

ĐỀ SỐ 31.**Câu 1.** Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

C. $y = 3x - \sin 2x$.

D. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x$.

Lời giải**Chọn C**

$$y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow$$

♦ Ta có $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Rightarrow$ loại **A**.♦ Ta có $y' = 4x^3 - 4x > 0, \forall x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty) \Rightarrow$ loại **B**.♦ Ta có $y' = 3 - 2\cos 2x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Chọn **C**.**Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên K . Khẳng định nào sau đây là sai?**A.** Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ **B.** Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .**C.** Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .**D.** Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K .**Lời giải****Chọn C****Câu 3.** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 15$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **sai**?**A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.**B.** Hàm số đồng biến trên $(-9; -5)$.**C.** Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.**D.** Hàm số đồng biến trên $(5; +\infty)$.**Lời giải****Chọn D**♦ Tập xác định $D = \mathbb{R}$ ♦ Ta có $y' = 3x^2 + 6x - 9$

♦ Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		42		10		$+\infty$

♦ Từ bảng biến thiên, mệnh đề C sai.

Câu 4. Cho hàm số $y = \sqrt{3x - x^2}$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

B. $(0; 3)$.

C. $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

D. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải**Chọn A**♦ Tập xác định $D = [0; 3]$.

- ♦ Ta có $y' = \frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}} > 0, \forall x \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.
- ♦ Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20; 5]$ để hàm số $y = x^3 - x^2 + 3mx - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn C

- ♦ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- ♦ Ta có $y' = 3x^2 - 2x + 3m$.
- ♦ Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 3m \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - 9m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{9}$.
- ♦ Do m là số nguyên thuộc đoạn $[-20; 5]$ nên ta có $m = 1; m = 2; m = 3; m = 4; m = 5$.
- ♦ Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ sao cho hàm số $y = x^4 - 2(4m-1)x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

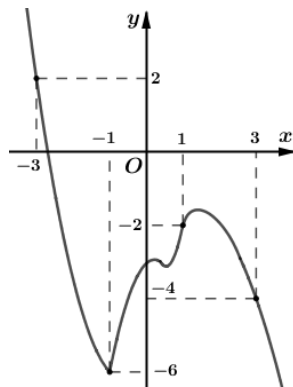
- A. 11. B. 10. C. 12. D. 13.

Lời giải

Chọn B

- ♦ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
- ♦ $y' = 4x^3 - 4(4m-1)x = 4x[x^2 - (4m-1)]$.
- ♦ Trường hợp: $4m-1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$: $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- ♦ Vì $m \in (-10; 10)$ và m nguyên nên có 10 giá trị m thỏa mãn.
- ♦ Trường hợp: $4m-1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{4m-1} \\ x = -\sqrt{4m-1} \end{cases}$.
- ♦ Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty) \Leftrightarrow \sqrt{4m-1} \leq 1 \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{4}$.
- ♦ So điều kiện $m > \frac{1}{4}$ nên không có giá trị m nào thỏa mãn.
- ♦ Vậy có tất cả 10 giá trị m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình dưới



Hàm số $g(x) = 2f(x) + x^2 + 2x - 2020$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A. $(-\infty; 3)$. B. $(-3; 3)$. C. $(1; 3)$. D. $(3; +\infty)$.

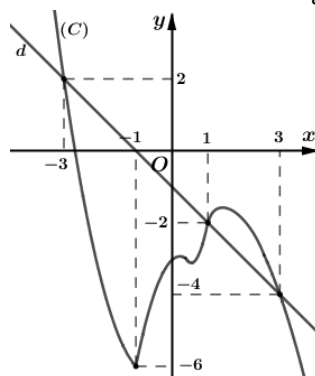
Lời giải

Chọn C

♦ Ta có: $g'(x) = 2f'(x) + 2x + 2 = 2[f'(x) + x + 1]$.

♦ $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > -x - 1$.

♦ Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = -x - 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ.



♦ Khi đó, ta thấy với $x \in (-\infty; -3) \cup (1; 3)$ thì đồ thị hàm số $y = f'(x)$ luôn nằm phía trên đường thẳng $y = -x - 1$.

♦ Suy ra $f'(x) + x + 1 > 0, \forall x \in (-\infty; -3) \cup (1; 3)$.

♦ Vậy hàm số $g(x) = 2f(x) + x^2 + 2x - 2020$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(1; 3)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, có đạo hàm cấp một và cấp hai trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $y'(x_0) = 0$ và $y''(x_0) \neq 0$ thì x_0 là điểm cực trị của hàm số.

B. $y'(x_0) = 0$ và $y''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

C. Hàm số đạt cực đại tại x_0 thì $y'(x_0) = 0$.

D. $y'(x_0) = 0$ và $y''(x_0) = 0$ thì x_0 không là điểm cực trị của hàm số.

Lời giải

Chọn D

♦ Ví dụ hàm số: $y = x^4$

♦ Tập xác định: $D = \mathbf{R}$.

♦ Ta có: $y = x^4 \Rightarrow y' = 4x^3$.

♦ $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

♦ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

♦ $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

♦ $y'' = 12x^2 \Rightarrow y''(0) = 0$

♦ Suy ra không thể khẳng định $y'(x_0) = 0$ và $y''(x_0) = 0$ thì x_0 không là điểm cực trị của hàm số.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm xác định và liên tục trên $\mathbf{R}$. Biết $f'(x) = x^2(x-1)(x^2-4)$.
Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

♦ Ta có hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm xác định và liên tục trên $\mathbf{R}$.

$$f'(x) = x^2(x-1)(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

♦ Nhận xét $x = 0$ là nghiệm kép, $x = 1; 2; -2$ là các nghiệm đơn của đạo hàm nên hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 + mx^2$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

A. $m \leq 0$.

B. $m \geq 0$.

C. $m < 0$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn B

♦ Tập xác định: $D = \mathbf{R}$.

♦ Ta có: $y = x^4 + mx^2 \Rightarrow y' = 4x^3 + 2mx = 2x(2x^2 + m)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x(2x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{m}{2} \end{cases}$$

♦ Nếu $m \geq 0$, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

- ♦ Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.
- ♦ Suy ra $m \geq 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- ♦ Nếu $m < 0$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{-m}{2}} \end{cases}$$

♦

Bảng biến thiên

♦

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{-m}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{-m}{2}}$	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$
		y_{cr}		y_{cr}			

- ♦ Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại $x=0$.
- ♦ Suy ra $m < 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- ♦ Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ khi $m \geq 0$.

Câu 11. Cho hàm số bậc ba $y = x^3 - (m^2 - 1)x^2 - 3x + m + 1$. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

- A.** $m = -1$. **B.** $m = 1$. **C.** $\begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 2(m^2 - 1)x - 3$; $y'' = 6x - 2(m^2 - 1)$.

Rõ ràng $3 \cdot (-3) = -9 < 0$ nên phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Theo tính chất của hàm số bậc ba, hai điểm cực trị của đồ thị của hàm số đối xứng với nhau qua điểm uốn của đồ thị.

Như vậy, theo đề bài, O phải là điểm uốn của đồ thị.

$$\Rightarrow \begin{cases} y''(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$$

Câu 12. Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị nhận hai điểm $A(1;3)$ và $B(3;-1)$ là hai điểm cực trị. Khi đó đồ thị của hàm số $y = |a|x^3 + bx^2 + c|x| + d|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5.

B. 7.

C. 9.

D. 11.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đặt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Khi đó $y = |a|x^3 + bx^2 + c|x| + d| \Leftrightarrow y = |f(|x|)|$.

Theo đề bài, A, B lần lượt là điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số, đồng thời đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị có hoành độ dương.

Suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có $2 \cdot 2 + 1 = 5$ điểm cực trị.

Theo đề bài ta lập được hệ phương trình sau:

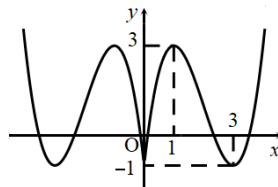
$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y'(3) = 0 \\ y(1) = 3 \\ y(3) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 & (1) \\ 27a + 6b + c = 0 & (2) \\ a + b + c + d = 3 & (3) \\ 27a + 9b + 3c + d = -1 & (4) \end{cases}$$

Từ phương trình (4) có $d = -1 - 27a - 9b - 3c$.

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 27a + 6b + c = 0 \\ 13a + 4b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 9 \end{cases}$$

Thay vào (3) ta được:

Như vậy đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có dạng:



Như vậy hàm số $y = f(|x|)$ có 6 giao điểm với trục Ox.

Suy ra hàm số $y = |f(|x|)|$ có $6 + 5 = 11$ điểm cực trị.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3(m-1)x + m$. Để khoảng cách từ điểm $I(-4;0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là lớn nhất thì giá trị của tham số m nằm trong khoảng nào sau đây?

A. $(2;3)$.

B. $(0;1)$.

C. $(1;2)$.

D. $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3(m-1)$.

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + m - 1 = 0$. Có $\Delta = 8 - 4m$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
Suy ra $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Thực hiện phép chia $f(x)$ cho $f'(x)$ ta được:

Thương $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ và dư $h(x) = (2m - 4)x + 2m - 1$.

Như vậy $f(x) = f'(x).g(x) + h(x)$.

Giả sử $(x_1; y_1); (x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$$\begin{cases} f'(x_1) = f'(x_2) = 0 \\ f(x_1) = f'(x_1).g(x_1) + h(x_1) \\ f(x_2) = f'(x_2).g(x_2) + h(x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) = h(x_1) \\ f(x_2) = h(x_2) \end{cases}$$

Như vậy đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là
(d): $y = (2m - 4)x + 2m - 1 \Leftrightarrow (d): (2m - 4)x - y + 2m - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2m(x + 2) = 4x + y + 1 \quad (*)$$

Rõ ràng (*) với mọi m khi $x = -1; y = 3$, hay (d) luôn đi qua điểm $A(-1; 3)$.

Từ I hạ $IH \perp (d)$ tại H . Rõ ràng $IH \leq IA \Rightarrow \max IH = IA$.

Nên yêu cầu bài toán lúc này $IA \perp (d)$, hay (d) nhận $IA = (3; 3)$ là véc tơ pháp tuyến.

$$\Leftrightarrow \frac{2m - 4}{3} = \frac{-1}{3} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2} \text{ (TM)}.$$

Như vậy $m \in (1; 2)$.

Câu 14. Có bao nhiêu số thực dương m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(mx)^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = x^4 - 2(mx)^2 + 1$.

Ta có $y = x^4 - 2(mx)^2 + 1$.

Phương trình $y = x^4 - 2(mx)^2 + 1$.

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0; 1); B(m; 1 - m^4); C(-m; 1 - m^4)$.

Theo tính chất của hàm trùng phương, ΔABC cân tại A

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành tam giác vuông:

$$\text{Cách 1: } AB.AC = 0 \Leftrightarrow m.(-m) + (-m^4)(-m^4) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^8 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2(m^6 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (KTM)} \\ m = \pm 1 \end{cases}$$

$$\text{Cách 2: } AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\Leftrightarrow 2(m^2 + m^8) = 4m^2 \Leftrightarrow m^8 = m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (KTM)} \\ m = \pm 1 \end{cases}$$

Như vậy có 1 số thực dương m thỏa mãn.

Câu 15. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 2mx - m^2$. Để hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài tối đa bằng 2 Tham số m thuộc khoảng (hoặc nửa khoảng) nào dưới đây?

- A.** $\left[0; \frac{3}{2}\right)$ **B.** $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$ **C.** $[0; +\infty)$ **D.** $\left(0; \frac{3}{2}\right)$

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho là hàm bậc ba có hệ số a dương.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x + 2m$. Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 2m = 0$.

Có $\Delta' = 9 - 6m$.

Nếu $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$ thì hàm số không có cực trị, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ loại các giá trị $m \geq \frac{3}{2}$.

Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$ thì phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Giả sử hai điểm cực trị của hàm số có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$ ($x_1 < x_2$).

Theo tính chất hàm số bậc ba, hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(x_1; x_2)$.

Theo đề bài, $x_2 - x_1 \leq 2 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 4$.

Lại có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1x_2 = \frac{2m}{3} \end{cases} \Rightarrow 4 - \frac{8m}{3} \leq 4 \Leftrightarrow m \geq 0$$

Kết hợp điều kiện, suy ra $m \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$

Câu 16. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ trong các khẳng định sau, số khẳng định đúng là

I. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị.

II. $\lim_{x \rightarrow 3^+} y = -1 \Rightarrow x = 3$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị

III. $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty \Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị.

IV. $\lim_{x \rightarrow -3^-} y = +\infty \Rightarrow y = -3$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị.

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Câu 17. Giá trị của m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+m}$ đi qua $M(2;3)$ là.

- A.** 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D

♦ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

♦ $\lim_{x \rightarrow -m^-} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -m^+} y = +\infty \Rightarrow x = -m$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị.

♦ TCD: $x = -m$ qua $M(2;3) \Leftrightarrow m = -2$

$$y = \frac{\sqrt{5-4x-x^2}}{(x^2-3x+2)(x+2)}$$

Câu 18. Xác định số các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

♦ Tập xác định $D = [-5;1) \setminus \{-2\}$.

♦ Xét hàm số $y = \frac{\sqrt{5-4x-x^2}}{(x^2-3x+2)(x+2)}$ có tập xác định là $D = [-5;1) \setminus \{-2\}$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

♦ Ngoài ra, $y = \frac{\sqrt{-(x-1)(x+5)}}{(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{\sqrt{(1-x)(x+5)}}{-(1-x)(x-2)(x+2)} = \frac{\sqrt{(x+5)}}{-\sqrt{(1-x)(x-2)(x+2)}}$ thì

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{5-4x-x^2}}{(x^2-3x+2)(x+2)} = +\infty \Rightarrow x=1$ là nghiệm của mẫu: là tiệm cận đứng.

♦ $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = -\infty \Rightarrow x = -2$ là đường tiệm cận đứng

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'			
y	$2 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 2$	

Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ lần lượt là?

A. $x=2$ và $y=1$

B. không có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang $y=2$

C. $x=1, y=2$

D. $y=2, x=1$

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên, ta có $\lim_{x \rightarrow (1)^+} y = -\infty$ nên $x=1$ là đường tiệm cận đứng;

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2$ nên $y=2$ là tiệm cận ngang.

- Câu 20.** Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{(2m-1)x+2}{2x^2-3x-2}$ có đúng ba tiệm cận là
- A. $\begin{cases} m < 1 \\ m > \frac{5}{2} \end{cases}$ B. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}$ C. $1 < m < \frac{5}{2}$ D. $1 \leq m \leq \frac{5}{2}$

Lời giải

Chọn B

- ♦ Điều kiện $x \neq 2, x \neq -\frac{1}{2}$.
- ♦ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị.
- ♦ Để đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận thì $x = 2, x = -\frac{1}{2}$ là 2 tiệm cận đứng của đồ thị.

$$\begin{cases} (2m-1) \cdot 2 + 2 \neq 0 \\ (2m-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Suy ra:

- Câu 21.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	-2	3	0	2

- Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{5}{5f(x)-2}$.
- A. 2. B. 5. C. 6. D. 3.

Lời giải

Chọn B

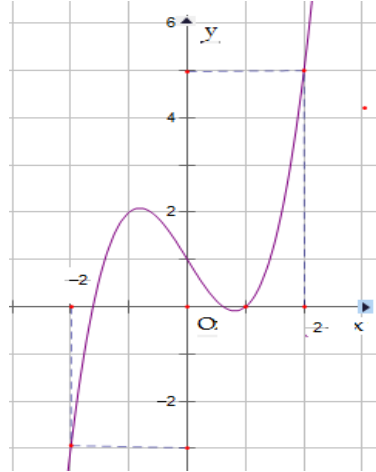
- ♦ Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{5}{5f(x)-2}$ đúng bằng số nghiệm thực của phương trình: $5f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{5}$

- ♦ Mà số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{2}{5}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = \frac{2}{5}$.

- ♦ Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường $y = \frac{2}{5}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt. Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{5}{5f(x)-2}$ có 3 tiệm cận đứng.

- ♦ Lại có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{5f(x) - 2} = \frac{5}{8}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{5f(x) - 2} = -\frac{5}{12}$, đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang
là $y = \frac{5}{8}; y = -\frac{5}{12}$. Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là 5.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 2]$. Giá trị của $M - m$ bằng bao nhiêu?

- A. 4. B. 0 C. 8. D. 2.

Lời giải

Chọn C

- ♦ Dựa vào đồ thị ta thấy:
♦ $M = \max_{[-2; 2]} f(x) = f(2) = 5$ và $m = \min_{[-2; 2]} f(x) = f(-2) = -3$
♦ Vậy $M - m = 8$.

Câu 23. Cho hàm số $y = 4\sin^2 t + 3\sin t - 1$. Tìm GTNN, GTLN của hàm số đã cho

- A. $-\frac{25}{16}; 6$ B. $-1; 6$ C. $-6; 1$ D. $-6; -1$

Lời giải

Chọn A

- ♦ Xét hàm số $y = 4\sin^2 t + 3\sin t - 1$, đặt $x = \sin t$
♦ Với $t \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in [-1; 1]$, $y = 4x^2 + 3x - 1$
♦ Tìm GTNN của $y = 4\sin^2 t + 3\sin t - 1$, ta đi tìm GTNN của hàm số
 $y = g(x) = 4x^2 + 3x - 1$, $x \in [-1; 1]$
♦ $y' = g'(x) = 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{8} \in [-1; 1]$
♦ Ta có $g(-1) = 0; g(1) = 6; g(-\frac{3}{8}) = -\frac{25}{16}$.
♦ Vậy $\max_R y = 6; \min_R y = -\frac{25}{16}$.

- Câu 24.** Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$. Tính giá trị $M + m$.
- A. 41. B. 42. C. 43. D. 44.

Lời giải

Chọn C

- ♦ $(x+y)^2 = (\sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2})^2 \leq 3(x+y) \Leftrightarrow 0 \leq x+y \leq 3$.
- ♦ $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y} = (x+y)^2 + 2(x+y) + 2 + 8\sqrt{4-(x+y)}$
- ♦ Đặt $t = \sqrt{4-(x+y)}; t \in [1; 2]$
- ♦ Ta có $f(t) = (4-t^2)^2 + 2(4-t^2) + 2 + 8t = t^4 - 10t^2 + 8t + 26$.
- ♦ Ta có $f'(t) = 4t^3 - 20t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \in [1; 2] \\ t = -1 + \sqrt{2} \notin [1; 2] \\ t = -1 - \sqrt{2} \notin [1; 2] \end{cases}$
- ♦ Ta có $f(1) = 25; f(2) = 18$.
- ♦ Vậy $M = 25; m = 18 \Rightarrow M + m = 43$.

- Câu 25.** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 - 3x + 3}{x-1} \right|$ trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$. Giá trị của biểu thức $3M + m$ bằng bao nhiêu?
- A. $\frac{27}{2}$. B. 10. C. $-\frac{40}{3}$. D. 16.

Lời giải

Chọn D

- ♦ Xét hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x-1}$, hàm số liên tục trên tập xác định $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$.
- ♦ $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \in D \\ x = 2 \notin D \end{cases}$
- ♦ Bảng biến thiên

x	-2	0	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\frac{13}{3}$	-3	$-\frac{7}{2}$

- ♦ Theo BBT có $\max_{\left[-2; \frac{1}{2}\right]} y = -3; \min_{\left[-2; \frac{1}{2}\right]} y = -\frac{13}{3}$.

♦ Suy ra $\max_{\left[-2; \frac{1}{2}\right]} |y| = \frac{13}{3}; \min_{\left[-2; \frac{1}{2}\right]} |y| = 3.$

♦ Vậy $3M + m = 16$

Câu 26. Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài (theo đơn vị mét) của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

A. $\frac{56}{4+p}.$ B. $\frac{112}{4+p}.$ C. $\frac{84}{4+p}.$ D. $\frac{92}{4+p}.$

Lời giải

Chọn B

Gọi $l_1, l_2 (m)$ lần lượt là chu vi hình vuông và hình tròn. ($0 < l_1, l_2 < 28$)

Gọi $a, R (m)$ lần lượt là cạnh của hình vuông và bán kính của hình tròn. Khi đó ta có:

$$l_1 + l_2 = 28$$

$$l_1 = 4a \Leftrightarrow a = \frac{l_1}{4}$$

$$l_2 = 2\pi R \Leftrightarrow R = \frac{l_2}{2\pi} = \frac{28 - l_1}{2\pi}$$

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là:

$$S = a^2 + \pi R^2 = \frac{l_1^2}{16} + \pi \cdot \left(\frac{28 - l_1}{2\pi} \right)^2, \quad 0 < l_1 < 28$$

Yêu cầu bài toán tương đương với tìm $l_1 \in (0, 28)$ để S đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có:

$$S' = \frac{l_1}{8} - \left(\frac{28 - l_1}{2\pi} \right) = 0 \Leftrightarrow l_1 = \frac{112}{\pi + 4}$$

Lập bảng biến thiên ta được S đạt giá trị nhỏ nhất tại $l_1 = \frac{112}{\pi + 4}.$

Câu 27. Số giao điểm của đường cong $(C): y = x^3 - 2x + 1$ và đường thẳng $d: y = x - 1$ là

A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$x^3 - 2x + 1 = x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Do đó, số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng d là 2.

Câu 28. Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $(C): y = -2x^3 + 3x^2 + 2m - 1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt là

A. $0 \leq m \leq \frac{1}{2}.$ B. $0 < m < \frac{1}{2}.$ C. $\frac{1}{4} \leq m < \frac{1}{2}.$ D. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là:
 $-2x^3 + 3x^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 = 2m - 1. \quad (1)$

Số giao điểm của (C) và trục hoành chính là số nghiệm của phương trình (1) .

Mặt khác số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của đồ thị (C) của hàm số $y = 2x^3 - 3x^2$ với đường thẳng $d_m: y = 2m - 1$.

Xét hàm số $y = 2x^3 - 3x^2$. Ta có $y' = 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

Khi đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (C)$ cắt d_m tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -1 < 2m - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{2}$.

Câu 29. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m - 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$. Tính tổng bình phương các phần tử của S .

A. 38.

B. 52.

C. 28.

D. 14.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$\frac{2x+1}{x+1} = x + m - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 + (m-2)x + m-2 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(*)} > 0 \\ (-1)^2 - (m-2) + m-2 \neq 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 - 4(m-2) > 0 \\ m^2 - 8m + 12 > 0 \\ m < 2 \\ m > 6 \end{cases} \quad (**).$$

Khi đó, $A(x_1; x_1 + m - 1)$ và $B(x_2; x_2 + m - 1)$, với x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

Hơn nữa, $AB = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow AB^2 = 12 \Leftrightarrow 2(x_2 - x_1)^2 = 12 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 6$,

với $x_1 + x_2 = 2 - m$ và $x_1x_2 = m - 2$ (Viète). Từ đó, ta có $m^2 - 8m + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 + \sqrt{10} \\ m = 4 - \sqrt{10} \end{cases}$.

So điều kiện $(**)$, ta nhận hai giá trị m trên. Do đó, $S = \{4 - \sqrt{10}; 4 + \sqrt{10}\}$.

Vậy, tổng bình phương các phần tử của S là $(4 - \sqrt{10})^2 + (4 + \sqrt{10})^2 = 52$.

Câu 30. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại điểm $A(3; 1)$ là

A. $y = -9x - 26$.

B. $y = 9x - 26$.

C. $y = -9x - 3$.

D. $y = 9x + 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y'(3) = 9$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(3;1)$ là: $y=9(x-3)+1 \Leftrightarrow y=9x-26$.
 Vậy, chọn **B**.

Câu 31. Cho (C) là đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số có hệ số góc $k = 24$ là

A. $y = 24x - 76$; $y = 24x + 32$

B. $y = 24x - 76$; $y = 24x - 32$

C. $y = 24x + 76; y = 24x + 32$.

D. $y = 24x + 76$; $y = 24x - 32$

Lời giải

Chọn A

♦ Ta có $y' = f'(x) = 3x^2 - 6x$.

♦ Tiếp tuyến có hệ số góc $k = 24 \Rightarrow y' = k$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x = 24 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \end{cases}$$

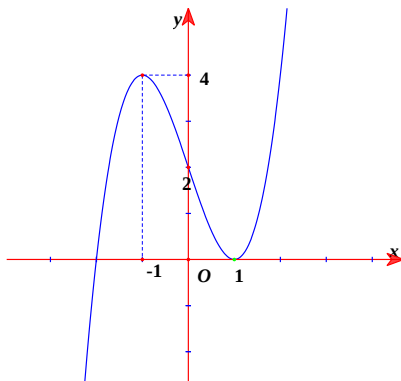
♦ Với $x=4 \Rightarrow y=20$

Phương trình tiếp tuyến là $y = 24(x - 4) + 20 \Rightarrow y = 24x - 76$.

♦ Với $x = -2 \Rightarrow y = -16$

Phương trình tiếp tuyến là $y = 24(x + 2) - 16 \Rightarrow y = 24x + 32$.

Câu 32. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên dưới.



$$g(x) = \frac{(x-1)(x^2-1)}{f^2(x)-2f(x)}$$

Đồ thị hàm số $f(x) = 2f'(x)$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng

A.1.

B. 2.

C.3.

D. 4.

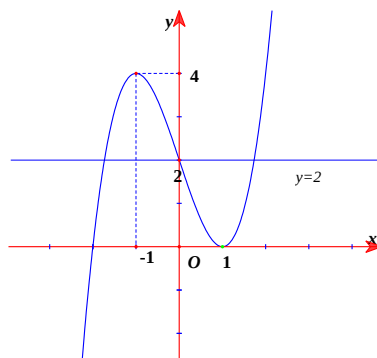
Lời giải

Chọn A

$$f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \end{cases}$$

♦ Ta xét mẫu số:

♦ Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy:



+) Phương trình (1) có nghiệm $x_1 = a < -1$ (nghiệm đơn) và $x_2 = 1$ (nghiệm kép)

$$\Rightarrow f(x) = (x - a)(x - 1)^2$$

+) Phương trình (2) có nghiệm $x_3 = b \in (a; -1)$, $x_4 = 0$ và $x_5 = c > 1$

$$\Rightarrow f(x) - 2 = (x - b)x(x - c)$$

$$\text{Do đó } g(x) = \frac{(x-1)(x^2-1)}{f(x)[f(x)-2]} = \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-a)(x-1)^2 \cdot (x-b)x(x-c)} = \frac{x+1}{(x-a)(x-b)x(x-c)}$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 33. Cho (C) là đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{2x-2}{x-2}$, M là điểm thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai đường tiệm cận tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB = 2\sqrt{5}$. Gọi S là tổng các hoành độ của tất cả các điểm M thỏa mãn bài toán. Giá trị của S là

A. 6.

B. 5.

C. 8.

D. 7.

Lời giải

Chọn A

♦ Ta có $y = f(x) = \frac{2x-2}{x-2}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận là $x=2$; $y=2$.

♦ Ta có $y' = f'(x) = \frac{-2}{(x-2)^2}$.

♦ Gọi $M\left(m; \frac{2m-2}{m-2}\right)$ thuộc đồ thị hàm số.

♦ Phương trình tiếp tuyến d của (C) tại M là $y = \frac{-2}{(m-2)^2}(x-m) + \frac{2m-2}{m-2}$.

♦ Giao điểm với tiệm cận đứng

$$\text{Cho } x=2 \Rightarrow y = \frac{-2}{(m-2)^2}(2-m) + \frac{2m-2}{m-2} \Leftrightarrow y = \frac{2}{m-2} + \frac{2m-2}{m-2} = \frac{2m}{m-2}.$$

Vậy giao điểm của đường thẳng d và đường thẳng tiệm cận đứng $x=2$ là $A\left(2; \frac{2m}{m-2}\right)$.

♦ Giao điểm với tiệm cận ngang

$$\begin{aligned}\text{Cho } y=2 &\Rightarrow \frac{-2}{(m-2)^2}(x-m) + \frac{2m-2}{m-2} = 2 \\ &\Leftrightarrow -2(x-m) + (2m-2)(m-2) = 2(m-2)^2 \\ &\Leftrightarrow -2x + 2m + 2m^2 - 6m + 4 = 2m^2 - 8m + 8 \\ &\Leftrightarrow 2x = 4m - 4 \\ &\Leftrightarrow x = 2m - 2.\end{aligned}$$

Vậy giao điểm của đường thẳng d và đường thẳng tiệm cận ngang $y=2$ là $A(2m-2; 2)$.

$$\text{Ta có: } AB = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow (2m-4)^2 + \left(2 - \frac{2m}{m-2}\right)^2 = 20$$

$$\Leftrightarrow 4(m-2)^2 + \frac{16}{(m-2)^2} = 20$$

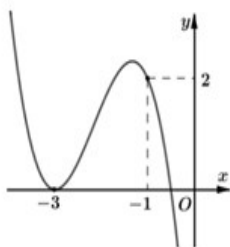
$$\Leftrightarrow (m-2)^4 - 5(m-2)^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 = 1 \\ (m-2)^2 = 4 \end{cases}$$

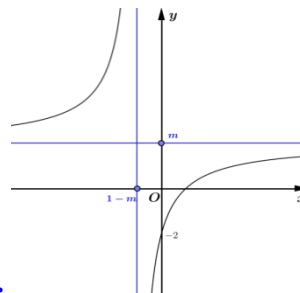
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \\ m = 4 \\ m = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = 3 + 1 + 4 + 0 = 8.$$

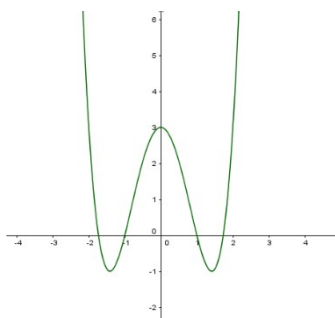
Câu 34. Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$. Đồ thị của hàm số đã cho là



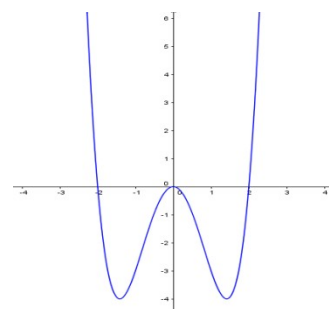
A.



B.



C.



D.

Lời giải

Chọn C

♦ Vì là đồ thị hàm số bậc 4 nên loại đáp án A và **B.**

♦ Từ hàm số ta có đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; 4)$ nên loại đáp án **D.**

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị âm của tham số m để phương trình $\sqrt{2020m} + \sqrt{2020m + x^2} = x^2$ có hai nghiệm thực phân biệt

A. 1.

B. 0.

C. Vô số.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

♦ Điều kiện $2020m + x^2 \geq 0$.

$$\diamond \sqrt{2020m + \sqrt{2020m + x^2}} = x^2 \Leftrightarrow 2020m + \sqrt{2020m + x^2} = x^4$$

$$\Leftrightarrow 2020m + x^2 + \sqrt{2020m + x^2} = x^4 + x^2 (1).$$

♦ Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ trên $[0; +\infty)$, ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \geq 0$, suy ra $f(t)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\diamond \text{ Khi đó } (1) \Leftrightarrow f(\sqrt{2020m + x^2}) = f(x^2) \Leftrightarrow \sqrt{2020m + x^2} = x^2 \Leftrightarrow 2020m = x^4 - x^2.$$

$$\text{có } g'(x) = 4x^3 - 2x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

♦ Xét hàm số $g(x) = x^4 - x^2$

♦ Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$				
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

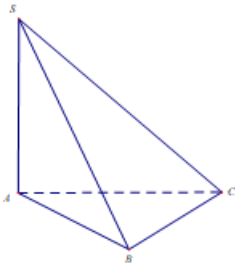
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2020m = -\frac{1}{4} \\ 2020m > 0 \end{cases}$$

♦ Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{8080} \\ m > 0 \end{cases}$$

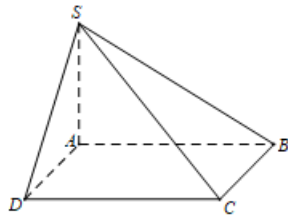
♦ Vì m âm nên $m = -\frac{1}{8080}$. Vậy có 1 giá trị cần tìm.

Câu 36. Hình nào sau đây là hình chóp tam giác



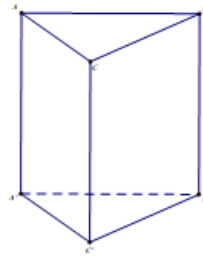
Hình 1

A. Hình 1.



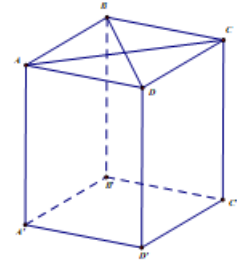
Hình 2

B. Hình 3.



Hình 3

C. Hình 4.



Hình 4

D. Hình 2.

Lời giải

Chọn A

Câu 37. Hình chóp tứ giác có tất cả bao nhiêu cạnh

A. 6.

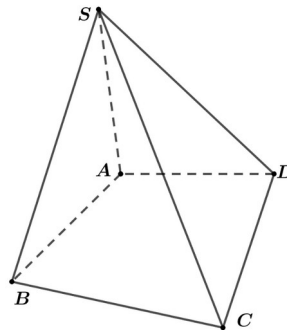
B. 20.

C. 12.

D. 8.

Lời giải

Chọn D



Hình chóp tứ giác (ví dụ như hình vẽ trên) có 4 cạnh bên và 4 cạnh đáy nên có tất cả 8 cạnh.

Câu 38. Nếu một khối chóp có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h thì có thể tích được tính theo công thức

A. $V = \pi Bh$.

B. $V = \frac{1}{3} Bh$.

C. $V = Bh$.

D. $V = \frac{1}{3} \pi Bh$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối chóp có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h là $V = \frac{1}{3} Bh$.

Câu 39. Nếu một khối lăng trụ có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h thì có thể tích được tính theo công thức

A. $V = \pi Bh$.

B. $V = \frac{1}{3} Bh$.

C. $V = Bh$.

D. $V = \frac{1}{3} \pi Bh$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h là $V = Bh$.

Câu 40. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{11}$, cosin góc hợp bởi cạnh SB và $(ABCD)$ bằng $\frac{1}{10}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{121}{150}a^3$.

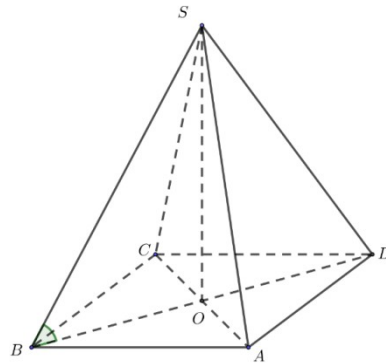
B. $\frac{121}{50}a^3$.

C. $\frac{121}{500}a^3$.

D. $\frac{11}{500}a^3$.

Lời giải

Chọn C



Gọi cạnh hình vuông đáy là x , góc hợp bởi cạnh SB và $(ABCD)$ là góc nhọn SBO

$$\Rightarrow \cos SBO = \frac{1}{11} \hat{=} \frac{OB}{SB} = \frac{1}{10} \hat{=} \frac{\frac{x\sqrt{2}}{2}}{2a\sqrt{11}} = \frac{1}{10} \hat{=} x = \frac{\sqrt{11}}{5\sqrt{2}}a$$

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

$$V = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\sqrt{SC^2 - OC^2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{11a^2 - \frac{11}{100}a^2} \cdot \frac{11}{50}a^2 = \frac{121}{500}a^3$$

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của CD . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và SM bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Thể tích của khối chóp đã cho theo a là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

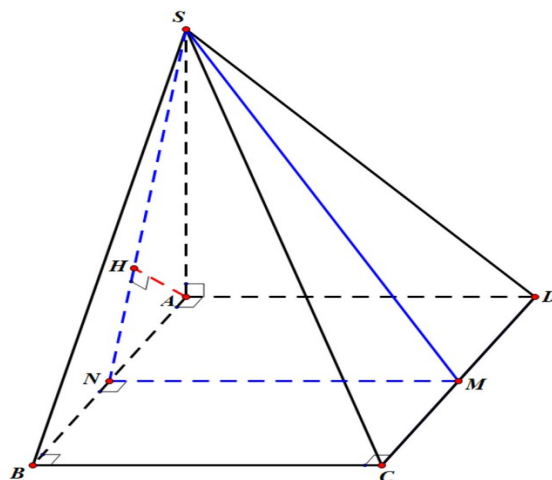
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn C



- ♦ Gọi N là trung điểm của $AB \Rightarrow BC \parallel (SMN)$.
- ♦ $\Rightarrow d(BC, SM) = d(BC, (SMN)) = d(B, (SMN))$.

- ♦ Ta có $\frac{d(B, (SMN))}{d(A, (SMN))} = \frac{BN}{AN} = 1 \Rightarrow d(B, (SMN)) = d(A, (SMN))$.
- ♦ Kẻ $AH \perp SN \Rightarrow AH \perp (SMN)$.
- ♦ $d(A, (SMN)) = AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.
- ♦ Xét $\triangle SAN$ vuông tại A có AH là đường cao: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AN^2}$.

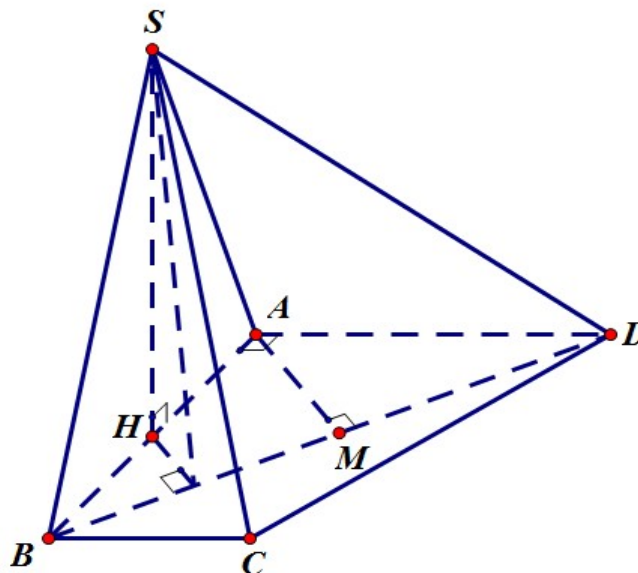
$$\Rightarrow SA = \frac{AN \cdot AH}{\sqrt{AN^2 - AH^2}} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$
- ♦ $\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy $(ABCD)$ trùng với trung điểm AB . Biết $AB = a$, $BC = 2a$, $BD = a\sqrt{10}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng đáy là 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a là:

A. $\frac{3\sqrt{30}}{8}a^3$ B. $\frac{\sqrt{30}}{4}a^3$ C. $\frac{\sqrt{30}}{12}a^3$ D. $\frac{\sqrt{30}}{8}a^3$.

Lời giải

Chọn D



- ♦ Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
- ♦ Kẻ $HK \perp BD (K \in BD)$.
- ♦ Ta có $((SBD), (ABCD)) = \angle SKH = 60^\circ$.
- ♦ Gọi AM là đường cao của tam giác vuông ABD .
- ♦ Ta có $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = 3a$.

$$\diamond AM = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{a \cdot 3a}{a\sqrt{10}} = \frac{3a\sqrt{10}}{10} \Rightarrow HK = \frac{AM}{2} = \frac{3a\sqrt{10}}{20}$$

$$\diamond \text{Do đó: } SH = HK \cdot \tan \angle KH = \frac{3a\sqrt{10}}{20} \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a\sqrt{30}}{20}$$

$$\diamond \text{Khi đó: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (AD + BC) \cdot AB \cdot SH = \frac{1}{6} \cdot (3a + 2a) \cdot a \cdot \frac{3a\sqrt{30}}{20} = \frac{a^3\sqrt{30}}{8}$$

Câu 43. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Tam giác SAB là đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy $(ABCD)$, gọi H là trung điểm AB . Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Tính khoảng cách d từ điểm H đến mặt phẳng (SCD) .

A. $d = \frac{a\sqrt{21}}{14}$

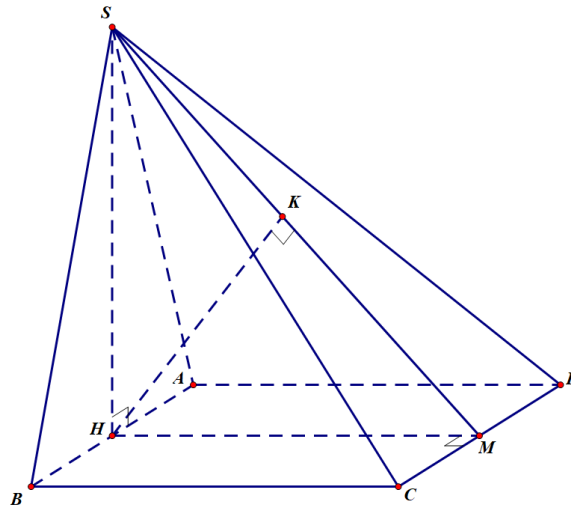
B. $d = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$

C. $d = \frac{a\sqrt{21}}{6}$

D. $d = 2a$

Lời giải

Chọn B



$$\diamond \text{Gọi } AB = x (x > 0), \text{ suy ra } SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$\diamond \text{Ta có thể tích khối chóp } S.ABCD \text{ là } V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ACBD} = \frac{x^3\sqrt{3}}{6}$$

$$\diamond \text{Theo giả thiết, ta có } \frac{x^3\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 2a$$

$$\diamond \text{Ta có } d(H, (SCD)) = HK = \sqrt{\frac{SH^2 \cdot HM^2}{SH^2 + HM^2}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$$

$$\diamond \text{Vậy } d = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$$

0

Câu 44. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, gọi M là trung điểm của SC . Mặt phẳng chứa AM và song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại P, Q . Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng V . Tính tỉ số thể tích giữa khối chóp $S.APMQ$ và $S.ABCD$.

A. $\frac{1}{4}$.

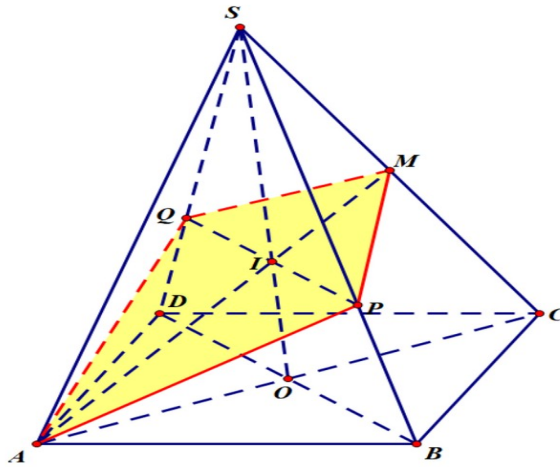
B. $\frac{1}{8}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn C



- ♦ Gọi $O = AC \cap BD$; $I = SO \cap AM$.
- ♦ Do (P) chứa AM và song song BD nên (P) qua I và song song BD .
- ♦ Kẻ đường thẳng qua I song song BD cắt SB tại P , cắt SD tại Q . Vậy $(P) \equiv (APMQ)$.
- ♦ Ta có I là trọng tâm ΔSAC nên $\frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} = \frac{SP}{SB} = \frac{SQ}{SD}$.
- ♦ Ta có $\frac{V_{S.AMQ}}{V_{S.ACD}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SQ}{SD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AMQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{V}{2} = \frac{V}{6}$.
- ♦ $\frac{V_{S.AMP}}{V_{S.ACB}} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AMP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{V}{2} = \frac{V}{6}$.
- ♦ Vậy $V_{SAPMQ} = 2 \cdot \frac{V}{6} = \frac{V}{3} \Rightarrow \frac{V_{SAPMQ}}{V} = \frac{1}{3}$.

Câu 45. Một hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật với kích thước là 10 cm và 15 cm . Biết diện tích xung quanh bằng tổng diện tích hai đáy. Khi đó thể tích hình lăng trụ là:

A. 300 cm^2 .

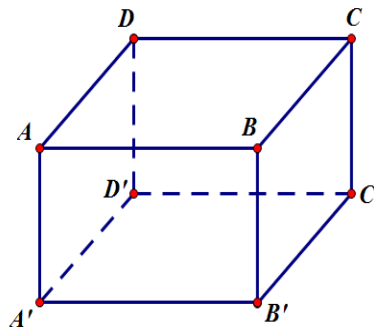
B. 900 cm^3 .

C. 50 cm^3 .

D. 900 cm^2 .

Lời giải

Chọn B



- ♦ Hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật chính là hình hộp chữ nhật.
- ♦ Đặt $AA' = x\text{ (cm)}$.

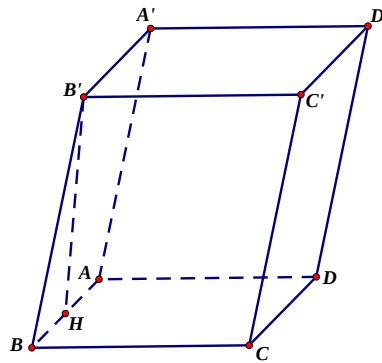
- ♦ Diện tích xung quanh bằng tổng diện tích hai đáy: $S_{xq} = 2S_{\text{đáy}}$.
- ♦ $\Leftrightarrow 2.(10+15).x = 2.10.15 \Leftrightarrow x = 6 \text{ (cm)}$.
- ♦ Thể tích hình hộp chữ nhật: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = 10.15.6 = 900 \text{ (cm}^3\text{)}$.

Câu 46. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 120^\circ$, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60° , hình chiếu vuông góc của B' trên mặt $(ABCD)$ trùng với trung điểm AB . Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^3}{4}$. D. $\frac{3a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Diện tích hình thoi $ABCD$ bằng $S_{ABCD} = AB.AD.\sin \widehat{BAD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow B'H \perp (ABCD)$.

Góc giữa $B'B$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{B'BH} = 60^\circ$.

Ta có $B'H = BH.\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

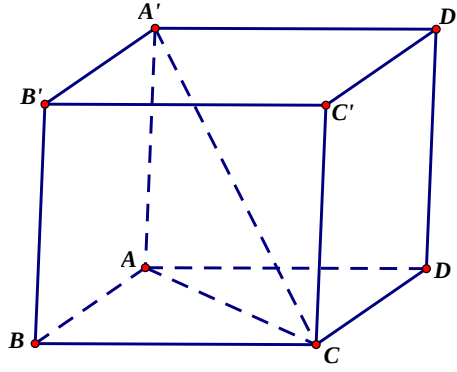
Thể tích khối lăng trụ là: $V = S_{ABCD}.B'H = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{4}$.

Câu 47. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, đường chéo $A'C = a\sqrt{6}$ và tạo với mặt $(ABCD)$ một góc bằng 30° , $AB = a$. Thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. a^3 . B. $\frac{a^3\sqrt{21}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{21}}{4}$. D. $\frac{3a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\angle A'CA = 30^\circ$.

Ta có
$$AC = A'C \cdot \cos 30^\circ = a\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$$

$$AA' = A'C \cdot \sin 30^\circ = a\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Trong tam giác ABC có
$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$$

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng
$$S_{ABCD} = AB \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{14}}{2}$$

Thể tích khối hộp chữ nhật là:
$$V = S_{ABCD} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{14}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{21}}{2}$$

Câu 48. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có thể tích bằng 1. Gọi M là trung điểm của SA , N là điểm đối xứng của A qua D . Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, gọi (H) là khối đa diện chứa đỉnh S . Thể tích khối (H) bằng

A. $\frac{7}{12}$.

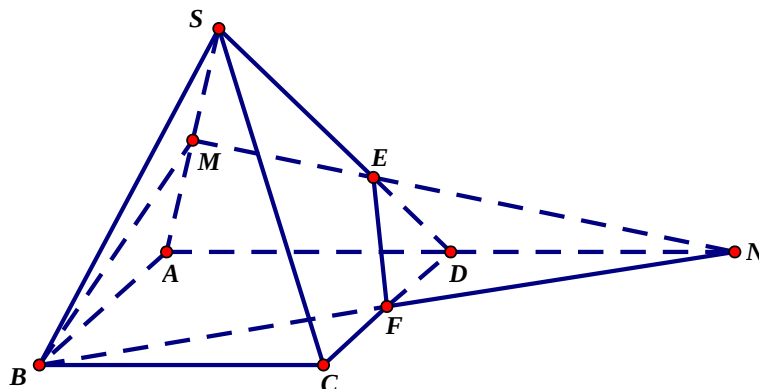
B. $\frac{4}{7}$.

C. $\frac{5}{12}$.

D. $\frac{3}{7}$.

Lời giải

Chọn A



♦ Trong mp (SAD) ; $MN \cap SD = E$, trong mp $(ABCD)$; $BN \cap CD = F$. Khi đó thiết diện của mặt phẳng (BMN) với hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $BMEF$.

♦ Ta có, E là trọng tâm tam giác SAN nên $NE = \frac{2}{3}NM$; F là trung điểm của BN

$$\diamond \frac{V_{NEFD}}{V_{NMBA}} = \frac{NE}{NM} \cdot \frac{NF}{NB} \cdot \frac{ND}{NA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{V_{NEFD}}{V_{DEFAMB}} = \frac{1}{5} \Rightarrow V_{DEFAMB} = 5V_{NEFD}$$

$$\diamond \frac{V_{NEFD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{d_{(E,(NDF))} \cdot S_{NDF}}{d_{(S,(ABCD))} \cdot S_{ABCD}} = \frac{ED}{SD} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot DN \cdot DF}{AD^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \Rightarrow V_{NEFD} = \frac{1}{12} V_{S.ABCD} = \frac{1}{12}$$

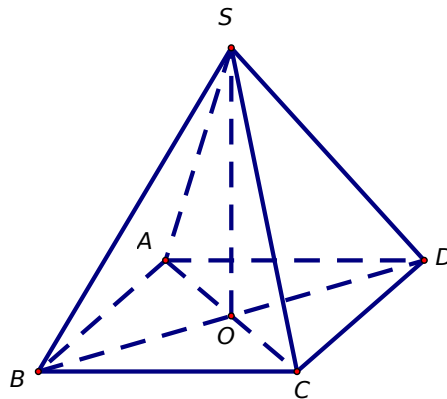
$$V_{DEFAMB} = 5V_{NEFD} = \frac{5}{12} \Rightarrow V_H = V_{S.ABCD} - V_{DEFAMB} = \frac{7}{12}.$$

Câu 49. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, biết thể tích khối chóp bằng $V = \frac{3a^3}{2}$. Tính tang của góc giữa cạnh bên và mặt đáy $(ABCD)$?

- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{9}{4}$. C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = 2a^2$.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

$$\Rightarrow SO = \frac{3V}{S_{ABCD}} = \frac{9a}{4}.$$

Góc giữa SA và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SAO}$.

$$AO = \frac{1}{2} AC = a$$

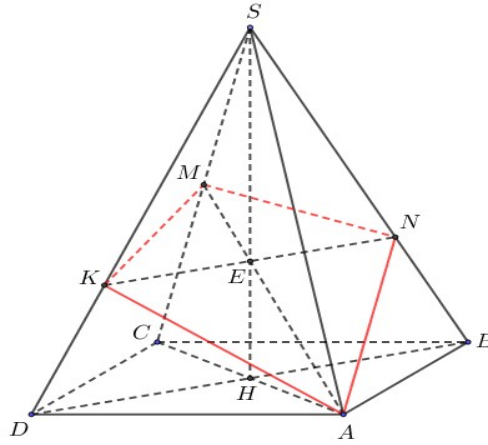
$$\text{Ta có } \tan \widehat{SAO} = \frac{SO}{AO} = \frac{9}{4}.$$

Câu 50. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, M là trung điểm của SC . Mặt phẳng (P) qua AM và song song với BD cắt SB , SD tại N , K . Tính tỉ số thể tích của khối $S.ANMK$ và khối chóp $S.ABCD$

- A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{5}$

Lời giải

Chọn B



Gọi H là tâm hình vuông $ABCD$, $E = SH \cap AM \Rightarrow E$ là trọng tâm ΔSAC

$$\Rightarrow \frac{SE}{SH} = \frac{SK}{SD} = \frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}.$$

Ta có
$$\frac{V_{S.AKM}}{V_{S.ADC}} = \frac{SA.SK.SM}{SA.SD.SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AKM} = \frac{1}{6} V_{S.ABCD}$$

Tương tự
$$\frac{V_{S.ANM}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.ANM} = \frac{1}{6} V_{S.ABCD}.$$

Từ đó
$$V_{S.ANMK} = V_{S.ANM} + V_{S.AKM} = \frac{1}{6} V_{S.ABCD} + \frac{1}{6} V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD}.$$