CHUYÊN ĐỀ: SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa

- Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1 và chỉ ó hai ước là 1 và chính nó.

P là số nguyên tố $\Leftrightarrow U(p)=\{1,p\}$

Ví dụ : 2 ; 3; 5; 7; ….

- Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 và có nhiều hơn hai ước

Ví dụ : 4; 6; 8; 9; 10;….

2. Các tính chất

a. Số 0, 1 không phải số nguyên tố cũng không phải hợp số

b. Số 2 là số nguyên tố nhỏ nhất

c. Số 2 là số nguyên tố chẵn duy nhất

d. Tập hợp các số nguyên tố là vô hạn

e. Mọi hợp số đều có thể phân tích ra thừa số nguyên tố và kết quả phân tích đó là duy nhất

f. Mọi số nguyên tố lớn hơn 2 đều có dạng : $4k\pm1; 6n\pm1$

g. Tập hợp các số tự nhiên bao gồm : Số 0, 1, số nguyên tố, hợp số

h. Nếu a.b chia hết cho p (p là số nguyên tố) thì a chia hết cho p hoặc b chia hết cho p

i. Nếu a và b không chia hết cho số nguyên tố p thì tích ab không chia hết cho số nguyên tố p

j. Số ước số của hợp số

Giả sử $n=p_1^{n_1}.p_2^{n_2}....p_k^{n_k}(n_1,n_2,...,n_k\in N^*)\Rightarrow$

$p_1,p_2,......,p_k$: Số nguyên tố $\qquad n_1,n_2,......,n_k(k\in N^*)$

$\Rightarrow$số ước số của n là : $(n_1+1)(n_2+1)(....(n_k+1)$

Ví dụ: $100=2^2.5^2\Rightarrow100$ có : $(2+1)(2+1)=9$ ước.

k. Nếu số nguyên tố p chia hết cho số nguyên tố p thì p = q

3. Phương pháp kiểm tra một số là số nguyên tố hay hợp số

a) Chia số đó lần lượt cho các số nguyên tố đã biết từ nhỏ đến lớn

- Nếu có một phép chia hết thì số đó không phải số nguyên tố

- Nếu chia cho đến lúc số thương nhỏ hơn số chia mà các phép chia vẫn còn số dư thì số đó là số nguyên tố

b) Một số có 2 ước số lớn hơn 1 thì số đó không phải số nguyên tố. Ước số nguyên tố của một hợp số a không vượt quá $\sqrt{a}$. Như vậy để kiểm tra số a là hợp số hay không ta chia số a cho một số nguyên tố nào đó nhỏ hơn $\sqrt{a}$, nếu phép chia hết thì a là hợp số.

c) Với $n \in N^*, n > 1$ ta kiểm tra theo các bước sau :

- Tìm STN k sao cho : $k^2 \le n \le (k+1)^2$

- Kiểm tra xem n có chia hết cho các số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng k không ?

+) Nếu có chia hết thì n là số hợp số

+) Nếu không chia hết thì n là hợp số

4. Phân tích một số ra thừa số nguyên tố

- Phân tích một số tự nhiên lớn hơn 1 ra thừa số nguyên tố là viết số đó dưới dạng một tích các thừa số nguyên tố

+ Dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của mỗi số nguyên tố là chính số đó

+ Mọi hợp số đều phân tích được ra thừa số nguyên tố

Chẳng hạn $A = a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}$ trong đó a, b, c là các số nguyên tố và $\alpha, \beta, ...\gamma \in N^*$ khi đó các ước số của A được tính bằng $(\alpha+1)(\beta+1)..(\gamma+1)$

Tổng các ước số của A được tính bằng công thức $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}.\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}...\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}$

5. Số nguyên tố cùng nhau

- Hai số a và b nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $(a,b)=1$

- Các số a, b, c nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $(a,b,c)=1$

- Các số a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi $(a,b)=(b,c)=(c,a)=1$

B. Một số dạng toán

Dạng 1: Kiểm tra một số là số nguyên tố hay hợp số

Cơ sở của phương pháp kiểm tra là chia số a cho các số nguyên tố nhỏ hơn $\sqrt{a}$, nếu xảy ra một phép chia hết thì a là hợp số và nếu không có phép chia hết nào xảy ra thì a là số nguyên tố.

Bài 1: Tổng, hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số

a) $3.4.5.6+7.8$

b) $5.7.9.11-2.3.4.7$

c) $3.5.7+11.13.17$

d) $16354+67541$

Hướng suy nghĩ : *Để kiểm tra một số A là số nguyên tố hay hợp số ta kiểm tra xem A có chia hết cho các số nguyên tố không vượt quá $\sqrt{A}$ không. Nếu số A lớn hơn p mà chia hết cho số nguyên tố p thì A là hợp số. Ngoài ra quan sát các tổng, hiệu trên ta dự đoán các tổng, hiệu trên là các hợp số, do đó ta chỉ ra các tổng, hiệu trên chia hết cho một số nguyên tố nhỏ hơn là được. Thông thường với các bài tập kiến thức như trên ta thường kiểm tra đến tính chẵn lẻ hoặc sử dụng tính chất chia hết của một tổng.*

Lời giải

a) Ta có $3.4.5.6+7.8=4(3.5.6+7.2)$ chia hết cho 4. Vậy tổng trên là hợp số

b) Ta có $5.7.9.11-2.3.4.7=7(5.9.11-2.3.4)$ chia hết cho 7. Vậy hiệu trên là hợp số

c) Ta có $3.5.7+11.13.17$ là số chẵn lớn hơn 2 nên suy ra tổng trên là hợp số

d) Ta có $16354+67541$ có chữ số tận cùng là 5 nên chia hết cho 5. Vậy tổng trên là hợp số.

Bài 2: Tổng, hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số

a) $5.6.7+8.9$

b) $5.7.9.11.13-2.3.7$

c) $5.7.11+13.17.19$

d) $4253+1422$

Hướng suy nghĩ : *Quan sát các tổng, hiệu trên ta dự đoán các tổng, hiệu trên là các hợp số, do đó ta chỉ cần chỉ ra các tổng, hiệu trên chia hết cho một số nguyên tố nhỏ hơn là được.*

Lời giải

a) Ta có $5.6.7+8.9=3(5.2+8.3)$ chia hết cho 3. Vậy tổng trên là hợp số

b) Ta có $5.7.9.11.13-2.3.7=7(5.9.11.13-2.3)$ chia hết cho 7. Vậy hiệu trên là hợp số

c) Ta có $5.7.11$ và $13.17.19$đều là số lẻ nên tổng của chúng là số chẵn nên chúng là hợp số

d) Ta có $4253+1422$ có chữ số tận cùng là 5 nên chia hết cho 5. Vậy tổng trên là hợp số.

Bài 3: Tổng, hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số

a) $17.18.19.31+11.13.15.23$

b) $41.43.45.47+19.23.29.31$

Lời giải

a) Ta có $17.18.19.31+11.13.15.23=3(17.6.19.31+11.13.5.23)$ chia hết cho 3 nên tổng là hợp số

b) Ta có $41.43.45.47$ là số lẻ và $19.23.29.31$ là số lẻ nên $41.43.45.47+19.23.29.31$ là số chẵn và lớn hơn 2 nên tổng trên là hợp số.

Bài 4:

Cho $a=2.3.4.5...2008.$ Các số tự nhiên liên tiếp $a+2;a+3;a+4;...;a+2008$ là số nguyên tố hay hợp số.

Hướng suy nghĩ : *Để chứng minh dãy số* $a+2;a+3;a+4;...;a+2008$ *là các hợp số ta đi chứng minh dãy số trên có một ước khác 1 và chính nó. Dễ thấy số a chia hết cho các số* $2;3;4....;2008$ *nên dãy số trên cũng tương ứng chia hết cho* $2;3;4....;2008$*. Do đó các số của dãy trên đều là hợp số.*

Lời giải

Dễ thấy a chia hết lần lượt cho 2 ; 3 ; 4 ; … ; 2008, do đó $a+2;a+3;a+4;...;a+2008$ lần lượt chia hết cho 2 ; 3 ; 4 ; … ; 2008. Đồng thời các số $a+2;a+3;a+4;...;a+2008$ đều lớn hơn 2. Do đó $a+2;a+3;a+4;...;a+2008$ là các hợp số.

Bài 5:

Thay d bằng chữ số d nào để $\overline{5d}$ là một số nguyên tố.

Hướng suy nghĩ : *Ta thấy d là chữ số ận cùng của* $\overline{5d}$ *do đó* $d\in\{0;1;2;....;9\}$*. Từ đó để kiểm tra* $\overline{5d}$ *là số nguyên tố hay hợp số ta thay trực tiếp các chữ số d như trên.*

Lời giải

Ta có $d\in\{0;1;2;....;9\}$.

- Nếu $d\in\{0;2;4;6;8\}\Rightarrow\overline{5d}$ chia hết cho 2 nên là hợp số.

- Nếu $d\in\{1;7\}\Rightarrow\overline{5d}$ chia hết cho 3 nên là hợp số.

- Nếu $d=5\Rightarrow\overline{5d}$ chia hết cho 5 nên là hợp số.

- Nếu $d\in\{3;9\}\Rightarrow\overline{5d}$ là số nguyên tố

Vậy với $d\in\{3;9\}$ thì $\overline{5d}$ là số nguyên tố.

Bài 6:

Với mỗi số tự nhiên n thì các số sau là số nguyên tố hay hợp số

a) n^2+12n b) 3^n+6

Hướng suy nghĩ : *Dự đoán rằng các số trên chỉ là số nguyên tố với một số trường hợp của n, dô đó ta thay một số giá trị đặc biệt để kiểm tra. Với các giá trị bất kỳ còn lại ta chứng minh nó là hợp số, tức là ta sẽ chứng minh các số đó chia hết cho một số nguyên tố nhỏ hơn nó.*

Lời giải

a) Ta có $n^2+12n=n(n+12)$

Dễ thấy $n+12>1 \Rightarrow n(n+12)$ có thêm hai ước là n và $n+12$. Do vậy

- Nếu $n=1 \Rightarrow n^2+12n=n(n+12)=13$ là số nguyên tố.

- Nếu $n>1 \Rightarrow n^2+12n$ là một hợp số.

b) Nếu $n=0 \Rightarrow 3^n+6=7$ là số nguyên tố

Nếu $n \geq 1 \Rightarrow 3^n+6$ chia hết cho 3 nên là hợp số.

Bài 7: Với mỗi số tự nhiên n thì các số sau là số nguyên tố hay hợp số

a) $A=(2n+5)(3n+1)$ b) $B=(n-2)(n^2+n+7)$

Lời giải

a) Do $A=(2n+5)(3n+1)$ nên A có hai ước là $2n+5$ và $3n+1$

Dễ thấy với n là số tự nhiên nên $2n+5>1$. Do đó để A là số nguyên tố thì $3n+1=1 \Leftrightarrow n=0$

Khi đó $A=5$ là số nguyên tố.

Như vậy nếu $n \geq 1 \Rightarrow 2n+5>1; 3n+1>1 \Rightarrow A$ là hợp số.

Vậy nếu $n=0 \Rightarrow A$ là số nguyên tố và nếu $n \geq 1 \Rightarrow A$ là hợp số.

b) Ta có A là số tự nhiên nên $n \geq 2 \Rightarrow A=(n-2)(n^2+n+7)$ nên A có hai ước là $n-2$ và n^2+n+7. Dễ thấy $n^2+n+7>1 \Rightarrow$ để A là số nguyên tố thì $n-2=1 \Leftrightarrow n=3 \Rightarrow A=17$ là số nguyên tố. Như vậy khi $n \geq 4$ thì ta có $n-2>1$ và $n^2+n+7>1 \Rightarrow A$ là hợp số

Vậy nếu $n=3$ thì A là số nguyên tố và nếu $n \geq 4$ thì A là hợp số.

Bài 8: Tìm số tự nhiên n, sao cho

a. $(2n+5)(3n+1)$ là số nguyên tố b. $(n-2)(n^2+n+7)$ là số nguyên tố

c. $(n+1)(n^2+n+7)$ là số nguyên tố　　　　d. n^2-1 là số nguyên tố

Lời giải

a. Nếu $n \geq 1 \rightarrow \begin{cases} 2n+5>1 \\ 3n+1>1 \end{cases} \rightarrow (2n+5)(3n+1)$ là hợp số

Nếu $n=0 \rightarrow (2n+5)(3n+1)=5$ là số nguyên tố. Vậy n = 0

b. $n=0 \rightarrow A=3(tm); n=1 \rightarrow A=-1(loai); n=2 \rightarrow A=0(loai); n=3 \rightarrow A=11(tm)$

+) $n>3 \rightarrow \begin{cases} n-2 \geq 2 \\ n^2+n-1=n(n+1)-1>1 \end{cases} \rightarrow lahopso$ là hợp số

Vậy n = 0 hoặc n = 3.

c. $n=0(t/m); n \geq 1(loai)$

d. Ta có: $n^2-1=(n+1)(n-1) \rightarrow \begin{cases} n \geq 3(loai) \\ n=2(tm) \end{cases}$

Bài 9: Các số sau là số nguyên tố hay hợp sô, biết p là số nguyên tố

a. $A=p^2+p+2018$　　　　b. $B=p^2+p+2$

c. p^2+2000　　　　d. $D=\underbrace{11...1}_{2017}2\underbrace{11.....1}_{2017}$

Lời giải

a. $A=p^2+p+2018=\underbrace{p(p+1)}_{\vdots 2}+2018 \rightarrow A$ là số chẵn nên A là hợp số vì A lớn hơn 2

b. $B=p^2+p+2=p(p+1)+2$ là số chẵn lớn hơn 2 nên là hợp số

c. p^2+2000

+) $p=2 \rightarrow C:chan \rightarrow$ là hợp số

+) $p=3 \rightarrow C=2009 \vdots 7 \rightarrow$ là hợp số

+) $p>3 \rightarrow p^2 \vdots 3$ dư 1 $\Rightarrow p^2+2000 \vdots 3 \rightarrow$ là hợp số vì 2000 chia 3 dư 2

d. Tổng các chữ số của D là : 2017 + 2 + 2017 chia hết cho 3 nên D chia hết cho 3 và D > 3 nên D là hợp số

Bài 10:

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n > 1 thì n^5+n^4+1 không phải số nguyên tố

Lời giải

Dùng phương pháp hệ số bất định phân tích được : $n^5+n^4+1=(n^2+n+1)(n^3-n+1)$

Ta có : $n>1\to n^2+n+1; n^3-n+1>1\to$ là hợp số

Bài 11:

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (Tự nhiên) (a,b) sao cho $a^4 + 4b^4$ là số nguyên tố

Lời giải

Ta có: $a^4+4b^4=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2=(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$

+) Nếu cặp số nguyên không cần xét a, b = 0

+) Nếu cặp số tự nhiên, ta phải xét a, b = 0

- Nếu a = 0 thì A = $4a^4$ (loại)

- Nếu b = 0 thì A = a^4 (không là số nguyên tố)

- Nếu $a,b\ge 1\to a^2+2ab+2b^2>a^2-2ab+2b^2\ge 1$

Để A là số nguyên tố

$$\Rightarrow a^2-2ab+2b^2=1\Leftrightarrow (a-b)^2+b^2=1\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ b=1 \end{cases}\Leftrightarrow a=b=1\to A=5(tm)\to (a,b)=(1,1)$$

Dạng 2: Bài toán tìm các số tự nhiên là số nguyên tố hay hợp số

Dạng bài toán tìm số nguyên tố hay hợp số hay một số tự nhiên nào đó thỏa mãn một yêu cầu nào đó. Với dạng toán này ta thường dự đoán trước số cần tìm từ đó sử dụng loại trừ các số không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 1: Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho

a) $p+2; p+4$ cũng là số nguyên tố　　　　b) $p+10; p+14$ cũng là số nguyên tố

Hướng suy nghĩ : *Nhận thấy p = 3 thì các dãy số trên đều là các số ngyên tố. Như vậy ta cần chứng minh với các số nguyên tố p khác 3 thì một trong các số của dãy số là hợp số. Chú ý rằng với số nguyên tố p khác 3 thì p chia 3 có số dư là 1 hoặc 2. Từ đó ta có các hướng sau*

+ Hướng 1: Ta bổ sung vào dãy số đã cho một số sao cho số đó chia hết cho 3 khi p = 3. Như vậy khi p không chia hết cho 3 thì số được bổ sung cũng không chia hết cho 3, do đó một trong hai số của dãy phải chia hết cho 3.

+ Hướng 2 : Xét các trường hợp $p=3k+1; p=3k+2,$ *từ đó chỉ ra một trong hai số của dãy số trên là hợp số.*

Lời giải

a) $p+2; p+4$ cũng là số nguyên tố

***) Lời giải 1:** Xét dãy số sau $p+2; p+3; p+4$ là ba số tự nhiên liên tiếp, khi đó trong dãy số có 1 số chia hết cho 3

+ Nếu $p=2 \Rightarrow p+4=6$ chia hết cho 3 nên là hợp số. Do đó $p=2$ không thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

+ Nếu $p=3 \Rightarrow p+2=5; p+4=7$ đều là số nguyên tố, đó đó $p=3$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

+ Nếu $p>3,$ khi đó do p là số nguyên tố nên p có hai dạng $p=3k+1; p=3k+2$ với k là số tự nhiên khác 0. Như vậy trong dãy số trên thì $p+3$ không chia hết cho 3, do đó $p+2$ hoặc $p+4$ chia hết cho 3. Do đó $p>3$ không thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Vậy $p=3$ là số nguyên tố cần tìm.

***) Lời giải 2:** Giả sử với $p=2$ là số nguyên tố ta có $p+2=4$ là hợp số. Do đó $p=2$ không thỏa mãn. Với $p=3$ là số nguyên tố, khi đó $p+2=5; p+4=7$ đều là số nguyên tố, do đó $p=3$

thỏa mãn yêu cầu bài toán. Với $p > 3,$ khi đó p là số nguyên tố nên p phải có hai dạng là $p = 3k + 1; p = 3k + 2$ với k là số tự nhiên khác 0, ta có :

+ Nếu $p = 3k + 1$ là số nguyên tố, khi đó ta có $p + 2 = 3k + 1 + 2 = 3k + 3$ chia hết ho 3 nên là hợp số, do đó $p = 3k + 1$ không thỏa mãn

+ Nếu $p = 3k + 2$ là số nguyên tố, khi đó ta có $p + 4 = 3k + 2 + 4 = 3k + 6$ chia hết ho 3 nên là hợp số, do đó $p = 3k + 2$ không thỏa mãn. Vậy $p = 3$ là số nguyên tố cần tìm.

b) $p + 10; p + 14$ cũng là số nguyên tố

***) Lời giải 1:** Xét dãy số sau $p + 10; p + 12; p + 14$ là ba số tự nhiên chẵn hoặc lẻ liên tiếp, khi đó trong dãy số có 1 số chia hết cho 3

+ Nếu $p = 2 \Rightarrow p + 10 = 12$ chia hết cho 3 nên là hợp số. Do đó $p = 2$ không thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

+ Nếu $p = 3 \Rightarrow p + 10 = p + 13; p + 14 = p + 17$ đều là số nguyên tố, đó đó $p = 3$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

+ Nếu $p > 3,$ khi đó do p là số nguyên tố nên p có hai dạng $p = 3k + 1; p = 3k + 2$ với k là số tự nhiên khác 0. Như vậy trong dãy số trên thì $p + 12$ không chia hết cho 3, do đó $p + 10$ hoặc $p + 14$ chia hết cho 3. Do đó $p > 3$ không thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Vậy $p = 3$ là số nguyên tố cần tìm.

***) Lời giải 2:** Giả sử với $p = 2$ là số nguyên tố ta có $p + 10 = 12$ là hợp số. Do đó $p = 2$ không thỏa mãn. Với $p = 3$ là số nguyên tố, khi đó $p + 10 = 13; p + 14 = 17$ đều là số nguyên tố, do đó $p = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Với $p > 3,$ khi đó p là số nguyên tố nên p phải có hai dạng là $p = 3k + 1; p = 3k + 2$ với k là số tự nhiên khác 0, ta có :

+ Nếu $p = 3k + 1$ là số nguyên tố, khi đó ta có $p + 14 = 3k + 15$ chia hết ho 3 nên là hợp số, do đó $p = 3k + 1$ không thỏa mãn

+ Nếu $p = 3k + 2$ là số nguyên tố, khi đó ta có $p + 10 = 3k + 12$ chia hết ho 3 nên là hợp số, do đó $p = 3k + 2$ không thỏa mãn. Vậy $p = 3$ là số nguyên tố cần tìm.

Bài 2: Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho

a) $p+2; p+6; p+8; p+10$ cũng là số nguyên tố

b) $p+6; p+8; p+12; p+14$ cũng là số nguyên tố

Hướng suy nghĩ: *Thử các giá trị 2, 3, 5 ta nhận thấy với $p=5$ thì các dãy số trên đều là các số nguyên tố. Như vậy ta cần chứng minh với các số nguyên tố p khác 5 thì một trong các số của dãy là hợp số. Chú ý rằng với số nguyên tố p khác 5 thì p chia cho 5 có số dư 1 hoặc 2 hoặc 3 hoặc 4 Từ đó ta có các hướng sau*

+ Hướng 1: Ta bổ sung vào dãy số đã cho một số sao cho số đó chia hết cho 5 khi p = 5, như vậy khi p không chia hết cho 5 thì số được bổ sung cũng không chia hết cho 5. Mà trong dãy số luôn có một số chia hết cho 5, do đó mọt trong các số của dãy số đã cho phải chia hết cho 5

+ Hướng 2: Xét các trường hợp $p=5k+1; p=5k+2; p=5k+3; p=5k+4,$ từ đó chỉ ra một trong các số của dãy số là hợp số

Lời giải

a) $p+2; p+6; p+8; p+10$ cũng là số nguyên tố

***) Cách 1:** Xét dãy số $p+2; p+6; p+8; p+10; p+14$. Để ý rằng 2, 6, 8, 10, 14 có một số chia hết cho 5 nên 5 số tự nhiên trong dãy trên chẵn luôn có một số chia hết cho 5

+ Nếu $p=2$, khi đó $p+2=4$ chia hết cho 2 nên là hợp số. Do đó $p=2$ không thỏa mãn

+ Nếu $p=3$, khi đó $p+6=9$ chia hết cho 3 nên là hợp số. Do đó $p=3$ không thỏa mãn

+ Nếu $p=5$, khi đó $p+2=7; p+6=11; p+8=13; p+14=19$ đều là các số nguyên tố. Do đó $p=5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

+ Nếu $p>5$, khi đó do p là số nguyên tố nên p có các dạng $p=5k+1; p=5k+2; p=5k+3; p=5k+4$ với k là số tự nhiên khác 0. Như vậy trong dãy trên thì $p+10$ không chia hết cho 5, nên trong các số $p+2; p+6; p+10; p+14$ có một số chia hết cho 5. Do đó $p>5$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy $p=5$ là số nguyên tố cần tìm.

***) Cách 2:** Giả sử $p=2$ là số nguyên tố, khi đó ta có $p+2=4$ là hợp số, do đó $p=2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Với $p=3$ là số nguyên tố khi đó $p+6=9$ là hợp số, do đó $p=3$

không thỏa mãn bài toán. Với $p=5$ là số nguyên tố, khi đó $p+2=7; p+6=11; p+8=13; p+14=19$ đều là số nguyên tố, do đó $p=5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Với $p>5$, khi đó p có các dạng $p=5k+1; p=5k+2; p=5k+3; p=5k+4$ với k là số tự nhiên khác 0. Ta xét các trường hợp sau

+ Nếu $p=5k+1$ là số nguyên tố, khi đó $p+14=5k+15$ là hợp số, do đó $p=5k+1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $p=5k+2$ là số nguyên tố, khi đó $p+8=5k+10$ là hợp số, do đó $p=5k+2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $p=5k+3$ là số nguyên tố, khi đó $p+2=5k+5$ là hợp số, do đó $p=5k+3$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $p=5k+4$ là số nguyên tố, khi đó $p+6=5k+10$ là hợp số, do đó $p=5k+4$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy $p=5$ là số nguyên tố cần tìm.

b) $p+6; p+8; p+12; p+14$ cũng là số nguyên tố

***) Cách 1:** Xét dãy số $p+6; p+8; p+12; p+14$. Để ý rằng 2, 6, 8, 10, 14 có một số chia hết cho 5 nên 5 số tự nhiên trong dãy trên chẵn luôn có một số chia hết cho 5

+ Nếu $p=2$, khi đó $p+6=8$ chia hết cho 2 nên là hợp số. Do đó $p=2$ không thỏa mãn

+ Nếu $p=3$, khi đó $p+6=9$ chia hết cho 3 nên là hợp số. Do đó $p=3$ không thỏa mãn

+ Nếu $p=5$, khi đó $p+6=11; p+8=13; p+12=17; p+14=19$ đều là các số nguyên tố. Do đó $p=5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

+ Nếu $p>5$, khi đó do p là số nguyên tố nên p có các dạng: $p=5k+1; p=5k+2; p=5k+3; p=5k+4$ với k là số tự nhiên khác 0. Như vậy trong dãy trên thì $p+10$ không chia hết cho 5, nên trong các số $p+6; p+8; p+12; p+14$ có một số chia hết cho 5. Do đó $p>5$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy $p=5$ là số nguyên tố cần tìm.

***) Cách 2:** Giả sử $p=2$ là số nguyên tố, khi đó ta có $p+6=8$ là hợp số, do đó $p=2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Với $p=3$ là số nguyên tố khi đó $p+6=9$ là hợp số, do đó $p=3$ không thỏa mãn bài toán. Với $p=5$ là số nguyên tố, khi đó $p+6=11; p+8=13; p+12=17; p+14=19$ đều là số nguyên tố, do đó $p=5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Với $p>5,$ khi đó p có các dạng $p=5k+1; p=5k+2; p=5k+3; p=5k+4$ với k là số tự nhiên khác 0. Ta xét các trường hợp sau

+ Nếu $p=5k+1$ là số nguyên tố, khi đó $p+14=5k+15$ là hợp số, do đó $p=5k+1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $p=5k+2$ là số nguyên tố, khi đó $p+8=5k+10$ là hợp số, do đó $p=5k+2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $p=5k+3$ là số nguyên tố, khi đó $p+12=5k+15$ là hợp số, do đó $p=5k+3$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $p=5k+4$ là số nguyên tố, khi đó $p+6=5k+10$ là hợp số, do đó $p=5k+4$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy $p=5$ là số nguyên tố cần tìm.

Bài 3:

Tìm tất cả các số nguyên tố p và q sao cho các số $7p+q$ và $pq+11$ cũng là số nguyên tố.

Hướng suy nghĩ: *Do $pq+11$ là số nguyên tố nên $pq+11$ là số nguên tố lẻ do đó pq là số chẵn, khi đó ít nhất một trong hai số p hoặc q bằng 2. Đến đây ta xét các trường hợp $p=2$ hoặc $q=2$ để tìm số nguyên tố còn lại.*

Lời giải

Nếu $pq+11$ là số nguyên tố thì nó phải là số lẻ vì nó là số nguyên tố lớn hơn 2. Suy ra pq là số chẵn, khi đó ít nhất một trong hai số p hoặc q bằng 2. Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Với $p=2$. Khi đó ta cần tìm số nguyên tố q để $7p+q=14+q$ và $2q+11$ là các số nguyên tố

+ Nếu $q=2 \Rightarrow 7p+q=7.2+2=16$ là hợp số nên $q=2$ không thỏa mãn

+ Nếu $q=3 \Rightarrow 2q+11=2.3+11=17; q+14=3+14=17$ là các số nguyên tố, do đó $q=3$ thỏa mãn

+ Nếu $q>3$, khi đó q là số nguyên tố nên q có hai dạng $q=3k+1; q=3k+2$ với k là số tự nhiên khác 0.

Với $q=3k+1 \Rightarrow q+14=(3k+15)\vdots 3$ là hợp số. Với $q=3k+2 \Rightarrow 2q+11=2(3k+2)+11=(6k+15)\vdots 3$ là hợp số. Do đó các số nguyên tố $q>3$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 2: Với $q=2$. Khi đó ta cần tìm số nguyên tố p để $7p+q=7p+2$ và $2p+11$ là các số nguyên tố

+ Nếu $p=2 \Rightarrow 7p+2=7.2+2=16$ là hợp số nên $p=2$ không thỏa mãn

+ Nếu $p=3 \Rightarrow 2q+11=2.3+11=17; 7p+2=23$ là các số nguyên tố, do đó $p=3$ thỏa mãn

+ Nếu $p>3$, khi đó p là số nguyên tố nên q có hai dạng $p=3k+1; p=3k+2$ với k là số tự nhiên khác 0.

Với $p=3k+1 \Rightarrow 7p+2=(21k+9)\vdots 3$ là hợp số. Với $p=3k+2 \Rightarrow 2q+11=2(3k+2)+11=(6k+15)\vdots 3$ là hợp số. Do đó các số nguyên tố $q>3$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy ta được các số nguyên tố $(p;q)=(2;3);(3;2)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Lời giải tóm tắt

Ta có: $pq+11>3$ nên là số nguyên tố lẻ $\rightarrow pq: chan \rightarrow \left[\begin{array}{l} p=2 \\ q=2 \end{array}\right.$

+) $p=2 \rightarrow q, q+14, 2q+11: lacacsonguyento$

Nếu $q=3k+1 \rightarrow q+14: lahopso$

Nếu $q=3k+2 \rightarrow 2q+11: lahopso \rightarrow q=3k \rightarrow q=3 \rightarrow tm \rightarrow p=2, q=3$

+) $q=2 \rightarrow p; 7p+2; 2p+11: lacacsonguyento$

Xét số dư chia cho 3 $\rightarrow p=3, q=2(tm)$

Bài 4:

Tìm một số nguyên tố, biết rằng số đó bằng tổng của hai số nguyên tố và bằng hiệu hai số nguyên tố

Hướng suy nghĩ: *Gọi số nguyên tố cần tìm là p. Vì p vừa là tổng vừa là hiệu của hai số nguyên tố nên p > 2. Gọi a, b, m, n là các số nguyên tố thỏa mãn* $p=a+b=m-n$. *Khi đó dễ thấy* $b=n=2$. *Từ đó ta được* $a=p-2; m=p+2$. *Ta chuyển thành bài toán tìm số nguyên tố p để* $p-2; p+2$ *cũng là số nguyên tố.*

Lời giải

Gọi số nguyên tố cần tìm là p. Vì p vừa là tổng vừa là hiệu của hai số nguyên tố nên suy ra $p>2$. Gọi a, b, m, n là các số nguyên tố thỏa mãn $p=a+b=m-n$. Khi đó dễ thấy $b=n=2$. Từ đó ta được $a = p-2; m = p+2$. Ta đi tìm số nguyên tố p để $a = p-2; m = p+2$ cũng là số nguyên tố

+ Nếu $p = 2 \Rightarrow p-2 = 0$ không phải số nguyên tố. Do đó $p = 2$ không thỏa mãn yêu cầu

+ Nếu $p = 3 \Rightarrow p-2 = 1$ không phải số nguyên tố. Do đó $p = 3$ không thỏa mãn yêu cầu

+ Nếu $p = 5 \Rightarrow p-2 = 3; p+2 = 7$ đều là các số nguyên tố. Do đó $p = 5$ thỏa mãn yêu cầu.

+ Nếu $p > 5$, khi đó do p là số nguyên tố nên p có các dạng $p = 5k+1; p = 5k+2; p = 5k+3; p = 5k+4$ với k là số tự nhiên khác 0. Khi đó dễ thấy $p-2$ hoặc $p+2$ chia hết cho 5. Do đó $p > 5$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $p = 5$ là số nguyên tố cần tìm.

Hoặc:

Gọi số nguyên tố cần tìm là: a

Theo bài ra ta có : a = b + c = d – e (a, b, c, d là các số nguyên tố)

Dễ thấy : a = b + c > 2 $\rightarrow a$ là số nguyên tố lẻ $\rightarrow b, c$ khác tính chẵn lẻ

Giả sử b > c $\rightarrow c = 2$

Có : $\begin{cases} a = d - e \\ a : le \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d, e \neq chan, le \\ d > e \end{cases} \rightarrow e = 2$

Vậy a = b + 2 = d – 2 $\rightarrow d = b+4 \rightarrow b, b+2, b+4$ là số nguyên tố $\rightarrow b = 3 \rightarrow a = 5, d = 7$

Vậy a = 5 là số nguyên tố cần tìm

Bài 5:

Tìm tất cả các số nguyên tố p để $p^4 + 2$ cũng là số nguyên tố

Hướng suy nghĩ: *Thử các giá trị 2, 3, 5 ta nhận thấy với p = 3 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Như vậy ta cần chứng minh với các số nguyên tố p khác 3 thì* $p^4 + 2$ *là hợp số. Chú ý rằng khi p chia 3 có số dư là 1 hoặc 2 thì* p^2 chia 3 luôn có số dư là 1, từ đó p^4 chia 3 cũng luôn có số dư là 1. Do vậy $p^4 + 2$ *là hợp số*

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Xét $p = 2$ là số nguyên tố ta có $p^4 + 2 = 18$ là hợp số. Do đó $p = 2$ không thỏa mãn

- Trường hợp 2: Xét $p=3$ là số nguyên tố ta có $p^4+2=83$ là số nguyên tố. Do đó $p=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

- Trường hợp 3: Xét $p>3$, khi đó p là số nguyên tố nên p chỉ có hai dạng $p=3k+1; p=3k+2$ với k là số tự nhiên khác 0. Ta có:

+ Nếu $p=3k+1$ là số nguyên tố, khi đó p^4 chia 3 có số dư là 1, suy ra $\left(p^4+2\right)\vdots 3$ nên là hợp số, do đó $p=3k+1$ không thỏa mãn

+ Nếu $p=3k+2$ là số nguyên tố, khi đó p^2 chia 3 có số dư là 1, suy ra $\left(p^4+2\right)\vdots 3$ nên là hợp số, do đó $p=3k+2$ không thỏa mãn.

Vậy $p=3$ là số nguyên tố cần tìm

Bài 6:

Tìm tất cả các số nguyên tố p để $2p^2-3$ và $2p^2+3$ đều là các số nguyên tố.

Hướng suy nghĩ: *Thử các giá trị 2, 3, 5 ta nhận thấy với p = 5 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Như vậy ta cần chứng minh với các số nguyên tố p khác 5 thì* $2p^2-3$ *hoặc* $2p^2+3$ *là hợp số.*

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Xét $p=2$ là số nguyên tố ta có $2p^2-3=5; 2p^2+3=11$ đều là các số nguyên tố. Do đó $p=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 2: Xét $p=3$ là số nguyên tố ta có $2p^2+3=21$ là hợp số, do đó $p=3$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 3: Xét $p=5$ là số nguyên tố ta có $2p^2-3=47; 2p^2+3=53$ đều là số nguyên tố, do đó $p=5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 4: Xét $p>5$ khi đó p có c ác dạng $p=5k+1; p=5k+2; p=5k+3; p=5k+4$

Trong đó k là số tự nhiên khác 0

+ Nếu $p=5k+1$ là số nguyên tố, khi đó p^2 chia 5 có số dư là 1, suy ra $2p^2+3$ chia hết cho 5 nên là hợp số. Do đó $p=5k+1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $p=5k+2$ là số nguyên tố, khi đó p^2 chia 5 có số dư là 4, suy ra $2p^2-3$ chia hết cho 5 nên là hợp số. Do đó $p=5k+2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $p=5k+3$ là số nguyên tố, khi đó p^2 chia 5 có số dư là 4, suy ra $2p^2-3$ chia hết cho 5 nên là hợp số. Do đó $p=5k+4$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ Nếu $p=5k+4$ là số nguyên tố, khi đó p^2 chia 5 có số dư là 1, suy ra $2p^2+3$ chia hết cho 5 nên là hợp số. Do đó $p=5k+4$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $p\in\{2;5\}$ là các số nguyên tố cần tìm.

Bài 7:

Tìm tất cả các số nguyên tố p để 2^p+p^2 cũng là các số nguyên tố.

Hướng suy nghĩ: *Thử các giá trị 2, 3, 5 ta nhận thấy với p = 3 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Như vậy ta cần chứng minh với các số nguyên tố p khác 3 thì 2^p+p^2 là hợp số. Để ý rằng p > 3 thì p chia 3 có số dư là 1 hoặc 2, khi đó p^2 chia 3 luôn có số dư là 1. Từ đó ta cần chứng minh được 2^p chia 3 có số dư là 2. Tương tự xét trường hợp $p=3k+1; p=3k+2$. Tuy nhiên với 2 trường hợp như vậy ta chưa thể chỉ ra được 2^p chia 3 có số dư là 2. Ta biết rằng mọi số nguyên tố p lớn hơn 3 biểu diễn được dưới hai dạng $p=6k+1; p=6k+5$ từ đó ta xét hai trường hợp như trên để chứng minh 2^p chia 3 có số dư là 2.*

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Xét $p=2$, khi đó ta được $2^p+p^2=2^2+2^2=8$ là hợp số

- Trường hợp 2: Xét $p=3$, khi đó ta được $2^p+p^2=2^3+3^2=17$ là số nguyên tố.

- Trường hợp 3: Xét $p>3$, khi đó p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 3 nê p có hai dạng $p=6k+1$ và $p=6k+5$ với k là số tự nhiên.

+ Nếu $p=6k+1$, khi đó ta có $2^p+p^2=2^{6k+1}+(6k+1)^2=2.64^k+(6k+1)^2$. Ta có 64^k chia 3 có số dư là 1 nên 2.64^k chia 3 có số dư là 2, lại có $(6k+1)^2$ chia 3 có số dư là 1. Như vậy $2^p+p^2=2.64^k+(6k+1)^2$ chia hết cho 3 hay 2^p+p^2 là hợp số.

+ Nếu $p=6k+5$, khi đó ta có $2^p+p^2=2^{6k+5}+(6k+5)^2=2^5.64^k+(6k+5)^2$. Ta có 64^k chia 3 có số dư là 1 nên 32.64^k chia 3 có số dư là 2, lại có $(6k+5)^2$ chia 3 có số dư là 1. Như vậy $2^p+p^2=2^5.64^k+(6k+5)^2$ chia hết cho 3 hay 2^p+p^2 là hợp số.

Do đó các số nguyên tố lớn hơn 3 không thỏa mãn bài toán.

Vậy $p=3$ là số nguyên tố cần tìm.

Bài 8:

Tìm ba số nguyên tố liên tiếp nhau sao cho tổng bình phương của ba số đó cũng là một số nguyên tố.

Hướng suy nghĩ: *Gọi ba số nguyên tố liên tiếp nhau cần tìm là x, y, z và* $x<y<z$. *Để ý rằng với các số nguyên tố lớn hơn 3 thì bình phương của nó chia 3 luôn có số dư là 1. Do vậy với* $3<x<y<z$ *thì* $\left(x^2+y^2+z^2\right) \vdots 3$. *Từ đó ta chỉ cần xét các bộ số nguyên tố liên tiếp nhau như* $(2;3;5);(3;5;7)$ *để kiểm tra.*

Lời giải

Gọi ba số nguyên tố liên tiếp nhau là x, y, z và $x<y<z$. Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Với $x=2; y=3; z=5$. Khi đó $x^2+y^2+z^2=38 \vdots 2$ là hợp số. Trường hợp này không thỏa mãn

- Trường hợp 2: Với $x=3; y=5; z=7$. Khi đó $x^2+y^2+z^2=83$ là số nguyên tố.

Vậy bộ ba số $(x;y;z)=(3;5;7)$ là bộ ba số nguyên tố liên tiếp

- Trường hợp 3: Với $x>3 \Rightarrow y>5; z>7$ từ đó suy ra x, y, z chia 3 có số dư là 1 hoặc 2. Suy ra $x^2;y^2;z^2$ chia 3 dư 1 nên $\left(x^2+y^2+z^2\right) \vdots 3$ nên là hợp số

Vậy bộ ba số $(x;y;z)=(3;5;7)$ là bộ ba số nguyên tố liên tiếp.

Bài 9:

các số nguyên tố x, y, z thỏa mãn đẳng thức $x^y+1=z^2$.

Hướng suy nghĩ: *Từ đẳng thức của bài toán ta thấy x và z khác tính chẵn lẻ. Như vậy ta cần xét hai trường hợp x = 2 hoặc z = 2. Nhận thấy ngay với z = 2 thì ta thu được x = 3; y = 1 không thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Từ đó ta xét bài toán với trường hợp x = 2 và ta có hai hướng sau*

+ Hướng 1: Ta quy bài toán về $2^y+1=z^2 \Leftrightarrow 2^y=z^2-1=(z-1)(z+1)$. *Từ đây chú ý đến 2 là số nguyên ta suy ra được* $z-1=2^u; z+1=2^v$ *với* $u+v=y$

+ Hướng 2: Xét tính chẵn lẻ của y và z.

Lời giải

Cách 1: Từ giả thiết ta suy ra x^y và z^2 khác tính chẵn lẻ dẫn đến x và z cũng khác tính chẵn lẻ. Mà x và z là hai số nguyên tố nên ta xét các trường hợp sau

+ Với $x=2;z\neq 2$ thì ta được $2^y+1=z^2 \Leftrightarrow 2^y=(z-1)(z+1) \Rightarrow z-1;z+1$ là các số lũy thừa của 2.

Đặt $z-1=2^u;z+1=2^v$ với u, v là các số tự nhiên khác 0 và $v>u;u+v=y$. Khi đó ta có

$$2^v-2^u=2 \Leftrightarrow 2^u\left(2^{v-u}-1\right)=2 \Leftrightarrow \begin{cases}2^u=2\\2^{v-u}-1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=1\\v=2\end{cases}$$

Vì $2^{v-u}-1$ là số lẻ $\Rightarrow z=3;y=3$. Thử bộ số $(2;3;3)$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn.

+ Với $x\neq 2;z=2$ thì ta có $x^y+1=4 \Leftrightarrow x^y=3$ do x là số lẻ nên từ đẳng thức trên suy ra $x=3;y=1,$ không thỏa mãn vì $y=1$ không phải là số nguyên tố.

Vậy bộ ba số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y;z)=(2;3;3)$

Cách 2: Ngoài cách xét như trên ta có thể xét tính chẵn lẻ của x, y z như sau

Nếu x là số lẻ suy ra x^y là số lẻ suy ra z^2 chẵn hay $z=2 \Rightarrow x^y=3$

Mặt khác vì x, y là số nguyên tố nên ta được $x\geq 2;y\geq 2 \Rightarrow x^y\geq 2^2=4.$ Từ đó ta có mẫu thuẫn.

Do đó x là số chẵn nên suy ra x = 2. Khi đó đẳng thức đã cho trở thành $2^{y+1}=z^2.$ Ta xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: Xét y là số nguyên tố chẵn. Khi đó y = 2 nên suy ra $z^2=5$. Không tồn tại z là số nguyên tố thỏa mãn

+ Trường hợp 2: Xét y là số nguyên tố lẻ. Khi đó y có dạng $y=2k+1\left(k\in N^*\right) \Rightarrow 2^y+1=z^2 \Leftrightarrow 2^{2k+1}+1=z^2 \Rightarrow 2.4^k+1=z^2 \Rightarrow 2(3+1)^k+1=z^2 \Rightarrow z^2 \vdots 3 \Rightarrow y=3$

Thử lại ta thấy bộ số $(x;y;z)=(2;3;3)$ thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y;z)=(2;3;3)$

***) Cách ngắn gọn:**

+) Nếu x lẻ $\rightarrow x^y: le \rightarrow x^y+1: chan \rightarrow z=2 \rightarrow loai$ do z > 2 vì $z=x^y+1>2$

$\rightarrow x: chan \rightarrow x=2 \rightarrow 2^y+1=z$ mà $y\geq 2 \rightarrow z\geq 5$

+) Nếu y lẻ $\rightarrow y=2k+1 \rightarrow z=2^{2k+1}+1=4^k.2+1$

Ta có: $4^k: 3du1 \rightarrow 2.4^k: 3du2 \rightarrow 4^k.2+1 \vdots 3 \rightarrow z \vdots 3, z\geq 5 \rightarrow không \exists z \rightarrow$ y:chan $\rightarrow$ y = 2 $\rightarrow$ z = 5.

Bài 10:

Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r, s sao cho $p^s+s^q;q^s+s^r;r^s+s^p$ cũng là số nguyên tố.

Hướng suy nghĩ: *Quan sát các biểu thức đã cho ta thấy số nguyên tố s có mặt ở tất cả các biểu thức, ngoài ra do p, q, s, r và các biểu thức trên là số nguyên tố nên các biểu thức đã cho phải là số nguyên tố lẻ. Như vậy ta thấy nếu s là số chẵn thì các số p, q, r ohair là số lẻ và nếu s là số lẻ thì các số p, q, r phải là số chẵn đều là số lẻ. Từ đó ta xét tính chẵn lẻ của s để giải bài toán.*

Lời giải

Ta xét hai trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Xét s là số nguyên tố lẻ. Khi đó $p^s+s^q;q^s+s^r;r^s+s^p$ cũng là số nguyên tố ta suy ra được p, q, r phải là số nguyên tố chẵn, do đó $p=q=r=2$. Do đó 2^2 chia 3 dư 1 nên $2^{2k+1}=2.2^{2k}$ chia 3 có số dư là 2. Do s là số lẻ nên s có dạng $s=2k+1$ với k là một số tự nhiên khác 0. Suy ra $2^s=2^{2k+1}$ chia 3 có số dư là 2

+ Nếu s không chia hết cho 3 thì s^2 chia 3 có số dư là 1. Khi đó 2^s+s^2 chia hết cho 3, mà lại có $2^s+s^2>3$ nên là hợp số, điều này mâu thuẫn với 2^s+s^2 là số nguyên tố.

+ Nếu s chia hết cho 3, khi đó do s là số nguyên tố nên ta được s = 3, suy ra được $2^s+s^2=2^3+3^2=17$ là số nguyên tố. Vậy $(p;q;r;s)=(2;2;2;3)$ là một bộ số thỏa mãn bài toán.

- Trường hợp 2: Xét s là số nguyên tố chẵn. Khi đó ta suy ra được s = 2. Mặt khác theo bài ra thì $p^2+s^q;q^s+s^r;r^s+s^p$ cùng là số nguyên tố ta suy ra được p, q, r phải là số nguyên tố lẻ, do đó $p=q=r\ge 3$. Nếu p không chia hết cho 3 thì p^2 chia 3 có số dư là 1, mà lại có q là số lẻ nên 2^q chia 3 có số dư là 2. Khi đó p^2+2^q chia hết cho 3 và $p^2+2^q>3$ nên là hợp số, điều này mâu thuẫn với $p^2+2^q>3$ là số nguyên tố. Như vậy p chia hết cho 3, khi đó do p là số nguyên tố nên ta được p =3. Lập luận tương tự ta cũng được $p=r=3\Rightarrow (p;q;r;s)=(3;3;3;2)$ Là một bộ số thỏa mãn bài toán. Vậy các bộ ba số $(p;q;r;s)=(3;3;3;2);(2;2;2;3)$.

Bài 11:

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $3n-4;4n-5;5n-3$ đều là các số nguyên tố

Hướng suy nghĩ: *Quan sát các biểu thức ta thấy* $3n-4+4n-5+5n-3=12n-12$ là số chẵn và chia hết cho 3. Như vậy trong ba số $3n-4; 4n-5; 5n-3$ phải có ít nhất một số chẵn. Lại thấy $4n-5$ Là số chẵn nên suy ra một trong hai số $3n-4; 5n-3$ phải là số chẵn. Do các số đã cho là số nguyên tố nên ta có $3n-4=2$ hoặc $5n-3=2$. Từ đó nhận xét các trường hợp của bài toán.

Lời giải

Xét tổng của ba số đã cho là $3n-4+4n-5+5n-3=12n-12$ là số chẵn, suy ra trong ba số $3n-4; 4n-5; 5n-3$ phải có ít nhất một số chẵn và đồng thời là số nguyên tố. Do đó trong ba số $3n-4; 4n-5; 5n-3$ có ít nhất một số bằng 2. Dễ thấy ngay $4n-5$ là số lẻ nên ta xét 2 trường hợp:

- Trường hợp 1: Xét $3n-4=2 \Leftrightarrow n=2 \Rightarrow 4n-5=3$ và $5n-3=7$ đều là các số nguyên tố. Do vậy $n=2$ là một số thỏa mãn bài toán.

- Trường hợp 2: Xét $5n-3=2 \Leftrightarrow n=1 \Rightarrow 4n-5$ không phải là số tự nhiên vì $4n<5 \Rightarrow n=1$ không thỏa mãn bài toán.

Vậy $n=2$ là số tự nhiên duy nhất cần tìm.

Bài 12:

Tìm tất cả các số tự nhiên k sao cho $k+1; k+77; k+99$ đều là các số nguyên tố.

Hướng suy nghĩ: *Quan sát các biểu thức ta thấy* $k+1; k+77; k+99$ *ta thấy các số đó khi chia cho 3 đều có số dư là 0; 1; 2. Như vậy do ba số là số nguyên tố nên phải có một số là 3. Từ đó ta xét các trường hợp* $k+1=3$ *hoặc* $k+77=3$ *hoặc* $k+99=3$ *để giải toán.*

Lời giải

Một số tự nhiên bất kỳ khi chia cho 3 có thể nhận một trong các số dư là 0; 1; 2. Như vậy số tự nhiên k viết được dưới dạng $k=3n; k=3n+1; k=3n+2 \left(n \in N\right)$. Ta xét các trường hợp

- Trường hợp 1: Xét $k=3n$, khi đó dễ thấy $k+99=3n+99$ chia hết cho 3.

- Trường hợp 2: Xét $k=3n+1$, khi đó dễ thấy $k+77=3n+1+77=3n+78$ chia hết cho 3.

- Trường hợp 3: Xét $k=3n+2$ khi đó dễ thấy $k+1=3n+2+1=3n+3$ chia hết cho 3.

Như vậy trong ba số $k+1; k+77; k+99$ luôn có một số chia hết cho 3. Như vậy để ba số $k+1; k+77; k+99$ là số nguyên tố thì một trong ba số phải bằng 3. Để ý rằng

$3 < k+77 < k+99 \Rightarrow k+1=3 \Leftrightarrow k=2$. Khi đó ta được $k+77=79$ và $k+99=101$ đều là số nguyên tố. Vậy $k=2$ là số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Bài 13:

Tìm tất cả các số tự nhiên k sao cho $k+1; k+3; k+7; k+9; k+13; k+15$ đều là các số nguyên tố.

Lời giải

Một số tự nhiên bất kì khi chia cho 5 có thể nhận môt trong các số dư $0,1,2,3,4$. Như vậy số k viết được dưới dạng $k=5n; k=5n+1; k=5n+2; k=5n+3; k=5n+4\left(n \in N\right)$. Xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Xét $k=5n,$ khi đó dễ thấy $k+15=5n+15$ chia hết cho 5

- Trường hợp 2: Xét $k=5n+1$ khi đó dễ thấy $k+9=5n+10$ chia hết cho 5

- Trường hợp 3: Xét $k=5n+2$ khi đó dễ thấy $k+3=5n+5$ chia hết cho 5

- Trường hợp 4: Xét $k=5n+3$ khi đó dễ thấy $k+7=5n+10$ chia hết cho 5

- Trường hợp 4: Xét $k=5n+4$ khi đó dễ thấy $k+1=5n+5$ chia hết cho 5

Như vậy trong 5 số $k+1; k+3; k+7; k+9; k+13; k+15$ luôn có một số chia hết cho 5. Để ý rằng $5 < k+7 < k+9 < k+13 < k+15 \Rightarrow k+1=5$ hoặc $k+3=5$

+ Với $k+1=5 \Leftrightarrow k=4$, Khi đó ta được các số sau đều là các số nguyên tố $k+1=5; k+3=7; k+7=11; k+9=13; k+13=17; k+15=19$

+ Với $k+3=5 \Leftrightarrow k=2$, Khi đó ta được $k+7=9$ là hợp số.

Vậy $k=4$ là số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 3: Chứng minh một số là số nguyên tố hay hợp số

Nhận xét ban đầu: *Dạng toán chứng minh một số là số nguyên tố hay hợp số cũng khá giống dạng toán thứ nhất, tuy nhiên mức độ khó của dạng toán này sẽ cao hơn. Thông thường để chứng minh một số A là hợp số ta phải chứng minh a chia hết cho một số nhỏ hơn A hoặc ta đi chứng minh* $A > p$ *và* $A \vdots p$ *(trong đó p là số nguyên tố) và để chứng minh a là số nguyên tố thì ta cần phải chứng minh a không chia hết cho số nguyên tố nào nhỏ hơn* $\sqrt{a}$*.*

Bài 1:

Cho p và q là hai số nguyên tố lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng $\frac{p+q}{2}$ là hợp số.

Hướng suy nghĩ: *Do p và q là các số nguyên tố lẻ nên tổng p + q là số chẵn, như vậy để chứng minh* $\frac{p+q}{2}$ *là hợp số ta chỉ cần chứng minh* $\frac{p+q}{2}$ *lớn hơn một số nguyên tố nào đó là được.*

Lời giải

Do p và q là hai số nguyên tố lẻ liên tiếp nên $\frac{p+q}{2}$ là số tự nhiên. Do p và q có vai trò như nhau nên không mất tính tổng quát ta giả sử $p < q \Rightarrow 2p < p+q < 2q \Rightarrow p < \frac{p+q}{2} < q$. Như vậy $\frac{p+q}{2}$ là số tự nhiên nằm giữa hai số nguyên tố lẻ p và q liên tiếp. Suy ra $\frac{p+q}{2}$ là hợp số.

Bài 2:

Cho p và $8p-1$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng $8p+1$ là hợp số.

Hướng suy nghĩ: *Thử một số nguyên tố ta thấy p = 3 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Như vậy ta đi chứng minh với p là số nguyên tố khác 3 thì* $8p-1$ *luôn là hợp số*

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Nếu $p=2$, khi đó $8p-1=15$ là hợp số nên $p=2$ không thỏa mãn.

- Trường hợp 2: Nếu $p=3$, khi đó $8p-1=23$ là số nguyên tố và $8p+1=25$ là hợp số.

- **Trường hợp 3:** Nếu $p>3$, khi đó do p là số nguyên tố nên p có dạng $p=3k+1; p=3k+2\left(k\in N^*\right)$

+ Với $p=3k+1$ là số nguyên tố thì ta được $8p-1=8(3k+1)-1=24k+7$. Giả sử với $8p-1=24k+7$ là số nguyên tố thì $8p+1=8(3k+1)+1=24k+9$ chia hết cho 3 nên là hợp số.

+ Với $p=3k+2$ là số nguyên tố thì ta được $8p-1=8(3k+2)-1=24k+15$ là hợp số, do đó $p=3k+2$ không thỏa mãn.

Bài 3:

Cho p và $8p+1$ là các số nguyên tố ($p>3$). Chứng minh rằng $4p+1$ là hợp số

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p chia 3 dư 1 hoặc dư 2 $\to p$ có dạng $3k+1;3k+2(k\in N^*)$

- Nếu $p=3k+1\to 8p+1=24k+9\vdots 3\to 8p+1$ là hợp số (loại)

- Nếu $p=3k+2\to 4p+1=12k+9\vdots 3(dpcm)$ là hợp số (loại)

Bài 4:

Giả sử p và p^2+2 đều là các số nguyên tố. Chứng minh rằng p^3+2 cũng là số nguyên tố.

Lời giải

+) $p=3k+1(k\in N^*)\to p^2+2$ là hợp số

+) $p=3k+2(k\in N^*)\to p^2+2$ là hợp số

+) $p=3k\to p=3\to p^3+2=29(tm)$ là hợp số

Bài 5:

Cho a, b, c là các số nguyên dương sao cho các số $p=a^b+c;q=b^c+a;r=c^a+b$ đều là các số nguyên tố. CMR : Trong ba số p, q, r có ít nhất hai số bằng nhau

Lời giải

Trong ba số a, b, c có ít nhất 2 số có cùng tính chất chẵn lẻ, chẳng hạn b và c cùng lẻ

$\to r$ là số chẵn $\to r=2\to c^a+b=2\to b=c=1$

Khi đó $\begin{cases} p=a^1+1=a+1 \\ q=1^1+a=a+1 \end{cases}\to p=q\to KL$

Tương tự các trường hợp còn lại.

Bài 6:

Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 và $2p+1$ là số nguyên tố thì $4p+1$ là hợp số.

Hướng suy nghĩ: *Thử một số nguyên tố ta thấy p = 3 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Như vậy ta đi chứng minh với p là số nguyên tố khác 3 thì $2p+1$ luôn là hợp số*

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có hai dạng $p=3k+1$ và $p=3k+2\left(k\in N^*\right)$

+ Nếu $p=3k+1$ là số nguyên tố thì ta có $2p+1=6k+3$ chia hết cho 3 nên là hợp số. Do đó $p=3k+1$ không thỏa mãn.

+ Nếu $p=3k+2$ là số nguyên tố thì ta có $2p+1=6k+5$. Giả sử $2p+1=6k+5$ cũng là số nguyên tố. Khi đó $4p+1=12k+9$ chia hết cho 3 nên là hợp số.

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 7:

Chứng minh rằng nếu 2^n-1 là số nguyên tố $(n>2)$ thì 2^n+1 là hợp số.

Hướng suy nghĩ: *Với $n>2$ thì các số 2^n-1 và 2^n+1 đều lớn hơn 3. Lại thấy hai số 2^n-1 và 2^n+1 cách nhau hai đơn vị nên ta có dãy $2^n-1;2^n;2^n+1$ là ba số tự nhiên liên tiếp, nhu vậy trong ba số đó luôn có một số chia hết cho 3. Mà ta thấy 2^n không chia hết cho 3 nên trong hai số 2^n+1 và 2^n-1 thì có một số chia hết cho 3. Từ đó khi 2^n-1 là số nguyên tố không chia hết cho 3 thì 2^n+1 là hợp số.*

Lời giải

Xét ba số tự nhiên liên tiếp là $2^n-1;2^n;2^n+1$

Trong ba số tự nhiên liên tiếp trên có duy nhất một số chia hết cho 3

Do $n>2\Rightarrow 2^n-1>3$ mà theo giả thiết thì 2^n-1 là số nguyên tố, do đó 2^n-1 không chia hết cho 2. Lại có 2^n không chia hết cho 3. Do đó suy ra nếu 2^n+1 chia hết cho 3. Mà do $n>2$ nên $2^n+1>3$. Từ đó ta được 2^n+1 là hợp số.

Bài 8:

Chứng minh rằng với p và $8p^2+1$ là số nguyên tố thì $8p^2-1$ là hợp số.

Hướng suy nghĩ: *Thử một số nguyên tố ta thấy chỉ có p = 3 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Như vậy ta đi chứng minh với p là số nguyên tố khác 3* thì $8p^2+1$ luôn là hợp số.

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Xét $p=2$ là số nguyên tố. Khi đó $8p^2+1=33$ chia hết cho 3 nên là hợp số, do đó $p=2$ không thỏa mãn.

- Trường hợp 2: Xét $p=3$ là số nguyên tố. Khi đó $8p^2+1=73; 8p^2-1=71$ đều là số nguyên tố.

- Trường hợp 3: Xét $p>3$. Vì p là số nguyên tố nê p có hai dạng $p=3k+1$ và $p=3k+2\left(k\in N^*\right)$

+ Nếu $p=3k+1$ là số nguyên tố thì ta có $8p^2+1=8(3k+1)^2+1=72k^2+48k+9$ chia hết cho 3 nên là hợp số. Do đó $p=3k+1$ không thỏa mãn.

+ Nếu $p=3k+2$ là số nguyên tố thì ta có $8p^2+1=8(3k+2)^2+1=72k^2+96k+33$ chia hết cho 3 nên là hợp số. Do đó $p=3k+2$ không thỏa mãn.

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 9:

Cho a, b, c, d là các số tự nhiên khác 0 thảo mãn $a^2+c^2=b^2+d^2$. Chứng minh rằng $a+b+c+d$ là hợp số.

Lời giải

Ta có $\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)-(a+b+c+d)=\left(a^2-a\right)+\left(b^2-b\right)+\left(c^2-c\right)+\left(d^2-d\right)$

$=a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)+d(d-1)$ chia hết cho 2.

Lại có $a^2+c^2=b^2+d^2\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2=2\left(b^2+d^2\right)\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2$ chia hết cho 2. Như vậy theo tính chất chia hết của một tổng thì $a+b+c+d$ chia hết cho 2.

Mà ta có $a+b+c+d\geq 4\Rightarrow a+b+c+d$ là hợp số.

Bài 10:

Cho p là số nguyên tố thỏa mãn p^3-6 và $2p^3+5$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng p^2+10 cũng là số nguyên tố.

Hướng suy nghĩ: *Thử một số nguyên tố ta thấy chỉ có p = 7 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Như vậy ta đi chứng minh với p là số nguyên tố* khác 7 thì p^3-6 hoặc $2p^3+5$ luôn là hợp số.

Lời giải

Ta xét các trường hợp sau

- Trường hợp 1: Xét $p=2$ là số nguyên tố. Khi đó $2p^3+5=21$ là hợp số, do đó $p=2$ không thỏa mãn.

- Trường hợp 2: Xét $p=3$ là số nguyên tố. Khi đó $p^3-6=21$ là hợp số, do đó $p=3$ không thỏa mãn.

- Trường hợp 3: Xét $p=5$ là số nguyên tố. Khi đó $2p^3+5=255$ là hợp số, do đó $p=5$ không thỏa mãn.

- Trường hợp 4: Xét $p=7$ là số nguyên tố. Khi đó $p^3-6=337; 2p^3+5=691$ đều là các số nguyên tố. Do đó ta được $p^2+10=59$ cũng là số nguyên tố.

- Trường hợp 5: Xét $p>7$. Vì p là số nguyên tố nên p có hai dạng $p=7k\pm1$ hoặc $p=\pm7k+2$ hoặc $p=7k\pm3\left(k\in N^*\right)$. Khi đó p^3 chia 7 có số dư là -1 hoặc 1 hay p^3 chia 7 có số dư là 1 hoặc 6.

+ Nếu p^3 chia 7 có số dư là 1 thì $2p^3+5$ chia hết cho 6, mà $2p^3+5>7$ nên là hợp số

+ Nếu p^3 chia 7 có số dư là 6 thì p^3-6 chia hết cho 7, mà $p^3-6>7$ nên là hợp số. Do đó $p>7$ không thỏa mãn.

Vậy với $p=7$ thì p^2+10 cũng là số nguyên tố. Bài toán được chứng minh.

Bài 11:

Cho $n\geq2$ là số tự nhiên thỏa mãn $1.2.3...n+1$ chia hết cho $n+1$. Chứng minh rằng $n+1$ là số nguyên tố.

Lời giải

Giả sử $n+1$ là hợp số. Khi đó tồn tại số tự nhiên d là ước của $n+1$ với $1<d<n+1$.

Như vậy ta được $d \le n$ và do đó $1.2.3...n$ chia hết cho n. Theo bài ra ta có $1.2.3...n+1$ chia hết cho $n+1$ nên suy ra $1.2.3...n+1$ cũng chia hết cho d. Mà ta lại có $1.2.3...n$ chia hết cho d nên theo tính chất chia hết của một tổng ta được 1 cũng chia hết cho d, do d dó suy ra $d=1$, điều này mẫu thuẫn với $1<d$. Như vậy điều giả sử là sai. Vậy $n+1$ là số nguyên tố.

MỘT SỐ BÀI TOÁN SỐ HỌC LIÊN QUAN ĐẾN SỐ NGUYÊN TỐ

Nhận xét: *Các bài toán số học liên quan đến số nguyên tố là những bài toán về quan hệ chia hết, số chính phương,...có sử dụng các tính chất của số nguyên tố để giải quyết bài toán. Có thể nói đây là một dạng toán khá khó vì ngoài các tính chất về số nguyên tố ta cần sử dụng thì còn có các tính chất khác về quan hệ chia hết, tính chất số chính phương,...*

Bài 1:

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn $p+2$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng $p+1$ chia hết cho 6

Hướng suy nghĩ: *Khi* $p+1$ *chia hết cho 6 thì* $p+1$ *là hợp số. Như vậy ta giải bài toán chứng minh một số là hợp số tương tự các bài toán ở dạng toán trước*

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $p=3k+1$ và $p=3k+2\left(k\in N^*\right)$. Ta đi xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1: Nếu $p=3k+1$ là số nguyên tố, khi đó ta có $p+2=3k+3$ chia hết cho 3 nên là hợp số. Do đó $p=3k+1$ không thỏa mãn.

- Trường hợp 2: Nếu $p=3k+2$ là số nguyên tố, khi đó ta có $p+2=3k+4$. Giả sử $p+2=3k+4$ cũng là số nguyên tố. Khi đó ta có $p+1=3k+3=3(k+1)$ chia hết cho 3. Mà ta đã có $p=3k+2$ là số nguyên tố lẻ nên k là số lẻ, do đó $k+1$ chia hết cho 2 $\Rightarrow 3(k+1)$ chia hết cho 6 nên $p+1$ chia hết cho 6. Vậy bài toán được chứng minh.

Bài 2 :

Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 24.

Hướng suy nghĩ: *Với p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì p là số lẻ, khi đó* $p+1$ *và* $p-1$ *là hai số chẵn liên tiếp, do đó* $(p+1)(p-1)$ *chia hết cho 8. Như vậy ta cần chứng minh* $(p+1)(p-1)$ *chia hết cho 3. Điều này hiển nhiên vì p không chia hết cho 3 thì* $p+1$ *hoặc* $p-1$ *chia hết cho 3*

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên ta được $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2$ với k là số tự nhiên khác 0.

- Trường hợp 1: nếu $p=3k+1$ thì ta được $(p+1)(p-1)=(3k+2).3k$ chia hết cho 3.

- Trường hợp 2: nếu $p=3k+2$ thì ta được $(p+1)(p-1)=(3k+3).(3k+1)$ chia hết cho 3.

Vậy p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 3

Mặt khác vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ. Suy ra $p+1$ và $p-1$ là hai số chẵn liên tiếp $p-1=2n \Rightarrow p+1=2n+2$

Từ đó ta có: $(p+1)(p-1)=2n(2n+2)=4n(n+1)$. Mà $n(n+1)\vdots 2 \Rightarrow 4n(n+1)\vdots 4 \Rightarrow (p+1)(p-1)\vdots 8$

Vì 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau nên ta được $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 24.

Bài 3:

Cho p và q là các số nguyên tố sao cho $p>q>3$ và $p-q=2$. Chứng minh rằng $p+q$ Chia hết cho 12.

Hướng suy nghĩ: *Với p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì p là số lẻ. Tương tự như trên ta đi chứng minh p + q chia hết cho 3 và 4*

Lời giải

Do q là số nguyên tố lớn hơn 3 nên q không chia hết cho 3, do đó q có các dạng là $q=3k+1$ Và $q=3k-1$ với k là số nguyên dương. Ta xét hia trường hợ sau

- Trường hợp 1: Với $q=3k-1$, khi đó từ $p-q=2 \Rightarrow p=3k+3=3(k+1)\vdots 3$, điều này mâu thuẫn với p là số nguyên tố lớn hơn 3. Do đó trường hợp này loại.

- Trường hợp 2: Với $q=3k+1$, khi đó từ $p-q=2 \Rightarrow p=3k+1 \Rightarrow p+q=6k\vdots 6$. Mặt khác do p và q là các số nguyên tố lớn hơn 3 nên p và q là hai số lẻ. Lại có $p-q=2$ nên p và q là hai số lẻ liên tiếp. Từ đó suy ra $p+1$ và $q+1$ là hai số chẵn liên tiếp, do đó trong hai số $p+1$ hoặc $q+1$ có một số chia hết cho 4.

+ Nếu $p+1$ chia hết cho 4 thì $p=4m-1$ với m là số tự nhiên khác 0, khi đó từ $p-q=2 \Rightarrow q=4m-3 \Rightarrow p+q=8m-4$ chia hết cho 4.

+ Nếu $q+1$ chia hết cho 4 thì $q=4m-1$ với m là số tự nhiên khác 0, khi đó từ $p-q=2 \Rightarrow p=4m-1 \Rightarrow p+q=8m$ chia hết cho 4.

Vậy trong các trường hợp ta đều có $p+q$ chia hết cho 4.

Mà 3 và 4 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $p+q$ chia hết cho 12.

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

A. Lý thuyết

- Hợp số là số có nhiều hơn 2 ước

- Chứng minh số A là hợp số

+) Ta đi chứng minh $A > p$ và $A \vdots p$ (trong đó p là số nguyên tố)

B. Bài tập

Bài 1:

a. Cho p là số nguyên tố, hỏi $p^5 - 1$ là số nguyên tố hay hợp số

b. Cho p và p + 4 là các số nguyên tố (p > 3). Chứng minh p + 8 là hợp số

Lời giải

a. Nếu $p = 2 \to p^5 - 1 = 2^5 - 1 = 31$ là số nguyên tố

- Nếu $p > 2 \to p : le \to p^5 : le \to p^5 - 1 : chan \to p^5 - 1$ là hợp số

b. $p, p+4, p+8$ là dãy số cách đều 4 đơn vị $\to$ có 1 số chia hết cho 3

Vì $p > 3 \to p, p+4$ là số nguyên tố $\to p \not\vdots 3; p+4 \not\vdots 3 \to p+8 \vdots 3 \to p+8$ là hợp sô

Bài 2:

Chứng minh rằng các số sau là hợp số :

$121;121+1;112111;\underbrace{11...1}_{n}2\underbrace{11.....1}_{n}(n>2)$

Lời giải

Ta có: $121 = 110 + 11 = 11.10 + 11 = 11(10+1); 11211 = 1110 + 111 = 111(10^2 + 1)$

$1112111 = 1111000 + 1111 = 1111(10^3 + 1); \underbrace{111...1}_{n}2\underbrace{111...1}_{n} = \underbrace{111...1}_{n+1}\underbrace{000...0}_{n} + \underbrace{11...1}_{n+1}$

$= \underbrace{111....1}_{n+1}(1\underbrace{0....0}_{n} + 1) = \underbrace{11...1}_{n+1}(10^n + 1)$ là hợp số

Bài 3:

a) Cho p và p + 2 là số nguyên tố (p > 3). CMR: p + 1 là hợp số và $p+1 \vdots 6$

b) Cho p và p + 4 là số nguyên tố. CMR: p + 2021 là hợp số

Lời giải

a) Xét dãy $p, p+1, p+2 \to p+1 \vdots 3 (la.hop.so) (1)$

Lại có $p>3 \to p: le \to p+1: chan \to p+1 \vdots 2 (2)$

Từ $(1)(2) \to p+1 \vdots 6$

b) Ta có: $p+2012 = p+2+2010$

Xét dãy $p, p+2, p+4$

+) $p=3 \to p+2012 = 2015 \vdots 5 \to p+2012$ là hợp số

+) $p>3 \to p+2 \vdots 3 \to p+2012 \vdots 3 \to p+2012$ là hợp số

+) $p=2 \to p+4$ là hợp số $\to$ loại

Bài 4:

Một số nguyên tố chia cho 42 có số dư là hợp số. Tìm số dư đó

Lời giải

Gọi p là số nguyên tố theo đầu bài, khi đó: $p = 42.k + r = 2.3.7k + r (0 < r < 42)$

Vì r là hợp số $\to 2 \le r < 42$

Vì p là số nguyên tố $\to r \not\vdots 2,3,7 \to r$ có thể là số nguyên tố hoặc bằng 25 $\to r = 25$ là giá trị cần tìm

Bài 5:

Một số nguyên tố chia cho 60 có số dư là r. Tìm số dư, biết rằng r là số nguyên tố

Lời giải

Giả sử p là số nguyên tố: $p = 60k + r (k \in N; 0 < r < 60); 60 = 2^2.3.5 \to p = 2^2.3.5.k + r \to r \not\vdots 2,3,5$

$\to r = 1$ hoặc r là số nguyên tố hoặc là hợp số và không chia hết cho 2, 3, 5

$\to r = 1$ hoặc r là số nguyên tố khác 2 3, 5 hoặc r = 49 $\to \left[\begin{array}{l} r=1 \\ r=49 \end{array}\right.$

Bài 6:

Chứng minh rằng tổng bình phương của ba số nguyên tố lớn hơn 3 luôn là một hợp số

Lời giải

Giả sử: p, q, r là ba số nguyên tố lớn hơn 3

p^2, q^2, r^2 chia cho 3 có dư là $1 \rightarrow (p^2+q^2+r^2) \vdots 3 \rightarrow p^2+q^2+r^2$ là hợp số

Bài 7:

Tìm tất cả bộ ba số nguyên tố a, b, c sao cho: $abc < ab + bc + ca$

Lời giải

Vì a, b, c có vai trò như nhau, không mất tính tổng quát : Giả sử $a \le b \le c \rightarrow abc < ab + bc + ca \le 3bc \rightarrow a < 3 \rightarrow a = 2 \rightarrow 2bc < 2b + bc + 2c (1) \rightarrow bc < 2(b+c) \le 2.2c$

$\rightarrow bc < 4c \rightarrow b < 4 \rightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=3 \end{array}\right.$

+) $b = 2 \rightarrow (1): 4c < 4 + 4c (dung) \forall c \ge 2$

+) $b = 3 \rightarrow (1): 6c < 6 + 5c \leftrightarrow \begin{cases} c < 6 \\ c \ge b \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{l} c=3 \\ c=5 \end{array}\right.$

Vậy bộ ba số là: $(2;3;3)$

+) $(2;2;p)$: Với p là số nguyên tố

+) $(2;3;3)$ hoặc $(2;3;5)$

Bài 8: Tìm tất cả các số nguyên tố thỏa mãn

a. $3x^2 + 1 = 19y^2$ b. $5x^2 - 11y^2 = 1$ c. $x^2 - 12y^2 = 1$

Lời giải

a. Nếu x chẵn $\rightarrow x = 2 \rightarrow 13 = 19y^2 (loai)$

Nếu x lẻ $\rightarrow 3x^2 : le \rightarrow 3x^2 + 1 : chan \rightarrow 19y^2 : chan \rightarrow y : chan \rightarrow y = 2 \rightarrow x = 5 \rightarrow (x, y) = (5, 2)$

b. Nếu y lẻ $\rightarrow 11y^2 + 1 : chan \rightarrow x : chan \rightarrow x = 2$

+) Nếu y chẵn $\rightarrow y = 2 \rightarrow x = 3 \rightarrow (x, y) = (3, 2)$

c. Không xét được tính chẵn lẻ

+) Với $y = 2 \rightarrow x = 7 \rightarrow tm$

+) Với y > 2 $\rightarrow x > 7 \rightarrow x : le$

Đặt x = 2k + 1, thay vào (1), được : $(2k+1)^2 = 12y^2 + 1 \leftrightarrow 4k(k+1) = 12y^2 \leftrightarrow \underbrace{k(k+1)}_{chan} = \underset{le}{3y^2}$ (2)

Vì x > 7 $\rightarrow k>3, y: le \rightarrow \left.\begin{matrix} VT(2): chan \\ VP(2): le \end{matrix}\right\} \rightarrow VT \neq VP$

Vậy x = 7, y = 2

Bài 9:

Tìm số tự nhiên có bốn chữ số, chữ số hàng nghìn bằng chữ số hàng đơn vị, chữ số hàng trăm bằng chữ số hàng chục và số đó viết được dưới dạng tích của ba số nguyên tố liên tiếp

Lời giải

$\overline{abba} = 1001a + 110b \vdots 11 \rightarrow 3: TH$

+) TH1 : $\overline{abba} = 5.7.11 = 385 \rightarrow loai$

+) TH2 : $\overline{abba} = 7.11.13 = 1001 \rightarrow tm$

+) TH3 : $\overline{abba} = 11.13.17 = 2431 \rightarrow loai$

Bài 10:

Tìm ba số nguyên tố p, q, r sao cho : $p^q + q^p = r$

Lời giải

+) Có : $r \geq 2^2 + 2^2 = 8 \rightarrow r: le$

Nếu p, q lẻ $\rightarrow p^q + q^p : chan \rightarrow r = 2 \rightarrow loai \rightarrow p, q$ khác tính chẵn lẻ

Giả sử p chẵn, q lẻ $\rightarrow p = 2 \rightarrow 2^q + q^2 = r$

+) Nếu $q > 3 \rightarrow q: le \rightarrow q = 2k+1 \rightarrow 2^q = 4^k.2 chia 3 du 2$

q > 3 nên q không chia hết cho 3 nên q^2 chia 3 dư 1 $\rightarrow 2^q + q^2 \vdots 3 \rightarrow r \vdots 3 \rightarrow loai.do.r > 8$

Vậy $q \leq 3 \rightarrow q = 3 \rightarrow r = 17 (tm)$

Vậy p = 2, q = 3, r = 17 hoặc p = 3, q= 2, r = 17

Hoặc cách khác

$p > 3 \rightarrow 2^p + p^2 = \underbrace{(2^p + 1)}_{\vdots 3} + \underbrace{(p^2 - 1)}_{\vdots 3} \rightarrow hop.so$

Bài 11:

Tìm tất cả các số x, y sao cho

a. $7x^2 - 3y^2 = 1$

b. $x^2 = 8y + 1$

Lời giải

a. $7x^2 - 3y^2 = 1 \to x, y$ khác tính chẵn lẻ

+) $x = 2 \to y = 3(tm); y = 2 \to loai$

b. $x^2 = 8y + 1 \to x : le$

+) $x = 3 \to y = 1 \to loai$

+) $x > 3 \to x \,\vdots\!/\, 3 \to x^2 : 3du1 \to 8y + 1 : 3du1 \to 8y \,\vdots\, 3 \to y \,\vdots\, 3 \to y = 3 \to x = 5$

PHƯƠNG PHÁP DÃY SỐ ĐỂ TÌM SỐ NGUYÊN TỐ

Bài toán: Tìm số nguyên tố p để 2 hoặc nhiều số phụ thuộc vào p cũng là số nguyên tố

- Tính chất: Cho q là một số nguyên tố, k là số tự nhiên khác 0, k không chia hết cho q. Khi đó mọi dãy số cách đều gồm bốn số hạng, khoảng cách giữa các số hạng bằng k thì tồn tại duy nhất 1 số chia hết cho q.

Ví dụ: $q=2;k=3$ (k không chia hết cho q)

$n;n+3$

+) $q=3;k=2$

$n;n+2;n+4$, chẳng hạn $\{3;5;7\}$

+) $q=5;k=4$

$n;n+4;n+8;n+12;n+16 \to \{7,11,15,19,23\}$

Bài 1: Tìm số nguyên tố p sao cho các số sau cũng đồng thời là số nguyên tố	
a. p + 2 và p + 10	b. p + 4 và p + 8
c. p + 10 và p + 20	d. p + 8 và p + 10

Lời giải

a. Ta có $p; p+2; p+10$ là số nguyên tố

Xét dãy số $p+2; p+6; p+10$ luôn tồn tại một số chia hết cho 3

Mà $p+2 \geq 4$

$p+2$ và $p+10$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $\to p+2 \not\vdots 3; p+10 \not\vdots 3 \to p+6 \vdots 3 \to p \vdots 3 \to p=3$

Thử lại $p+2=5;\ p+10=13$ là các số nguyên tố.

Cách 2: (lớp 8) xét mod 3

+) Nếu $p=3k \to p=3 \to p+2=5; p+10=13(tm)$

+) Nếu $p=3k+1 \to p+2=3k+3 \vdots 3 \to hopso(\text{loai})$

+) Nếu $p = 3k+2 \to p+10 = 3k+12 \vdots 3 (loai)(k \in N^*)$

Vậy $p = 3$. Thử lại thấy thỏa mãn

b. Xét dãy số $\underbrace{p+10; p+15; p+20}_{\vdots 3 \to p=3}$

c. $p+10; p+12; p+14$

d. $p+8; p+9; p+10$

Bài 2:

Tìm ba số tự nhiên lẻ liên tiếp và đều là các số nguyên tố

Lời giải

Gọi ba STN thỏa mãn bài toán là : $p; p+2; p+4$ (p lẻ)

Trong ba số p, p + 2, p + 4 có duy nhất 1 số chia hết cho 3

Có số 3 là số nguyên tố duy nhất chia hết cho 3

Bài 3: Tìm số nguyên tố p, sao cho các số sa đồng thời là số nguyên tố

a. $p+2; p+6; p+8; p+14$

b. $p+6; p+8; p+12; p+14 \to \bmod : 5$

c. $p+4; p+6; p+10; p+16; p+22$

Lời giải

a. Xét dãy số : $p; p+2; p+4; p+6; p+8 \to$ tồn tại 1 số chia hết cho 5

+) $p = 2 \to p+2 = 4 \to loai$

+) $p = 3 \to p+6 = 9 \to loai$

+) $p \geq 5 \to \left[\begin{array}{l} p \vdots 5 \to p = 5 \\ p+4 \vdots 5 \to p+14 \vdots 5 (loai) \end{array}\right. \Rightarrow p = 5$

b. $p+6; p+8; \underbrace{p+10}_{\vdots 5}; p+12; p+14$

c. $p; p+2; p+4; p+6; p+8; p+10; p+12$

+) p = 2, 3, 5 (loại)

+) $p \geq 7 \to \left[\begin{array}{l} p+2 \vdots 7 \to p+16 \vdots 7 (loai) \\ p+8 \vdots 7 \to p+22 \vdots 7 (loai) \end{array}\right. \Rightarrow p = 7$ thử lại đúng

Bài 4: Tìm số nguyên tố p sao cho

a. $p^2-4; p^2+4$ đều là các số nguyên tố

b. $p+94; p+1994$ là các số nguyên tố

Lời giải

a. Vì p^2-4 là số nguyên tố nên p > 2

+) Nếu p = 3 $\rightarrow$ thỏa mãn

+) p > 3, xét dãy số : $p^2-4; p; p^2+4 \rightarrow$ có 1 số chia hết cho 3 $\rightarrow p^2 \vdots 3 \rightarrow p \vdots 3 \rightarrow p=3(voly)$

Cách khác : Xét số dư

+) $p=3k \rightarrow p=3 \rightarrow tm$

+) $p=3k+1 \rightarrow p^2-4=(3k+1)^2-4=9k^2+6k-3=3(3k^2+2k-1) \vdots 3 \rightarrow h/so$

+) $p=3k+2 \rightarrow p^2-4=(3k+1)^2-4=9k^2+12k+4-4=3(3k^2+4k) \rightarrow h/so$

Vậy p =3

b. Xét dãy số p, p + 47, p + 94 có 1 số chia hết cho 3

+) $p+47 \vdots 3 \rightarrow p+1994 \vdots 3 \rightarrow loai \rightarrow p \vdots 3 \rightarrow p=3(tm)$

Vậy p =3

Bài 5:

Chứng minh rằng : $200p^2-1; 200p^2+1$ không thể đồng thời là số nguyên tố

Lời giải

Giả sử số $200p^2-1; 200p^2+1$ là số nguyên tố

Xét dãy số : $200p^2-1; 200p^2; 200p^2+1 \rightarrow$ có 1 số chia hết cho 3 $\rightarrow \begin{cases} 200p^2 \vdots 3 \\ (200,3)=1 \end{cases} \rightarrow p \vdots 3 \rightarrow p=3$

+) $p=3 \rightarrow 200.3^2-1=1799 \vdots 7(hopso) \rightarrow voly \rightarrow dpcm$

Bài 6:

Cho số nguyên tố p sao cho $8p^2+1$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng $8p^2-1$ cũng là số nguyên tố

Lời giải

Ta đi tìm số nguyên tố p sao cho : $8p^2+1$ là số nguyên tố

+) $p=2 \rightarrow 8p^2+1=33 \vdots 3 \rightarrow loai$

+) $p=3\to 8p^2+1=73$ là số nguyên tố

+) $p\ge 5$, khi đó : $p^2=(3k+1)\to 8p^2+1=3(8k+3)\vdots 3\to 8p^2+1$ không là số nguyên tố

Hoặc xét : p = 3k + 1 ; p = 3k + 2

Do đó p = 3 $\to p=3\to 8p^2-1=71$ là số nguyên tố.

DẠNG TOÁN: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN NHỜ SỬ DỤNG TÍNH CHẤT SỐ NGUYÊN TỐ

A. Kiến thức

Trong nhiều trường hợp khi giải phương trình nghiệm nguyên dẫn đến việc xét các số nguyên tố của số dạng $n=a^{2^t}+b^{2^t}$.

Một số tính chất của ước số nguyên tố của số n để sử dụng vào giải phương trình:

a. Mệnh đề 1: Nếu số nguyên tố $p=2^t k+1$ với các số nguyên dương t, k và k lẻ, là ước của số $n=a^{2^t}+b^{2^t}$ thì p là ước số chung của a và b.

Chứng minh:

+ Giả sử p không là ước số của số a thì p cũng không là ước số của số b

$\Rightarrow (a,p)=(b,p)=1$. Theo định lí nhỏ Fermat thì $a^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$ hay $a^{2^t k}\equiv 1$ (mod p).

+ Tương tự $b^{2^t k}\equiv 1$ (mod p) suy ra $a^{2^t k}+b^{2^t k}\equiv 2$ (mod p) *

Mặt khác sử dụng hằng đẳng thức đáng nhớ ta có $(a^{2^t})^k+(b^{2^t})^k=(a^{2^t}+b^{2^t}).M=n.M$ trong đó k lẻ và M là số nguyên.

Theo giả thiết $n\vdots p\Rightarrow (a^{2^t}+b^{2^t})\vdots p$, mâu thuẫn với *.

Tương tự p không là ước của số p thì p không là ước của số a cũng dẫn đến mâu thuẫn. Vậy số nguyên tố p phải là ước số chung của số a và số b.

b. Mệnh đề 2: Giả sử a và b nguyên tố cùng nhau thì mọi ước số nguyên tố lẻ của a^2+b^2 chỉ có dạng $4m+1$ (mà không có dạng $4m+3$) trong đó m là số nguyên dương.

Chứng minh:

+ Xét ước số nguyên tố $p=4m+3=2(2m+1)+1$. Theo mệnh đề 1 nếu p là ước số nguyên tố của $n=a^2+b^2$ thì p là ước số chung của a và b $\Rightarrow p=1$, mâu thuẫn. Vì p lẻ nên p chỉ có dạng $p=4m+1$

+ Ta thử vận dụng các tính chất trên vào giải một số phương trình nghiệm nguyên dưới đây.

Bài 1:

Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2-y^3=7$ (1)

Lời giải

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2+1=y^3+2^3 \Leftrightarrow x^2+1=(y+2)(y^2-2y+4)$ (2)

Nếu y chẵn thì vế phải của (2) chia hết cho 4 $\Rightarrow x$ lẻ, $x=2t+1 \Rightarrow x^2+1=4t^2+4t+2$ không chia hết cho 4, mâu thuẫn.

Vậy y là số lẻ, $y=2k+1 \Rightarrow y^2-2y+4=4k^2+3$ nên nó phải có ước số nguyên tố lẻ dạng 4m + 3 (vì tích các số dạng 4m + 1 lại có dạng 4k + 1).

Suy ra x^2+1 có ước số nguyên tố dạng p = 4m + 3, trái với mệnh đề 2.

Vậy phương trình (1) không có nghiệm nguyên.

Bài 2:

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x,y) sao cho $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ là số nguyên dương và là ước số của 1995.

Lời giải

Giả sử $\frac{x^2+y^2}{x-y}=k$ nguyên dương và k là ước số của 1995 = 5.3.7.19 = 5n với n = 3.7.19. Các số nguyên tố 3, 7, 19 đều có dạng 2(2m + 1) + 1 = 4m +3

Gọi ước chung lớn nhất của x,y là $d=(x,y)$ thì $x=du, y=dv$ với $(u,v)=1$.

Theo giả thiết $x^2+y^2=k(x-y) \Leftrightarrow d(u^2+v^2)=k(u-v)$ (1).

Xét hai trường hợp:

1) k là ước số của n $\Rightarrow k$ có ước số nguyên tố dạng 4m + 3.

Áp dụng mệnh đề 2 vào (1) thì u^2+v^2 không chứa các ước số nguyên tố của k nên k là ước số của d $\Rightarrow d=k.t$. Từ (1) có $t(u^2+v^2)=u-v$, do đó $u^2<u^2+v^2\le u-v<u \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

2) k = 5m với m là ước số của m. Lúc đó (1) trở thành $d(u^2+v^2)=5m(u-v)$. Lập luận như trên thì m là ước số của d. Suy ra d = m.t. Từ đó ta có $t(u^2+v^2)=5(u-v)$ (2)

Từ (2) có $u^2+v^2\le 5(u-v)$

$A=u^2+v^2-5(u-v)\le 0$ (3)

Mặt khác

$4A=4u^2-20u+25+4v^2+20v+25-50=(2u-5)^2+(2v+5)^2-50\ge 1^2+7^2-50\ge 0\Rightarrow A\ge 0$

Kết hợp với (3) phải có A= 0.

Điều này xảy ra chỉ khi $2u-5=\pm 1$ và v=1, nghĩa là $\begin{cases}u=3\\v=1\end{cases}$ và $\begin{cases}u=2\\v=1\end{cases}$

Từ A = 0 và (2) suy ra $t=1\Rightarrow d=m$. Các số x,y phải tìm là $\begin{cases}x=3m\\y=m\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=2m\\y=m\end{cases}$ trong đó m là ước của n = 3.7.19, nghĩa là m lấy 8 giá trị sau: 1, 3, 7, 19, 21, 57, 133, 399.

Bài 3:

Tìm số nhỏ nhất trong tập hợp các số chính phương dạng 15a + 16b và 16a -15b với a, b là các số nguyên dương nào đó.

Lời giải

Giả sử 15a + 16b = m^2 và 16a -15b = n^2 (1) với m, n là các số nguyên dương.

Khi đó: $m^4+n^4=(15a+16b)^2+(16a-15b)^2=(15^2+16^2)(a^2+b^2)=481(a^2+b^2)$

hay $m^4+n^4=13.37(a^2+b^2)$ (2)

Các số nguyên tố 13 và 37 đều có dạng $p=2^2k+1$ với k lẻ.

Giả sử $(m,n)=d\Rightarrow m=du, n=dv$ với (u,v) =1

=> (2) trở thành $d^4(u^4+v^4)=481(a^2+b^2)$ (3)

Vì (u,v) = 1 nên u^4+v^4 không chứa các ước số nguyên tố 13 và 37 do đó 481 là ước của d

$\Rightarrow d=481.t$. Để cho m, n nhỏ nhất, ta lấy t = 1.

Lúc đó (3) trở thành $481^3(u^4+v^4)=a^2+b^2$ (4)

Từ (1) có $m^2-n^2=31b-a$ hay $481^3(u^2-v^2)=31a-b$ (5).

Có thể chọn $u=v=1$ để m, n nhỏ nhất, lúc đó a = 31b và $a^2+b^2=481^3.2$.

Từ đó có b = 481 và a = 31.481 suy ra m = n = 481.

Bài 4:

Tìm số có 3 chữ số mà có đúng 5 ước.

Lời giải

Giả sử p và q là hai số nguyên tố khác nhau, khi đó pq có 4 ước đó là 1, p, q, pq và số p^2q có 6 ước đó là 1, p, p^2, q, pq, p^2p. Do đó số phải tìm có dạng p^n.

Vì số p^n có n + 1 ước nên muốn có đúng 5 ước thì rõ ràng n = 4. Số p^4 là số có 3 chữ số khi p = 5.

Vậy số phải tìm là $5^4 = 625$.

Bài 5:

Tìm 3 số nguyên tố biết rằng một trong ba số đó bằng hiệu các lập phương của hai số kia.

Lời giải

Gọi ba số nguyên tố đó là a, b, c. Ta có $c = a^3 - b^3$ chẳng hạn.

=> $c = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Muốn c là số nguyên tố thì a - b = 1, điều này chỉ xảy ra khi các số nguyên tố là a = 3, b = 2.

Suy ra: c = 27 - 8 = 19.

Vậy ba số nguyên phải tìm là 2; 3; 19.

Bài 6:

Xét dãy số nguyên tố từ nhỏ đến lớn: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17;... ta lập hai dãy số 5 = 2 + 3; 8 = 3 + 5; 12 = 5 + 7; 18 = 7 + 11; 24 = 11 + 13; ... và 6 = 2.3; 15 = 3.5; 35 = 5.7; 77 = 7.11; 143 = 11.13; ... Có hay không một số hạng nào đó của dãy thứ nhất bằng một số hạng nào đó của dãy thứ hai.

Lời giải

Nhận xét:

+ Ở dãy thứ nhất các số hạng theo thứ tự là tổng của hai số nguyên tố liền nhau và tất cả số hạng của dãy (trừ số hạng đầu là 5) đều là chẵn.

+ Ở dãy thứ hai các số hạng theo thứ tự là tích của hai số nguyên tố liền nhau và tất cả số hạng của dãy (trừ số hạng đầu là 6) đều là lẻ.

Do đó ta có thể kết luận rằng: không có một số hạng nào của dãy thứ nhất bằng một số hạng của dãy thứ hai.

Bài 7:

Tìm số nguyên tố p biết rằng p + 2 và p +4 cũng là số nguyên tố.

Lời giải

Do $p \neq 1$ vì 1 không phải là số nguyên tố, nên p có thể có dạng p = 3k.

Nếu p = 3k + 1 thì p + 2 = 3k + 3 là hợp số.

Nếu p = 3k + 2 thì p + 4 = 3k + 6 cũng là hợp số.

Do đó p chỉ có thể bằng 3 và p + 2 = 3 + 2 =5 là số nguyên tố, p + 4 =3 +4 =7 là số nguyên tố.

Bài 8:

Có bao nhiêu số có ba chữ số mà mỗi chữ số của nó là ước nguyên tố của chúng?

Lời giải

Các ước nguyên tố có 1 chữ số là: 2; 3; 5 và 7.

Nếu số phải tìm bắt đầu bằng chữ số 2 thì nó phải chia hết cho 2 và tận cùng bằng 2. Chữ số thứ hai phải là 2, vì số 232 không chia hết cho 3, số 252 không chia hết cho 5 và số 272 không chia hết cho 7. Vậy số phải tìm là 222.

Tương tự số phải tìm mà bắt đầu bằng chữ số 5 thì đó là số 555.

Bây giờ nếu bắt đầu bằng 3 thì hai chữ số cuối phải tạo thành một số chia hết cho 3, do đó chúng chỉ có thể là 3 và 3 hoặc 5 và 7.

Thử lại thấy rằng chỉ có số 333 là thích hợp.

Cuối cùng nếu bắt đầu bằng 7 thì hai chữ số cuối phải tạo thành một số chia hết cho 7. Thử lại thấy rằng chỉ có hai số 777 và 735 là thích hợp.

Tóm lại có 5 số thỏa mãn bài ra là: 222; 333; 555; 735; 777.

Bài 9:

Một xí nghiệp điện tử trong một ngày đã giao cho một cửa hàng một số máy tivi. Số máy này là một số có ba chữ số mà nếu tăng chữ số đầu lên n lần, giảm các chữ số thứ hai và thứ ba đi n lần thì sẽ được một số mới lớn gấp n lần số máy đã giao. Tìm n và số máy tivi đã giao.

Lời giải

Giả sử số máy tivi đã giao là $\overline{abc}=100a+10b+c$. Ta có:

$100(a+n)+10(b-n)+(c-n)=n(100a+10b+c)$

hay $100a+100n+10b-10n+c-n=100an+10bn+cn$.

Từ đó ta được: $100a+10b+c=\dfrac{89n}{n-1}$.

Nhưng 89 là số nguyên tố nên hoặc n - 1 phải bằng 1 hoặc n phải chia hết cho n-1. Trong cả hai trường hợp ta đều tìm được n =2 và $\overline{abc}=178$.

Vậy số máy tivi đã giao là 178.

Bài 10:

Những số nguyên tố nào có thể là ước của số có dạng 111...11?

Lời giải

Trước hết ta nhận xét rằng số có dạng 111...11 không chia hết cho 2 số nguyên tố 2 và 5.

Giả sử p là số nguyên tố khác 2 và 5. Ta hãy xét p + 1 số sau:

1, 11, 111, 1111, ...,111...11.

ít nhất hai trong các số trên khi chia cho p có số dư giống nhau, thế thì hiệu của chúng 11...1100..0 chia hết cho p.

vậy số có dạng 111...11 có ước là tất cả số nguyên tố trừ hai số nguyên tố 2 và 5.

ĐỊNH LÍ FERMAT

A. Nội dung định lý

Với p là số nguyên tố và (a, p) = 1 thì $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).

B. Vi dụ

Bài 1: Nhà toán học Pháp Fermat đã đưa ra công thức $2^{2^n}+1$ để tìm các số nguyên tố với mọi n tự nhiên.

1. Hãy tính giá trị của công thức này khi n = 4.

2. Với giá trị này hãy chứng tỏ ba tính chất sau:

a) Tổng hai chữ số đầu và cuối bằng tổng các chữ số còn lại.

b) Tổng bình phương các chữ số là số chính phương.

c) Hiệu giữa tổng các bình phương của hai chữ số đầu và cuối với tổng các bình phương của các chữ số còn lại bằng tổng các chữ số của số đó.

Lời giải

1. Ta thay n = 4 vào công thức Fermat và được: $2^{2^4}+1=65537$ là số nguyên tố.

2. Số nguyên tố 65537 có ba tính chất sau:

a) Tổng hai chữ số đầu và cuối 6 + 7 = 13 đúng bằng tỏng ba chữ số còn lại 5+5+3=13.

b) Tổng bình phương các chữ số $6^2+5^2+5^2+3^2+7^2=36+25+25+9+49=144$ là số chính phương vì $144=12^2$.

c) Tổng bình phương của hai chữ số đầu và cuối là $6^2+7^2=36+49=85$. Tổng các bình phương của ba chữ số còn lại là $5^2+5^2+3^2=25+25+9=59$. Tổng các chữ số đó là $6+5+5+3+7=26$.

Ta nhận thấy rằng $85-59=26$. Hiệu này đúng bằng tổng các chữ số của số nguyên tố 65537.

Bài 2:

Cho $n \in N^*$, chứng minh rằng: $2^{2^{10n+1}}+19$ và $2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+5$ là những hợp số

Lời giải

Ta chứng minh $2^{2^{10n+1}}+19 \vdots 23$ với mọi $n \geq 1$.

Ta có: $2^{10} \equiv 1(\text{mod}\, 1) \Rightarrow 2^{10n+1} \equiv 2 \ (\text{mod}\, 22) \Rightarrow 2^{10n+1} = 22k+2, (k \in N)$.

Theo định lý Fermat: $2^{22} \equiv 1(\text{mod}\, 23) \Rightarrow 2^{2^{10n+1}} = 2^{22k+2} \equiv 4(\text{mod}\, 23) \Rightarrow 2^{2^{10n+1}}+19 \vdots 23$.

Mặt khác: $2^{2^{10n+1}}+19 > 23$ nên $2^{2^{10n+1}}+19$ là hợp số với mọi $n \in N*$.

Ta chứng minh: $2^{3^{4n+1}}+3^{2^{4n+1}}+5 \vdots 11$ với mọi $n \geq 1$.

Bài 3:

Tìm số nguyên tố p sao cho 2^p+1 chia hết cho p

Lời giải

Giả sử p là số nguyên tố thỏa: $2^p+1 \vdots p$.

Theo định lý Fermat: $2^p \equiv 2(\text{mod}\, p) \Rightarrow 2^p-2 \vdots p \Rightarrow 3=(2^p+1)-(2^p-2) \vdots p \Rightarrow p=3$.

Với p = 3 ta có $2^p+1=9 \vdots 3$.

Bài 4:

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 2. Chứng minh rằng có vô số số tự nhiên n thỏa $n.2^n-1$ chia hết cho p

Lời giải

Ta có $2^{p-1} \equiv 1(\text{mod}\, p)$, ta tìm $n=(p-1)$sao cho $n.2^n \equiv 1(\text{mod}\, p)$.

Ta có: $n.2^n = m(p-1).2^{m(p-1)}(\text{mod}\, p) \Rightarrow n.2^n \equiv -m \equiv 1(\text{mod}\, p) \Rightarrow m = kp-1, (k \in N*)$.

Vậy, với $n=(kp-1)(p-1), (k \in N*)$ thì $n.2^n-1 \vdots p$.

Bài 5:

Cho p là số nguyên tố. Chứngc minh rằng số 2^p-1 chỉ có ước nguyên tố có dạng $2pk+1$

Lời giải

Gọi q là ước nguyên tố của 2^p-1 thì q lẻ, nên theo định lí Fermat:

$2^{q-1}-1 \vdots q \Rightarrow (2^p-1,2^{q-1}-1)=2^{(p,q-1)}-1 \vdots q \Rightarrow q-1 \vdots p$, vì nếu $(q-1,p)=1$ thì $1 \vdots q$, vô lí.

Mặt khác: q-1 chẵn suy ra $q-1 \vdots 2p \Rightarrow q=2pk+1$.

Bài 6:

Giả sử p là số nguyên tố lẻ và $m=\dfrac{9^p-1}{8}$. Chứng minh rằng m là hợp số lẻ không chia hết cho 3 và $3^{m-1}\equiv 1$ (mod m).

Lời giải

Ta có: $m=\dfrac{3^p-1}{2}.\dfrac{3^p+1}{4}=a.b$, với $a=\dfrac{3^p-1}{2}, b=\dfrac{3^p+1}{4}$.

a, b đều là các số nguyên lớn hơn 1 nên m là hợp số.

Mà $m=9^{p-1}+9^{p-2}+...+9+1$ và p lẻ nên m lẻ và $m\equiv 1$ (mod 3).

Theo định lí Fermat, ta có: $9^p-9 \vdots p$.

$(p,8)=1$ nên $9^p-9 \vdots 8p \Rightarrow m-1 \vdots \dfrac{9^p-9}{8} \vdots p$.

Vì $m-1 \vdots 2$ nên $m-1 \vdots 2p$, khi đó: $3^{m-1}-1 \vdots 3^{2p}-1 \vdots \dfrac{9^p-1}{8}=m$. (đpcm).

Bài 7:

Chứng minh rằng dãy số $2003+23k$ với $k=1,2,3....$ chứa vô hạn số là lũy thừa của cùng một số nguyên tố.

Lời giải

Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho:

$2003+23k=p^n$ (1).

Trong đó k,n là các số nguyên dương nào đó.

Từ (1) dễ thấy p không chia hết cho số nguyên tố 23 nên (p,23)=1.

Theo định lí nhỏ Fermat thì $p^{22}-1$ chia hết cho 23, suy ra p^{22t} có dạng $p^{22t}=1+23s$ với mọi số nguyên dương t.

Từ đó $p^{22t+n}=(1+23s)p^n=p^n+23s.p^n=2003+23k+23s.p^n$ hay $p^{22t+n}=2003+23(k+sp^n)$ với mọi $t=1,2,3,....$

Bài toán được giải đầy đủ khi ta chỉ ra sự tồn tại số nguyên tố p thõa mãn (1). Chẳng hạn:

Với p = 2 có $2003+23.91=2^{12}$

Với p = 3 có $2003+23.8=3^7$

Với p = 4 có $2003+23.6=2141$

Với p = 2003 thì tồn tại k theo định lí Fermat thỏa mãn $2003+23k=2003^{23}$.

Bài 8:

Tìm bảy số nguyên tố sao cho tích của chúng bằng tổng các lũy thừa bậc sáu của bảy số đó.

Lời giải

Gọi bảy số nguyên tố là $p_{1,}p_{2,}p_{13,}....,p_7$.

Ta có: $p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7=p_1^6+p_2^6+p_3^6+p_4^6+p_5^6+p_6^6+p_7^6$ (*)

Ta cần dùng định lí Fecma nhỏ:

Nếu số nguyên a không chia hết cho 7 thì $a^6\equiv 1(\text{mod}\,7)$.(Có thể chứng minh trực tiếp điều này thông qua việc biến đổi $a^3=(7k+r)^3=7t\pm 1$ với mọi r thỏa mãn $0\le r\le 6$, còn t là số nguyên)

Giả sử trong bảy số nguyên tố trên có k số khác 7 với $0\le k\le 7$.

+ Nếu k = 0, nghĩa là cả bảy số trên đều bằng 7 thì ta có

7. 7. 7. 7. 7. 7. 7 = $7^6+7^6+7^6+7^6+7^6+7^6+7^6$ thỏa mãn (*)

+ Nếu k = 7, nghĩa là cả bảy số trên đều là số nguyên tố khác 7 thì vế trái của (*) không chia hết cho 7, còn vế phải của (*) chia hết cho 7 theo định lí Fecma, điều này không xảy ra.

Vậy chỉ xảy ra bảy số nguyên tố trong đề bài đều là 7.