \frac{a_n}{1+na_n} \text{ for } n \geq 1.$$

Find the value of $\dfrac{1}{a_{2005}} - 2000000$.

29. For a positive integer k, we write

$$(1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+kx) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k,$$

where $a_0, a_1, \dots, a_k$ are the coefficients of the polynomial. Find the smallest possible value of k if $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}$ is divisible by 2005.

30. Find the largest positive number x such that

$$(2x^3 - x^2 - x + 1)^{1+\dfrac{1}{2x+1}} = 1.$$

31. How many ordered pairs of integer (x, y) satisfy the equation

$$x^2 + y^2 = 2(x + y) + xy?$$

32. Find the number of ordered 7-tuples of positive integers $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ that have both of the following properties:

i) $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ for $1 \le n \le 5$, and

ii) $a_6 = 2005$.

33. Let n be a positive integer such that one of the roots of the quadratic equation

$$4x^2 - (4\sqrt{3} + 4)x + \sqrt{3}n - 24 = 0$$

is an integer. Find the value of n.

34. Consider the simultaneous equations

$$\begin{cases} xy + xz = 255 \\ xz - yz = 224. \end{cases}$$

Find the number of ordered triples of positive integers (x, y, z) that satisfy the above system of equations.

35. Find the total number of positive integers N satisfying both of the following properties:

i) N is divisible by 7, and

ii) when the first and last digits of N are interchanged, the resulting positive integer is also divisible by 7. (Note that the resulting integer need not be a four-digit number).

6.3 Open Singapore Mathematical Olympiad 2006

6.3.1 Junior Section

Tuesday, 30 May 2006 0930-1200

1. What are the last two digits of $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 2004 \times 2005 \times 2006$?
(A) 00 **(B)** 20 **(C)** 30 **(D)** 50 **(E)** 60

2. Let x be a real number. What is the minimum value of $x^2 - 4x + 3$?
(A) -3 **(B)** -1 **(C)** 0 **(D)** 1 **(E)** 3

3. James calculates the sum of the first n positive integers and finds that the sum is 5053. If he has counted one integer twice, which one is it?
(A) 1 am **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

4. Which of the following is a possible number of diagonals of a convex polygon?
(A) 21 **(B)** 32 **(C)** 45 **(D)** 54 **(E)** 63

5. What is the largest positive integer n satisfying $n^{200} < 5^{300}$?
(A) 9 **(B)** 10 **(C)** 11 **(D)** 12 **(E)** 13

6. In the diagram shows (Figure 1) an equilateral triangle ADE inside a square $ABCD$. What is the value of

$$\frac{area\ of\ \triangle ADE}{area\ of\ \triangle DEC}?$$

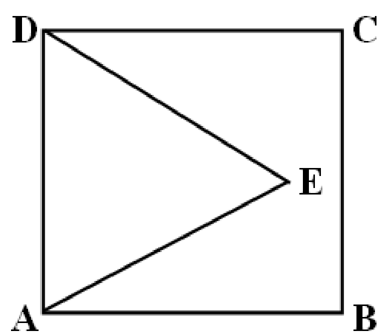


Figure 1

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(D)** $\sqrt{3}$ **(E)** 2

7. What is the value of

$$(x+1)(x+2006)\left[\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \cdots + \frac{1}{(x+2005)(x+2006)}\right]?$$

(A) $x + 2004$ **(B)** 2005 **(C)** $x + 2006$ **(D)** 2006 **(E)** 2007

8. Suppose that only one of the following pairs (x, y) yields the positive integer $\sqrt{x^2 + y^2}$. Then

(A) x=25530, y=29464 **(B)** x=37615, y=26855 **(C)** x=15123, y=32477 **(D)** x=28326, y=28614 **(E)** x=22536, y=27462.

9. The value of

$$\frac{1}{3+1} + \frac{2}{3^2+1} + \frac{4}{3^4+1} + \frac{8}{3^8+1} + \cdots + \frac{2^{2006}}{3^{2^{2006}}+1}$$

is:

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{2} - \frac{2^{2005}}{3^{2^{2005}} - 1}$ **(C)** $\frac{1}{2} - \frac{2^{2006}}{3^{2^{2006}} - 1}$ **(D)** $\frac{1}{2} - \frac{2^{2007}}{3^{2^{2007}} - 1}$ **(E)** None of the above.

10. Suppose that p and q are prime numbers and they are roots of the equation $x^2 - 99x + m = 0$ for some m. What is the value of $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$?

(A) 9413 **(B)** $\frac{9413}{194}$ **(C)** $\frac{9413}{99}$ **(D)** $\frac{9413}{97}$ **(E)** None of the above.

11. What is the remainder when $2006 \times 2005 \times 2004 \times 2003$ is divided by 7?

12. If $\frac{139}{22} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}$, where a, b and c are positive integers, find the value of $a + b + c$.

13. Let x be a positive real number. Find the minimum value of $x + \frac{1}{x}$.

14. Find the value (in the simplest form) of $\sqrt{45 + 20\sqrt{5}} + \sqrt{45 - 20\sqrt{5}}$.

15. Let n be the number

$$(\underbrace{999\,999\,999\ \ldots\ 999}_{2006\ 9's})^2 - (\underbrace{666\,666\,666\ \ldots\ 666}_{2006\ 6's})^2$$

Find the remider when n is divided by 11.

16. Given that $w > 0$ and that $w - \frac{1}{w} = 5$, find the value of $(w + \frac{1}{w})^2$.

17. N pieces of candy are made and packed into boxes, with each box containing 45 pieces. If N is a non-zero perfect cube and 45 is one of its factors, what is the least possible number of boxes that can be packed?

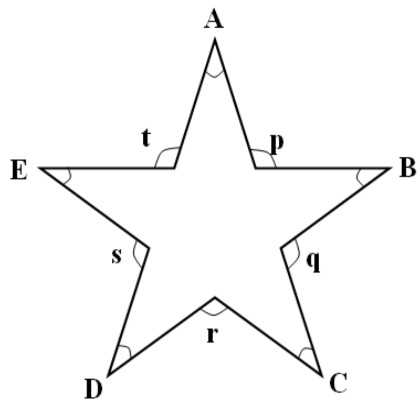


Figure 2

18. Consider the following "star" figure (Figure 2).

Given that $\angle p+\angle q+\angle r+\angle s+\angle t=500^\circ$ and $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=x^\circ$, find the value of x.

19. Given that n is a positive integers and $S=1+2+3+\cdots+n$. The units digit of S cannot be some numbers. Find the sum of these numbers.

20. Let $m=76^{2006}-76$. Find the remainder when m is divided by 100.

21. Let $ABCDEF$ be a hexagon such that the diagonals AD, BE and CF intersect at the point O, and the area of the triangle formed by any three adjacent points is 2 (for example, area of $\triangle BCD$ is 2). Find the area of the hexagon.

22. Let C be a circle with radius 2006. Suppose n points are placed inside the circle and the distance between any two points exceed 2006. What is the largest possible n?

23. Let x and y be positive real numbers such that $x^3+y^3+\dfrac{1}{27}=xy$. Find the value of $\dfrac{1}{x}$.

24. In this question, $S_{\triangle XYZ}$ denotes the area of $\triangle XYZ$. In the following figure (Figure 3), if $DE//BC$, $S_{\triangle ADE}=1$ and $S_{\triangle ADC}=4$, find $S_{\triangle DBC}$.

25. What is the product of the real roots of the equation

$$\frac{x^2+90x+2027}{3}=\sqrt{x^2+90x+2055}\ ?$$

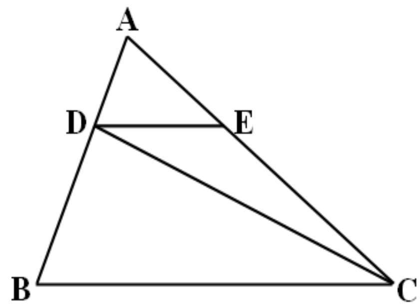


Figure 3

26. There are four piles of stones: One with 6 stones, two with 8, and one with 9. Five players numbered 1, 2, 3, 4 and 5 take turns, in the order of their numbers, choosing one of the piles and dividing it into two smaller piles. The loser is the player who cannot do this. State the number of the player who loses.

27. Let $m \neq n$ be two real numbers such that $m^2 = n + 2$ and $n^2 = m + 2$. Find the value of $4mn - m^3 - n^3$.

28. There are a few integer values of a such that $\dfrac{a^2 - 3a - 3}{a - 2}$ is an integer. Find the sum of all these integer values of a.

29. How may pairs of integers (x, y) satisfy the equation

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{200600}\,?$$

30. The '4' button on my calculator is spoilt, so I cannot enter numbers which contain the digit 4. Moreover, my calculator does not display the digit 4 if 4 is part of an answer either. Thus I cannot enter the calculation 2×14 and do not attempt to do so. Also, the result of multiplying 3 by 18 is displayed as 5 instead of 54 and the result of multiplying 7 by 7 is displayed as 9 instead of 49. If I multiply a positive one-digit number by a positive two-digit number on my calculator and it displays 26, how many possibilities could I have multiplied?

31. The following rectangle is formed by nine pieces of squares of different sizes. Suppose that each side of the square E is of length 7 cm. Let the area of the rectangle be xcm^2. Find the value of x.

32. Suppose that n is a positive integer, and a, b are positive real numbers with $a + b = 2$. Find the smallest possible value of

$$\frac{1}{1 + a^n} + \frac{1}{1 + b^n}$$

33. What is the largest positive integer n for which $n^3 + 2006$ is divisible by $n + 26$?

34. Suppose that the two roots of the equation

$$\frac{1}{x^2 - 10x - 29} + \frac{1}{x^2 - 10x - 45} - \frac{2}{x^2 - 10x - 69} = 0$$

are α and β. Find the value of $\alpha + \beta$.

35. Suppose that a, b, x and y are real numbers such that

$$ax + by = 3,\ ax^2 + by^2 = 7,\ ax^3 + by^3 = 16 \text{ and } ax^4 + by^4 = 42.$$

Find the value of $ax^5 + by^5$.

6.3.2 Senior Section

Tuesday, 30 May 2006 0930-1200

1. Let $p = 2^{3009}$, $q = 3^{2006}$ and $r = 5^{1003}$. Which of the following statements is trues?
(A) $p < q < r$ **(B)** $p < r < q$ **(C)** $q < p < r$ **(D)** $r < p < q$
(E) $q < r < p$

2. Which of the following numbers is the largest?
(A) 30^{20} **(B)** 10^{30} **(C)** $30^{10} + 20^{20}$ **(D)** $(30 + 10)^{20}$ **(E)** $(30 \times 20)^{10}$

3. What is the last digit of the number

$$2^2 + 20^{20} + 200^{200} + 2006^{2006}?$$

(A) 2 **(B)** 4 **(C)** 6 **(D)** 8 **(E)** 0

4. Let x be a number such that $x + \frac{1}{x} = 4$. Find the value of $x^3 + \frac{1}{x^3}$.
(A) 48 **(B)** 50 **(C)** 52 **(D)** 54 **(E)** None of the above

5. Consider the two curves $y = 2x^3 + 6x + 1$ and $y = -\frac{3}{x^2}$ in the Cartesian plane. Find the number of distint points at which these two curves intersect.
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 0 **(E)** 5

6. In the following figure, AB is the diameter of a circle with center at O. It is given that $AB = 4\,cm$, $BC = 3\,cm$, $\angle ABD = \angle DBE$. Suppose the area of the quadrilateral $ABCD$ is $x\,cm^2$ and the area of ΔDCE is $y\,cm$. Find the value of the ratio $\dfrac{x}{y}$.

(A) 7 **(B)** 8 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** 6

7. Five students A, B, C, D and E form a team to take part in a 5-leg relay competition. If A cannot run the first leg and D cannot run the last leg, how many ways can we arrange them to run relay?

(A) 74 **(B)** 76 **(C)** 78 **(D)** 80 **(E)** 82

8. There are n balls in a box, and the balls are numbered $1, 2, 3, \ldots, n$, respectively. One of the balls is removed from the box, and it turns out that the sum of the numbers on the remaining balls in the box is 5048. If the number on the ball removed from the box is m, find the value of m.

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 5

9. Suppose a, b, c are real numbers such that $a+b+c=0$ and $abc=-100$. Let $x = \frac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$. Which of the following statements is true?

(A) $x > 0$ **(B)** $x = 0$ **(C)** $-1 < x < 0$ **(D)** $-100 < x < -1$

(E) $x < -100$

10. Let a and b be positive real numbers such that

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} = 0.$$

Find the value of $ig(\dfrac{b}{a} + \dfrac{a}{b}ig)^2$.

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 8

11. Find the value of

$$\frac{2006^2 - 1994^2}{1600}.$$

12. Find the smallest natural number n which satisfies the inequality

$$2006^{1003} < n^{2006}.$$

13. Find the smallest integer greater than $(1+\sqrt{2})^3$.

14. Find the number of pairs of positive integers (x, y) which satisfy the equation

$$20x + 6y = 2006.$$

15. ΔABC is a right-angled triangle with $\angle ABC = 90^0$. A circle C_1 is drawn with AB as diameter, and another circle C_2 is drown with BC as diameter. The circle C_1 and C_2 meet at the points B and P. If $AB = 5\,cm$, $BC = 12\,cm$ and $BP = x\,cm$, find the value of $\dfrac{2400}{x}$.

16. Evaluate

$$\frac{1}{\log_2 12\sqrt{5}} + \frac{1}{\log_3 12\sqrt{5}} + \frac{1}{\log_4 12\sqrt{5}} + \frac{1}{\log_5 12\sqrt{5}} + \frac{1}{\log_6 12\sqrt{5}} + \frac{1}{\log_{12} 12\sqrt{5}}.$$

17. In the diagram below, $ABCD$ is a square. The points A, B and G are collinear. The line segments AC and DG intersect at E, and the line segments DG and BC intersect at F. Suppose that $DE = 15\,cm$, $EF = 9\,cm$, and $FG = x\,cm$. Find the value of x.

18. Find the sum of the coefficients of the polynomial

$$(4x^2 - 4x + 3)^4(4 + 3x - 3x^2)^2.$$

19. Different positive 3-digit integers are formed from the five digits $1, 2, 3, 5, 7$, and repetitions of the digits are allowed. As an example, such positive 3-digit integers include 352, 577, 111, etc. Find the sum of all the distinct positive 3-digit integers formed in this way.

20. Find the value of $\frac{1}{\sin 10^0} - 4\sin 70^0$.

21. Let $w = 1 + \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{8} + \sqrt[5]{16}$. Find the value of $ig(1 + \dfrac{1}{w}ig)^{30}$.

22. Suppose A and B are two angles such that

$$\sin A + \sin B = 1 \text{ and } \quad \cos A + \cos B = 0.$$

Find the value of $12\cos 2A + 4\cos 2B$.

23. Consider the 800-digit integer

$$234523452345\cdots2345.$$

The first m digits and the last n digits of the above integer are crossed out so that the sum of the remaining digits is 2345. Find the value of $m + n$.

24. Let a and b be two integers. Suppose that $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ is a root of equation $x^2+ax+b=0$. Find the value of $b-a$.

25. Suppose x and y are integers such that

$$(x-2004)(x-2006)=2^y.$$

Find the largest possible value of $x+y$.

26. In the following diagram, $\angle ACB = 90^0$, $DE \perp BC$, $BE = AC$, $BD = \dfrac{1}{2}\,cm$, and $DE + BC = 1\,cm$. Suppose $\angle ABC = x^0$. Find the value of x.

27. If

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}}$$

for all positive integers x, find the value of

$$f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(997)+f(999).$$

28. In the figure below, S is a point on QR and U is a point on PR. The line segments PS and QU intersect at the point T. It is given that $PT = TS$ and $QS = 2RS$. If the area of ΔPQR is $150\,cm^2$ and the area of ΔPSU is $x\,cm^2$. Find the value of x.

29. Let a and b be two integers. Suppose x^2-x-1 is a factor of the polynomial ax^5+bx^4+1. Find the value of a.

30. If $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$, find the value of $24(\sin^3\theta-\cos^3\theta)^2$.

31. How many ordered pairs of positive integers (x, y) satisfy the equation

$$x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\sqrt{2006xy}-\sqrt{2006x}-\sqrt{2006y}-2006=0?$$

32. Find the remainder when the integer

$$1\times 3\times 5\times 7\times\cdots\times 2003\times 2005$$

is divided by 1000.

33. Let $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ be a function, where $\mathbb{N}$ denotes the set of natural numbers, and $\mathbb{Q}$ denotes the set of rational numbers. Suppose that $f(1)=\dfrac{3}{2}$, and

$$f(x+y)=ig(1+\frac{y}{x+1}ig)f(x)+ig(1+\frac{x}{y+1}ig)f(y)+x^2y+xy+xy^2$$

for all natural numbers x, y. Find the value of $f(20)$.

34. Suppose $x_0, x_1, x_2, \ldots$ is a sequence of numbers such that $x_0 = 1000$, and

$$x_n = -\frac{1000}{n}(x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})$$

for all $n \geq 1$. Find the value of

$$\frac{1}{2^2}x_0 + \frac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_3 + 2^2x_4 + \cdots + 2^{997}x_{999} + 2^{998}x_{1000}.$$

35. Let p be an integer such that both roots of the equation

$$5x^2 - 5px + (66p - 1) = 0$$

are positive integers. Find the value of p.