



- Câu 8:** Trong không gian Oxyz, cho ba điểm  $A(1;1;1)$ ,  $B(2;1;0)$ ,  $C(2;0;2)$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng chứa  $BC$  và cách  $A$  một khoảng lớn nhất. Hỏi vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(P)$ ?
- A.  $\vec{n} = (5; 2; -1)$ .      B.  $\vec{n} = (5; 2; 1)$ .      C.  $\vec{n} = (-5; 2; -1)$ .      D.  $\vec{n} = (5; -2; -1)$ .
- Câu 9:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các điểm  $A(3;0;0)$ ,  $B(1;4;2)$ . Mặt phẳng  $(P)$  qua  $B$  cách  $A$  một khoảng lớn nhất có một vectơ pháp tuyến  $\vec{n}(a;b;1)$ . Tính tích  $T = a.b$ ?
- A.  $T = 2$ .      B.  $T = -8$ .      C.  $T = -2$ .      D.  $T = 4$ .
- Câu 10:** Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng  $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$  và  $\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng chứa  $\Delta_1$  và tạo với  $\Delta_2$  góc lớn nhất. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(P)$ ?
- A.  $\vec{n}_1 = (1; 4; 1)$ .      B.  $\vec{n}_1 = (1; 4; -1)$ .      C.  $\vec{n}_1 = (1; -4; 1)$ .      D.  $\vec{n}_1 = (1; -4; -1)$ .
- Câu 11:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho bốn điểm  $A(a;0;0)$ ,  $B(0;b;0)$ ,  $C(0;0;c)$  và  $D(1;2;-1)$ ; với  $a, b, c$  là các số thực khác 0. Biết rằng bốn điểm  $A, B, C, D$  đồng phẳng khi khoảng cách từ gốc tọa độ  $O$  đến mặt phẳng  $(ABC)$  là lớn nhất. Giá trị biểu thức  $a+b+c$  bằng
- A. 2.      B. 4.      C. 3.      D. 15.
- Câu 12:** Trong không gian Oxyz, cho điểm  $M(3;1;1)$ . Mặt phẳng  $P$  đi qua  $M$  và cắt chiều dương của các trục  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt tại các điểm  $A(a;0;0)$ ,  $B(0;b;0)$ ,  $C(0;0;c)$ . Biết  $OA = 2OB$  và thể tích khối tứ diện  $OABC$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị biểu thức  $S = a + b + c$  bằng
- A.  $\frac{57}{4}$ .      B. 14.      C.  $\frac{59}{4}$ .      D.  $\frac{29}{2}$ .
- Câu 13:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm  $M(1;2;1)$ . Mặt phẳng  $(P)$  thay đổi đi qua  $M$  lần lượt cắt các tia  $Ox$ ;  $Oy$ ;  $Oz$  tại  $A$ ;  $B$ ;  $C$  khác  $O$ . Giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện  $OABC$  là:
- A. 18.      B. 54.      C. 9.      D. 6.
- Câu 14:** Trong không gian Oxyz, cho các mặt phẳng  $(\alpha): 2x - y - 2z + 1 = 0$ ,  $(\beta): 2x - y - 2z + 3 = 0$ ,  $(\gamma): 2x - y - 2z + 6 = 0$ .  $M$  là điểm thay đổi trên  $(\alpha)$ . Đường thẳng  $OM$  cắt  $(\beta)$ ,  $(\gamma)$  lần lượt tại  $N, P$ . Khi biểu thức  $T = \frac{MN^2}{10} + \frac{4}{MP}$  đạt giá trị nhỏ nhất hãy tính tổng  $S = MN^2 + MP^2$ .
- A.  $S = 25$ .      B.  $S = 29$ .      C. 2021.      D. 34.
- Câu 15:** Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu  $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 27$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua hai điểm  $A(0;0;-4)$ ,  $B(2;0;0)$  và cắt  $(S)$  theo giao tuyến là đường tròn  $(C)$  sao cho khối nón đỉnh là tâm của  $(S)$  và đáy là đường tròn  $(C)$  có thể tích lớn nhất. Biết rằng  $(\alpha): ax + by - z + c = 0$ , khi đó  $a - b + c$  bằng
- A. 0.      B. 2.      C. -4.      D. 8.

**Câu 16:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 3$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  tiếp xúc với mặt cầu  $(S)$  và cắt các tia  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt tại các điểm  $A, B, C$  thỏa mãn  $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 27$ . Diện tích của tam giác  $ABC$  bằng

- A.  $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ .                      B.  $3\sqrt{3}$ .                      C.  $9\sqrt{3}$ .                      D.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 17:** Mặt phẳng  $(P)$  đi qua điểm  $M(3; -1; 2)$ , vuông góc với mặt phẳng  $(Q): x + y - 2z + 3 = 0$  và khoảng cách từ điểm  $N(1; 2; 0)$  đến  $(P)$  lớn nhất có phương trình là

- A.  $11x - 9y - z - 40 = 0$ .                      B.  $19x - 9y + 5z - 46 = 0$ .  
C.  $17x - 13y + 2z - 68 = 0$ .                      D.  $15x - y + 7z + 70 = 0$ .

**Câu 18:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(0; 1; 2)$  và  $B(3; 1; 2)$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $A$  và song song với véc-tơ  $\vec{u} = (1; -1; 1)$  và cách điểm  $B$  một khoảng lớn nhất. Tọa độ giao điểm  $M$  của  $(P)$  và trục  $Ox$  là

- A.  $M\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ .                      B.  $M\left(-\frac{1}{3}; 0; 0\right)$ .                      C.  $M(1; 0; 0)$ .                      D.  $M\left(-\frac{1}{3}; 0; 0\right)$

**Câu 19:** Trong không gian  $Oxyz$ , Cho bốn điểm  $A(a; 0; 0)$ ,  $B(0; b; 0)$ ,  $C(0; 0; c)$ ,  $D(1; 2; -1)$ , với  $a, b, c$  là các số thực khác 0. Biết rằng bốn điểm  $A, B, C, D$  đồng phẳng, Khi khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng  $ABC$  lớn nhất. Giá trị  $a + b + c$  bằng

- A. 15.                      B. 3.                      C. 2.                      D. 4.

**Câu 20:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 8x - 4y + 3z - 12 = 0$  và hai điểm  $A\left(-2; -2; \frac{5}{2}\right), B\left(2; -4; -\frac{5}{2}\right)$ . Mặt phẳng  $(Q)$  chứa đường thẳng  $AB$  và tạo với  $(P)$  một góc nhỏ nhất, khoảng cách từ gốc tọa độ  $O$  đến  $(Q)$  bằng

- A.  $\sqrt{3}$ .                      B. 1.                      C. 2.                      D.  $\sqrt{2}$

**Câu 21:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 2x - y - 2z - 12 = 0$  và hai điểm  $A(1; 1; 3)$ ,  $B(2; 1; 4)$ , tập hợp những điểm  $C \in (P)$  sao cho tam giác  $ABC$  có diện tích nhỏ nhất là

- A.  $(d): \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{8}{9} \\ z = -\frac{50}{9} + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$                       B.  $(d): \begin{cases} x = -\frac{5}{4} + t \\ y = -\frac{5}{4} \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

C. Đường tròn  $(C)$  tâm  $I\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{7}{2}\right)$ , bán kính  $R = \sqrt{2}$ .

D. Đường tròn  $(C)$  tâm  $A(1; 1; 3)$ , bán kính  $R = \sqrt{2}$ .

- Câu 22:** Trong không gian Oxyz cho điểm  $A(1;0;-7)$  và  $B(5;4;9)$ . Xét khối nón  $(N)$  có đỉnh là  $A$ , đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính  $AB$ . Khi  $(N)$  có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của  $(N)$  có dạng  $mx + ny + 4z + p = 0$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = m^2 + n^2 - p$
- A.  $T = 19$ .                      B.  $T = 23$ .                      C.  $T = 20$ .                      D.  $T = -20$ .
- Câu 23:** Trong không gian Oxyz, cho ba điểm  $A(1;4;5)$ ,  $B(0;3;1)$ ,  $C(2;-1;0)$  và mặt phẳng  $(P): 2x - 2y + z - 9 = 0$ . Gọi  $M(a;b;c)$  là điểm thuộc mặt phẳng  $(P)$  sao cho biểu thức  $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó  $a + 2b - c$  bằng:
- A. 0.                      B. 3.                      C. -3.                      D. 9.
- Câu 24:** Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng  $(P): 2x - y + z + 1 = 0$  và hai điểm  $A(8;-7;4)$ ,  $B(-1;2;-2)$ . Điểm  $M(a;b;c)$  thuộc  $(P)$  sao cho  $MA^2 + 2MB^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó  $a + b + c$  bằng
- A. -2.                      B. 1.                      C. 2.                      D. -1.
- Câu 25:** Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm  $A(a;0;0)$ ,  $B(0;b;0)$ ,  $C(0;0;c)$ ,  $D(1;2;-1)$ , với  $a, b, c$  là các số thực khác 0. Biết rằng bốn điểm  $A, B, C, D$  đồng phẳng, khi khoảng cách từ gốc tọa độ  $O$  đến mặt phẳng  $(ABC)$  lớn nhất. Giá trị  $a + b + c$  bằng
- A. 15.                      B. 3.                      C. 2.                      D. 4.
- Câu 26:** Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng  $(P): 2x - y + z + 1 = 0$ , và hai điểm  $A(2;-1;0)$ ,  $B(3\sqrt{3};0;-1)$ . Điểm  $M$  di động trên  $(P)$ , giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $T = -MA + 7MB$  bằng
- A.  $3\sqrt{78}$ .                      B.  $15\sqrt{3}$ .                      C.  $3\sqrt{76}$ .                      D.  $3\sqrt{73}$ .
- Câu 27:** Trong không gian Oxyz, cho hai điểm  $A(2;1;3)$ ,  $B(6;5;5)$ . Xét khối nón  $(N)$  có đỉnh là  $A$ , đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính  $AB$ . Khi khối nón có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng  $(P)$  chứa đường tròn đáy có phương trình dạng  $2x + by + cz + d = 0$ . Giá trị  $b + c + d$  bằng
- A. -21.                      B. -12.                      C. -18.                      D. -15
- Câu 28:** Trong không gian Oxyz cho điểm  $A(-2;0;0)$  và ba mặt phẳng  $(P_1): 2x + y + 2z - 5 = 0$ ;  $(P_2): 2x + y + 2z + 13 = 0$ ;  $(Q): 2x - 2y - z - 5 = 0$ . Mặt cầu  $(S)$  di động có tâm  $I(a;b;c)$  và đi qua  $A$ ; đồng thời tiếp xúc với hai mặt phẳng  $(P_1)$ ,  $(P_2)$ . Khi khối cầu  $(S)$  cắt mặt phẳng  $(Q)$  theo thiết diện là hình tròn có diện tích lớn nhất thì  $a + b - 2c$  bằng
- A. 3.                      B. 0.                      C. -3.                      D. 2.
- Câu 29:** Trong không gian Oxyz, cho ba điểm  $A(10;0;0)$ ,  $B(0;10;0)$ ,  $C(0;0;10)$ . Xét mặt phẳng  $(P)$  thay đổi sao cho  $A, B, C$  nằm về cùng một phía so với mặt phẳng  $(P)$  và khoảng cách từ  $A, B, C$

đến mặt phẳng  $(P)$  lần lượt bằng 10,11,12. Khoảng cách từ gốc tọa độ  $O$  đến mặt phẳng  $(P)$  có giá trị lớn nhất bằng

- A.  $\frac{33+\sqrt{365}}{3}$ .      B.  $\frac{33-7\sqrt{6}}{3}$ .      C.  $\frac{33-\sqrt{365}}{3}$ .      D.  $\frac{33+7\sqrt{6}}{3}$ .

**Câu 30:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(1;2;3)$  và đi qua điểm  $A(0;4;1)$ . Xét khối nón  $(N)$  có đỉnh  $A$  và nội tiếp trong khối cầu  $(S)$ . Khi diện tích xung quanh của hình nón  $(N)$  lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của  $(N)$  có phương trình dạng  $-x+by+cz+d=0$ . Giá trị của  $b+c+2d$  bằng

- A. 12.      B. 6.      C. -12.      D. -6.

**Câu 31:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(3;-2;3)$ ;  $B(1;0;5)$ . Tìm tọa độ điểm  $M \in (Oxy)$  sao cho  $MA+MB$  đạt giá trị nhỏ nhất:

- A.  $\left(\frac{9}{4};-\frac{5}{4};0\right)$ .      B.  $\left(\frac{9}{4};\frac{5}{4};0\right)$ .      C.  $\left(-\frac{9}{4};-\frac{5}{4};0\right)$ .      D.  $\left(-\frac{9}{4};\frac{5}{4};0\right)$ .

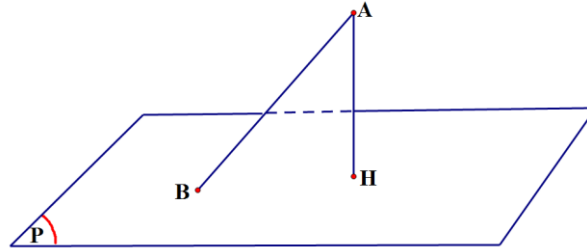
## II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

**Câu 1:** Gọi  $(P)$  là mặt phẳng chứa điểm  $B(0;1;2)$  sao cho khoảng cách từ điểm  $A(1;2;1)$  đến  $(P)$  là lớn nhất. Phương trình của  $(P)$  là

- A.  $x + y + z - 3 = 0$ .      B.  $x + y - z + 1 = 0$ .  
C.  $x - y - z + 3 = 0$ .      D.  $x + 2y + z - 4 = 0$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Gọi  $H$  là hình chiếu của điểm  $A$  lên mặt phẳng  $(P)$  khi đó  $d(A, (P)) = AH$ ,  $AH \leq AB$ .

Khoảng cách từ điểm  $A(1;2;1)$  đến  $(P)$  là lớn nhất xảy ra khi  $H \equiv B$ . Do đó  $(P)$  đi qua điểm  $B$  và nhận

$\overrightarrow{BA}(1; 1; -1)$  là véc tơ pháp tuyến

Phương trình  $(P)$  là:  $x + y - z + 1 = 0$

**Câu 2:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;4;5)$  và  $B(-1;2;7)$ . Điểm  $M$  thay đổi nhưng luôn thuộc mặt phẳng  $(P)$  có phương trình  $3x - 5y + z - 9 = 0$ . Giá trị nhỏ nhất của tổng  $MA^2 + MB^2$  là

- A. 12.      B.  $\frac{441}{35}$ .      C.  $\frac{858}{35}$ .      D.  $\frac{324}{35}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ , ta có  $I(0;3;6)$  và  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \\ &= 2MI^2 + IA^2 + IB^2 \end{aligned}$$

Để  $MA^2 + MB^2$  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi  $MI$  nhỏ nhất. Do  $I$  cố định,  $M$  thay đổi trên  $mp(P)$ , để  $MI$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $MI = d(I; (P))$ .

Ta có:  $MI = d(I; (P)) = \frac{18}{\sqrt{35}}$ ;  $IA = IB = \sqrt{3}$ . Khi đó ta có:

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 2 \cdot \left(\frac{18}{\sqrt{35}}\right)^2 + 2(\sqrt{3})^2 = \frac{858}{35}$$

**Câu 3:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;4;5)$  và  $B(-1;2;7)$ . Điểm  $M$  thay đổi nhưng luôn thuộc mặt phẳng  $P$  có phương trình  $3x - 5y + z - 9 = 0$ . Giá trị nhỏ nhất của tổng  $MA^2 + MB^2$

- A. 12.                      B.  $\frac{441}{35}$ .                      C.  $\frac{858}{35}$ .                      D.  $\frac{324}{35}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn  $AB \Rightarrow I(0;3;6)$  và  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ .

$$\vec{IA} = 1;1;-1; \vec{IB} = -1;-1;1.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có:} \quad MA^2 + MB^2 &= \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 = \vec{MI} + \vec{IA}^2 + \vec{MI} + \vec{IB}^2 \\ &= 2MI^2 + 2\vec{MI} \cdot \vec{IA} + \vec{IA}^2 + \vec{IB}^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2. \end{aligned}$$

Ta có:  $IA^2 + IB^2$  không đổi  $\Rightarrow MA^2 + MB^2$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $MI$  nhỏ nhất  $\Rightarrow M$  là hình chiếu của điểm  $I$  lên mặt phẳng  $P$ .

$$\text{Vậy } MA^2 + MB^2 \text{ min} = 2MI^2 + IA^2 + IB^2.$$

$$\text{Mà } MI = d(I; P) = \frac{|3 \cdot 0 - 5 \cdot 3 + 6 - 9|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2}} = \frac{18}{\sqrt{35}}; \quad IA^2 + IB^2 = 6.$$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = \frac{858}{35}.$$

$$\text{Gọi } d \text{ là đường thẳng đi qua } I \text{ và vuông góc với } P \Rightarrow d: \begin{cases} x = 3t \\ y = 3 - 5t \\ z = 6 + t \end{cases}$$

$$\text{Tọa độ điểm } M \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} x = 3t \\ y = 3 - 5t \\ z = 6 + t \\ 3x - 5y + z - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{24}{35} \\ x = \frac{72}{35} \\ y = -\frac{3}{7} \\ z = \frac{129}{35} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{72}{35}; -\frac{3}{7}; \frac{129}{35}\right).$$

**Câu 4:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;4;5), B(-1;2;7)$ . Điểm  $M$  thay đổi nhưng luôn thuộc mặt phẳng  $(P)$  có phương trình  $3x - 5y + z - 9 = 0$ . Giá trị nhỏ nhất của tổng  $MA^2 + MB^2$  là

- A. 12.                      B.  $\frac{441}{35}$ .                      C.  $\frac{858}{35}$ .                      D.  $\frac{324}{35}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là  $I(0;3;6)$  và  $H$  là hình chiếu của  $I$  lên mặt phẳng  $(P)$

. Ta có  $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} \geq 2HI^2 + \frac{AB^2}{2}$  nên  $MA^2 + MB^2$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $M$  trùng với  $H$  hay

$$(MA^2 + MB^2)_{\min} = 2 \cdot (d(I, (P)))^2 + \frac{AB^2}{2} = 2 \cdot \frac{|3 \cdot 0 - 5 \cdot 3 + 6 - 9|^2}{(3^2 + (-5)^2 + 1^2)} + \frac{12}{2} = \frac{858}{35}.$$

- Câu 5:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng  $(\Delta): \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$  và mặt phẳng  $(\alpha): x+2y-2z-1=0$ . Biết mặt phẳng  $(P)$  chứa  $(\Delta)$  và tạo với  $(\alpha)$  một góc nhỏ nhất có phương trình dạng  $7x+by+cz+d=0$ . Giá trị  $b+c+d$  là
- A. -3.                      B. -23.                      C. 3.                      D. -5.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi vectơ chỉ phương của mặt phẳng  $(P)$  là:  $\vec{n}(a;b;c)$ . Vì chứa mặt phẳng  $(P)$  đường thẳng  $(\Delta)$  nên  $-a+2b+c=0 \Rightarrow a=2b+c$ .

$$\cos((P);(\alpha)) = \frac{|4b-c|}{3\sqrt{5b^2+4bc+2c^2}}$$

Góc giữa mặt phẳng  $(P)$  và mặt phẳng  $(\alpha)$  nhỏ nhất khi  $\cos((P);(\alpha))$  lớn nhất hay

$$\cos^2((P);(\alpha)) \text{ lớn nhất. Mà } \cos^2((P);(\alpha)) = \frac{16b^2-8bc+c^2}{9(5b^2+4bc+2c^2)}.$$

$$\text{TH1: Nếu } c=0 \text{ thì } \cos^2((P);(\alpha)) = \frac{16}{45} \Rightarrow \cos((P);(\alpha)) = \frac{4\sqrt{5}}{15}.$$

$$\text{TH2: Nếu } c \neq 0. \cos^2((P);(\alpha)) = \frac{16b^2-8bc+c^2}{9(5b^2+4bc+2c^2)} = \frac{16t^2-8t+1}{9(5t^2+4t+2)} \text{ với } t = \frac{b}{c}.$$

$$f(t) = \frac{16t^2-8t+1}{9(5t^2+4t+2)} \Rightarrow f'(t) = \frac{104t^2+54t-20}{9(5t^2+4t+2)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{4} \\ t = -\frac{10}{13} \end{cases}$$

$$\text{Để thấy } \max_{t \in \mathbb{R}} f(t) = f\left(-\frac{10}{13}\right) \text{ đạt được khi } \frac{b}{c} = -\frac{10}{13}.$$

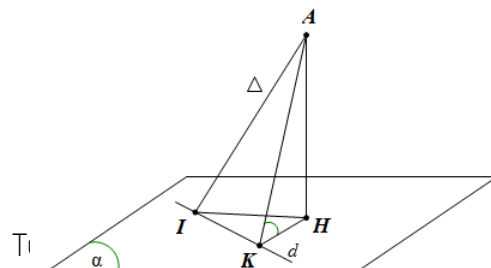
$$\text{Chọn } b=10; c=-13 \Rightarrow a=7.$$

$$\text{Vậy mặt phẳng } (P): 7x+10y-13z-20=0. \text{ Do đó } a+b+c=-23.$$

**Cách 2: Thầy Lê Văn Quý**

$$\text{Ta có } \vec{u}_{\Delta} = (-1; 2; 1), \vec{n}_{\alpha} = (1; 2; -2)$$

$$\text{Gọi } I = \Delta \cap (\alpha) \text{ và } d = (\alpha) \cap (P).$$



Lấy điểm  $A(1;0;-1) \in \Delta, (A \neq I)$ .

Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $A$  trên  $(\alpha)$  và  $d$ . Khi đó  $((\alpha), (P)) = AKH$ .

Ta có  $\tan AKH = \frac{AH}{HK} \geq \frac{AH}{HI}$  (không đổi). Do đó  $AKH$  nhỏ nhất khi  $K \equiv I$ .

Vậy  $(P)$  là mặt phẳng chứa  $\Delta$  và  $d$ , với  $d$  là đường thẳng nằm trong  $(\alpha)$  đi qua  $I$  và vuông góc với  $\Delta$ .

Ta có vector chỉ phương của đường thẳng  $d$  là  $\vec{u}_d = [\vec{u}_\Delta, \vec{n}_\alpha] = (-6; -1; -4)$ .

Do mặt phẳng  $(P)$  chứa  $\Delta$  và  $d$  nên  $(P)$  có một vector pháp tuyến là  $[\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta] = (7; 10; -13)$ .

Hơn nữa, mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $A(1;0;-1)$  nên  $(P)$  có phương trình:

$$7(x-1) + 10y - 13(z+1) = 0 \Leftrightarrow 7x + 10y - 13z - 20 = 0.$$

Do vậy,  $b + c + d = -23$

**Câu 6:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c); D(1;2;-1)$  với  $a, b, c$  là các số thực khác 0. Biết rằng bốn điểm  $A, B, C, D$  đồng phẳng khi khoảng cách từ gốc tọa độ  $O$  đến mặt phẳng  $(ABC)$  là lớn nhất, giá trị  $a + b + c$  bằng

A. 2.

B. 15.

C. 3.

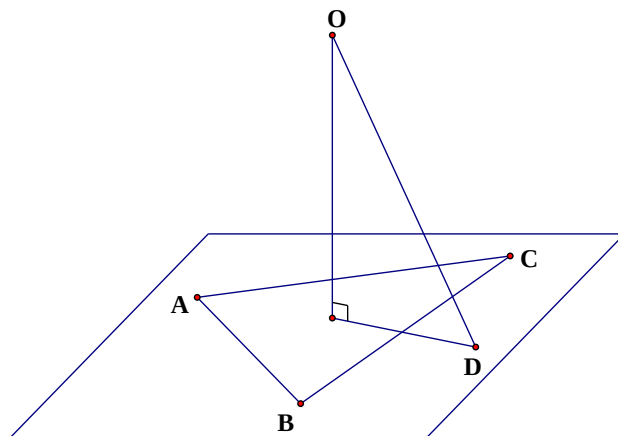
D. 4.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $\vec{AB} = (-a; b; 0), \vec{AC} = (-a; 0; c), \vec{AD} = (1-a; 2; -1)$  và  $[\vec{AB}; \vec{AC}] = (bc; ca; ab)$ .

$\Rightarrow$  phương trình mặt phẳng  $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow bc.x + ca.y + ab.z - abc = 0$ .



Lại có  $d[O; (ABC)] \leq OD \Rightarrow d[O; (ABC)]$  lớn nhất khi có dấu "=" xảy ra

Khi đó  $[\vec{AB}; \vec{AC}]$  cùng phương với  $\vec{OD}$

Nên ta có  $\frac{bc}{1} = \frac{ca}{2} = \frac{ab}{-1} \Rightarrow ca = 2bc = -2ab \Rightarrow a = -c = 2b$

Điều kiện đồng phẳng của  $A, B, C, D$  là  $[\vec{AB}; \vec{AC}] \cdot \vec{AD} = 0$

Ta có  $\left[ \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right] \cdot \overrightarrow{AD} = (1-a)bc + 2ca - ab = bc + 2ca - ab - abc = 0 \Leftrightarrow 6bc = abc \Rightarrow a = 6$

Suy ra  $c = -6$  và  $b = 3$ .

Vậy  $a + b + c = 3$ .

- Câu 7:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm  $A(1;0;2), B(-1;1;3), C(3;2;0)$  và mặt phẳng  $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$ . Biết rằng điểm  $M(a;b;c)$  thuộc mặt phẳng  $(P)$  sao cho biểu thức  $MA^2 + 2MB^2 - MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó  $a + b + c$  bằng:
- A. -1.                      B. 1.                      C. 3.                      D. 5.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Gọi } I \text{ là điểm thỏa mãn: } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + 2x_B - x_C}{1 + 2 - 1} = -2 \\ y_I = \frac{y_A + 2y_B - y_C}{1 + 2 - 1} = 0 \\ z_I = \frac{z_A + 2z_B - z_C}{1 + 2 - 1} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow I(-2;0;4).$$

$$\text{Ta có: } MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM})^2 = MI^2 + IA^2 - 2\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IM}.$$

$$2MB^2 = 2\overrightarrow{MB}^2 = 2(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM})^2 = 2MI^2 + 2IB^2 - 4\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IM}.$$

$$MC^2 = \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM})^2 = MI^2 + IC^2 - 2\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IM}.$$

$$\Rightarrow MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = 2MI^2 + IA^2 + 2IB^2 - IC^2 - 2\overrightarrow{IM}(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}).$$

$$\Rightarrow MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = 2MI^2 + IA^2 + 2IB^2 - IC^2.$$

Để  $MA^2 + 2MB^2 - MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $MI$  đạt giá trị nhỏ nhất  $\Leftrightarrow M$  là hình chiếu vuông góc của  $I$  lên mặt phẳng  $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$ .

$$\text{Phương trình đường thẳng } IM: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2t \\ z = 4 - 2t \end{cases} \Rightarrow M(-2 + t; 2t; 4 - 2t).$$

$$M \in (P) \Rightarrow -2 + t + 4t - 2(4 - 2t) + 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow M(-1; 2; 2).$$

$$\Rightarrow a = -1, b = 2, c = 2 \Rightarrow a + b + c = 3.$$

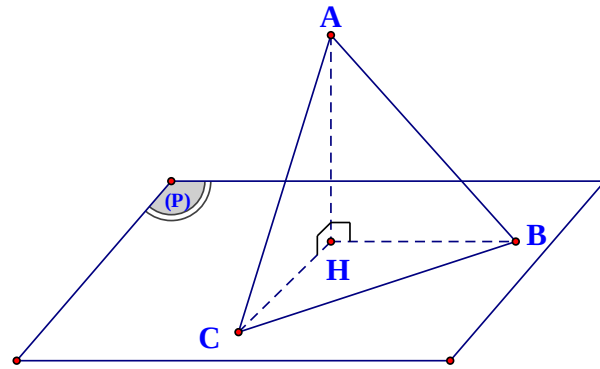
- Câu 8:** Trong không gian Oxyz, cho ba điểm  $A(1;1;1), B(2;1;0), C(2;0;2)$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng chứa  $BC$  và cách  $A$  một khoảng lớn nhất. Hỏi vector nào sau đây là một vector pháp tuyến của mặt phẳng  $(P)$ ?

- A.  $\vec{n} = (5; 2; -1)$ .                      B.  $\vec{n} = (5; 2; 1)$ .                      C.  $\vec{n} = (-5; 2; -1)$ .                      D.  $\vec{n} = (5; -2; -1)$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  lên  $(P)$ .



Khi đó  $AH$  lớn nhất khi  $H \in BC$ .

Đường thẳng  $BC$  qua điểm  $B(2;1;0)$  có  $\overrightarrow{BC} = (0; -1; 2)$  là vectơ chỉ phương.

$$\text{Nên } BC: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow H \in BC \text{ ta có } H(2; 1-t; 2t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (1; -t; 2t-1).$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (-1) \cdot (-t) + 2(2t-1) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5} \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \left(1; -\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right).$$

Chọn  $\vec{n} = (5; -2; -1)$  là vectơ pháp tuyến của  $(P)$ .

**Câu 9:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(3;0;0), B(1;4;2)$ . Mặt phẳng  $(P)$  qua  $B$  cách  $A$  một khoảng lớn nhất có một vectơ pháp tuyến  $\vec{n}(a;b;1)$ . Tính tích  $T = a.b$ ?

A.  $T = 2$ .

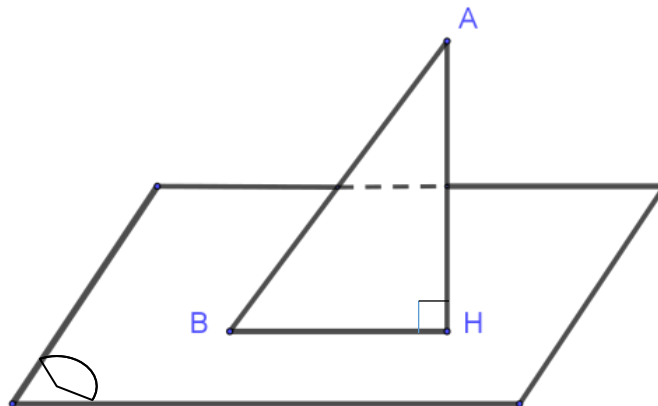
B.  $T = -8$ .

C.  $T = -2$ .

D.  $T = 4$ .

Lời giải

Chọn C



Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  trên mặt phẳng  $(P)$  ta có  $d(A, (P)) = AH \leq AB$ .

$d(A, (P))$  lớn nhất  $\Leftrightarrow d(A, (P)) = AB \Leftrightarrow AB$  vuông góc với mặt phẳng  $(P)$ .

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}(-2; 4; 2)$  hay  $\vec{n}(-1; 2; 1)$  là một vectơ pháp tuyến của  $(P)$ .

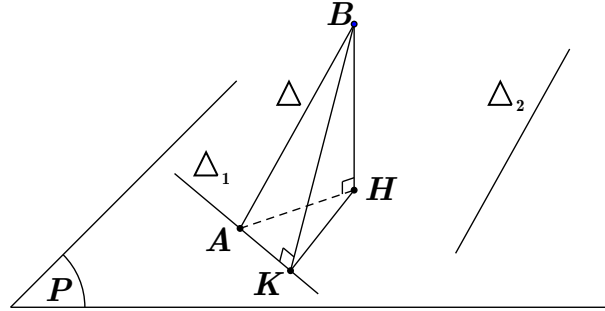
$\Rightarrow a = -1; b = 2 \Rightarrow a.b = -2$ .

**Câu 10:** Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng  $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$  và  $\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng chứa  $\Delta_1$  và tạo với  $\Delta_2$  góc lớn nhất. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(P)$ ?

- A.  $\vec{n}_1 = (1; 4; 1)$ .      B.  $\vec{n}_1 = (1; 4; -1)$ .      C.  $\vec{n}_1 = (1; -4; 1)$ .      D.  $\vec{n}_1 = (1; -4; -1)$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Lấy  $A \in \Delta_1$ . Gọi  $\Delta$  là đường thẳng qua  $A$  và song song với  $\Delta_2$ .

Lấy  $B \in \Delta$ , gọi  $H$  và  $K$  lần lượt là hình chiếu của  $B$  trên  $(P)$  và  $\Delta_1$ . Khi đó ta có:

$((P), \Delta_2) = ((P), \Delta) = BAH$ . Có  $\cos BAH = \frac{AH}{AB} \geq \frac{AK}{AB}$  (không đổi). Suy ra  $BAH$  lớn nhất

(hay  $\cos BAH$  nhỏ nhất) khi  $H \equiv K$ .

Đường thẳng  $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$  có một vectơ chỉ phương là  $\vec{u}_1 = (2; 1; -2)$ .

Đường thẳng  $\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$  có một vectơ chỉ phương là  $\vec{u}_2 = (1; 2; -1)$ .

**Cách 1:** Gọi  $(Q)$  là mặt phẳng chứa  $\Delta_1$  và  $\Delta$ . Khi đó mặt phẳng  $(P)$  cần tìm là mặt phẳng chứa  $\Delta_1$  và vuông góc với mặt phẳng  $(Q)$ .

Mặt phẳng  $(Q)$  có một vectơ pháp tuyến là  $\vec{n}_{(Q)} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (3; 0; 3)$ .

Mặt phẳng  $(P)$  có một vectơ pháp tuyến là  $\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_1, \vec{n}_{(Q)}] = (3; -12; -3)$  hay  $(P)$  có một vectơ pháp tuyến là  $\vec{n}_1 = (1; -4; -1)$ .

**Cách 2:** Giả sử  $\vec{n} = (a; b; c)$  là một vectơ pháp tuyến của  $(P)$  ( $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ ).

Vì  $(P)$  chứa  $\Delta_1$  nên  $\vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow 2a + b - 2c = 0 \Leftrightarrow b = 2c - 2a$ .

Theo chứng minh trên  $(P)$  tạo với  $\Delta_2$  góc lớn nhất khi và chỉ khi  $(\Delta_2, (P)) = (\Delta_2, \Delta_1)$ .

Ta có  $\cos(\Delta_2, \Delta_1) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \sin(\Delta_2, (P)) = \sin(\Delta_2, \Delta_1) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Ta lại có

$$\sin(\Delta_2, (P)) = \left| \cos(\vec{u_2}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u_2}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u_2}|} = \frac{|a+2b-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a+2b-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3|a+2b-c| = \sqrt{18} \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow 9[a+2(2c-2a)-c]^2 = 18[a^2+(2c-2a)^2+c^2]$$

$$\Leftrightarrow a^2+2ac+c^2=0$$

$$\Leftrightarrow (a+c)^2=0 \Leftrightarrow a+c=0$$

Chọn  $a=1$  thì  $c=-1$  và  $b=2c-2a=-4$ .

Vậy  $\vec{n}=(1;-4;-1)$ .

- Câu 11:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(a;0;0)$ ,  $B(0;b;0)$ ,  $C(0;0;c)$  và  $D(1;2;-1)$ ; với  $a, b, c$  là các số thực khác 0. Biết rằng bốn điểm  $A, B, C, D$  đồng phẳng khi khoảng cách từ gốc tọa độ  $O$  đến mặt phẳng  $(ABC)$  là lớn nhất. Giá trị biểu thức  $a+b+c$  bằng
- A. 2.                                      B. 4.                                      C. 3.                                      D. 15.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có khoảng cách từ  $O$  đến  $(ABC)$  lớn nhất khi  $D$  là hình chiếu của  $O$  lên  $(ABC)$ . Lúc đó, mặt phẳng  $(ABC)$  đi qua điểm  $D(1;2;-1)$  và nhận  $\vec{OD}=(1;2;-1)$  làm vector pháp tuyến nên có phương trình là  $1(x-1)+2(y-2)-1(z+1)=0 \Leftrightarrow x+2y-z-6=0$ .

Khi đó  $A, B, C$  lần lượt là giao điểm của  $(ABC)$  với  $Ox, Oy, Oz$  nên  $A(6;0;0)$ ,  $B(0;3;0)$  và  $C(0;0;-6)$ . Suy ra  $a=6, b=3, c=-6$  và  $a+b+c=3$ .

- Câu 12:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M(3;1;1)$ . Mặt phẳng  $P$  đi qua  $M$  và cắt chiều dương của các trục  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt tại các điểm  $A(a;0;0)$ ,  $B(0;b;0)$ ,  $C(0;0;c)$ . Biết  $OA=2OB$  và thể tích khối tứ diện  $OABC$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị biểu thức  $S=a+b+c$  bằng
- A.  $\frac{57}{4}$ .                                      B. 14.                                      C.  $\frac{59}{4}$ .                                      D.  $\frac{29}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi phương trình mặt phẳng  $P$  là  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  với  $a, b, c > 0$ .

$$OA=2OB \Rightarrow a=2b.$$

Mặt phẳng  $P$  đi qua  $M$  nên  $\frac{3}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ .

$$\text{Thể tích khối tứ diện } OABC \text{ là } V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} abc = \frac{1}{3} b^2 c.$$

Ta có:

$$1 = \frac{3}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{2b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{2b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{4b} + \frac{5}{4b} + \frac{1}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{25}{16b^2c}} \Leftrightarrow \frac{1}{27} \geq \frac{25}{16b^2c} \Leftrightarrow b^2c \geq \frac{675}{16}$$

Do đó,  $V_{OABC} = \frac{1}{3}b^2c \geq \frac{225}{16}, \forall b, c > 0.$

Dấu bằng xảy ra khi  $\begin{cases} a = 2b \\ \frac{5}{4b} = \frac{1}{c} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{15}{2} \\ b = \frac{15}{4} \\ c = 3 \end{cases}.$

$$S = a + b + c = \frac{57}{4}.$$

**Câu 13:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm  $M(1;2;1)$ . Mặt phẳng  $(P)$  thay đổi đi qua  $M$  lần lượt cắt các tia  $Ox; Oy; Oz$  tại  $A; B; C$  khác  $O$ . Giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện  $OABC$  là:

A. 18.

B. 54.

C. 9.

D. 6.

**Lời giải**

**Chọn C**

Giả sử mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $M$  lần lượt cắt các tia  $Ox; Oy; Oz$  tại  $A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$ , với  $a; b; c$  dương.

$\Rightarrow$  Phương trình mặt phẳng  $(P)$  theo đoạn chắn là:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$

Do  $M \in (P)$  nên  $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{1}{c}} \Rightarrow abc \geq 54.$

Lại có:  $V_{OABC} = \frac{1}{6}OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6}abc \geq 9.$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 3 \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện  $OABC$  là 9.

**Câu 14:** Trong không gian Oxyz, cho các mặt phẳng  $(\alpha): 2x - y - 2z + 1 = 0$ ,  $(\beta): 2x - y - 2z + 3 = 0$ ,  $(\gamma): 2x - y - 2z + 6 = 0$ .  $M$  là điểm thay đổi trên  $(\alpha)$ . Đường thẳng  $OM$  cắt  $(\beta), (\gamma)$  lần lượt

tại  $N, P$ . Khi biểu thức  $T = \frac{MN^2}{10} + \frac{4}{MP}$  đạt giá trị nhỏ nhất hãy tính tổng  $S = MN^2 + MP^2$ .

A.  $S = 25$ .

B.  $S = 29$ .

C. 2021.

D. 34.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi  $K, Q$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $M$  lên  $(\beta)$  và  $(\gamma)$ .

Do  $(\alpha) \parallel (\beta) \parallel (\gamma)$  nên  $MK = d((\alpha), (\beta)) = \frac{2}{3}; MQ = d((\alpha), (\gamma)) = \frac{5}{3}.$

Xét 2 tam giác đồng dạng  $MNK$  và  $MPQ$  ta có:  $\frac{MN}{MP} = \frac{MK}{MQ} = \frac{2}{5} \Rightarrow MN = \frac{2}{5}MP$ .

$$\text{Suy ra: } T = \frac{MN^2}{10} + \frac{4}{MP} = \frac{4MP^2}{250} + \frac{4}{MP} = \frac{4MP^2}{250} + \frac{2}{MP} + \frac{2}{MP} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{4MP^2}{250} \cdot \frac{2}{MP} \cdot \frac{2}{MP}}$$

$$\Rightarrow T \geq \frac{6}{5}. \text{ Do đó, } T_{\min} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \frac{4MP^2}{250} = \frac{2}{MP} \Leftrightarrow MP = 5 \Rightarrow MN = 2.$$

$$\text{Vậy } S = MN^2 + MP^2 = 29.$$

**Câu 15:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 27$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng đi qua hai điểm  $A(0;0;-4)$ ,  $B(2;0;0)$  và cắt  $(S)$  theo giao tuyến là đường tròn  $(C)$  sao cho khối nón đỉnh là tâm của  $(S)$  và đáy là đường tròn  $(C)$  có thể tích lớn nhất. Biết rằng  $(\alpha): ax+by-z+c=0$ , khi đó  $a-b+c$  bằng

A. 0.

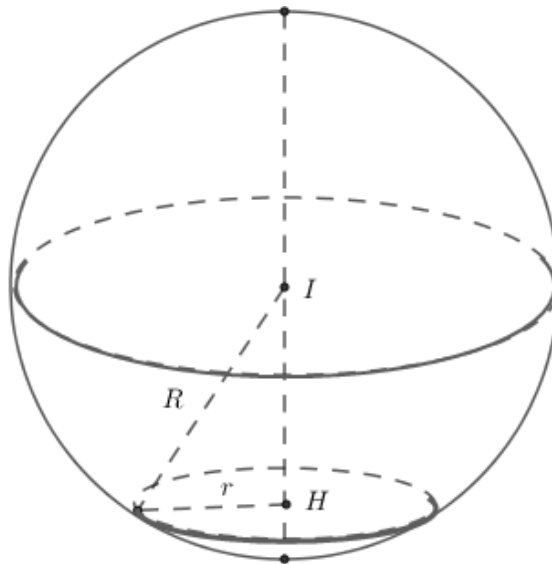
B. 2.

C. -4.

D. 8.

Lời giải

Chọn C



♦ Mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(1;-2;3)$  và bán kính  $R = 3\sqrt{3}$ .

Vì  $(\alpha): ax+by-z+c=0$  đi qua hai điểm  $A(0;0;-4)$ ,  $B(2;0;0)$  nên  $c=-4$  và  $a=2$ .

♦ Suy ra  $(\alpha): 2x+by-z-4=0$ .

♦ Đặt  $IH = x$ , với  $0 < x < 3\sqrt{3}$  ta có  $r = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{27 - x^2}$ .

♦ Thể tích khối nón là  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 IH = \frac{1}{3}\pi(27 - x^2)x = \frac{1}{3\sqrt{2}}\pi\sqrt{(27 - x^2)(27 - x^2) \cdot 2x^2} \leq 18\pi$ .

$V_{\max} = 18\pi$  khi  $27 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow x = 3$ .

♦ Khi đó,  $d(I;(\alpha)) = \frac{|2b+5|}{\sqrt{b^2+5}} = 3 \Leftrightarrow (2b+5)^2 = 9(b^2+5) \Leftrightarrow b = 2$ .

♦ Vậy  $a-b+c = -4$ .

-----HẾT-----

- Câu 16:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 3$ . Một mặt phẳng  $(\alpha)$  tiếp xúc với mặt cầu  $(S)$  và cắt các tia  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt tại các điểm  $A, B, C$  thỏa mãn  $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 27$ . Diện tích của tam giác  $ABC$  bằng
- A.  $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ .                      B.  $3\sqrt{3}$ .                      C.  $9\sqrt{3}$ .                      D.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

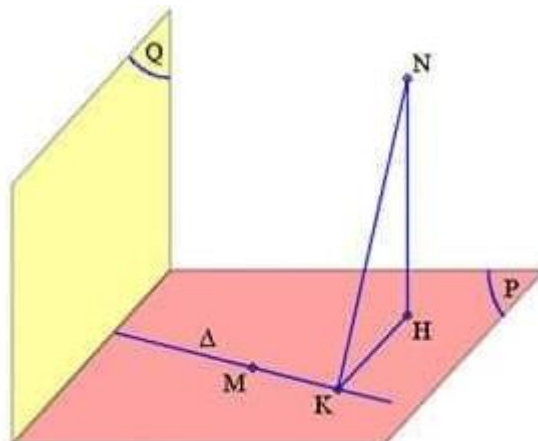
- ♦ Giả sử  $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$
- ♦ Do  $A, B, C$  nằm trên các tia  $Ox, Oy, Oz$  nên  $a, b, c > 0$ .
- $OA^2 + OB^2 + OC^2 = 27 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 27$
- ♦ Ta có  $(\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow bcx + cay + abz - abc = 0$
- ♦ Mặt cầu  $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 3$  có tâm  $O$  và bán kính  $R = \sqrt{3}$
- ♦ Do  $(\alpha)$  tiếp xúc với  $(S)$  nên  $d(O; (\alpha)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} = \sqrt{3}$
- $\Leftrightarrow a^2b^2c^2 = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{3}$
- ♦ Ta có  $(a^2 + b^2 + c^2) \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} = 9$
- ♦ Mà theo giả thiết  $(a^2 + b^2 + c^2) \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) = 9$  nên từ đó ta có  $a = b = c = 3$ .
- ♦  $V_{OABC} = \frac{abc}{6} = \frac{9}{2} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{3V_{OABC}}{d(O, (\alpha))} = \frac{27}{2\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ .

-----**HẾT**-----

- Câu 17:** Mặt phẳng  $(P)$  đi qua điểm  $M(3; -1; 2)$ , vuông góc với mặt phẳng  $(Q): x + y - 2z + 3 = 0$  và khoảng cách từ điểm  $N(1; 2; 0)$  đến  $(P)$  lớn nhất có phương trình là
- A.  $11x - 9y - z - 40 = 0$ .    B.  $19x - 9y + 5z - 46 = 0$ .  
 C.  $17x - 13y + 2z - 68 = 0$ .                      D.  $15x - y + 7z + 70 = 0$ .

**Lời giải**

**Chọn C**



Kẻ đường thẳng  $\Delta$  qua  $M$  và vuông góc với mặt phẳng  $(Q)$ .

Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $N$  trên mặt phẳng  $(P)$  và đường thẳng  $\Delta$ .

Ta có  $d(N, (P)) = NH \leq NK$ . Khi đó  $NH$  lớn nhất khi và chỉ khi  $H \equiv K$ .

Mặt phẳng  $(P)$  có véc tơ pháp tuyến  $\vec{n}_p = \left[ \left[ \vec{n}_Q, \overrightarrow{MN} \right], \vec{n}_Q \right]$ .

Mặt phẳng  $(Q)$  có véc tơ pháp tuyến  $\vec{n}_Q = (1; 1; -2)$ ;  $\overrightarrow{MN} = (-2; 3; -2)$ ,  $\left[ \vec{n}_Q, \overrightarrow{MN} \right] = (4; 6; 5)$

Suy ra  $\vec{n}_p = \left[ \left[ \vec{n}_Q, \overrightarrow{MN} \right], \vec{n}_Q \right] = (-17; 13; -2)$ .

Vậy mặt phẳng  $(P)$  cần tìm có phương trình là:

$$-17(x-3) + 13(y+1) - 2(z-2) = 0 \text{ hay } 17x - 13y + 2z - 68 = 0.$$

**Câu 18:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(0; 1; 2)$  và  $B(3; 1; 2)$ . Gọi  $(P)$  là mặt phẳng đi qua  $A$  và song song với véc-tơ  $\vec{u} = (1; -1; 1)$  và cách điểm  $B$  một khoảng lớn nhất. Tọa độ giao điểm  $M$  của  $(P)$  và trục  $Ox$  là

A.  $M\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ .      B.  $M\left(-\frac{1}{3}; 0; 0\right)$ .      C.  $M(1; 0; 0)$ .      D.  $M\left(-\frac{1}{3}; 0; 0\right)$

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi phương trình mặt phẳng  $(P)$  là  $ax + by + cz + d = 0$ .

Do mặt phẳng  $(P)$  đi qua điểm  $A(0; 1; 2)$  nên  $b + 2c + d = 0$ .

Do  $(P) // \vec{u}$  nên pháp tuyến của  $(P)$  là  $\vec{n}_{(P)} = (a; b; c)$  vuông góc với  $\vec{u}$ . Suy ra  $a - b + c = 0$ .

Khoảng cách từ  $B$  đến mặt phẳng  $(P)$  là

$$d(B, (P)) = \frac{|3a + b + 2c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|3a|}{\sqrt{a^2 + c^2 + (a+c)^2}} = \sqrt{\frac{9a^2}{2a^2 + 2ac + 2c^2}} = \sqrt{\frac{9}{2\left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2\frac{c}{a} + 2}}.$$

Xét hàm  $f(t) = 2t^2 + 2t + 2$ , hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng  $\frac{3}{2}$  khi  $t = -\frac{1}{2}$ .

Từ đó suy ra  $d(B, (P))$  đạt giá trị lớn nhất bằng  $\sqrt{\frac{9}{\frac{3}{2}}} = \sqrt{6}$  khi  $\frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$ .

Ta chọn  $a = 2$  theo phần trên ta suy ra  $\begin{cases} b = 1 \\ c = -1 \\ d = 1 \end{cases}$ .

Do đó phương trình mặt phẳng  $(P): 2x + y - z + 1 = 0$ .

Tọa độ giao điểm của  $(P)$  với trục  $Ox$  là điểm  $M(m; 0; 0)$  thay vào phương trình mặt phẳng

$(P)$  ta có  $2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$ .

Vậy tọa độ điểm  $M\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$ .

- Câu 19:** Trong không gian  $Oxyz$ , Cho bốn điểm  $A(a;0;0)$ ,  $B(0;b;0)$ ,  $C(0;0;c)$ ,  $D(1;2;-1)$ , với  $a, b, c$  là các số thực khác 0. Biết rằng bốn điểm  $A, B, C, D$  đồng phẳng, Khi khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng  $ABC$  lớn nhất. Giá trị  $a + b + c$  bằng
- A. 15.                      B. 3.                      C. 2.                      D. 4.

**Lời giải**

**Chọn B**

- Từ giả thiết ta có  $d(O;(ABC))_{\max} = OD$  khi đó mặt phẳng  $ABC$  đi qua  $D$  và nhận  $\overrightarrow{OD} = (1;2;-1)$  làm vtpt.

- Phương trình mặt phẳng  $ABC$  là:

$$1.(x-1) + 2.(y-2) - 1.(z+1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z - 6 = 0.$$

$$\text{Suy ra } A(6;0;0), B(0;3;0), C(0;0;-6) \Rightarrow a + b + c = 3.$$

- Câu 20:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 8x - 4y + 3z - 12 = 0$  và hai điểm  $A\left(-2; -2; \frac{5}{2}\right), B\left(2; -4; -\frac{5}{2}\right)$ . Mặt phẳng  $(Q)$  chứa đường thẳng  $AB$  và tạo với  $(P)$  một góc nhỏ nhất, khoảng cách từ gốc tọa độ  $O$  đến  $(Q)$  bằng
- A.  $\sqrt{3}$ .                      B. 1.                      C. 2.                      D.  $\sqrt{2}$

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (4; -2; -5).$$

$$\text{Đặt } \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (4; -2; -5).$$

$$\text{Mặt phẳng } (P) \text{ có 1 vectơ pháp tuyến } \vec{n}_1 = (8; -4; 3).$$

Mặt phẳng  $(Q)$  chứa đường thẳng  $AB$  và tạo với  $(P)$  một góc nhỏ nhất nên có 1 vector pháp

$$\text{tuyến } \vec{n} = \frac{-1}{130} \left[ \vec{u}; \left[ \vec{u}; \vec{n}_1 \right] \right] = (2; -1; 2).$$

Mặt phẳng  $(Q)$  đi qua  $A$  và có vector pháp tuyến  $\vec{n} = (2; -1; 2)$  có phương trình

$$2x - y + 2z - 3 = 0.$$

$$\text{Vậy khoảng cách từ } O \text{ đến } (Q) \text{ bằng } d(O;(Q)) = \frac{|2 \cdot 0 - 0 + 2 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 1.$$

- Câu 21:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 2x - y - 2z - 12 = 0$  và hai điểm  $A(1;1;3)$ ,  $B(2;1;4)$ , tập hợp những điểm  $C \in (P)$  sao cho tam giác  $ABC$  có diện tích nhỏ nhất là

$$\text{A. (d):} \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{8}{9} \\ z = -\frac{50}{9} + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}). \quad \text{B. (d):} \begin{cases} x = -\frac{5}{4} + t \\ y = -\frac{5}{4} \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

C. Đường tròn (C) tâm  $I\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{7}{2}\right)$ , bán kính  $R = \sqrt{2}$ .

D. Đường tròn (C) tâm  $A(1; 1; 3)$ , bán kính  $R = \sqrt{2}$ .

### Lời giải

#### Chọn A

**Cách 1.** Vì  $C \in (P) \Rightarrow C(u; 2u - 2v - 12; v)$  với  $u, v \in \mathbb{R}$ .

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (1; 0; 1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (u - 1; 2u - 2v - 13; v - 3)$

Suy ra  $[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (2u - 2v - 13; v - u - 3; 13 - 2u + 2v)$ .

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = \frac{1}{2} \sqrt{(2u - 2v - 13)^2 + (v - u - 3)^2 + (13 - 2u + 2v)^2}.$$

Đặt  $t = u - v$

$$\Rightarrow 4(S_{\triangle ABC})^2 = (2t - 13)^2 + (t + 2)^2 + (13 - 2t)^2 = 9t^2 - 100t + 342$$

$$= \left(3t - \frac{50}{3}\right)^2 + \frac{578}{9} \geq \frac{578}{9}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vậy  $S_{\triangle ABC}$  nhỏ nhất bằng  $\frac{17\sqrt{2}}{6}$ , đạt được khi  $t = \frac{50}{9}$

$$\Rightarrow v = u - \frac{50}{9} \Rightarrow C\left(u; -\frac{8}{9}; u - \frac{50}{9}\right).$$

$$\text{Do đó } C \in (d): \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{8}{9} \\ z = -\frac{50}{9} + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

**Cách 2.** Do  $AB // (P)$  nên diện tích  $\triangle ABC$  nhỏ nhất khi  $C$  nằm trên hình chiếu của  $AB$  lên  $(P)$ .

Đường thẳng  $AB$  nhận  $\overrightarrow{AB} = (1; 0; 1)$  làm vector chỉ phương nên đường thẳng  $(d)$  là hình chiếu của  $AB$  lên  $(P)$  cũng có một vector chỉ phương là  $\vec{u} = (1; 0; 1)$ .

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  lên  $(P)$  suy ra  $H \in (d)$

$$\text{Phương trình đường thẳng } AH: \begin{cases} x = 1 + 2a \\ y = 1 - a \\ z = 3 - 2a \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}) \Rightarrow H(1 + 2a; 1 - a; 3 - 2a).$$

Ta có  $H \in (P) \Rightarrow 2(1+2a) - (1-a) - 2(3-2a) - 12 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{17}{9} \Rightarrow H\left(\frac{43}{9}; -\frac{8}{9}; -\frac{7}{9}\right)$ .

Suy ra  $(d): \begin{cases} x = \frac{43}{9} + b \\ y = -\frac{8}{9} \\ z = -\frac{7}{9} + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{43}{9} + b \\ y = -\frac{8}{9} \\ z = -\frac{50}{9} + \left(\frac{43}{9} + b\right) \end{cases}, \text{ đặt } t = \frac{43}{9} + b \text{ khi đó}$

$(d): \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{8}{9} \\ z = -\frac{50}{9} + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

**Câu 22:** Trong không gian Oxyz cho điểm  $A(1;0;-7)$  và  $B(5;4;9)$ . Xét khối nón  $(N)$  có đỉnh là  $A$ , đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính  $AB$ . Khi  $(N)$  có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của  $(N)$  có dạng  $mx + ny + 4z + p = 0$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = m^2 + n^2 - p$

A.  $T = 19$ .

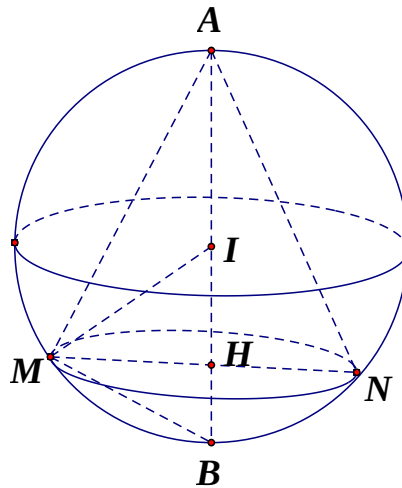
B.  $T = 23$ .

C.  $T = 20$ .

D.  $T = -20$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Ta có:  $\overline{AB} = (4; 4; 16) \Rightarrow AB = 12\sqrt{2}$ . Do đó mặt cầu có bán kính  $R = \frac{AB}{2} = 6\sqrt{2}$

Gọi bán kính đường tròn đáy của hình nón là  $r$  ( $0 < r < 6\sqrt{2}$ )

Xét tam giác  $\triangle AMB$  vuông tại  $M$  đường cao  $MH$  có:  $AH \cdot AB = AM^2 \Leftrightarrow l^2 = h \cdot 2R$

Ta có:  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(l^2 - h^2)h = \frac{\pi}{3}(2Rh - h^2)h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2}(4R - 2h) \cdot h \cdot h$ .

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số  $4R - 2h, h$  và  $h$  ta được:

$\frac{1}{2}(4R - 2h) \cdot h \cdot h \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{(4R - 2h) + h + h}{3} \right]^3 = \frac{64R^3}{54} = 512\sqrt{2}$ .

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow 4R - 2h = h \Leftrightarrow h = \frac{4R}{3} = 8\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó: } V_{\max} = \frac{512\pi\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow AH = 8\sqrt{2} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB} \quad \text{cùng hướng}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow H\left(\frac{11}{3}; \frac{8}{3}; \frac{11}{3}\right)$$

Mặt phẳng  $(P)$  thỏa yêu cầu bài toán  $\Leftrightarrow (P)$  qua  $H\left(\frac{11}{3}; \frac{8}{3}; \frac{11}{3}\right)$  và nhận  $\overrightarrow{AB}$  làm vector pháp

$$\text{tuyến nên } (P): 4\left(x - \frac{11}{3}\right) + 4\left(y - \frac{8}{3}\right) + 16\left(z - \frac{11}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x + y + 4z - 21 = 0.$$

$$\text{Do đó: } m = 1, n = 1, p = -21 \Rightarrow T = m^2 + n^2 - p = 23.$$

**Câu 23:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 4; 5)$ ,  $B(0; 3; 1)$ ,  $C(2; -1; 0)$  và mặt phẳng  $(P): 2x - 2y + z - 9 = 0$ . Gọi  $M(a; b; c)$  là điểm thuộc mặt phẳng  $(P)$  sao cho biểu thức  $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó  $a + 2b - c$  bằng:

A. 0.                                      B. 3.                                      C. -3.                                      D. 9.

**Lời giải**

**Chọn A**

♦ Gọi  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ :  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$  và  $G(1; 2; 2)$

$$\begin{aligned} \bullet T &= MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 = 3\overrightarrow{MG}^2 + 13 + 3 + 14 = 3\overrightarrow{MG}^2 + 30 \end{aligned}$$

Do đó giá trị min  $T$  đạt được khi min  $MG$ .

$$\bullet M \in (P); MG \geq d(G; (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 2 - 9|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 3$$

$\Rightarrow$  min  $MG = 3$  khi:  $M$  là hình chiếu của  $G$  lên  $(P)$ .

Phương trình của đường thẳng  $d$  qua  $G$  và vuông góc với  $(P)$  là:

$$\vec{u}_d = \vec{n}_{(P)} = (2; -2; 1); d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

$$M \equiv d \cap (P) \Rightarrow \text{Tọa độ } M \text{ thỏa mãn hệ phương trình: } \begin{cases} x - 2t = 1 \\ y + 2t = 2 \\ z - t = 2 \\ 2x - 2y + z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 3 \\ t = 1 \end{cases}$$

Vậy điểm  $M$  thỏa mãn ycbt có tọa độ là:  $M(3; 0; 3)$

$$\Rightarrow a = 3, b = 0, c = 3 \Rightarrow a + 2b - c = 0$$

- Câu 24:** Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng  $(P): 2x - y + z + 1 = 0$  và hai điểm  $A(8; -7; 4)$ ,  $B(-1; 2; -2)$ . Điểm  $M(a; b; c)$  thuộc  $(P)$  sao cho  $MA^2 + 2MB^2$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó  $a + b + c$  bằng
- A. -2.                      B. 1.                      C. 2.                      D. -1.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi  $I(x_I; y_I; z_I)$  thỏa mãn:  $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$  suy ra  $I(2; -1; 0)$ .

Ta có:  $MA^2 + 2MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 3MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB}) = 3MI^2 + IA^2 + 2IB^2$ .

Để  $MA^2 + 2MB^2$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow MI$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow M$  là hình chiếu của  $I$  trên mặt phẳng  $(P)$ .

Gọi  $(d)$  là đường thẳng qua  $I$  và vuông góc với  $(P)$  có phương trình:  $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ .

Ta có:  $M = (d) \cap (P)$  suy ra tọa độ điểm  $M$  là nghiệm của hệ: 
$$\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1} \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - 2z = 2 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow M(0; 0; -1).$$

Vậy  $a + b + c = -1$ .

- Câu 25:** Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm  $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), D(1; 2; -1)$ , với  $a, b, c$  là các số thực khác 0. Biết rằng bốn điểm  $A, B, C, D$  đồng phẳng, khi khoảng cách từ gốc tọa độ  $O$  đến mặt phẳng  $(ABC)$  lớn nhất. Giá trị  $a + b + c$  bằng
- A. 15.                      B. 3.                      C. 2.                      D. 4.

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình mặt phẳng  $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  ( $abc \neq 0$ )

Vì  $D(1; 2; -1)$  thuộc mặt phẳng nên ta có:  $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} - \frac{1}{c} = 1$

$$\text{Ta có } d(O; (ABC)) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

$$\text{Mà } \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 = \left(\frac{1}{a} + 2 \cdot \frac{1}{b} + (-1) \cdot \frac{1}{c}\right)^2 \leq 6 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{6} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \leq \sqrt{6} \text{ hay } d(O; (ABC)) \leq \sqrt{6}$$

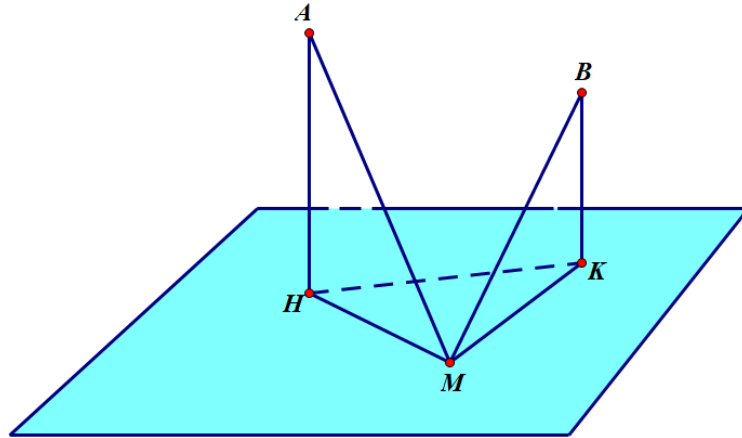
$$\text{Vậy, } d_{\max} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b = -c \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} - \frac{1}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \\ c = -6 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 3.$$

**Câu 26:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho mặt phẳng  $(P): 2x - y + z + 1 = 0$ , và hai điểm  $A(2; -1; 0), B(3\sqrt{3}; 0; -1)$ . Điểm  $M$  di động trên  $(P)$ , giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $T = -MA + 7MB$  bằng

A.  $3\sqrt{78}..$       B.  $15\sqrt{3}..$       C.  $3\sqrt{76}..$       D.  $3\sqrt{73}.$

**Lời giải**

**Chọn D**



Ta có  $A, B$  nằm cùng phía so với mặt phẳng  $(P)$ .

Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A, B$  lên  $(P)$ .

Ta có  $(AH): \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ ,  $H = AH \cap (P) \Rightarrow H(0; 0; -1) \Rightarrow AH = \sqrt{6}$

$(BK): \frac{x-3\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$ ,  $K = BK \cap (P) \Rightarrow K(\sqrt{3}; \sqrt{3}; -\sqrt{3}-1) \Rightarrow BK = 3\sqrt{2}$ .

Suy ra  $HK = 3$ .

Đặt  $MK = x > 0$ . Khi đó  $MH \leq MK + HK = 3 + x$ .

Ta có  $T = -MA + 7MB = -\sqrt{6 + MH^2} + 7\sqrt{18 + MK^2}$

$\Rightarrow T \geq -\sqrt{6 + (3 + x)^2} + 7\sqrt{18 + x^2}$

Sử dụng MTCT: TABLE (MODE 7) với  $f(x) = -\sqrt{6 + (3 + x)^2} + 7\sqrt{18 + x^2}$ , START = 0, END = 9, STEP = 0,5  $\Rightarrow T_{\min} = 3\sqrt{73}..$

**Câu 27:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2; 1; 3), B(6; 5; 5)$ . Xét khối nón  $(N)$  có đỉnh là  $A$ , đường tròn đáy nằm trên mặt cầu đường kính  $AB$ . Khi khối nón có thể tích lớn nhất thì mặt phẳng  $(P)$  chứa đường tròn đáy có phương trình dạng  $2x + by + cz + d = 0$ . Giá trị  $b + c + d$  bằng

A.  $-21.$       B.  $-12.$       C.  $-18.$       D.  $-15$

**Lời giải**

**Chọn C**

Mặt cầu đường kính  $AB$  có tâm  $I(4; 3; 4)$  và bán kính  $R = 3$ .

Dễ thấy nón  $(N)$  có trục là đường thẳng  $AB$ .

Gọi  $h = d(I, (P))$ , ta có thể tích khối nón  $(N)$  bằng

$$V = \frac{1}{3}(R+h) \cdot \pi[R^2 - h^2] = \frac{\pi}{3}(3+h)(9-h^2) = \frac{\pi}{3}(-h^3 - 3h^2 + 9h + 27)$$

$$V' = \frac{\pi}{3}(-3h^2 - 6h + 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h=1 \\ h=-3(\text{loại}) \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên của  $V$  ta thấy  $V$  lớn nhất khi và chỉ khi  $h=1$ .

Mặt phẳng  $(P)$  vuông góc với  $AB$  có phương trình dạng  $2x + 2y + z + m = 0$

$$d(I, (P)) = 1 \Leftrightarrow \frac{|8+6+4+m|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = 1 \Leftrightarrow |18+m| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m=-15 \\ m=-21 \end{cases}$$

Do  $A, I$  nằm cùng phía đối với  $(P)$  nên chọn  $m = -21$

Vậy phương trình  $(P): 2x+2y+z-21=0$  hay  $b+c+d=-18$ .

**Câu 28:** Trong không gian Oxyz cho điểm  $A(-2;0;0)$  và ba mặt phẳng  $(P_1): 2x+y+2z-5=0$ ;  $(P_2): 2x+y+2z+13=0$ ;  $(Q): 2x-2y-z-5=0$ . Mặt cầu  $(S)$  di động có tâm  $I(a;b;c)$  và đi qua  $A$ ; đồng thời tiếp xúc với hai mặt phẳng  $(P_1), (P_2)$ . Khi khối cầu  $(S)$  cắt mặt phẳng  $(Q)$  theo thiết diện là hình tròn có diện tích lớn nhất thì  $a+b-2c$  bằng

A. 3.                                      B. 0.                                      C. -3.                                      D. 2.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có điều kiện tiếp xúc

$$R = d(I, (P_1)) = d(I, (P_2)) \Leftrightarrow R = \frac{|2a+b+2c-5|}{3} = \frac{|2a+b+2c+13|}{3} \quad (1)$$

$$\text{Suy ra } |2a+b+2c-5| = |2a+b+2c+13| \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+2c-5 = 2a+b+2c+13 \\ 2a+b+2c-5 = -(2a+b+2c+13) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2a+b+2c+4=0$$

.Thay vào (1) suy ra  $R=3$ .

$$\text{Mặt khác } (S) \text{ đi qua } A \Leftrightarrow IA=R=3 \Leftrightarrow (a+2)^2 + b^2 + c^2 = 9$$

Khối cầu  $(S)$  cắt mặt phẳng  $(Q)$  theo thiết diện là hình tròn có bán kính

$$R_{(C)} = \sqrt{R^2 - d^2(I, (Q))} = \sqrt{9 - d^2(I, (Q))}. \text{ Vậy diện tích hình tròn lớn nhất } \Leftrightarrow R_{(C)}_{\max}$$

$$\Leftrightarrow d(I, (Q)) = 0 \Leftrightarrow I \in (Q) \Leftrightarrow 2a-2b-c-5=0.$$

$$\text{Vậy ta có hệ phương trình } \begin{cases} 2a+b+2c+4=0 \\ (a+2)^2 + b^2 + c^2 = 9 \\ 2a-2b-c-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-2 \Rightarrow a+b-2c=0. \\ c=-1 \end{cases}$$

**Câu 29:** Trong không gian Oxyz, cho ba điểm  $A(10;0;0), B(0;10;0), C(0;0;10)$ . Xét mặt phẳng  $(P)$  thay đổi sao cho  $A, B, C$  nằm về cùng một phía so với mặt phẳng  $(P)$  và khoảng cách từ  $A, B, C$  đến mặt phẳng  $(P)$  lần lượt bằng 10,11,12. Khoảng cách từ gốc tọa độ  $O$  đến mặt phẳng  $(P)$  có giá trị lớn nhất bằng

A.  $\frac{33+\sqrt{365}}{3}$ .

B.  $\frac{33-7\sqrt{6}}{3}$ .

C.  $\frac{33-\sqrt{365}}{3}$ .

D.  $\frac{33+7\sqrt{6}}{3}$ .

**Lời giải****Chọn D**

Gọi  $(P): ax + by + cz + d = 0, (a^2 + b^2 + c^2 > 0)$  và do  $A, B, C$  nằm về cùng một phía so với mặt phẳng  $(P)$  nên ta có hệ

$$\begin{cases} (10a+d)(10b+d) > 0 \\ (10b+d)(10c+d) > 0 \\ (10c+d)(10a+d) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a+d > 0, 10b+d > 0, 10c+d > 0 \\ 10a+d < 0, 10b+d < 0, 10c+d < 0 \end{cases}$$

Giả sử  $10a+d > 0, 10b+d > 0, 10c+d > 0$  khi đó theo giả thiết khoảng cách

$$d(A, (P)) = \frac{10a+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 10; d(B, (P)) = \frac{10b+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 11; d(C, (P)) = \frac{10c+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 12.$$

$$\text{Đặt } x = \sqrt{a^2+b^2+c^2} (x > 0) \Rightarrow 10a = 10x - d; 10b = 11x - d; 10c = 12x - d.$$

$$\text{Mặt khác } x^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow x^2 = \left(x - \frac{d}{10}\right)^2 + \left(\frac{11}{10}x - \frac{d}{10}\right)^2 + \left(\frac{12}{10}x - \frac{d}{10}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{d}{x} = \frac{33 \pm 7\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(O, (P))_{\max} = \frac{33+7\sqrt{6}}{3}.$$

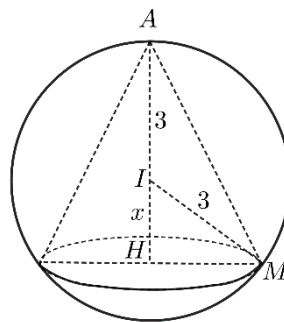
**Câu 30:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu  $(S)$  có tâm  $I(1;2;3)$  và đi qua điểm  $A(0;4;1)$ . Xét khối nón  $(N)$  có đỉnh  $A$  và nội tiếp trong khối cầu  $(S)$ . Khi diện tích xung quanh của hình nón  $(N)$  lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của  $(N)$  có phương trình dạng  $-x + by + cz + d = 0$ . Giá trị của  $b + c + 2d$  bằng

A. 12.

B. 6.

C. -12.

D. -6.

**Lời giải****Chọn A**

Mặt cầu  $(S)$  có bán kính  $R = IA = 3$ .

Hình nón  $(N)$  có bán kính đường tròn đáy là  $r = HM$ , chiều cao  $h = AH$ .

Đặt  $IH = x, 0 < x < 3$ .

$$r = \sqrt{9 - x^2}; h = x + 3.$$

Diện tích xung quanh của hình nón là  $S_{xq} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi \sqrt{9 - x^2} \sqrt{9 - x^2 + (x + 3)^2}$ .

$$S_{xq}^2 = 6\pi^2 (9 - x^2)(x + 3) = 3\pi^2 (6 - 2x)(x + 3)^2$$

$$\text{Có } S_{xq}^2 = 3\pi^2 (6 - 2x)(x + 3)^2 \leq 3\pi^2 \left( \frac{6 - 2x + x + 3 + x + 3}{3} \right)^3 = 192\pi^2.$$

Suy ra,  $S_{xq}$  đạt giá trị lớn nhất bằng  $8\pi\sqrt{3} \Leftrightarrow 6 - 2x = x + 3 \Leftrightarrow x = 1$ .

$$\text{Khi đó, } \overrightarrow{IH} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AI}.$$

$$\overrightarrow{IH} = (x_H - 1; y_H - 2; z_H - 3); \overrightarrow{AI} = (1; -2; 2) \text{ nên có } H\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{11}{3}\right).$$

Mặt phẳng  $(P)$  chứa đường tròn đáy của hình nón là mặt phẳng đi qua  $H\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{11}{3}\right)$  và nhận vector  $\overrightarrow{IA} = (-1; 2; -2)$  làm một vector pháp tuyến.

Phương trình của  $(P)$  là:  $-x + 2y - 2z + 6 = 0$ .

Yêu cầu của bài toán là phương trình mặt phẳng  $(P)$  có dạng:  $-x + by + cz + d = 0$ .

Vậy, ta tìm được  $b = 2; c = -2; d = 6$  và  $b + c + 2d = 12$ .

**Câu 31:** Trong không gian Oxyz, cho hai điểm  $A(3; -2; 3); B(1; 0; 5)$ . Tìm tọa độ điểm  $M \in (Oxy)$  sao cho  $MA + MB$  đạt giá trị nhỏ nhất:

$$\text{A. } \left(\frac{9}{4}; -\frac{5}{4}; 0\right). \quad \text{B. } \left(\frac{9}{4}; \frac{5}{4}; 0\right). \quad \text{C. } \left(-\frac{9}{4}; -\frac{5}{4}; 0\right). \quad \text{D. } \left(-\frac{9}{4}; \frac{5}{4}; 0\right).$$

**Lời giải**

**Chọn A**

Dễ thấy  $A(3; -2; 3)$  và  $B(1; 0; 5)$  nằm cùng phía so với mặt phẳng  $(Oxy)$

Gọi  $A'$  đối xứng với  $A$  qua mặt phẳng  $(Oxy) \Rightarrow A'(3; -2; -3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'B} = (-2; 2; 8) \Rightarrow \vec{u} = (1; -1; -4)$  là một vector chỉ phương của đường thẳng  $A'B$

$$\Rightarrow \text{Phương trình đường thẳng } A'B \text{ là } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 5 - 4t \end{cases}$$

Ta có:  $MA + MB = MA' + MB \geq A'B = 6\sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow M = A'B \cap (Oxy) \Leftrightarrow$  Tọa độ điểm  $M$  thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 5 - 4t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{4} \\ x = \frac{9}{4} \\ y = -\frac{5}{4} \\ z = 0 \end{cases}$$

Vậy  $M\left(\frac{9}{4}; -\frac{5}{4}; 0\right)$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

