

ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 6 – SỐ CHÍNH PHƯƠNG

CHỦ ĐỀ 1: ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA:

Số chính phương là bình phương đúng của một số nguyên.

Ví dụ : 4 và 6 là hai số chính phương vì $4 = 2^2$; $16 = 4^2$

II. CÁC TÍNH CHẤT CỦA SỐ CHÍNH PHƯƠNG:

1. Số chính phương chỉ có thể có chữ số tận cùng là 0; 1; 4; 5; 6; 9, không thể có chữ số tận cùng là 2; 3; 7; 8

⇒ Để chứng minh một số không phải số chính phương ta chỉ ra số đó có hàng đơn vị là 2; 3; 7; 8

2. Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với mũ chẵn, không chứa TSNT với mũ lẻ.

Từ tính chất 2 ta có các hệ quả:

- a) Số chính phương chia hết cho 2 thì phải chia hết cho 4.
- b) Số chính phương chia hết cho 3 thì phải chia hết cho 9.
- c) Số chính phương chia hết cho 5 phải chia hết cho 25.
- d) Số chính phương chia hết cho 8 thì phải chia hết cho 16.
- e) Tích của các số chính phương là một số chính phương.
- f) Với A là số chính phương và $A = a.b$, nếu a là số chính phương thì b cũng là số chính phương.

⇒ Để chứng minh một số không phải SCP ta chỉ ra số đó khi phân tích ra TSNT thì có số mũ lẻ.

3. Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng $3n$ hoặc $3n+1$ ($a^2 \equiv 0 \pmod{3}$, $a^2 \equiv 1 \pmod{3}$), không có SCP nào có dạng $3n+2$ ($n \in \mathbb{N}$).

4. Số chính phương chỉ có thể có một trong hai dạng $4n$ hoặc $4n+1$ ($a^2 \equiv 0 \pmod{4}$, $a^2 \equiv 1 \pmod{4}$), không có SCP nào có dạng $4n+2$ hoặc $4n+3$ ($n \in \mathbb{N}$).

5. Số các ước số của một số chính phương là số lẻ, ngược lại một số có số lượng các ước là lẻ thì đó là số chính phương.

6. Nếu A số một số chính phương, A chia hết cho P và P là một số nguyên tố thì A chia hết cho P^2 .

7. Nếu a^2 chia hết cho P và P là một số nguyên tố thì a chia hết cho P .

8. Hai số chính phương a^2 và $(a+1)^2$ được gọi là hai số chính phương liên tiếp. Giữa hai số chính phương liên tiếp không có số chính phương nào.

Nghĩa là: nếu $n^2 < A < (n+1)^2$ thì A không là số chính phương.

9. Nếu tích $a.b$ là một số chính phương và $(a,b)=1$ thì hai số a và b đều là các số chính phương

10. Số chính phương biểu diễn được thành tổng các số lẻ : $1+3=2^2$; $1+3+5=3^2$; $1+3+5+7=4^2$...

Chứng minh:

Giả sử: $A = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k+1)$ với $k \in \mathbb{N}$

Ta có từ 1 đến $2k+1$ có $\frac{(2k+1)-1}{2} + 1 = k+1$ số hạng

$$\Rightarrow A = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k+1) = \frac{(2k+1+1)(k+1)}{2} = (k+1)^2 \quad (\text{đpcm})$$

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

$$n \in \left\{ 11; 101; 1001; 10001; \underbrace{100\dots01}_{k \text{ chữ số } 0} \right\}$$

Bài 1: Cho các số . Hãy tìm các số chính phương n^2 .

Lời giải:

Ta có: $11^2 = 121$

$$101^2 = 10201$$

$$1001^2 = 1002001$$

$$10001^2 = 100020001$$

$$\underbrace{100\dots01^2}_{k \text{ chữ số } 0} = \underbrace{100\dots0200\dots01}_{k \text{ chữ số } 0}$$

Tổng quát: $\underbrace{100\dots01^2}_{k \text{ chữ số } 0} = \underbrace{100\dots0200\dots01}_{k \text{ chữ số } 0}$

Bài 2: Các biểu thức số sau có phải số chính phương hay không?

a) $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{20}$

b) $B = 11 + 11^2 + 11^3$

c) $C = 10^{10} + 8$

d) $D = 100! + 7$

e) $E = 10^{10} + 5$

f) $F = 10^{100} + 10^{50} + 1$

g) $G = 2004000$

h) $H = 2001^{2001}$

Lời giải

a) Ta có: $3^n : 9$ với mọi $n \geq 2$ nên $(3^2 + 3^3 + \dots + 3^{20}) : 9$

Suy ra $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{20}$ chia cho 9 dư 3.

Vì A chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên A không phải là số chính phương.

b) Ta có: $B = 11 + 11^2 + 11^3$

$$B = 11(1 + 11 + 11^2)$$

$$B = 11.133$$

$$B = \overline{\dots 3}$$

$\Rightarrow B$ có chữ số tận cùng là 3 nên B không phải là số chính phương.

c) Ta có $10^{10} + 8$ có chữ số tận cùng là 8 nên không phải là số chính phương.

d) Ta có $100! + 7$ có chữ số tận cùng là 7 nên không phải là số chính phương.

- e) Ta có $10^{10} + 5$ có cặp chữ số tận cùng là 05 chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25 nên không phải là số chính phương.
- f) Ta có $10^{100} + 10^{50} + 1$ có tổng các chữ số là 3 chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên không phải là số chính phương.
- g) Ta có số 2004000 có tận cùng là 3 chữ số 0
 $\Rightarrow G$ không tận cùng là chẵn lần chữ số 0
 $\Rightarrow G$ không là số chính phương.
- h) Ta có: $H = 2001^{2001} = 2001^{2000} \cdot 2001 = (2001^{1000})^2 \cdot 2001$
 $(2001^{1000})^2$ là số chính phương, ta xét số 2001:
 Vì 2001 có tổng các chữ số là 3 nên số 2001 chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9.
 $\Rightarrow$ số 2001 không là số chính phương.
 Vậy H không là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh rằng:

- a) Một số chính phương khi chia cho 3 chỉ có thể có số dư là 0 hoặc 1.
 b) Một số chính phương khi chia cho 4 chỉ có thể có số dư là 0 hoặc 1.
 c) Một số chính phương khi chia cho 5 chỉ có thể có số dư là 0 hoặc 1 hoặc 4.
 d) Một số chính phương lẻ khi chia cho 8 chỉ có số dư là 1.

Lời giải:

- a) Ta xét các trường hợp của n khi chia cho 3:

$$\begin{aligned}
 &+ \text{ Nếu } n = 3k \Rightarrow n^2 = 9k^2 : 3 \\
 &\quad \Rightarrow n^2 = 3k^2 + 6k + 1 \\
 &+ \text{ Nếu } n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3k^2 + 2k + 1 \Rightarrow n \text{ chia } 3 \text{ dư } 1 \\
 &\quad \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n \text{ chia } 3 \text{ dư } 1 \\
 &+ \text{ Nếu } n = 3k + 2 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n \text{ chia } 3 \text{ dư } 1
 \end{aligned}$$

Vậy một số chính phương khi chia cho 3 chỉ có thể có số dư là 0 hoặc 1.

- b) Ta xét các trường hợp của n khi chia cho 2:

$$\begin{aligned}
 &+ \text{ Nếu } n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 : 4 \Rightarrow n \text{ chia } 4 \text{ dư } 0 \\
 &\quad \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k^2 + 4k + 1 \\
 &+ \text{ Nếu } n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow n \text{ chia } 4 \text{ dư } 1
 \end{aligned}$$

Vậy một số chính phương khi chia cho 5 chỉ có thể có số dư là 0 hoặc 1 hoặc 4.

- c) Ta xét các trường hợp của n khi chia cho 5:

$$\begin{aligned}
 &+ \text{ Nếu } n = 5k \Rightarrow n^2 = 25k^2 : 5 \Rightarrow n \text{ chia } 5 \text{ dư } 0 \\
 &+ \text{ Nếu } n = 5k \pm 1 \Rightarrow n^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5k^2 \pm 2k + 1 \Rightarrow n \text{ chia } 5 \text{ dư } 1 \\
 &\quad \Rightarrow n^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = 5k^2 \pm 4k + 4 \Rightarrow n \text{ chia } 5 \text{ dư } 4 \\
 &+ \text{ Nếu } n = 5k \pm 2 \Rightarrow n^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = 5k^2 \pm 4k + 4 \Rightarrow n \text{ chia } 5 \text{ dư } 4
 \end{aligned}$$

- d) Ta có: $n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$

Vì $k(k + 1)$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên $k(k + 1)$ chia hết cho 2.

$\Rightarrow 4k(k+1)$ chia hết cho 8.

$\Rightarrow 4k(k+1)+1$ chia 8 dư 1.

Vậy một số chính phương lẻ khi chia cho 8 chỉ có số dư là 1.

Bài 4: a) Cho $A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$. Chứng minh rằng $A+4$ không là số chính phương.

b) Cho $B = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$. Chứng minh rằng $2B+3$ không là số chính phương.

Lời giải:

a) Ta có: $A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$ (1)

$$\Rightarrow 2.A = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{21} \quad (2)$$

Lấy (2) trừ (1) ta được: $2.A - A = 2^{21} - 2^2$

$$\Rightarrow A = 2^{21} - 4$$

$$\Rightarrow A + 4 = 2^{21} - 4 + 4 = 2^{21}$$

$$\Rightarrow A + 4 = 2^{20} \cdot 2 = (2^{10})^2 \cdot 2$$

Mà trong tích $(2^{10})^2 \cdot 2$ ta có số 2 không là số chính phương

$\Rightarrow A + 4$ không là số chính phương

b) Ta có: $B = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{100}$ (3)

$$\Rightarrow 3.B = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{101} \quad (4)$$

Lấy (4) trừ (3) ta được: $3.B - B = 3^{101} - 3$

$$\Rightarrow 2B = 3^{101} - 3$$

$$\Rightarrow 2B + 3 = 3^{101} - 3 + 3$$

$$\Rightarrow 2B + 3 = 3^{101}$$

$$\Rightarrow 2B + 3 = 3^{100} \cdot 3 = (3^{50})^2 \cdot 3$$

Ta có $(3^{50})^2 \cdot 3$ không là số chính phương do 3 không là số chính phương.

Vậy $2B+3$ không là số chính phương.

- **Lưu ý:** $B+3 = 3^{101}$, $A+4 = 2^{21}$ cũng có thể kết luận ngay chúng không là số chính phương (Chữ thừa số nguyên tố với số mũ lẻ)

Bài 5: Cho hai số chính phương có tổng là một số chia hết cho 3 . Chứng minh rằng cả hai số chính phương đó đều chia hết cho 9 .

Lời giải

Gọi hai số chính phương là: a^2, b^2 . Theo đầu bài ta có: $a^2 + b^2 \vdots 3$

Ta xét các trường hợp:

+ Giả sử $a^2 \not\vdots 3, b^2 \not\vdots 3 \Rightarrow a^2 + b^2$ chia 3 dư 2 (theo tính chất 3)

$\Rightarrow$ mâu thuẫn giả thiết $a^2 + b^2 \vdots 3$

+ Giả sử hoặc a^2 hoặc b^2 không chia hết cho 3 , số còn lại chia hết cho $3 \Rightarrow a^2 + b^2 \not\vdots 3$ (mâu thuẫn giả thiết)

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 \vdots 3 \\ b^2 \vdots 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \vdots 3 \\ b \vdots 3 \end{cases}$, mà 3 là số nguyên tố.

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 \vdots 9 \\ b^2 \vdots 9 \end{cases}$ (đpcm)

Bài 6: Cho A là số chính phương gồm bốn chữ số, nếu ta thêm vào mỗi chữ số của số A một đơn vị thì ta được số chính phương B . Tìm A và B .

Lời giải

Đặt $A = a^2; B = b^2 (a < b; 32 \leq a < b < 100)$

Vì thêm vào mỗi chữ số của số A một đơn vị thì ta được số B nên dễ thấy: $B - A = 1111$

Mà: $1111 = 1.1111 = 11.101$ và $1 \leq b - a < b + a < 200$

$\Rightarrow 1111 = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$

$\Rightarrow \begin{cases} b - a = 11 \\ b + a = 101 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 45 \\ b = 56 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} A = a^2 = 2025 \\ B = b^2 = 3136 \end{cases}$

Vậy hai số cần tìm là $2025; 3136$.

Bài 7: Tìm số nguyên tố $\overline{ab} (a > b > 0)$, sao cho $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b)$ là số chính phương;

Mà $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương.

$\Rightarrow a - b$ là số chính phương

$\Rightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a - b = 4 \end{cases}$

+) Với $a - b = 1 \Rightarrow \overline{ab} \in \{21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98\}$

+) Với $a - b = 4 \Rightarrow \overline{ab} \in \{51, 62, 73, 84, 95\}$

Vậy các số nguyên tố $\overline{ab}$ thỏa yêu cầu đề bài là: $\overline{ab} \in \{43; 73\}$

Bài 8: Tìm số chính phương có bốn chữ số, biết rằng hai chữ số đầu giống nhau, hai chữ số cuối giống nhau.

Lời giải

Gọi số chính phương cần tìm là: $\overline{aabb} = n^2$ ($a, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$)

Ta có: $\overline{aabb} = 1000a + 100a + 10b + b$

$$\Leftrightarrow n^2 = 1100a + 11b$$

$$\Leftrightarrow n^2 = 11(100a + b) \quad (1)$$

Lại có: $\overline{aabb} : 11 \Rightarrow 100a + b : 11$

$$\Rightarrow (99a + a + b) : 11 \text{ mà } 99a : 11$$

$$\Rightarrow a + b : 11$$

Mà: $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9 \Rightarrow 1 \leq a + b \leq 18 \Rightarrow a + b = 11$

Thay $a + b = 11$ vào (1), ta được: $n^2 = 11(99a + 11) = 11(9 \cdot 11a + 11) = 11^2(9a + 1)$

$\Rightarrow 9a + 1$ phải là số chính phương (do 11^2 là số chính phương)

Ta có bảng sau:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$9a + 1$	10 (ktm)	19 (ktm)	28 (ktm)	37 (ktm)	46 (ktm)	55 (ktm)	64 (tm)	73 (ktm)	82 (ktm)
b							4		

Ta có: $7744 = 11^2 \cdot 8^2 = 88^2$

Vậy số cần tìm là: 7744.

Cách 2:

Gọi số chính phương cần tìm là: $\overline{aabb} = n^2$ ($a, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$)

Ta có: $n^2 = \overline{aabb} = 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11(100a + b) = 11 \cdot \overline{a0b}$

Do đó: $\overline{a0b} = 11k^2$ ($k \in \mathbb{N}$)

Ta có: $100 \leq 11k^2 \leq 909$

$$\Rightarrow 9 \frac{1}{11} \leq k^2 \leq 82 \frac{7}{11}$$

$$\Rightarrow 4 \leq k \leq 9$$

Ta có bảng:

k	4	5	6	7	8	9
$11k^2$	176	275	396	539	704	891

$$\text{Mà } \overline{a0b} = 11k^2 \Rightarrow \overline{a0b} = 704$$

$$\Rightarrow \text{chọn } k = 8$$

$$\Rightarrow n^2 = \overline{aabb} = 11.11k^2 = 11.11.8^2 = 88^2 = 7744$$

Bài 9: Tìm số tự nhiên n để $2^8 + 2^{11} + 2^n$ là số chính phương.

Lời giải

$$\text{Đặt } 2^8 + 2^{11} + 2^n = a^2 (a > 0, a \in \mathbb{N}) \Rightarrow 48^2 + 2^n = a^2 \Rightarrow 2^n = (a - 48)(a + 48)$$

$$+) \text{ Với } n = 0 \Rightarrow (a - 48)(a + 48) = 1 \Rightarrow \text{vô lí}$$

$$+) \text{ Với } n > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 48 = 2^x \\ a - 48 = 2^y \end{cases} \quad (x + y = n; \quad x > y)$$

$$\Rightarrow 96 = 2^x - 2^y$$

$$\Rightarrow 2^y (2^{x-y} - 1) = 2^5 \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^y = 5 \\ 2^{x-y} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow n = 12$$

Bài 10: Viết liên tiếp từ 1 đến 12 được số $A = 1.2.3...1112$.

Hỏi: số A có thể có 81 ước được không?

Lời giải

Giả sử A có 81 ước.

Vì số lượng các ước của A là 81 (là số lẻ) nên A là số chính phương (1)

Mặt khác, tổng của các chữ số của A là $1 + 2 + 3 + \dots + 12 = 51$

Vì $51 : 3$ nên A chia hết cho 3 nhưng A không chia hết cho 9, do đó A không là số chính phương mâu thuẫn với (1).

Vậy A không thể có 81 ước.

Bài 11: Tìm số có hai chữ số, biết rằng nếu nhân nó với 45 thì ta được một số chính phương.

Lời giải

Gọi số phải tìm là n ($n \in \mathbb{N}, 10 < n < 99$)

$$\text{Ta có: } 45.n = a^2 \quad (a \in \mathbb{N}) \quad \text{hay} \Rightarrow 3^2.5.n = a^2$$

Vì số chính phương chỉ có các thừa số nguyên tố với mũ chẵn nên $n = 5.k^2$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

$$+) \text{ Với } k = 1 \Rightarrow n = 5.1^2 = 5 \text{ (không thỏa mãn)}$$

$$+) \text{ Với } k = 2 \Rightarrow n = 5.2^2 = 20$$

+) Với $k=3 \Rightarrow n=5.3^2=45$

+) Với $k=4 \Rightarrow n=5.4^2=80$

+) Với $k \geq 5 \Rightarrow n \geq 5.5^2 \geq 125$ (loại vì n có nhiều hơn hai chữ số)

Vậy số cần tìm là 20; 45; 80

Bài 12: Chứng minh rằng: một số tự nhiên viết toàn bằng chữ số 2 thì không phải số chính phương.

Lời giải

Gọi A là số tự nhiên được ghi bởi n chữ số 2 ($n > 2$)

Ta có: $A = 222...222 = 222...200 + 22 \Rightarrow A \not\vdots 4$

$\Rightarrow A$ là số tự nhiên chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4

$\Rightarrow A$ không là số chính phương.

Bài 13: Một số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2008 thì có thể là số chính phương được không? Vì sao?

Lời giải

Gọi n là số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2008 ($n \in \mathbb{N}$)

Ta có: $2018 = 672.3 + 2$

Vì tổng các chữ số của n chia 3 dư 2 nên số n khi chia cho 3 cũng có số dư là 2

$\Rightarrow n$ có dạng $n = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$)

Mà một số chính phương không có dạng $3k + 2$ nên số tự nhiên n không là số chính phương.

Vậy một số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2008 thì không là số chính phương.

Bài 14: Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{33}$. Hỏi A có là số chính phương không? Vì sao?

Lời giải

Ta có:

$$A = 1 + 2 + (2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + \dots + (2^{30} + 2^{31} + 2^{32} + 2^{33})$$

$$A = 3 + 2(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{29}(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$$

$$A = 3 + 2.30 + \dots + 2^{29}.30$$

$$A = 3 + 30.(2 + 2^2 + \dots + 2^{29})$$

$$A = [3.(2 + 2^2 + \dots + 2^{29})].10 + 3$$

$\Rightarrow A$ có chữ số tận cùng là 3

$\Rightarrow A$ không là số chính phương.

PHẦN III. CÁC BÀI TRONG ĐỀ THI

Bài 1: Chứng minh rằng $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n .

(Đề thi vào lớp 10 chuyên trường ĐHSPTP Hồ Chí Minh 2015 – 2016)

Lời giải

Ta có

$$2012^{4n} : 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$2014^{4n} : 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$2013^{4n} = (2013^{4n} - 1) + 1$$

chia cho 4 dư 1

$$2015^{4n} = (2015^{4n} - 1) + 1$$

chia cho 4 dư 1

Do đó $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ chia cho 4 dư 2

Ta có $A : 2$ nhưng A không chia hết cho 2^2 , mà 2 là số nguyên tố nên A không là số chính phương.

Vậy A không là số chính phương.

Bài 2: Chứng minh rằng $n^5 + 1999n + 2017 (n \in \mathbb{N})$ không phải là số chính phương.

(Trích đề thi HSG tỉnh Quảng Ngãi 2017 - 2018)

Lời giải

Ta có

$$A = n^5 + 1999n + 2017 = n^5 - n + 2000n + 2015 + 2$$

$$A = n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) + 5n(n-1)(n+2) + 2000n + 2015 + 2$$

Ta thấy

$$n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) : 5$$

$$5n(n-1)(n+2) : 5$$

$$2000.n : 5$$

$$2015 : 5$$

Nên A chia 5 dư 2 , mà không có số chính phương nào chia 5 dư 2 .

Vậy $n^5 + 1999n + 2017 (n \in \mathbb{N})$ không là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh rằng tổng bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Nguyễn Huy Tưởng năm học 2004-2005)

Lời giải

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp là $a, a+1, a+2, a+3 (a \in \mathbb{N}^*)$

Ta xét $S = a + (a+1) + (a+2) + (a+3) = 4a+6$

Vì $4a : 2$ và $6 : 2$ nên $S : 2$

Mặt khác $4a : 4$ và 6 không chia hết cho 4 nên S không chia hết cho 4.

Vậy S chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên S không là số chính phương.

Bài 4: Cho $B = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n-1)(n-2)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng B không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG Bắc Ninh 2018-2019)

Lời giải

Ta có

$$4B = 1.2.3.4 + 2.3.4.(5-1) + 3.4.5.(6-2) + \dots + n(n-1)(n-2).[(n+3)-(n-1)]$$

$$4B = n(n+1)(n+2)(n+3) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$$

Ta có: $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n < n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n > n^4 + 6n^3 + 9n^2 = (n^2 + 3n)^2$$

$$(n^2 + 3n)^2 < n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n < (n^2 + 3n + 1)^2$$

Suy ra

Vậy B không là số chính phương.

Bài 5: Chứng tỏ tổng sau không là số chính phương $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ không là số chính phương.

(Trích đề thi Olympic lớp 6 THCS Cầu Giấy năm học 2011-2012)

Lời giải

Ta có: $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111a + 111b + 111c$

$$= 111(a+b+c) = 3.37.(a+b+c)$$

Để S là số chính phương thì $a+b+c = 3.37.k^2 (k \in \mathbb{N})$

Điều này vô lý vì $a+b+c \leq 27 < 37$

Vậy S không là số chính phương.

Bài 6: Cho $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$

a) Chứng minh M chia hết cho 6.

b) Chứng minh M không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG lớp 6 Đa Phúc 2010-2011)

Lời giải

a) Ta có: $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$

$$M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$$

$$M = (5 + 5^2) + (5^3 + 5^4) + \dots + (5^{79} + 5^{80})$$

$$M = 5 \cdot (1 + 5) + 5^3 \cdot (1 + 5) + \dots + 5^{79} \cdot (1 + 5)$$

$$M = 6 \cdot (5 + 5^3 + \dots + 5^{79})$$

$$\Rightarrow M : 6$$

b) Ta có:

$$5 : 5$$

$$5^2 : 5$$

$$5^3 : 5$$

...

$$5^{80} : 5$$

$$\Rightarrow M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80} : 5$$

Mặt khác:

5 không chia hết cho 25

$$5^2 : 25$$

$$5^3 : 25$$

...

$$5^{80} : 25$$

$$\Rightarrow M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80} \text{ không chia hết cho } 25.$$

Ta có $M : 5$ nhưng M không chia hết cho 5^2 nên M không là số chính phương.

Bài 7: Cho $E = 125 \cdot (1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^{2021})$ Chứng minh $E + 25$ là một số chính phương.

(Trích đề thi Olympic lớp 6 Nghĩa Đô 2010-2011)

Lời giải

$$a^0 + a^1 + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - a^0}{a - 1}$$

Ta có:

Nên

$$1 + 6 + 6^2 + \dots + 6^{2021} = \frac{6^{2022} - 1}{5}$$

$$\Rightarrow E + 25 = 125 \cdot \frac{6^{2022} - 1}{5} + 25 = 25 \cdot (6^{2022} - 1) + 25 = 25 \cdot 6^{2022} = 5^2 \cdot (6^{1011})^2 = (5 \cdot 6^{1011})^2$$

Nên $E + 25$ là số chính phương.

Bài 8: Cho $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$

a) Chứng minh A chia hết cho 2^4 .

b) Chứng minh A không là số chính phương.

(Trích đề thi HSG lớp 6 huyện Anh Sơn 2011-2012)

Lời giải

a) Ta có:

$$A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$$

$$A = 10^3 \cdot (10^{2009} + 10^{2008} + 10^{2007} + 10^{2006}) + 8$$

$$A = 8 \cdot 125 \cdot (10^{2009} + 10^{2008} + 10^{2007} + 10^{2006}) + 8$$

$$A = 8 \cdot [125 \cdot (10^{2009} + 10^{2008} + 10^{2007} + 10^{2006}) + 1]$$

$$\Rightarrow A : 8$$

Ta lại có $10^{2012}, 10^{2011}, 10^{2010}, 10^{2009}$ có tổng các chữ số bằng 1 nên khi chia $10^{2012}, 10^{2011}, 10^{2010}, 10^{2009}$ cho 3 đều dư 1.

Ta có 8 chia 3 dư 2 .

Vậy A chia 3 có số dư là dư của phép chia $(1+1+1+1+2)$

Hay dư của phép chia 6 chia cho 3 (có số dư bằng 0)

$$\Rightarrow A : 3$$

Vì 8 và 3 là hai số nguyên tố nguyên cùng nhau, $A : 3$, $A : 8$ nên $A : 24$

b) Ta có $10^{2012}, 10^{2011}, 10^{2010}, 10^{2009}$ có chữ số tận cùng là 0 nên:

$$A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8 \text{ có chữ số tận cùng là } 8$$

Vậy A không là số chính phương vì số chính phương có tận cùng là 1; 4; 5; 6; 9

Bài 9: Tìm số chính phương có bốn chữ số, được viết bởi các chữ số: 3; 6; 6; 8

(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Sơn Đông 2011-2012)

Lời giải

Gọi số chính phương phải tìm là n^2

- Vì số chính phương không có chữ số tận cùng là 3; 8 do đó phải có tận cùng là 6.

- Số có tận cùng bằng 86 thì chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4 nên không là số chính phương.

$$\Rightarrow n^2 \text{ có tận cùng là } 36.$$

Vậy số chính phương đó là 8836 (với $8836 = 94^2$).

Bài 10: Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu nhân nó với 135 thì ta được một số chính phương?
(Trích đề thi HSG lớp 6 THCS Sơn Đông 2013-2014)

Lời giải

Gọi số phải tìm là n ($n \in \mathbb{N}, 10 < n < 99$)

Ta có: $135.n = a^2$ ($a \in \mathbb{N}$) hay $\Rightarrow 3^3.5.n = a^2$

Vì số chính phương chỉ có các thừa số nguyên tố với mũ chẵn nên $\Rightarrow n = 3.5.k^2$ ($k \in \mathbb{N}$)

+) Với $k = 1 \Rightarrow n = 3.5.1^2 = 15$

+) Với $k = 2 \Rightarrow n = 3.5.2^2 = 60$

+) Với $k \geq 3 \Rightarrow n \geq 3.5.3^2 \geq 135$ (loại vì n có nhiều hơn hai chữ số)

Vậy số cần tìm là 15; 60.

Bài 11: Cho tổng $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2009 + 2011$. Chứng tỏ S là một số chính phương.
(Trích đề HSG toán 6 THCS Hồng Hà năm 2013 – 2014)

Lời giải

Ta có: $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2009 + 2011 = \left(\frac{2011+1}{2} \right) \left(\frac{2011-1}{2} + 1 \right) = \left(\frac{2011+1}{2} \right) \left(\frac{2011+1}{2} \right) = 1006^2$

Vậy S là một số chính phương.

Bài 12: Cho tổng $M = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ (với $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$)

Chứng tỏ M là một số chính phương.

(Trích đề thi HSG huyện Lương Tài năm học 2015 – 2016)

Lời giải

Xét dãy số trong tổng M , từ 1 đến $2n - 1$ có $\frac{2n - 1 - 1}{2} + 1 = n$ (số số hạng).

$\Rightarrow M = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \frac{(2n - 1 + 1)n}{2} = n^2$

Vì $M = n^2$ nên M là một số chính phương.

Bài 13: Chứng minh rằng: với mọi số tự nhiên khác 0 và có số lượng các ước tự nhiên là một số lẻ thì số tự nhiên đó là số chính phương.

(Trích đề thi HSG lớp 6 huyện Vũ Thư, năm học 2018 – 2019)

Lời giải

Gọi số tự nhiên đó là P ($P \neq 0$)

Nếu $P = 1 \Rightarrow 1^2 = 1 \Rightarrow P$ là số chính phương.

Nếu $P > 1$. Phân tích P ra thừa số nguyên tố ta có: $P = a^x b^y \dots c^z$ (với a, b, c là các số nguyên tố).

Khi đó số lượng các ước của P là $(x+1)(y+1)\dots(z+1)$.

Theo đề ta có: $(x+1)(y+1)\dots(z+1)$ là số lẻ

$\Rightarrow (x+1); (y+1); \dots; (z+1)$ đều là các số lẻ

$\Rightarrow x, y, \dots, z$ đều là các số chẵn

Đặt $x = 2m; y = 2n; z = 2t$

Ta được $P = a^x \cdot b^y \cdot c^z = a^{2m} \cdot b^{2n} \cdot c^{2t} = (a^m \cdot b^n \cdot c^t)^2$

Vậy P là số chính phương.

Bài 14: Tìm n để $n^2 + 2006$ là một số chính phương.

(Trích đề thi HSG lớp 6 trường THCS Sơn Tây, năm học 2015 – 2016)

Lời giải

Giả sử $n^2 + 2006$ là số chính phương

Đặt $a^2 = n^2 + 2006$ ($a \in \mathbb{Z}$)

$$\Rightarrow a^2 - n^2 = 2006$$

$$\Rightarrow (a - n)(a + n) = 2006 \quad (*)$$

+) Nếu a, n khác tính chẵn lẻ thì vế trái của $(*)$ là số lẻ nên không thỏa mãn $(*)$

+) Nếu a, n cùng tính chẵn lẻ

$$\Rightarrow \begin{cases} a - n : 2 \\ a + n : 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a - n)(a + n) : 4$$

Mà vế phải của $(*)$ là 2006 không chia hết cho 4

$\Rightarrow (*)$ vô lý

Vậy không tồn tại n để $n^2 + 2006$ là một số chính phương.

Bài 15: Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng số gồm 2 số đầu lớn hơn số gồm 2 số sau 1 đơn vị.

(Trích đề thi HSG lớp 6 trường THCS Liên Hòa năm học 2008 – 2009)

Lời giải

Gọi số tự nhiên có 4 chữ số cần tìm là $\overline{abcd}$

Theo đề bài ta có:

$$\overline{abcd} = k^2, k \in \mathbb{N}, 32 \leq k < 100$$

$$\overline{ab} - \overline{cd} = 1$$

$$\text{Ta có: } \overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 100(\overline{cd} + 1) + \overline{cd} = 101\overline{cd} + 100$$

$$\Rightarrow 101\overline{cd} = k^2 - 100 = (k - 10)(k + 10) \Rightarrow k + 10 : 101 \text{ hoặc } k - 10 : 101$$

$$\text{Mà } 32 \leq k < 100 \Rightarrow (k - 10; 101) = 1 \text{ nên } k + 10 : 101$$

$$\text{Mà } 32 \leq k < 100$$

Vậy số cần tìm là $\overline{abcd} = 91^2 = 8281$.

❗ HẾT ❗

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>