



Chương

Bài 3.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC



Lý thuyết

1. Công thức cộng



$$(1) \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$(2) \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$(3) \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$(4) \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$(5) \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$(6) \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

2. Công thức nhân đôi

Cho $a = b$ trong các công thức cộng, ta được:



Công thức nhân đôi:

$$(1) \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$(2) \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$(3) \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Công thức hạ bậc:

$$(4) \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$(5) \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$(6) \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

3. Công thức biến đổi tích thành tổng



$$(1) \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$(2) \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$(3) \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$$



4. Công thức biến đổi tổng thành tích

Từ công thức biến đổi tích thành tổng, đặt $u = a - b$, $v = a + b$ ta có



$$\begin{array}{ll} (1) \quad \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2} & (2) \quad \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2} \\ (3) \quad \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2} & (4) \quad \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2} \end{array}$$



Các dạng bài tập

Dạng 1. Công thức cộng



Phương

$$(1) \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$(2) \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$(3) \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$(4) \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$(5) \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$(6) \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$



Ví dụ 1.1.

Rút gọn các biểu thức:

$$(1) A = \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \cos\left(\frac{p}{4} + a\right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \sin\left(\frac{p}{4} + a\right)}$$

$$(2) B = (\tan a - \tan b) \cot(a - b) - \tan a \tan b$$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.2.

Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$(1) A = \cos\left(x + \frac{p}{3}\right) \text{ biết } \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ và } 0 < x < \frac{p}{2}$$

$$(2) B = \cos(a + b) \cdot \cos(a - b) \text{ biết } \cos a = \frac{1}{3} \text{ và } \cos b = \frac{1}{4}$$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

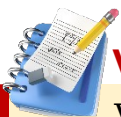
.....

.....

.....

.....

.....

[illegible]

Với

(2) $a+b=\frac{p}{4}$, chứng minh rằng $(1+\tan a)(1+\tan b)=2$

 Lời giải

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Công thức nhân đôi:

$$(2) \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$(3) \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$(4) \quad \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$(5) \quad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$(6) \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$(1) A = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$

$$(2) \quad B = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$(1) \quad \cos a = \frac{5}{13}, 0 < a < \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \sin a = \frac{1}{4}, 0 < a < \frac{\pi}{2}$$

[illegible]



Ví dụ 2.3.

Cho $\sin a = \frac{3}{5}$, với $a \in \left(\frac{p}{2}; p\right)$. Tính giá trị của $E = \sin 2a + \tan 2a$.

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.4.

Chúng minh biểu thức $P = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x$ không phụ thuộc giá trị của

 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



▮ Dạng 3. Công thức biến đổi tích thành tổng



Phương

$$(1) \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$(2) \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$(3) \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$



Ví dụ 3.1.

Biến mỗi biểu thức sau thành dạng tổng

$$(1) A = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$

$$(2) B = \sin x \sin 2x \sin 3x$$

$$(3) C = 8 \cos x \sin 2x \sin 3x$$

$$(4) D = \cos x \cos(x - 60^\circ) \cos(x + 60^\circ)$$

✎ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.2.

Chứng minh rằng $4 \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos 3x$, với $x \in \mathbb{R}$.

✎ Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.3.

Chứng minh $S = \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2p}{3} + x \right) + \cos^2 \left(\frac{2p}{3} - x \right)$ không phụ thuộc giá trị của

👉 **Lời giải**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$(2) \quad \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$(4) \quad \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$



Biến đổi mỗi biểu thức dưới đây thành một tích:

(2) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$

$$(4) \cos x - \cos y$$

[illegible]



Chứng minh

Chứng minh

$$(2) \sin 5x - 2 \sin x (\cos 2x + \cos 4x) = \sin x$$

(3) $\cos 5x \cos x + \sin 3x \sin x = \cos 2x \cos 4x$

$$(4) \quad 2(\sin a \cos 2a - \sin 2a \cos 3a) + \sin 5a = \sin 3a$$

 **Lời giải**

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the entire width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the paper.



Luyện tập

A. Câu hỏi - Trả lời trắc nghiệm

- » Câu 1. Rút gọn biểu thức $M = \cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin x$ ta được kết quả là:
A. $M = \cos x$. **B.** $M = \cos 3x$. **C.** $M = \sin x$. **D.** $M = \sin 3x$.
- » Câu 2. Rút gọn biểu thức $\cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x$ ta được kết quả là
A. 0 . **B.** $-\cos x$ **C.** $-2\cos x$ **D.** $\sin x - \cos x$.
- » Câu 3. Biết $\sin a = \frac{5}{13}$, $\cos b = \frac{3}{5}$, $\left(\frac{p}{2} < a < p; 0 < b < \frac{p}{2}\right)$. Kết quả của biểu thức $\sin(a+b)$ bằng:
A. 0 . **B.** $\frac{63}{65}$ **C.** $\frac{56}{65}$ **D.** $\frac{-33}{65}$.
- » Câu 4. Trong các công thức sau, công thức nào **sai**?
A. $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a$. **B.** $\cos 6a = 1 - 2\sin^2 3a$.
C. $\cos 6a = 1 - 6\sin^2 a$. **D.** $\cos 6a = 2\cos^2 3a - 1$.
- » Câu 5. Đẳng thức nào **không đúng** với mọi x ?
A. $\cos^2 3x = \frac{1 + \cos 6x}{2}$. **B.** $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.
C. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. **D.** $\sin^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$.
- » Câu 6. Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng
A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{-3}{4}$.
- » Câu 7. Biết rằng $\frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\cos(\alpha x)}{b - \sin(\alpha x)}$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.
A. $P = 4$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = 2$. **D.** $P = 3$.
- » Câu 8. Biết $\sin\left(a + \frac{3p}{2}\right) + \cos\left(a + \frac{3p}{2}\right) = \sqrt{2}$. Tính $\sin(a+p) - 2\cos(a-p)$.
A. $\frac{3}{\sqrt{2}}$. **B.** $-\frac{3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- » Câu 9. Biết tam giác ABC có các góc thỏa mãn với a, b nguyên. Tính $a+b$.
A. $a+b=6$. **B.** $a+b=4$. **C.** $a+b=2$. **D.** $a+b=8$.
- » Câu 10. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{2\sin x + 2}$.
A. -1 . **B.** 1 . **C.** 2 . **D.** 0 .



» Câu 11. Cho tam giác ABC . Giá trị của biểu thức

$$P = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C \text{ bằng}$$

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

» Câu 12. Cho biểu thức $S = \sin x + \sin(x+a) + \sin(x+2a) + \sin(x+3a) + \sin(x+4a)$. Nếu $0 < a < p$ thì S không phụ thuộc vào x khi a nhận giá trị nào?

- A. $a = \frac{2p}{5}$. B. $a = \frac{2p}{5}$ hoặc $a = \frac{4p}{5}$.
C. $a = -\frac{2p}{5}$ hoặc $a = \frac{4p}{5}$. D. $a = \frac{4p}{5}$.

B. Câu hỏi - Trả lời Đúng/sai

» Câu 13. Cho biết $\sin a = \frac{3}{5}, \cos a = -\frac{4}{5}$ và các biểu thức $A = \sin\left(\frac{p}{2} - a\right) + \sin(p+a)$; $B = \cos(p-a) + \cot\left(\frac{p}{2} - a\right)$. Khi đó

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	$A = \cos a - \sin a$		
(b)	$B = \cos a + \tan a$		
(c)	$A + B = \frac{27}{20}$		
(d)	$A - B = -\frac{29}{20}$		

» Câu 14. Cho $0 < a < \frac{p}{2}; \frac{p}{2} < b < p$ và $\tan a = 3; \tan b = -2$.

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	$\tan(a+p) = -3$		
(b)	$\tan(a+b) = -1$		
(c)	$\cot(a-b) = 1$		
(d)	$\sin(a-b) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$		

» Câu 15. Cho $\sin x = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3p}{2} < x < 2p$.

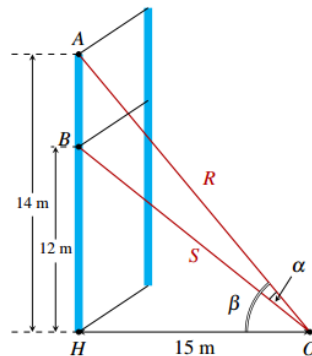
	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	$\cos 2x = -\frac{\sqrt{7}}{5}$		
(b)	$\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$		



	(c))	$\tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$		
	(d))	$C = \frac{2 \sin 2x - \cos 2x}{\tan 2x + \cos 2x} = \frac{-287}{551}$		
» Câu 16. Biết $\sin 2a = -\frac{4}{5}, \frac{p}{2} < a < \frac{3p}{4}$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?				
		Mệnh đề	Đúng	Sai
	(a))	$A = \cos 2a = \frac{3}{5}$		
	(b))	$B = (1 + 3 \sin^2 a)(1 - 4 \cos^2 a) = \frac{17}{25}$		
	(c))	$C = \sin^4 a + \cos^4 a = \frac{7}{25}$		
	(d))	$D = \sin \left(2x + \frac{p}{4} \right) = \frac{-7\sqrt{2}}{10}$		
» Câu 17. Cho tam giác ABC.				
		Mệnh đề	Đúng	Sai
	(a))	$A = 180^\circ - (B + C)$		
	(b))	$\sin B + \sin(A + C) = 0$		
	(c))	$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$		
	(d))	$\triangle ABC$ cân khi $\sin A \cdot \sin C = \cos A \cdot \cos C$		
» Câu 18. Biết $\tan x = -\frac{1}{2}$ và $\frac{p}{2} < x < p$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?				
		Mệnh đề	Đúng	Sai
	(a))	$\cot x = -2$		
	(b))	$\cos x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$		
	(c))	$\sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$		
	(d))	$M = \frac{2 \sin^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x - 4 \cos^2 x}{5 \cos^2 x - \sin^2 x} = -\frac{8}{19}$		
» Câu 19. Trong vật lý, phương trình tổng quát của một vật giao động điều hòa được cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + j)$ trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$). (Điền cho ba ý a, b, c).				
		Mệnh đề	Đúng	Sai



(a)	Nếu một vật giao động theo phương trình $x(t) = 5 \cos\left(100\pi t + \frac{p}{4}\right)$ thì li độ của vật ở thời điểm ban đầu là $5\sqrt{2}$.		
(b)	Một vật giao động điều hòa theo phương trình $x(t) = 10 \sin(50\pi t) \cdot \cos(50\pi t)$ thì biên độ của giao động là 5.		
(c)	Cho hai dao động điều hòa cùng phương có phương trình lần lượt là $x_1 = 5 \cos(100\pi t + p)$ (cm) và $x_2 = 5 \cos\left(100\pi t - \frac{p}{2}\right)$ (cm). Khi đó phương trình dao động tổng hợp của hai dao động trên là $x = 5\sqrt{2} \cos\left(100\pi t + \frac{p}{4}\right)$ (cm).		
(d)	Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15m (Hình vẽ bên dưới). Gọi α là góc giữa hai sợi cáp trên khi đó $\tan \alpha = \frac{10}{131}$.		



C. Câu hỏi - Trả lời ngắn

» Câu 20. Cho biểu thức $P = \cos 5x \cdot \cos 3x - \cos(5x + 90^\circ) \cdot \cos(-3x - 90^\circ)$. Sau khi đơn giản

hóa, ta được biểu thức $P = \cos(\alpha)$. Giá trị của α bằng

👉 **Điền đáp số:**

» Câu 21. Cho góc a thỏa mãn $\sin a = \frac{1}{5}$. Khi đó giá trị biểu thức $P = \cos^2 2x + \cos^2 x$ bằng $\frac{a}{b}$. Tính $a+b$. Biết rằng phân số $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

👉 **Điền đáp số:**

» Câu 22. Tính giá trị biểu thức: $A = \frac{\cos 10x - \cos 9x - \cos 8x + \cos 7x}{\sin 10x - \sin 9x - \sin 8x + \sin 7x}$ với $x = \frac{p}{34}$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

👉 **Điền đáp số:**



- » Câu 23. Cho $\tan a = 2$ và $a \in \left(0; \frac{p}{2}\right)$. Tính $A = 2\sqrt{2} \sin \frac{a}{2} \sin \left(\frac{a}{2} + \frac{p}{4}\right)$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Điền đáp số:

- » Câu 24. Cho $\sin a = \frac{3}{5}$ và $\frac{p}{2} < a < p$. Giá trị gần đúng của biểu thức $E = \frac{2 \tan a - \cot a}{\tan a + 3 \cot a}$ là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng trăm)?

Điền đáp số:

- » Câu 25. Cho biểu thức lượng giác sau (giả sử các biểu thức đều có nghĩa):

$$A = \cos(5p - x) - \sin\left(\frac{3p}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3p}{2} - x\right) + \cot(3p - x)$$

. Khi đó giá trị của $10A$ bằng bao nhiêu?

Điền đáp số:

- » Câu 26. Đơn giản biểu thức $P = \left(\frac{1 - \cos a}{\sin^2 a} + \frac{1}{1 + \cos a} \right) \sin^2 a$.

Điền đáp số:

- » Câu 27. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |\cos^4 x - \cos 2x + m|$ bằng 3. Tính tổng các phần tử của tập S .

Điền đáp số:

- » Câu 28. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh $BC = a, AC = b, AB = c$ thỏa mãn $a + c = 4b$.

Tính giá trị biểu thức $P = \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$.

Điền đáp số:

- » Câu 29. Trong Vật lý, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hòa cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + j)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $j \in [-p; p]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hòa có phương trình:

$$x_1(t) = 2 \cos\left(\frac{p}{3}t + \frac{p}{6}\right) \text{ (cm)}, x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{p}{3}t - \frac{p}{3}\right) \text{ (cm)}$$

Tìm pha ban đầu của dao động tổng hợp này. Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2.

Điền đáp số:

----- Hết -----