

Biểu thức C đạt giá trị nhỏ nhất khi $|x - 2017| + 2019$ có giá trị nhỏ nhất

Mà $|x - 2017| \geq 0$ nên $|x - 2017| + 2019 \geq 2019$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2017 \Rightarrow C = \frac{2018}{2019}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{2018}{2019}$ khi $x = 2017$.

Câu 3. (HSG 7 THCS Lưu Khánh Đàm - Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = (x - 2)^2 + |y - x| + 3$.

Lời giải

Ta có $(x - 2)^2 \geq 0$ với mọi x và $|y - x| \geq 0$ với mọi $x, y \Rightarrow A \geq 3$ với mọi x, y .

Suy ra A nhỏ nhất bằng 3 khi $\begin{cases} (x - 2)^2 = 0 \\ |y - x| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy $A_{\min} = 3$ khi $x = y = 2$.

Câu 4. (HSG 7 THCS Hồng Lĩnh - Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau $K = (3x - 2y)^2 - (4y - 6x)^2 - |x + y - 5|$.

Lời giải

Ta có: $K = (3x - 2y)^2 - (4y - 6x)^2 - |x + y - 5|$

$$= (3x - 2y)^2 - 4 \cdot (2y - 3x)^2 - |x + y - 5|$$

$$= (3x - 2y)^2 - 4 \cdot (3x - 2y)^2 - |x + y - 5|$$

$$= -3 \cdot (3x - 2y)^2 - |x + y - 5|$$

$$= - \left[3 \cdot (3x - 2y)^2 + |x + y - 5| \right]$$

Ta có $3 \cdot (3x - 2y)^2 \geq 0$ với mọi giá trị của x, y

$|x + y - 5| \geq 0$ với mọi giá trị của x, y

Do đó $\left[3 \cdot (3x - 2y)^2 + |x + y - 5| \right] \geq 0$ với mọi giá trị của x, y

Nên $- \left[3 \cdot (3x - 2y)^2 + |x + y - 5| \right] \leq 0$ với mọi giá trị của x, y

Hay $K \leq 0$ với mọi giá trị của x, y

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $3x - 2y = 0$ và $x + y - 5 = 0$ (1)

Với $3x - 2y = 0$ thì $3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

Đặt $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = k$. Khi đó $x = 2k$; $y = 3k$

Thay $x = 2k$ và $y = 3k$ vào (1) ta được $2k + 3k - 5 = 0 \Rightarrow 5k = 5 \Rightarrow k = 1$

Với $k = 1$ thì $x = 2$; $y = 3$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức K là 0 khi và chỉ khi $x = 2; y = 3$.

Câu 5. (HSG 7 THCS Hồng Lĩnh - Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

Cho a, b, c, d là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
 $E = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|$

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c \leq d$. Áp dụng BĐT $|a| + |b| \geq |a + b|$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $ab \geq 0$ ta có:

$$|x - a| + |x - d| \geq |x - a| + |d - x| \geq |x - a + d - x| = d - a \quad (1)$$

$$|x - b| + |x - c| \geq |x - b| + |c - x| \geq |x - b + c - x| = c - b \quad (2)$$

Suy ra $E \geq c + d - a - b$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi dấu "=" ở (1) và (2) xảy ra
 khi và chỉ khi $(x - a)(d - x) \geq 0$ và $(x - b)(c - x) \geq 0$

Suy ra $a \leq x \leq d$ và $b \leq x \leq c$.

Do đó $\text{Min} E = c + d - a - b$ khi $b \leq x \leq c$.

Câu 6. (HSG 7 THCS Dân Chủ-Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = |x - 2| + (x - y)^2 + 3\sqrt{z^2 + 9} + 16$

Lời giải

Ta có: $C = |x - 2| + (x - y)^2 + 3\sqrt{z^2 + 9} + 16$

Vì

$$+) |x - 2| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$+) (x - y)^2 \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$+) z^2 \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow z^2 + 9 \geq 9 \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sqrt{z^2 + 9} \geq 3 \quad \forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow 3\sqrt{z^2 + 9} \geq 9 \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |x - 2| + (x - y)^2 + 3\sqrt{z^2 + 9} + 16 \geq 25$$

$$\Rightarrow |x - 2| + (x - y)^2 + 3\sqrt{z^2 + 9} + 16 \geq 25 \quad \text{hay } C \geq 25$$

Vậy $C_{\min} = 25$ khi $x = y = 2$ và $z = 0$.

Câu 7. (HSG 7 THCS Tân Tiến - Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $C = \frac{2|x - 1| + 3}{|x - 1| + 1}$.

Lời giải

$$C = \frac{2|x - 1| + 3}{|x - 1| + 1} = \frac{2|x - 1| + 2 + 1}{|x - 1| + 1} = 2 + \frac{1}{|x - 1| + 1}$$

Ta có:

$$\text{Với mọi } x \text{ ta có: } |x - 1| \geq 0 \Rightarrow |x - 1| + 1 \geq 1$$

$$\frac{1}{|x-1|+1} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{|x-1|+1} + 2 \leq 3$$

$\Rightarrow$

Hay $C \leq 3$

Dấu "=" xảy ra khi $|x-1|=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

Vậy $C_{\max}=3$ khi $x=1$.

Câu 8. (HSG 7 THCS Bắc Sơn - Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C=|x-2022|+|x-2023|$.

Lời giải

Ta có: $C=|x-2022|+|x-2023|$

$$C=|x-2022|+|2023-x| \geq |x-2022+2023-x|=1$$

$$\Rightarrow C \geq 1$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $(x-2022)(2023-x) \geq 0 \Rightarrow 2022 \leq x \leq 2023$

Vậy $Min C=1$ khi và chỉ khi $2022 \leq x \leq 2023$.

Câu 9. (HSG 7 THCS Thái Hưng - Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=|2x-2|+|2x-2013|$ với x là số nguyên.

Lời giải

$$Ta\ có: A=|2x-2|+|2x-2013|=|2x-2|+|2013-2x| \geq |2x-2+2013-2x|=2011$$

Dấu "=" xảy ra khi $(2x-2)(2013-2x) \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$

Vậy $A_{\min}=2011$ khi $1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$.

Câu 10. (HSG 7 THCS Trần Thủ Độ - Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

$$B=\frac{2|2x-3|+7}{|2x-3|+5}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của

Lời giải

$$Ta\ có\ B=\frac{2|2x-3|+7}{|2x-3|+5}=2-\frac{3}{|2x-3|+5}$$

Vì $|2x-3| \geq 0$ với mọi x .

$$\Rightarrow |2x-3|+5 \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{|2x-3|+5} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{-3}{|2x-3|+5} \geq \frac{-3}{5} \Rightarrow B \geq \frac{7}{5}$$

Dấu "=" xảy ra khi $2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

Vậy $B_{\min}=\frac{7}{5}$ khi $x=\frac{3}{2}$.

Câu 11. (HSG 7 THCS Lê Tư Thành - Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

Tìm số tự nhiên n để phân số $\frac{7n-8}{2n-3}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có:
$$\frac{7n-8}{2n-3} = \frac{2(7n-8)}{2(2n-3)} = \frac{7(2n-3)+5}{2(2n-3)} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2(2n-3)}$$

Phân số đã cho có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{5}{2(2n-3)}$ lớn nhất.

Suy ra $2(2n-3)$ nhỏ nhất khác 0.

Mà n là số tự nhiên nên $2(2n-3) = 2 \Rightarrow 2n-3 = 1 \Rightarrow 2n = 4 \Rightarrow n = 2$

Vậy giá trị lớn nhất của phân số đã cho bằng 6 khi $n = 2$.

Câu 12. (HSG 7 THCS Phạm Kính Ân - Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

$$B = \frac{x^2 + 15}{x^2 + 3}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

Lời giải

Ta có:
$$B = \frac{x^2 + 15}{x^2 + 3} = \frac{x^2 + 3 + 12}{x^2 + 3} = 1 + \frac{12}{x^2 + 3}$$

Lại có: $x^2 \geq 0$ với mọi x . Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

$\Rightarrow x^2 + 3 \geq 3$ với mọi x

$\Rightarrow \frac{12}{x^2 + 3} \leq \frac{12}{3} \Rightarrow \frac{12}{x^2 + 3} \leq 4 \Rightarrow 1 + \frac{12}{x^2 + 3} \leq 5$

$\Rightarrow B \leq 5$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$

Vậy $\text{Max} B = 5$ khi $x = 0$.

Câu 13. (HSG 7 THCS Diệp Nông - Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

$$P = \frac{3|x-2| + 2020}{|x-2| + 2}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

Lời giải

Ta có:
$$P = \frac{3|x-2| + 2020}{|x-2| + 2} = \frac{3(|x-2| + 2) - 6 + 2020}{|x-2| + 2} = 3 + \frac{2014}{|x-2| + 2}$$

Ta thấy: $|x-2| \geq 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow |x-2| + 2 \geq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{|x-2| + 2} \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{2014}{|x-2| + 2} \leq \frac{2014}{2}$

$\Rightarrow 3 + \frac{2014}{|x-2| + 2} \leq 3 + 1007$

$\Rightarrow P \leq 1010$

Do đó P đạt giá trị lớn nhất là 1010 khi và chỉ khi $|x-2|=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$.
 Vậy biểu thức P đạt giá trị lớn nhất bằng 1010 khi và chỉ khi $x=2$.

Câu 14. (HSG 7 Phòng GD & ĐT Hưng Hà – Thái Bình 2021 -2022)

Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $B = \frac{2022-x}{2021-x}$ có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

Ta có: $B = \frac{2022-x}{2021-x} = \frac{(2021-x)+1}{2021-x} = 1 + \frac{1}{2021-x}$

Để B lớn nhất thì $\frac{1}{2021-x}$ lớn nhất

+ Nếu $2021-x < 0$ thì $\frac{1}{2021-x} < 0$

+ Nếu $2021-x > 0$ thì $\frac{1}{2021-x} > 0$

Vì x là số nguyên nên $2021-x$ là số nguyên dương

Để $\frac{1}{2021-x}$ lớn nhất thì $2021-x$ phải là số dương nhỏ nhất khi $2021-x=1 \Rightarrow x=2020$
 Khi đó $B=1+1=2$

Vậy biểu thức B đạt giá trị lớn nhất bằng 2 khi $x=2020$.

Câu 15. (HSG 7 Phòng GD & ĐT Ý Yên – Nam Định 2021 -2022)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = 4y - 2y^2 - 5 - |2x - 3y + 1|$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Xét } B &= 4y - 2y^2 - 5 \\ &= (4y - 2y^2 - 2) - 3 = -2(y^2 - 2y + 1) - 3 = -2(y^2 - y - y + 1) - 3 \\ &= -2[(y^2 - y) - (y - 1)] - 3 = -2[y(y - 1) - 1 \cdot (y - 1)] - 3 \\ &= -2(y - 1)(y - 1) - 3 = -2(y - 1)^2 - 3 \end{aligned}$$

Do đó $A = -2(y - 1)^2 - |2x - 3y + 1| - 3$

Với mọi giá trị của x, y , ta có $(y - 1)^2 \geq 0$ và $|2x - 3y + 1| \geq 0$

$$\Rightarrow -2(y - 1)^2 - |2x - 3y + 1| \leq 0$$

$$\Rightarrow A = -2(y - 1)^2 - |2x - 3y + 1| - 3 \leq -3$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} (y - 1)^2 = 0 \\ |2x - 3y + 1| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 1 = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 2x - 3 \cdot 1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là -3 , đạt được khi và chỉ khi $(x; y) = (1; 1)$.

Câu 16. (HSG 7 Phòng GD & ĐT Lục Ngạn – Bắc Giang 2021 -2022)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |x - 2019| + |x - 2020| + |x - 2021|$.

Lời giải

Ta có:

$$P = |x - 2019| + |x - 2020| + |x - 2021|$$

$$= (|x - 2019| + |2021 - x|) + |x - 2020|$$

$$\text{Ta có } |x - 2019| + |2021 - x| \geq |x - 2019 + 2021 - x| = 2$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } (x - 2019)(2021 - x) \geq 0 \Rightarrow 2019 \leq x \leq 2021 \quad (1)$$

$$\text{Lại có } |x - 2020| \geq 0, \text{ dấu bằng xảy ra khi } x = 2020. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra biểu thức P có giá trị nhỏ nhất là 2, xảy ra khi $x = 2020$.

Câu 17. (HSG 7 Phòng GD & ĐT Lục Nam – Bắc Giang 2021-2022)

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: } P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 40|$$

Lời giải

$$\text{Ta có } P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 40|$$

$$= (2x - 5y)^2 - (6x - 15y)^2 - |xy - 40|$$

$$= (2x - 5y)^2 - 9(2x - 5y)^2 - |xy - 40|$$

$$= -[8(2x - 5y)^2 + |xy - 40|]$$

$$\text{Ta thấy } (2x - 5y)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x, y \text{ nên } 8(2x - 5y)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x, y$$

$$|xy - 90| \geq 0 \text{ với mọi } x, y$$

$$\text{Khi đó } 8(2x - 5y)^2 + |xy - 40| \geq 0 \text{ với mọi } x, y$$

$$\text{Suy ra } -[8(2x - 5y)^2 + |xy - 40|] \leq 0 \text{ với mọi } x, y$$

$$\text{Hay } P \leq 0 \text{ với mọi } x, y$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } (2x - 5y)^2 = 0 \text{ và } |xy - 40| = 0$$

$$+ \text{ Với } (2x - 5y)^2 = 0 \text{ thì } 2x = 5y \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{2}$$

$$+ \text{ Với } |xy - 40| = 0 \text{ thì } xy = 40$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{5} = \frac{y}{2} = k \text{ ta được } x = 5k \text{ và } y = 2k$$

$$\text{Mà } xy = 40 \text{ nên } 5k \cdot 2k = 40$$

$$\text{Tìm được } k = 2 \text{ hoặc } k = -2$$

$$+ \text{ Nếu } k = 2 \text{ thì } x = 10; y = 4$$

$$+ \text{ Nếu } k = -2 \text{ thì } x = -10; y = -4$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } P \text{ là } 0 \text{ khi và chỉ khi } x = 10; y = 4 \text{ hoặc } x = -10; y = -4.$$

Câu 18. (HSG 7 Phòng GD & ĐT Lục Nam – Bắc Giang 2021 -2022)

$$\text{Cho } x = 1 - y, x > 0, y > 0. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{a^2 - x}{x} + \frac{b^2 + y}{y} \quad (a \text{ và } b \text{ là hằng số dương đã cho}).$$

Lời giải

Theo bài ra ta có:

$$x = 1 - y \Rightarrow x + y = 1$$

$$P = \frac{a^2 - x}{x} + \frac{b^2 + y}{y} = \frac{a^2}{x} - 1 + \frac{b^2}{y} + 1 = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}$$

và

$$= \frac{a^2(x+y)}{x} + \frac{b^2(x+y)}{y} \quad (\text{vì } x+y=1)$$

$$= a^2 + \frac{a^2 y}{x} + \frac{b^2 x}{y} + b^2$$

Vì $a, b > 0$ và không đổi. Mà $\frac{a^2 y}{x} \cdot \frac{b^2 x}{y} = a^2 b^2$ không đổi

$$\Rightarrow \frac{a^2 y}{x} + \frac{b^2 x}{y} \text{ nhỏ nhất khi } \frac{a^2 y}{x} = \frac{b^2 x}{y}$$

$$\Rightarrow a^2 y^2 = b^2 x^2$$

$$\Rightarrow ay = bx$$

$$\Rightarrow a(1-x) = bx$$

$$\Rightarrow (a+b)x = a$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{a+b}$$

$$\Rightarrow y = 1-x = 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{a+b} : \frac{b}{a+b} = \frac{a}{b}$$

Thay vào P ta được:

$$P = a^2 + b^2 + a^2 \cdot \frac{b}{a} + b^2 \cdot \frac{a}{b} = a^2 + b^2 + ab + ab = a(a+b) + b(a+b) = (a+b)(a+b) = (a+b)^2$$

Vậy $P_{\min} = (a+b)^2$ khi $x = \frac{a}{a+b}$; $y = \frac{b}{a+b}$.

Câu 19. (HSG 7 Phòng GD & ĐT Thị xã An Nhơn 2021 -2022)

Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $B = \frac{22-3x}{4-x}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có: $B = \frac{22-3x}{4-x} = \frac{12-3x+10}{4-x} = 3 + \frac{10}{4-x}$

Suy ra B đạt giá trị lớn nhất khi $4-x$ là số dương nhỏ nhất.

Mà x là số nguyên $\Rightarrow 4-x=1 \Rightarrow x=3$.

Khi đó $B = 3+10 = 13$

Vậy $B_{\max} = 13$ khi $x=3$.

Dạng 2.1. Bất đẳng thức về chứng minh tổng phân số tự nhiên

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Dạng 2.2. Bất đẳng thức về chứng minh tổng lũy thừa

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 THCS Lưu Khánh Đàm - Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

Cho $S_n = \frac{1^2 - 1}{1} + \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ (với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$)

Chứng minh rằng S_n không là số nguyên.

Lời giải

Có
$$S_n = 1 - \frac{1}{1^2} + 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$= (n - 1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$$

Đặt $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

Do $A > 0$ nên $S_n < n - 1$

Mặt khác
$$A < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n - 1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow S_n > (n - 1) - \left(1 - \frac{1}{n} \right) = n - 2 + \frac{1}{n} > n - 2 \quad \left(\text{do } \frac{1}{n} > 0 \right)$$

$$\Rightarrow n - 2 < S_n < n - 1$$
 nên S_n không là số nguyên.

Câu 2. (HSG 7 THCS Dân Chủ - Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

Cho $B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n - 1}{(n - 1)^2 \cdot n^2}$ (với n là số tự nhiên lớn hơn 1).

Chứng minh rằng: $B < 1$.

Lời giải

$$B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n - 1}{(n - 1)^2 \cdot n^2}$$

Ta có:

$$= \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{n^2 - (n - 1)^2}{(n - 1)^2 \cdot n^2}$$

$$= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n - 1)^2} - \frac{1}{n^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{n^2}$$

Vì n là số tự nhiên lớn hơn 1 nên $\frac{1}{n^2} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n^2} < 1$

Vậy $B < 1$.

Câu 3. (HSG 7 THCS Trần Đức Thông - Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

Cho biểu thức: $P = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$. Chứng minh rằng: $P < \frac{3}{16}$.

Lời giải

$$3P = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

Xét

$$\Rightarrow 3P + P = 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{3^2} - \frac{2}{3^2}\right) + \left(\frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^3}\right) + \dots + \left(\frac{99}{3^{98}} - \frac{98}{3^{98}}\right) + \left(\frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{99}}\right) - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\Rightarrow 4P = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$\text{Vì } \frac{3}{16} - \frac{403}{16 \cdot 3^{100}} < \frac{3}{16} \Rightarrow P < \frac{3}{16}$$

$$\text{Vậy } P < \frac{3}{16}$$

Câu 4. (HSG 7 THCS Trần Đức Thông - Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

Cho $A = \frac{2001}{2000^2 + 1} + \frac{2001}{2000^2 + 2} + \dots + \frac{2001}{2000^2 + 2000}$. Chứng minh rằng: $1 < A^2 < 4$.

Lời giải

Tổng A có tất cả 2000 số hạng.

Ta có: $\frac{2001}{2000^2 + 1} > \frac{2001}{2000^2 + 2} > \frac{2001}{2000^2 + 3} > \dots > \frac{2001}{2000^2 + 2000}$

$$\Rightarrow A > \frac{2001}{2000^2 + 2000} \cdot 2000 = \frac{2001 \cdot 2000}{2000(2000 + 1)} = 1 \quad (1)$$

Mặt khác: $A < \frac{2001}{2000^2 + 1} \cdot 2000 = \frac{2001 \cdot 2000}{2000^2 + 1} = \frac{(2000 + 1) \cdot 2000}{2000^2 + 1} = \frac{2000^2 + 2000}{2000^2 + 1}$

$$= \frac{(2000 + 1) \cdot 2000}{2000^2 + 1} = \frac{(2000^2 + 1) + 1999}{2000^2 + 1} = 1 + \frac{1999}{2000^2 + 1} < 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $1 < A < 2 \Rightarrow 1 < A^2 < 4$.

Vậy $1 < A^2 < 4$.

Câu 5. (HSG 7 THCS Kim Trung - Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

Chứng minh tổng: $A = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{2019^2} + \frac{1}{2020^2}$ không phải là một số nguyên.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{1 \cdot 2} > \frac{1}{2 \cdot 2} ; \frac{1}{2 \cdot 3} > \frac{1}{3 \cdot 3} ; \frac{1}{3 \cdot 4} > \frac{1}{4 \cdot 4} ; \dots ; \frac{1}{2018 \cdot 2019} > \frac{1}{2019 \cdot 2019} ; \frac{1}{2019 \cdot 2020} > \frac{1}{2020 \cdot 2020}$.

Do đó ta có:

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2018 \cdot 2019} + \frac{1}{2019 \cdot 2020} > 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{2019^2} + \frac{1}{2020^2}$$

$$\Rightarrow A < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}$$

$$\Rightarrow A < 1 + 1 - \frac{1}{2020} = 1 + \frac{2019}{2020}$$

$$\text{Vì } 0 < \frac{2019}{2020} < 1 \quad \text{nên} \quad 1 < 1 + \frac{2019}{2020} < 2$$

Suy ra: $1 < A < 2$.

Vậy A không phải là một số nguyên.

Câu 6. (HSG 7 THCS Điện Nông - Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2020^3} < \frac{1}{40}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Đặt } A &= \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2020^3} \\ \text{Ta có: } \frac{1}{5.5.5} &< \frac{1}{4.5.6}; \frac{1}{6.6.6} < \frac{1}{5.6.7}; \frac{1}{7.7.7} < \frac{1}{6.7.8}; \dots; \frac{1}{2020.2020.2020} < \frac{1}{2019.2020.2021} \\ \Rightarrow A &= \frac{1}{5.5.5} + \frac{1}{6.6.6} + \frac{1}{7.7.7} + \dots + \frac{1}{2020.2020.2020} \\ &< \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2019.2020.2021} \\ \Rightarrow A &< \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7} + \frac{1}{6.7} - \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{2019.2020} - \frac{1}{2020.2021} \right) \\ \Rightarrow A &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{2020.2021} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{2020.2021} \right) \\ \text{Vì } \frac{1}{2020.2021} > 0 &\text{ nên } \frac{1}{20} - \frac{1}{2020.2021} < \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{2020.2021} \right) < \frac{1}{40} \\ \text{Hay } A &< \frac{1}{40} \\ \text{Vậy } \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2020^3} &< \frac{1}{40}. \end{aligned}$$

Câu 7. (HSG 7 Phòng GD & ĐT Hưng Hà – Thái Bình 2022 -2023)

Cho $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2}$. Chứng minh $\frac{2}{5} < A < \frac{8}{9}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &< \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9} \\ \Rightarrow A &< 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} \\ \Rightarrow A &< 1 - \frac{1}{9} \\ \Rightarrow A &< \frac{8}{9} \quad (1) \\ \text{Ta có } A &> \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{9.10} \\ \Rightarrow A &> \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \\ \Rightarrow A &> \frac{4}{10} \\ \Rightarrow A &> \frac{2}{5} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{2}{5} < A < \frac{8}{9}$ (đpcm).

Câu 8. (HSG 7 Phòng GD & ĐT Quỳnh Phụ 2021 -2022)

Cho $A = 1 - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2022}$. Chứng tỏ rằng A không phải là số nguyên.

Lời giải

Ta có: $A + \frac{2}{3}A = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} \Rightarrow A = \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023}\right] \cdot \frac{3}{5}$

Vì $\left(\frac{2}{3}\right)^{2023} > 0 \Rightarrow 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} > 0$ mà $\frac{3}{5} > 0$ nên $A > 0$ (1)

Lại có: $0 < \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} < \frac{2}{3} \Rightarrow 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023} < 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$
 $\Rightarrow A = \left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2023}\right] \cdot \frac{3}{5} < \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $0 < A < 1$ nên A không là số nguyên (đpcm).

Câu 9. (HSG 7 Phòng GD & ĐT Lục Ngạn – Bắc Giang 2021 -2022)

Cho $C = \frac{2020}{2019^2 + 1} + \frac{2020}{2019^2 + 2} + \frac{2020}{2019^2 + 3} + \dots + \frac{2020}{2019^2 + 2019}$. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức C không phải là số nguyên.

Lời giải

Ta có: $\frac{2020}{2019^2 + 1} < \frac{2020}{2019^2}$

$$\frac{2020}{2019^2 + 2} < \frac{2020}{2019^2}$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 3} < \frac{2020}{2019^2}$$

$$\dots$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 2019} < \frac{2020}{2019^2}$$

Từ đó suy ra $C < \frac{2020}{2019^2} + \frac{2020}{2019^2} + \frac{2020}{2019^2} + \dots + \frac{2020}{2019^2}$
 $= \frac{2020}{2019^2} \cdot 2019 = \frac{2020}{2019} < 2$
 $\Rightarrow C < 2$ (1)

Ta có: $\frac{2020}{2019^2 + 1} > \frac{2020}{2019^2 + 2019}$,

$$\frac{2020}{2019^2 + 2} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 3} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

$$\dots$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 2018} > \frac{2020}{2019^2 + 2019},$$

$$\frac{2020}{2019^2 + 2019} = \frac{2020}{2019^2 + 2019}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} C &> \frac{2020}{2019^2 + 2019} + \frac{2020}{2019^2 + 2019} + \frac{2020}{2019^2 + 2019} + \dots + \frac{2020}{2019^2 + 2019} \\ &= \frac{2020}{2019^2 + 2019} \cdot 2019 \\ &= \frac{2020 \cdot 2019}{2019(2019 + 1)} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C > 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $1 < C < 2$ nên C không là số nguyên.

Câu 10. (HSG 7 Phòng GD & ĐT Huyện Quan Hóa 2021 -2022)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} < \frac{1}{50}$

Lời giải

$$A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$$

Đặt

$$49.A = 49 \cdot \left(\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{7^{4n-6}} - \frac{1}{7^{4n-4}} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} \right)$$

Ta có:

$$49.A = 1 - \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^{4n-4}} - \frac{1}{7^{4n-2}} + \dots + \frac{1}{7^{96}} - \frac{1}{7^{98}}$$

$$\Rightarrow 50A = 1 - \frac{1}{7^{100}} < 1$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{50}$$

Vậy $\frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}} < \frac{1}{50}$

Dạng 2.3. Bất đẳng thức về chứng minh tích của một dãy

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Dạng 3. Bất đẳng thức dạng chữ

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 THCS Minh Khai - Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

Cho ba số $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$, chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ nên:

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab+1 \geq a+b \Rightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \quad (2); \quad \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c} \quad (3)$$

$$\text{Do đó: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$$

$$\text{Mà } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) suy ra: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2 \quad (\text{đpcm})$$

Câu 2. (HSG 7 THCS Dân Chủ - Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$.

Lời giải

Ta có: a, b, c là các số thực dương

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b}; \quad \frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c}; \quad \frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \quad (1)$$

Ta có: a, b, c là các số thực dương

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}; \quad \frac{b+a}{a+b+c} < \frac{b}{b+c}; \quad \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2 \quad (2)$$

$$\text{+) Từ (1) và (2) } \Rightarrow 1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

Câu 3. (HSG 7 THCS Bùi Hữu Diên - Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

Cho 3 số a, b, c là các số nguyên dương sao cho mỗi số nhỏ hơn tổng hai số kia. Chứng

$$\text{minh } 1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

Lời giải

$$\text{Theo bài ta có } b+c < a+b+c \Rightarrow \frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c} \quad (1)$$

$$\text{Lại có } a < b+c \Rightarrow a+b+c < b+c+b+c \Rightarrow \frac{1}{a+b+c} > \frac{1}{2(b+c)} \Rightarrow \frac{2a}{a+b+c} > \frac{a}{b+c} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c} \quad (3)$$

$$\text{Tương tự có } \frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{a+c} < \frac{2b}{a+b+c} \quad (4)$$

$$\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c} \quad (5)$$

$$\text{Từ (3), (4) và (5) } \Rightarrow 1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2 \quad (\text{đpcm}).$$

Câu 5. (HSG 7 THCS Văn Lang - Phòng GD & ĐT Hưng Hà 2022 -2023)

Với a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$.

Lời giải

Ta có $(a-b)^2 \geq 0$ với mọi a, b

$$\Rightarrow (a-b)(a-b) \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 - ab - ab + b^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (1)$$

Vì a, b là các số nguyên dương nên $ab > 0$ do đó chia cả 2 vế của (1) cho ab , ta được:

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Tương tự $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$; $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$.

Ta có: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

$$= a \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + c \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$= 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1$$

$$= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)$$

Mà $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$; $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$; $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$

Do đó $3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) \geq 9$

$$\Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \quad (\text{đpcm}).$$

Câu 6. (HSG 7 Huyện Tam Điệp – Tỉnh Ninh Bình 2021-2022)

Cho dãy số $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$ được xác định như sau:

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 1 + \frac{1}{2}; \quad a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; \quad \dots; \quad a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 2$, với mọi số tự nhiên $n > 1$.

Lời giải

Với mọi $k \geq 2$ ta có: $\frac{1}{ka_k^2} < \frac{1}{ka_{k-1}a_k}$ (vì $a_k > a_{k-1}$)

Ta có: $\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1}a_k} = \frac{1}{ka_{k-1}a_k}$.

Suy ra: $\frac{1}{ka_k^2} < \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}$.

Với $k \in \{2; 3; 4; \dots; n\}$ ta có: $\frac{1}{2a_2^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}$; $\frac{1}{3a_3^2} < \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}$; ..., $\frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$

Cộng từng vế ta được:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} &< \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1} = 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} &< 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Vậy $\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 2$ (đpcm).

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>