**Câu 1. (Tuyển sinh tỉnh Thanh Hóa năm 2019-2020)** Cho các số thực a, b, c thỏa mãn , Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Ta có: 

Tương tự có: ;

Suy ra 

Đặt  ta có:  ( do )

Suy ra: 

Dễ cm đc 







Vậy  Dấu “\_” xảy ra khi 

**Câu 2. (Tuyển sinh tỉnh Thái Bình năm 2019-2020)** Cho , ,  là các số thực dương thỏa mãn . Chứng minh rằng: .

***Lời giải***

Đặt .

Có , ,  là các số thực dương, theo bất đẳng thức AM-GM có:

., mà .

.

Có .

Suy ra .

Có .

Do đó ., .

Suy ra . Dấu đẳng thức xảy ra khi .

Vậy .

**Câu 3. (Tuyển sinh tỉnh Vĩnh Phúc năm 2019-2020)** Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh:



**Lời giải**

**Câu 4. (Tuyển sinh tỉnh Hà Nam năm 2019-2020)** Cho  là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện 

Chứng minh .

**Lời giải**

Bất đẳng thức cần chứng minh 









Thật vậy áp dụng bất đẳng thức CauChy cho 3 số dương ta có .

Dấu “=” xảy ra khi .

Hoàn tất chứng minh.

**Câu 5. (Tuyển sinh tỉnh Hòa Bình năm 2019-2020)** Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn a + b = 4ab

Chứng minh rằng: 

.**Lời giải**

.Từ a + b = 4ab  .

.Chứng minh được BĐT: Với x, y >0 ta có  (\*) .

.Áp dụng (\*) ta có



= 

Dấu đẳng thức xảy ra khi  .

**Câu 6. (Tuyển sinh tỉnh Hải Phòng năm 2019-2020)**Cho  là ba số dương. Chứng minh 

**Lời giải**

Áp dụng bất đẳng thức  cho hai số ta chứng minh được  .

**Câu 7. (Tuyển sinh tỉnh KONTUM năm 2019-2020)** Chứng minh .

***Lời giải***

*.*

*.*

*Ta có : *

*.*



Vậy *.*

**Câu 8. (Tuyển sinh tỉnh Lai Châu năm 2019-2020)** Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

****

**Lời giải**

Ta chứng minh bất đẳng thức  với x, y > 0.

Thậy vậy, với x, y > 0 thì:



 (luôn đúng)

Do đó:  với x, y > 0.

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có:

****

Tương tự ta có: 

Cộng vế với vế các bất đẳng thức với nhau ta được:

****

****

Do đó  (đpcm).

Dấu “=” xảy ra khi a = b = c.

**Câu 9. (Tuyển sinh tỉnh Lạng Sơn năm 2019-2020)**Cho ba số thực không âm *a, b, c* và thỏa mãn *a+b+c=1*. Chứng minh rằng:



**Lời giải**

Ta có 

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có

 Áp dụng bất đẳng thức cô si

 



**Câu 10. (Tuyển sinh tỉnh Ninh Thuận năm 2019-2020)** Giải bất phương trình 

**Lời giải**

.

Vậy nghiệm của bất phương trình là x > 

**Câu 11. (Tuyển sinh tỉnh Ninh Bình năm 2019-2020)** Rút gọn biêu thức .

**Lời giải**



**Câu 12. (Tuyển sinh tỉnh Ninh Bình năm 2019-2020)** Cho  là các số thực dương thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

**Lời giải**

Ta chứng minh bất đẳng thức với 

Áp dụng bất đẳng thức Bu – nhi – a - cốp – xki cho ba bộ số 

ta có 



 **(\*)**

Dấu “=” xảy khi khi 

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có 







Áp dụng bất đẳng thức (\*) ta có



Dấu “=” xảy ra khi 

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức khi 

**Câu 13. (Tuyển sinh tỉnh Quảng Nam năm 2019-2020)** Cho hai số thực  thỏa mãn 

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Lời giải**



Dấu  xảy ra 

Vậy giá trị nhỏ nhất của  là 80 khi x = 3; y =3.

**Câu 14. (Tuyển sinh tỉnh Quảng Ninh năm 2019-2020)** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+ y + z \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức



**Lời giải**

Ta có  nên

Áp dụng BĐT  , ta có:

Hay 

Từ đó ta có: 
$$P=\frac{1}{x^{2}+y^{2}+z^{2}}+\frac{21}{xy+yz+zx}+\frac{2017}{xy+yz+zx}\geq 9+6051=6060$$

$. $Vậy GTNN của P là 6060 khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

**Câu 15. (Tuyển sinh tỉnh Tây Ninh năm 2019-2020)** Cho hai số thực không âm  thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

**Lời giải**

Ta có . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi .

Vì  nên .

Do đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức là  đạt được khi .

+) Vì  nên  Suy ra .

Mặt khác . Suy ra .

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

.

Giá trị lớn nhất của biểu thức  là  đạt được khi 

**Câu 16. (Tuyển sinh tỉnh Vĩnh Long năm 2019-2020)** Cho là các số thực dương thỏa 

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

**Lời giải**

Ta có:  thay vào A ta được:







Dễ thấy 

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có 

Suy ra 

Dấu "=" xảy ra khi 

Vậy  khi 

**Câu 17. (Tuyển sinh tỉnh BA RIA VT năm 2019-2020)** Cho các số thực dương x, y thỏa mãn  . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức



**Lời giải**

Cho các số thực dương x, y thỏa mãn  . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức



=



Ta lại có: 

Khi đó:



Vậy 

**Câu 18. (Tuyển sinh tỉnh Bình Định năm 2019-2020)** Cho  là hai số thực thỏa ****. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức ****

**Lời giải**

Với , ta có



Vì  và .

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương , ta có



Suy ra .

Dấu đẳng thức xảy ra .

Mà 

Vậy  tại hoặc 

**Câu 19. (Tuyển sinh tỉnh Bắc Giang năm 2019-2020)** Cho  là các số thực thỏa mãn điều kiện . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Lời giải**



Từ  chỉ ra được

Suy ra 



Vậy giá trị nhỏ nhất của *P* là khi

**Câu 20. (Tuyển sinh tỉnh Bắc Ninh năm 2019-2020)** Cho hai số thực không âm  thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

**Lời giải**

Ta có . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi .

Vì  nên .

Do đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức là  đạt được khi .

+) Vì  nên  Suy ra .

Mặt khác . Suy ra .

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

.

Giá trị lớn nhất của biểu thức  là  đạt được khi 

**Câu 21. (Tuyển sinh tỉnh DAK LAK năm 2019-2020)** Cho ba số thực dương  thỏa mãn: .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:.

**Lời giải**

Đặt , ta được: .

Khi đó:  .

Xét 

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi.

Tương tự ta có: .

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ; .

Cộng các vế ta được: .

Vậy giá trị lớn nhất của bằng khi và chỉ khi  hay giá trị lớn nhất của bằng khi và chỉ khi .

**Câu 22. (Tuyển sinh Tp.Hà Nội năm 2019-2020)** Cho biểu thức  với  là các số thực thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của .

**Lời giải**

Ta có  thay vào  ta được.



.

Vì , mà . 

Và . 

Từ  và  suy ra   

Vậy . Dấu = xảy ra khi .

. Dấu = xảy ra khi  hoặc .

**Câu 23. (Tuyển sinh tỉnh Hà Tĩnh đề 01 năm 2019-2020)** Cho hai số thực dương  thỏa mãn: .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức .

**Lời giải**

Ta có: 

Từ giả thiết 

 (vì )







Vậy giá trị lớn nhất của P bằng  khi .

***Câu 24. (Tuyển sinh tỉnh Hà Tĩnh Đề 02 năm 2019-2020)***Cho hai số thực dương  thỏa mãn .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức .

**Lời giải**

Ta có: 

Từ giả thiết 









Giá trị lớn nhất của P bằng  khi .

**Câu 25. (Tuyển sinh tỉnh Hưng Yên năm 2019-2020)** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn: 

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

**Lời giải**



Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta có: 

Tương tự ta cũng có: 





Lại có: 

Tương tự 

Suy ra



Vậy giá trị nhỏ nhất của P = 3/2 khi x = y = z = 1.

**Câu 26. (Tuyển sinh tỉnh Hải Dương năm 2019-2020)** Cho các số dương  thỏa mãn điều kiện: .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: .

**Lời giải**

.Ta có:



Tương tự:





Dấu “=” xảy ra 

Vậy 

**Câu 27. (Tuyển sinh tỉnh Hải Phòng năm 2019-2020)** Cho  là ba số dương thỏa mãn  Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức



**Lời giải**

Áp dụng bất đẳng thức ở phần a) ta có:

 

.

Cộng theo các vế của ba bất đẳng thức trên ta được



.



Dấu “=” xảy ra khi 

Vậy .

**Câu 28. (Tuyển sinh tỉnh Hậu Giang năm 2019-2020)** Với , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: ****

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có ****

Đặt  ta được:

** ** với mọi t thuộc R

Dấu “=” xảy ra khi  . Vậy  khi 

**Câu 29. (Tuyển sinh tỉnh Nam Định năm 2019-2020)** Xét các số x, y, z thay đổi thoả mãn x3 + y3 + z3 – 3xyz = 2.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Lời giải**

**Ta có:**

x³ + y³ + z³ - 3xyz = (x + y)³ - 3xy(x - y) + z³ - 3xyz = 2
 [(x + y)³ + z³] - 3xy(x + y +z ) = 2
 (x + y + z)³ - 3z(x + y)(x + y + z) - 3xy(x – y - z) = 2
 (x + y + z)[(x + y + z)² - 3z(x + y) - 3xy] = 2

 (x + y + z)(x² + y² + z² + 2xy + 2xz + 2yz - 3xz - 3yz - 3xy) = 2
 (x + y + z)(x² + y² + z² - xy - xz - yz) = 2

 x² + y² + z² - xy - xz – yz ≠ 0

Chứng minh: x² + y² + z² - xy - xz – yz ≥ 0 với mọi x, y, z

 x² + y² + z² - xy - xz – yz > 0 x + y + z

Đặt x + y + z = t (t > 0) x² + y² + z² - xy - xz – yz  khi đó ta có



Áp dụng BĐT Cô si ta có:  (dấu bằng xảy ra t = 2)

 (dấu bằng xảy ra t = 2)

 P ≥ 8 – 2 = 6. Tồn tại x = y = 1, z = 0 thì P = 6

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 6