



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

10 2010
Số 400

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 47

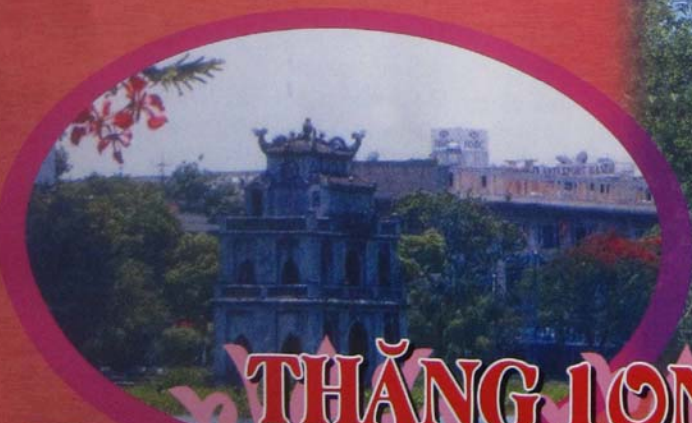
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội.

ĐT Biên tập: (04) 35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (04) 35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

Web: http://www.nxbgd.vn/toanhoc_tuoiitre



THĂNG LONG - HÀ NỘI
1000 năm văn hiến



Tính giá trị của BIỂU THỨC NHIỀU BIẾN CÓ ĐIỀU KIỆN

PHAN MẠNH HÀ
(GV THPT Nam Yên Thành, Nghệ An)

Để xác định giá trị của biểu thức nhiều biến có điều kiện, ta có thể sử dụng phương pháp phân tích từ điều kiện đã cho, phương pháp hệ số bất định hay phương pháp hình học. Sau đây là một số thí dụ minh họa.

1. Phương pháp phân tích

★ **Thí dụ 1.** Cho các số thực dương x, y thỏa mãn

$$7x^2 - 13xy - 2y^2 = 0 \quad (1)$$

Tính giá trị biểu thức $A = \frac{2x-6y}{7x+4y}$.

Lời giải. Ta có (1) $\Leftrightarrow (7x+y)(x-2y) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 2y$ (do $x, y > 0$). Thay vào biểu thức A , thu được

$$A = \frac{2 \cdot 2y - 6y}{7 \cdot 2y + 4y} = \frac{-2y}{18y} = -\frac{1}{9}. \text{ Vậy } A = -\frac{1}{9}. \quad \square$$

★ **Thí dụ 2.** Cho các số thực dương x, y thỏa mãn

$$\begin{cases} \frac{2010}{x} + 1 = \frac{2010}{y} \\ x + 2y = 2345 \end{cases} \quad (2)$$

Tính giá trị biểu thức $B = \frac{x}{y}$.

Lời giải. Đặt $a = \frac{2010}{x}, b = \frac{2010}{y}$ với $a, b > 0$.

$$\text{Từ (2) suy ra } \begin{cases} a+1=b \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{a+1} = \frac{7}{6}$$

$$\Leftrightarrow 7a^2 - 11a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 2 \text{ (do } a > 0).$$

$$\text{Vậy } B = \frac{x}{y} = \frac{b}{a} = \frac{3}{2}. \quad \square$$

★ **Thí dụ 3.** Cho các số thực khác không x, y, z thỏa mãn

$$\begin{cases} 5x = 3y = \frac{5}{2}z \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{t}{x} - \frac{t}{y} + \frac{t}{z} = \frac{9}{10} \end{cases} \quad (3')$$

Tính giá trị biểu thức $C = \frac{t^2}{xy} + \frac{t^2}{yz} + \frac{t^2}{zx}$.

Lời giải. Từ (3), ta có $y = \frac{5}{3}x, z = 2x$.

Từ (3'), suy ra $\frac{t}{x} - \frac{t}{\frac{5}{3}x} + \frac{t}{2x} = \frac{9}{10} \Rightarrow t = x$.

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } C &= \frac{x^2}{xy} + \frac{x^2}{yz} + \frac{x^2}{zx} = \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{z} + \frac{x}{z} \\ &= \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{5}. \quad \square \end{aligned}$$

2. Phương pháp hệ số bất định

★ **Thí dụ 4.** Cho các số thực x, y, z thỏa mãn

$$\begin{cases} (x-y)(x+y) = z^2 \\ 4y^2 = 5 + 7z^2 \end{cases} \quad (4)$$

Tính giá trị biểu thức $D = 2x^2 + 10y^2 - 23z^2$.

Lời giải. Ta có (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 = 0 \\ 4y^2 - 7z^2 = 5 \end{cases}$

Giả sử a, b là các số thực thỏa mãn

$$\begin{aligned} a(x^2 - y^2 - z^2) + b(4y^2 - 7z^2) &= 2x^2 + 10y^2 - 23z^2 \\ \Leftrightarrow ax^2 + (4b-a)y^2 - (7b+a)z^2 &= 2x^2 + 10y^2 - 23z^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 4b - a = 10 \\ 7b + a = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } D &= 2(x^2 - y^2 - z^2) + 3(4y^2 - 7z^2) \\ &= 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15. \quad \square \end{aligned}$$

★ **Thí dụ 5.** Cho các số thực dương x, y, z, t

$$\text{thỏa mãn} \begin{cases} \frac{t}{x+2y+2z} = 1 \\ \frac{t}{z-3x} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (5)$$

Tính giá trị biểu thức $E = \frac{t}{x+8y+9z}$.

$$\text{Lời giải. (5)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{t} + 2 \cdot \frac{y}{t} + 2 \cdot \frac{z}{t} = 1 \\ -3 \cdot \frac{x}{t} + \frac{z}{t} = 2. \end{cases}$$

$$\text{Ta thấy } \frac{1}{E} = \frac{x}{t} + 8 \cdot \frac{y}{t} + 9 \cdot \frac{z}{t}.$$

Giả sử a, b là các số thực thỏa mãn

$$\begin{aligned} a \left(\frac{x}{t} + 2 \cdot \frac{y}{t} + 2 \cdot \frac{z}{t} \right) + b \left(-3 \cdot \frac{x}{t} + \frac{z}{t} \right) &= \frac{x}{t} + 8 \cdot \frac{y}{t} + 9 \cdot \frac{z}{t} \\ \Leftrightarrow (a-3b) \frac{x}{t} + 2a \cdot \frac{y}{t} + (2a+b) \cdot \frac{z}{t} &= \frac{x}{t} + 8 \cdot \frac{y}{t} + 9 \cdot \frac{z}{t} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a-3b=1 \\ 2a=8 \\ 2a+b=9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{E} = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 6. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } E = \frac{1}{6}. \quad \square$$

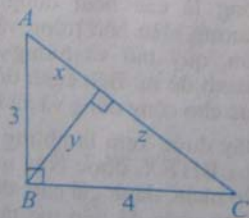
3. Phương pháp hình học

★ **Thí dụ 6.** Cho các số thực dương x, y, z

$$\text{thỏa mãn} \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y^2 + z^2 = 16 \\ y^2 = xz \end{cases} \quad (6)$$

Tính giá trị biểu thức $G = xy + yz$.

Lời giải. (h. 1). Xét tam giác ABC vuông tại B có $BC=4, BA=3$ và đường cao BD . Đặt $BD=y, DA=x$ và $DC=z$. Ta thấy x, y, z thỏa mãn hệ điều kiện (6).



Hình 1

Từ đó

$$\begin{aligned} G &= x \cdot y + y \cdot z = (x+z) \cdot y \\ &= 2 \cdot S_{ABC} = 3 \cdot 4 = 12. \text{ Vậy } G = 12. \quad \square \end{aligned}$$

★ **Thí dụ 7.** Cho các số thực x, y, z với $y > 0$

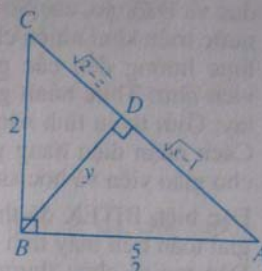
$$\text{thỏa mãn} \begin{cases} x + y^2 = \frac{29}{4} \\ y^2 - z = 2 \\ y^2 = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2-z} \end{cases} \quad (7)$$

Tính giá trị biểu thức $H = y(\sqrt{x-1} + \sqrt{2-z})$.

Lời giải. (h. 2). Từ (7) suy ra $x > 1$ và $z < 2$.

Ta viết hệ (7) dưới dạng

$$\begin{cases} (\sqrt{x-1})^2 + y^2 = \frac{25}{4} \\ y^2 + (\sqrt{2-z})^2 = 4 \\ y^2 = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2-z}. \end{cases}$$



Hình 2

Xét tam giác ABC vuông tại B , đường cao

BD với $AB = \frac{5}{2}, BC = 2$. Đặt $BD = y, AD = \sqrt{x-1}$, $CD = \sqrt{2-z}$. Rõ ràng x, y, z thỏa mãn hệ trên.

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } H &= y(\sqrt{x-1} + \sqrt{2-z}) = 2 \cdot S_{ABC} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 2 = 5. \text{ Vậy } H = 5. \quad \square \end{aligned}$$

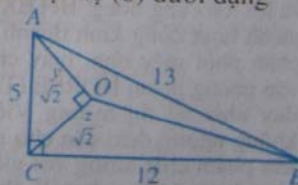
★ **Thí dụ 8.** Cho các số thực dương x, y, z

$$\text{thỏa mãn} \begin{cases} y^2 + z^2 = 50 \\ x^2 + xy + \frac{y^2}{2} = 169 \\ x^2 + xz + \frac{z^2}{2} = 144 \end{cases} \quad (8)$$

Tính giá trị biểu thức $K = xy + yz + zx$.

Lời giải. (h. 3). Ta viết lại hệ (8) dưới dạng

$$\begin{cases} \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = 5^2 \\ x^2 + xy + \frac{y^2}{2} = 13^2 \\ x^2 + xz + \frac{z^2}{2} = 12^2. \end{cases}$$



Hình 3

(Xem tiếp trang 12)



BITEK THƯƠNG HIỆU NỔI TIẾNG QUỐC GIA năm 2010

Với mục tiêu hỗ trợ nâng cao năng lực thực hành giải toán trên máy tính cầm tay, giúp học sinh phát triển năng lực tư duy, tạo điều kiện đổi mới phương pháp dạy và học trong nhà trường, trong 10 năm qua, Công ty CP XNK Bình Tây (BITEK) đã phối hợp cùng với Bộ Giáo dục và Đào tạo, các Sở Giáo dục - Đào tạo trên cả nước triển khai nhiều chương trình hoạt động thiết thực hướng đến các giáo viên, học sinh - sinh viên như: Thực hành giải toán trên máy tính cầm tay; Giới thiệu tính năng mới của máy tính Casio; Cách nhận diện hàng giả nhằm bảo vệ quyền lợi cho giáo viên và học sinh; ...

Đặc biệt, BITEK đã tham gia tài trợ cho cuộc thi giải toán trên máy tính cầm tay do Bộ Giáo dục và Đào tạo tổ chức thường niên trong suốt 10 năm qua. Theo số liệu thống kê thi lần đầu tiên (năm học 2001-2002) có 300 thí sinh của 35 tỉnh thành tham dự, đến năm học 2009 - 2010 đã thu hút được 1.620 học sinh giỏi của 63/63 tỉnh thành tham gia.

Ngoài ra, BITEK còn tích cực tham gia nhiều hoạt động xã hội như: hỗ trợ khắc phục hậu quả bão lụt, xây dựng trường học, tặng quà cho các em học sinh nghèo vượt khó, tài trợ học bổng cho các học sinh đạt thành tích cao trong học tập và thi cử, ...

Với những hoạt động có ý nghĩa thiết thực trong nhiều năm qua, BITEK đã nhận được nhiều Bằng khen của Bộ Giáo dục và Đào tạo, các Sở Giáo dục - Đào tạo, Ủy ban Nhân dân tỉnh, thành, quận, huyện... Đặc biệt BITEK vinh dự 2 lần liên tiếp được Nhà nước, Bộ Giáo dục và Đào tạo tuyên dương và trao Kỷ niệm chương "Doanh nghiệp có đóng góp xuất sắc cho sự nghiệp Giáo dục và Đào tạo nước nhà" (Chương trình được tổ chức 2 năm một lần: lần thứ nhất năm 2007 và lần thứ hai năm 2009). Bên cạnh đó là sự ghi nhận, đánh giá cao và hưởng ứng tích cực của các lãnh đạo ban ngành, quý thầy cô, các bậc phụ huynh và học sinh trên toàn quốc.

Song song với các hoạt động vì sự nghiệp giáo dục và lợi ích cộng đồng, BITEK còn không ngừng đẩy mạnh hoạt động kinh doanh tại Việt Nam. Là nhà phân phối máy tính, máy chiếu CASIO (Nhật) & văn phòng phẩm HORSE (Thái Lan) chính thức và duy nhất tại thị trường Việt Nam, với mục tiêu không ngừng đem đến cho người tiêu dùng những sản phẩm chất lượng với giá cả hợp lý, BITEK đã từng bước khẳng định là thương hiệu uy tín đối với người tiêu dùng trên toàn quốc, đồng thời là đối tác - khách hàng đáng tin cậy của những

thương hiệu nổi tiếng nước ngoài. Đó cũng là lý do chính dẫn đến sự kiện đáng chú ý tại Thái Lan ngày 30/6/2010: Công ty CP XNK Bình Tây (BITEK) đã vinh dự nhận Bằng khen "Khách hàng tiêu biểu của Thái Lan năm 2010" ("TBF Thailand's Best Friend 2010") do Thủ tướng Thái Lan Abhisit Vejjajiva trao tặng.

Không những thế, với những đóng góp tích cực cho cộng đồng và xã hội, vào tối 19/9/2010 vừa qua, tại Trung tâm Hội nghị Quốc gia Việt Nam (trực thuộc Văn phòng Chính phủ), Công ty CP XNK Bình Tây (BITEK) đã được trao tặng giải thưởng "Thương hiệu nổi tiếng Quốc gia 2010" đối với thương hiệu BITEK và "Doanh nhân xuất sắc Đất Việt 2010" dành cho Ông Nguyễn Xuân Dũng - Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc Công ty. Giải thưởng uy tín này do Bộ Công Thương phối hợp Cục Sở hữu trí tuệ Việt Nam, Đài Tiếng nói Việt Nam, Đài Truyền hình KTS Việt Nam, các cơ quan ban ngành và chuyên gia kinh tế có uy tín tổ chức thực hiện, tham gia bình chọn nhằm tôn vinh các thương hiệu, doanh nghiệp, doanh nhân tiêu biểu của Việt Nam trong thời kỳ hội nhập kinh tế quốc tế.

Lần đầu tiên, một giải thưởng tầm quốc gia được tổ chức bình xét dựa trên 3 tiêu chí: **Năng lực lãnh đạo, Năng lực đổi mới - sáng tạo và Quản lý chất lượng**. Các tiêu chí này chính là các thành tố ảnh hưởng rất lớn đến nhân cách thương hiệu, tính đặc biệt của thương hiệu và uy tín của thương hiệu nhằm giữ vững lòng tin của người tiêu dùng vào thương hiệu mình lựa chọn. Vì vậy, các doanh nghiệp được trao giải không chỉ duy trì giá trị doanh thu - lợi nhuận - nộp ngân sách ổn định và tăng trưởng mà còn phải quan tâm đến hoạt động xây dựng thương hiệu thông qua định vị sản phẩm rõ ràng, chiến lược đầu tư cho nghiên cứu, sáng tạo và nâng cao chất lượng sản phẩm - dịch vụ, song song là các hoạt động truyền thông quảng bá thương hiệu bên trong và bên ngoài một cách bài bản, quy mô và tương tác với chiến lược kinh doanh đề ra. Bên cạnh đó, còn phải đóng góp tích cực cho cộng đồng và xã hội.

Đây được xem là những thành quả đáng khích lệ của BITEK, được Nhà nước và cộng đồng xã hội ghi nhận, đánh giá cao; đồng thời cũng là nền tảng vững chắc để tiếp tục tăng trưởng mạnh mẽ hơn nữa, thực hiện thành công các mục tiêu **phát triển bền vững**, hoàn thành vai trò và trách nhiệm xã hội của doanh nghiệp trong những năm tới.

PV



Chuẩn bị
cho kì thi
tốt nghiệp THPT
và thi vào
Đại học

MỘT SỐ CHÚ Ý KHI GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

PHẠM VĂN HÙNG
(GV trường chuyên Khoa học Tự nhiên,
ĐHQG Hà Nội)

Trong tạp chí THPT số 389, tháng 11 năm 2009, chúng ta đã xét các loại hệ phương trình đối xứng. Trong bài báo này chúng ta sẽ xét đến một số dạng khác, thường được đặt ra trong các kì thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng. Đối với các dạng này, để giải được nó đôi khi chỉ cần thành thạo các hằng đẳng thức, cũng có những trường hợp phải dùng đến các bất đẳng thức hoặc công cụ đạo hàm.

❖ Bài toán 1. (A/2008). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1 + 2x) = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Lời giải. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 + y + xy(x^2 + y) + xy = -\frac{5}{4} \\ (x^2 + y)^2 + xy = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Suy ra $x^2 + y + xy(x^2 + y) = (x^2 + y)^2$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y)(x^2 + y - 1 - xy) = 0$$

$$\text{a) } x^2 + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ xy = -\frac{5}{4} \end{cases} \quad (\text{I})$$

$$\text{Hệ (I) có nghiệm } (x; y) = \left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\frac{25}{16}} \right).$$

$$\text{b) } x^2 + y - 1 - xy = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y = -\frac{1}{2} \\ xy = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad (\text{II})$$

$$\text{Hệ (II) có nghiệm } (x; y) = \left(1; -\frac{3}{2} \right).$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ là

$$\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\frac{25}{16}} \right); \left(1; -\frac{3}{2} \right). \square$$

❖ Bài toán 2. (B/2009). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$$

Lời giải. Dễ thấy $y \neq 0$ nên hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + \frac{x}{y} + \frac{1}{y} = 7 \\ x^2 + \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} = 7 \\ \left(x + \frac{1}{y} \right)^2 - \frac{x}{y} = 13 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \left(x + \frac{1}{y} \right)^2 + \left(x + \frac{1}{y} \right) - 20 = 0.$$

$$\text{a) } x + \frac{1}{y} = -5 \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} = -5 \\ x = 12y \end{cases} \quad (\text{hệ vô nghiệm}).$$

$$\text{b) } x + \frac{1}{y} = 4 \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 4 \\ x = 3y \end{cases}$$

Trường hợp này hệ có hai nghiệm

$$(x; y) = \left(1; \frac{1}{3} \right) \text{ và } (x; y) = (3; 1). \square$$

Nhận xét. Qua hai đề thi tuyển sinh nêu trên, chúng ta thấy rằng đôi khi chỉ cần những biến đổi cơ bản, dựa vào các hằng đẳng thức là có thể được kết quả. Ta xét tiếp các thí dụ đòi hỏi các phép biến đổi phức tạp hơn.

❖ Bài toán 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{12}{y + 3x} \right) \sqrt{x} = 2 \\ \left(1 + \frac{12}{y + 3x} \right) \sqrt{y} = 6 \end{cases}$$

Lời giải. ĐK $x > 0; y > 0; y + 3x \neq 0$.

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 1 - \frac{12}{y+3x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \\ 1 + \frac{12}{y+3x} = \frac{6}{\sqrt{y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{y}} = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{y}} = \frac{-12}{y+3x} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{x} - \frac{9}{y} = \frac{-12}{y+3x} \Rightarrow y^2 + 6xy - 27x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 6\left(\frac{y}{x}\right) - 27 = 0.$$

Tìm được $\frac{y}{x} = 3$ và $\frac{y}{x} = -9$ (loại). Với $\frac{y}{x} = 3$

$$\text{ta được } x = (1 + \sqrt{3})^2; y = 3(1 + \sqrt{3})^2. \quad \square$$

★ Bài toán 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_y \sqrt{xy} = \log_x y & (1) \\ 2^x + 2^y = 3 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK $x > 0, y > 0, x \neq 1, y \neq 1$.

Từ (1) có $t^2 + t - 2 = 0$ (với $t = \log_y x$).

a) Với $\log_y x = 1$, ta được $x = y = \log_2 \left(\frac{3}{2}\right)$.

b) Với $\log_y x = -2$, ta được $x = \frac{1}{y^2}$.

Thế vào (2) được $2^y + 2^{\frac{1}{y^2}} = 3$ (3)

Trường hợp này PT (3) vô nghiệm. Thật vậy

• Nếu $y > 1$ thì $2^y > 2; 2^{\frac{1}{y^2}} > 1 \Rightarrow 2^y + 2^{\frac{1}{y^2}} > 3$.

• Nếu $0 < y < 1$ thì $\frac{1}{y^2} > 1$, suy ra

$$2^y > 1; 2^{\frac{1}{y^2}} > 2 \Rightarrow 2^y + 2^{\frac{1}{y^2}} > 3.$$

Vậy hệ đã cho chỉ có một nghiệm

$$(x; y) = \left(\log_2 \left(\frac{3}{2}\right); \log_2 \left(\frac{3}{2}\right)\right). \quad \square$$

★ Bài toán 5. (Dự bị D2008). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 36x^2y - 60x^2 + 25y = 0 \\ 36y^2z - 60y^2 + 25z = 0 \\ 36z^2x - 60z^2 + 25x = 0. \end{cases}$$

Lời giải. Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y = \frac{60x^2}{36x^2 + 25} \\ z = \frac{60y^2}{36y^2 + 25} \\ x = \frac{60z^2}{36z^2 + 25} \end{cases}$$

Hiển nhiên hệ này có nghiệm $(x; y; z) = (0; 0; 0)$.

Dưới đây ta xét $x, y, z \neq 0$.

Từ hệ trên ta thấy $x, y, z > 0$. Sử dụng BĐT Cauchy ta có

$$y = \frac{60x^2}{36x^2 + 25} \leq \frac{60x^2}{2\sqrt{36x^2 \cdot 25}} = \frac{60x^2}{60x} = x.$$

Tương tự ta thu được $y \leq x \leq z \leq y$. Suy ra $x = y = z$. Từ đó suy ra hệ có một nghiệm nữa

$$\text{là } x = y = z = \frac{5}{6}. \quad \square$$

★ Bài toán 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} - \sqrt{y} = 8 - x^3 & (1) \\ (x-1)^4 = y & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK $x \geq 1, y \geq 0$. Thế y từ PT (2) vào PT (1) ta được

$$\sqrt{x-1} - (x-1)^2 = 8 - x^3 \quad (3)$$

Từ (3) có $\sqrt{x-1} = -x^3 + x^2 - 2x + 9$ (4)

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 9$ ($x \geq 1$).

Ta có $f'(x) = -3x^2 + 2x - 2 < 0, \forall x \geq 1$.

Suy ra hàm $f(x)$ luôn luôn nghịch biến khi $x \geq 1$.

Mặt khác, hàm số $g(x) = \sqrt{x-1}$ luôn đồng biến khi $x \geq 1$ nên $x = 2$ là nghiệm duy nhất của PT (4).

Vậy hệ có một nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 1)$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Đối với bài toán trên, dùng công cụ đạo hàm để giải quyết là rất hay. Tuy nhiên, ta cũng có thể tránh được đạo hàm bằng cách biến đổi khéo léo như sau:

$$\text{PT(3)} \Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 1) - ((x-1)^2 - 1) + x^3 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} - x(x-2) + (x-2)(x^2+2x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (do } \frac{1}{\sqrt{x-1}-1} + x^2 + x + 4 > 0, \forall x \geq 1). \quad \square$$

Dưới đây, xin nêu một bài toán trong Đề thi tuyển sinh Đại học gần đây nhất mà nếu không dùng đến công cụ đạo hàm thì khó có thể giải quyết được.

Bài toán 7. (A/2010). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 & (1) \\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. ĐK $x \leq \frac{3}{4}; y \leq \frac{5}{2}$.

PT (1) $\Leftrightarrow (4x^2+1)2x = (5-2y+1)\sqrt{5-2y}$.

Đặt $\begin{cases} 2x=u \\ \sqrt{5-2y}=v \end{cases} \Rightarrow (u^2+1)u = (v^2+1)v$.

Hàm $f(t) = (t^2+1)t$ có $f'(t) = 3t^2+1 > 0$, nên $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra

$$u=v \Leftrightarrow 2x=\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = \frac{5-4x^2}{2} \end{cases}$$

Thế y vào PT (2) ta được

$$4x^2 + \left(\frac{5}{2} - 2x^2\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} - 7 = 0 \quad (3)$$

Nhận thấy $x=0$ và $x=\frac{3}{4}$ không phải là nghiệm của PT (3). Xét hàm số

$$g(x) = 4x^2 + \left(\frac{5}{2} - 2x^2\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} - 7 \text{ trên } \left(0; \frac{3}{4}\right).$$

Ta có $g'(x) = 8x - 8x\left(\frac{5}{2} - 2x^2\right) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}}$
 $= 4x(4x^2 - 3) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}} < 0$ trên $\left(0; \frac{3}{4}\right)$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{3}{4}\right)$.

Nhận thấy $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, nên PT (3) có nghiệm

duy nhất $x = \frac{1}{2}$. Với $x = \frac{1}{2}$ thì $y = 2$.

Vậy hệ đã cho có một nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$. $\square$

Bài toán 8. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 & (1) \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Hiển nhiên $y \neq 0$. Chia cả hai vế của

PT (1) cho $y^5 \neq 0$ ta được $\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \left(\frac{x}{y}\right) = y^5 + y$.

Hàm số $f(t) = t^5 + t$ có $f'(t) = 5t^4 + 1 > 0, \forall t$

nên hàm $f(t)$ luôn đồng biến nên $\frac{x}{y} = y \Rightarrow$

$x = y^2$. Thế $x = y^2$ vào PT (2) ta được

$$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6. \text{ Tìm được } x = 1.$$

Vậy hệ có hai nghiệm $(x; y) = (1; 1)$ và

$(x; y) = (1; -1)$. $\square$

BÀI TẬP

Giải các hệ phương trình sau:

1. $\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = -1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}} = x + 3y - 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \sqrt{11x-y} - \sqrt{y-x} = 1 \\ 7\sqrt{y-x} + 6y - 26x = 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + y = y^2 + x \\ 2^{x+y} - 2^{x-1} = x - y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 - 12xy + 20y^2 = 0 \\ \ln(1+x) - \ln(1+y) = x - y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2\frac{1-x^2}{x^2} + xy + \frac{3}{2} = 2y \\ (x^2y + 2x)^2 - 2x^2y - 4x + 1 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x^2y + y^3 = 2x^4 + x^6 \\ (x+2)\sqrt{y+1} = (x+1)^2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^3 - 3x^2 = y^3 - 3y - 2 \\ \log_y\left(\frac{x-2}{y-1}\right) + \log_x\left(\frac{y-1}{x-2}\right) = (x-3)^3. \end{cases}$

Thử sức TRƯỚC KÌ THI

ĐỀ SỐ 1

(Thời gian làm bài: 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu I. (2 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 - 3mx - 3m + 1$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

2) Tìm m để đồ thị của hàm số (1) có cực đại và cực tiểu, đồng thời chứng cách đều đường thẳng có phương trình $x - y = 0$.

Câu II. (2 điểm)

1) Giải phương trình $\frac{5 + \cos 2x}{3 + 2 \tan x} = 2 \cos x$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9 \\ x^2 + 2y^2 = x - 4y \end{cases}$.

Câu III. (1 điểm)

Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{(1 + \sin x)^{1 + \cos x}}{1 + \cos x} dx$.

Câu IV. (1 điểm)

Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $DA = DB = DC$. Biết rằng DBC là tam giác vuông. Tính thể tích tứ diện $ABCD$.

Câu V. (1 điểm)

Chứng minh rằng với mọi số dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$, ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{3}{2}.$$

PHẦN RIÊNG

Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc phần B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a. (2 điểm)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có phương trình các cạnh AB , BC lần lượt là $5x + 2y + 7 = 0$, $x - 2y - 1 = 0$. Biết phương trình phân giác trong góc A là $x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C của tam giác ABC .

2) Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$ cho điểm $M(1; 2; 3)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M , tạo với trục Ox một góc 60° và tạo với mặt phẳng (Oxz) một góc bằng 30° .

Câu VII.a. (1 điểm)

Giải phương trình $e^x = 1 + \ln(1 + x)$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b. (2 điểm)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường

tròn $(C): x^2 + y^2 = \frac{3}{2}$ và parabol $(P): y^2 = x$.

Tìm trên (P) các điểm M mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến với đường tròn (C) và hai tiếp tuyến này tạo với nhau một góc bằng 60° .

2) Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$ cho hình vuông $ABCD$ có $A(5; 3; -1)$, $C(2; 3; -4)$, B là một điểm nằm trên mặt phẳng có phương trình $x + y - z - 6 = 0$. Hãy tìm tọa độ điểm D .

Câu VII.b. (1 điểm)

Giải phương trình $(\sqrt{x+1} + 1)^3 = \sqrt{x^3 + 2}$.

LÊ QUỐC HÂN - TRẦN QUỐC LUẬT
(Khoa Toán Đại học Vinh)



Cách giải một dạng toán GIỚI HẠN DÃY SỐ ĐẶC BIỆT

KIỀU ĐÌNH MINH
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Tìm giới hạn một dãy số thường là bài toán khó. Trong bài báo này chúng tôi xin bàn về cách giải một dạng toán tìm giới hạn dãy số đặc biệt thường gặp trong các kì thi chọn học sinh giỏi. Trước hết ta xem xét cách giải bài toán mở đầu sau:

❖ **Bài toán 1.** Cho dãy số (u_n) ($n=1, 2, \dots$) được xác định bởi $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$, $n=1, 2, \dots$. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i}$.

Để tiến hành giải bài toán trên ta làm các bước sau

Bước 1. Chỉ ra rằng $\lim u_n = +\infty$.

Bước 2. Tính $\sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i}$.

Bước 3. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i}$.

Lời giải. Do $u_1 = 2 > 1$ và $u_{n+1} = u_n + (u_n - 1)^2$, $n=1, 2, \dots$ nên $1 < 2 = u_1 < u_2 < u_3 < \dots$

tức là dãy (u_n) ($n=1, 2, \dots$) tăng (1)

Ta chứng minh dãy (u_n) không bị chặn trên (2)

Thật vậy, nếu dãy (u_n) bị chặn trên thì (u_n) hội tụ, giả sử $\lim u_n = a$ ($a > 1$).

Lúc đó $a = a + (a - 1)^2 \Leftrightarrow a = 1$, (mâu thuẫn).

Từ (1) và (2) suy ra $\lim u_n = +\infty$.

Ta có $u_{i+1} - 1 = u_i(u_i - 1)$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_i} = \frac{1}{u_i - 1} - \frac{1}{u_{i+1} - 1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$\text{Suy ra } \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i} = \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \rightarrow 1$$

khí $n \rightarrow +\infty$.

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i} = 1. \quad \square$$

❖ **Bài toán 2.** Cho dãy (x_n) ($n=1, 2, \dots$) được xác định bởi $x_1 = 1$ và $x_{n+1} = 2008x_n^2 + x_n$, $n=1, 2, \dots$

$$\text{Tìm } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1}} \right).$$

Lời giải. Ta có $x_{n+1} - x_n = 2008x_n^2 > 0$, $n=1, 2, \dots$ nên (x_n) ($n=1, 2, \dots$) là dãy tăng và dương. Ta chứng minh dãy (x_n) không bị chặn trên.

Thật vậy, giả sử $\lim x_n = a \Rightarrow a > 0$.

Khi đó $a = 2008a^2 + a \Leftrightarrow a = 0$ (vô lí).

Vậy $\lim x_n = +\infty$.

Biến đổi $x_{k+1} = 2008x_k^2 + x_k$

$$\Leftrightarrow \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} \right).$$

$$\text{Suy ra } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{2008} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}} \right).$$

$$\text{Vì vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1}} \right) = \frac{1}{2008}. \quad \square$$

❖ **Bài toán 3.** (VMO 2009). Cho dãy số (x_n) ($n=1, 2, \dots$) xác định bởi

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ và } x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2}, \quad n=2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy (y_n) ($n=1, 2, \dots$), với

$$y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} \text{ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.}$$

Lời giải. Từ giả thiết ta thấy $x_n > 0, \forall n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x_n - x_{n-1} &= \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1} + x_{n-1}}}{2} - x_{n-1} \\ &= \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1} + x_{n-1}} - 2x_{n-1}}{2} > 0, \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

Do đó (x_n) là dãy số tăng.

Giả sử $\lim x_n = a$ suy ra $a > 0$ và

$$a = \frac{\sqrt{a^2 + 4a} + a}{2} \Leftrightarrow a = 0 \text{ (vô lí)}.$$

Vậy $\lim x_n = +\infty$.

$$\text{Từ } x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1} + x_{n-1}}}{2}, \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow x_n^2 = (x_n + 1)x_{n-1} \Rightarrow \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_n + 1} - \frac{1}{x_n}, \forall n \geq 2.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \frac{1}{x_1^2} + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} \right) + \dots \\ &+ \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} \right) = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_n} = 6 - \frac{1}{x_n}, \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

Do đó $y_n < 6, \forall n \geq 1$ và dãy (y_n) tăng, vì

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{x_n} > y_{n-1}.$$

Vậy dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim y_n = 6$. $\square$

Bài toán 4. (T9/342 THPT). Cho dãy (x_n) ($n = 1, 2, \dots$) xác định bởi $x_1 = 1$ và

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n + 1)(x_n + 2)(x_n + 3) + 1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Đặt $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 2}$, $n = 1, 2, \dots$. Tìm $\lim y_n$.

Lời giải. Từ công thức xác định dãy suy ra $x_2 = 5$ và $x_n > 0, \forall n = 1, 2, \dots$

Biến đổi

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{x_n(x_n + 1)(x_n + 2)(x_n + 3) + 1} \\ &= \sqrt{(x_n^2 + 3x_n)(x_n^2 + 3x_n + 2) + 1} = x_n^2 + 3x_n + 1. \end{aligned}$$

Bằng quy nạp ta chỉ ra được $x_n > 3^{n-1}, \forall n \geq 2$ nên $\lim x_n = +\infty$. Lại có

$$x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n + 1$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} + 1 = x_n^2 + 3x_n + 2 = (x_n + 1)(x_n + 2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_{n+1} + 1} = \frac{1}{(x_n + 1)(x_n + 2)} = \frac{1}{x_n + 1} - \frac{1}{x_n + 2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_n + 2} = \frac{1}{x_n + 1} - \frac{1}{x_{n+1} + 1}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i + 1} - \frac{1}{x_{i+1} + 1} \right) \\ &= \frac{1}{x_1 + 1} - \frac{1}{x_{n+1} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x_{n+1} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

khí $n \rightarrow +\infty$. Vậy $\lim y_n = \frac{1}{2}$. $\square$

Bài toán 5. (TH/372 THPT). Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[1; +\infty)$ và thỏa mãn hai điều kiện sau

$$\text{i) } f(1) = \frac{1}{4 \cdot 2008};$$

$$\text{ii) } f(x) + 2007(f(x))^2 = f(x+1), \forall x \in [1; +\infty).$$

$$\text{Tìm } \lim \left(\frac{f(1)}{f(2)} + \frac{f(2)}{f(3)} + \dots + \frac{f(n)}{f(n+1)} \right).$$

Lời giải. Ta viết điều kiện ii) dưới dạng

$$2007(f(x))^2 = f(x+1) - f(x) \quad (1)$$

$$\text{Hay } \frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{1}{2007} \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x+1)} \right) \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $f(x+1) \geq f(x), \forall x \geq 1$.

Từ (2), lần lượt thay $x = 1, 2, \dots, n, \dots$ rồi lấy tổng, ta thu được

$$\begin{aligned} &\frac{f(1)}{f(2)} + \frac{f(2)}{f(3)} + \dots + \frac{f(n)}{f(n+1)} \\ &= \frac{1}{2007} \left(\frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{2007} \left(4 \cdot 2008 - \frac{1}{f(n+1)} \right) \\ &= \frac{4 \cdot 2008}{2007} - \frac{1}{2007 \cdot f(n+1)} \end{aligned} \quad (3)$$

Dãy số $(f(n))$ tăng và do $f(1) = \frac{1}{4.2008}$ nên là một dãy số dương. Suy ra tồn tại giới hạn (hữu hạn hay vô hạn)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n+1) = a, \quad 0 < a \leq +\infty.$$

Nếu a hữu hạn thì từ (1) suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2007(f(n+1))^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n+1) - \lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$$

hay $2007a^2 = a - a = 0 \Rightarrow a = 0$. (Điều này không xảy ra). Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n+1) = +\infty$.

Từ (3) ta thu được

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(1)}{f(2)} + \frac{f(2)}{f(3)} + \dots + \frac{f(n)}{f(n+1)} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4.2008}{2007} - \frac{1}{2007f(n+1)} \right) = \frac{4.2008}{2007}. \quad \square \end{aligned}$$

BÀI TẬP

1. Cho dãy số $(x_n) (n=1, 2, \dots)$ được xác định bởi $x_1 = 3, x_{n+1} = x_n^2 - 3x_n + 4, n=1, 2, \dots$

$$\text{Tìm } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} + \dots + \frac{1}{x_n - 1} \right).$$

2. Cho dãy số $(x_n) (n=1, 2, \dots)$ xác định bởi

$$x_1 = 2 \text{ và } x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1), n=1, 2, \dots$$

$$\text{Đặt } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k + 1}.$$

Tìm phần nguyên $[S_{2008}]$ và tính $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

3. Cho dãy số $(x_n) (n=1, 2, \dots)$ xác định bởi $x_1 = a > 1$ và $x_{k+1} = x_k^2, n=1, 2, \dots$

$$\text{Tìm } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_3 - 1} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1} - 1} \right).$$

4. Cho dãy số $(x_n) (n=1, 2, \dots)$ được xác định bởi $x_1 = \alpha > 1$ và $2003x_{n+1} = x_n^2 + 2002x_n, n \geq 1$.

$$\text{Tìm } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i+1} - 1}.$$

5. Cho dãy số $(x_n) (n=1, 2, \dots)$ thỏa mãn $x_1 = a > 1$

$$\text{và } x_{n+1} = \frac{x_n^2 + x_n - 1}{x_n}.$$

$$\text{Tìm } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_1^2 - 1} + \frac{1}{x_2^2 - 1} + \dots + \frac{1}{x_n^2 - 1} \right).$$

6. Cho dãy số $(x_n) (n=1, 2, \dots)$ với $x_1 = 1$;

$$x_{n+1} = \frac{x_n^{24}}{24} + x_n, n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm giới hạn của dãy số (u_n)

$$\text{với } u_n = \frac{x_1^{23}}{x_2} + \frac{x_2^{23}}{x_3} + \dots + \frac{x_n^{23}}{x_{n+1}}, n=1, 2, \dots$$

7. Cho dãy số $(a_n) (n=1, 2, \dots)$ xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = 1 + a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1, n=1, 2, \dots$

$$\text{Tìm } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}.$$

8. Cho dãy số thực (a_n) xác định bởi $a_1 = 1$ và

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, n \geq 1.$$

Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$.

9. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n^2 - 7u_n + 25), n=1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\text{Đặt } v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k - 2}. \text{ Tìm } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n.$$

10. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_1 = 2009 \\ u_{n+1} = u_n (\sqrt{u_n} + 1)^2, n=1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\text{Tìm } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{u_i} + 1}.$$

11. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 2009 \\ u_{n+1} = \frac{2009u_n(1+u_n^2)}{2009u_n^2 - u_n + 2009} \end{cases}$$

$$\text{Tìm } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{1+u_i^2} \right).$$

12. Cho dãy số $(x_n) (n=1, 2, \dots)$ xác định bởi

$$x_1 = 2; x_{n+1} = \frac{x_n^4 - x_n + 1}{x_n^3 - x_n + 1}, n=1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số (y_n) xác định bởi

$$y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^3} \text{ có giới hạn và tìm } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$



Giải đáp: Bài toán đầu xuân

(Đề đăng trên THPT số 393, tháng 3.2010)

Ta đánh số 10 Can và 12 Chi theo thứ tự như sau:

• 10 Can là Giáp (a_1), Ất (a_2), Bính (a_3), Đinh (a_4), Mậu (a_5), Kỷ (a_6), Canh (a_7), Tân (a_8), Nhâm (a_9), Quý (a_{10}).

• 12 Chi là Tý (c_1), Sửu (c_2), Dần (c_3), Mão (c_4), Thìn (c_5), Tỵ (c_6), Ngọ (c_7), Mùi (c_8), Thân (c_9), Dậu (c_{10}), Tuất (c_{11}), Hợi (c_{12}).

Việc ghép mỗi Can với một Chi được thực hiện theo thứ tự trên, bắt đầu từ Giáp Tý (a_1c_1), rồi Ất Sửu (a_2c_2), ... cho đến hết mỗi Can, mỗi Chi thì quay lại từ đầu. Như thế ta thấy việc ghép được thực hiện theo Quy luật sau: Can có chỉ số lẻ ghép với Chi có chỉ số lẻ, Can có chỉ số chẵn ghép với Chi có chỉ số chẵn; nói chung là các Can và các Chi có chỉ số cùng tính chẵn lẻ thì được ghép với nhau, còn các Can và các Chi có chỉ số khác tính chẵn lẻ thì không được ghép với nhau.

Mỗi can được ghép với 6 Chi nên tất cả có 60 tên Can Chi, đồng thời có 60 tên Can Chi không được ghép với nhau.

Các bạn sau có lời giải đúng, được nhận tặng phẩm kỉ này:

Thái Bình: Đinh Thị Nho, 10 Toán, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** Lê Thị Phương, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoảng Hóa; **Nghệ An:** Nguyễn Thị Hương Giang, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Bến Tre:** Ngô Mỹ Tiên, 11T, THPT chuyên Bến Tre.

ĐAN QUỲNH

TOÁN HỌC
12 Tuổi Trẻ Số 400 (10-2010)

(Tiếp trang 3)

Xét tam giác ABC vuông tại C với $AB = 13$, $AC = 5$, $BC = 12$. Gọi O là điểm nằm trong tam giác ABC thỏa mãn $\widehat{AOC} = 90^\circ$; $\widehat{BOC} = 135^\circ$.

Đặt $OB = x$; $OA = \frac{y}{\sqrt{2}}$ và $OC = \frac{z}{\sqrt{2}}$. Ta kiểm tra được x, y, z thỏa mãn hệ điều kiện trên.

Ta có $S_{AOB} = \frac{1}{4}xy$; $S_{AOC} = \frac{1}{4}yz$; $S_{BOC} = \frac{1}{4}zx$.

Từ đó suy ra

$$K = xy + yz + zx = 4(S_{AOB} + S_{AOC} + S_{BOC})$$

$$= 4 \cdot S_{ABC} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 120. \text{ Vậy } K = 120. \square$$



Để kết thúc bài viết, mời bạn đọc luyện tập thông qua một số bài tập sau đây.

1. Cho các số thực dương x, y, z và $x > y$ thỏa mãn

$$\begin{cases} \frac{z}{x} + \frac{z}{y} = 6 \\ \frac{z}{x+y} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của $M = \frac{z}{x-y}$. (ĐS. $M = 4$).

2. Cho các số thực dương x, y, z, t, s thỏa mãn

$$\begin{cases} \frac{s}{x+y+z} = \frac{1}{4} \\ \frac{2s}{x+2y-t} = \frac{1}{3} \\ \frac{s}{2x-y-z+t} = 1. \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của $N = \frac{7x-4z+t}{s}$. (ĐS. $N = 11$).

3. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25 \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + xz + x^2 = 16. \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của $P = xy + 2yz + 3xz$. (ĐS. $P = 24\sqrt{3}$).

DIỄN ĐÀN

**DAY
HOC
TOAN**



THIẾT KẾ BẢN ĐỒ TƯ DUY

**giúp học sinh tự học và tập được
nghiên cứu toán học**

TRẦN ĐÌNH CHÂU (Bộ Giáo dục và Đào tạo)

ĐẶNG THU THỦY (Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam)

Một trong những đặc trưng của đổi mới phương pháp dạy học (PPDH) hiện nay là dạy học chú trọng rèn luyện phương pháp tự học, dạy học không hạn chế ở chức năng dạy kiến thức mà còn dạy phương pháp học. Tuy nhiên, hiện nay hầu hết giáo viên (GV) thường chú trọng dạy kiến thức, cung cấp tri thức một cách đầy đủ, chính xác, chú trọng việc đổi mới cách dạy, ít chú ý đến “dạy cách học”, cách ghi nhớ kiến thức cho học sinh (HS).

Trong việc học và đặc biệt là khi ôn tập hệ thống hóa kiến thức, HS đã được làm quen với việc kẻ bảng biểu, vẽ sơ đồ, biểu đồ, ... và thường là cả lớp có chung cách “ghi chép” giống như cách trình bày của GV hoặc của tài liệu. Với cách làm này, các em phải ghi nhớ kiến thức theo cách diễn đạt của người khác chứ không phải cách diễn đạt của chính mình nên việc ghi nhớ khó khăn hơn, khó khắc sâu vào bộ não.

Bài viết này xin giới thiệu cách thiết kế và sử dụng bản đồ tư duy giúp ghi nhớ kiến thức, hỗ trợ HS tự học, góp phần giải quyết được thực tế nói trên.

Bản đồ tư duy (BĐTD) còn được gọi là sơ đồ tư duy, lược đồ tư duy, ... là hình thức ghi chép nhằm tìm tòi đào sâu, mở rộng một ý tưởng, tóm tắt những ý chính của một nội dung, hệ thống hóa một chủ đề, hệ thống hóa một hệ thống bài tập hay một mạch kiến thức, hệ thống hóa các cách giải của một dạng bài tập, ... bằng cách kết hợp việc sử dụng đồng thời hình ảnh, đường nét, màu sắc, chữ viết với sự tư duy tích cực. Đặc biệt đây là một sơ đồ rất mở, không yêu cầu tỉ lệ, chi tiết khắt khe như bản đồ địa lí, có thể vẽ thêm hoặc bớt các nhánh, mỗi người vẽ một kiểu khác nhau, dùng màu sắc, hình ảnh, các cụm từ diễn đạt khác nhau, cùng một chủ đề nhưng mỗi người có thể “thể hiện” nó dưới dạng BĐTD theo một cách riêng do đó việc lập BĐTD phát huy được tối đa năng lực sáng tạo của mỗi người.

Theo Tony Buzan “một hình ảnh có giá trị hơn cả ngàn từ...” và “màu sắc cũng có tác dụng kích thích não như hình ảnh. Màu sắc mang đến

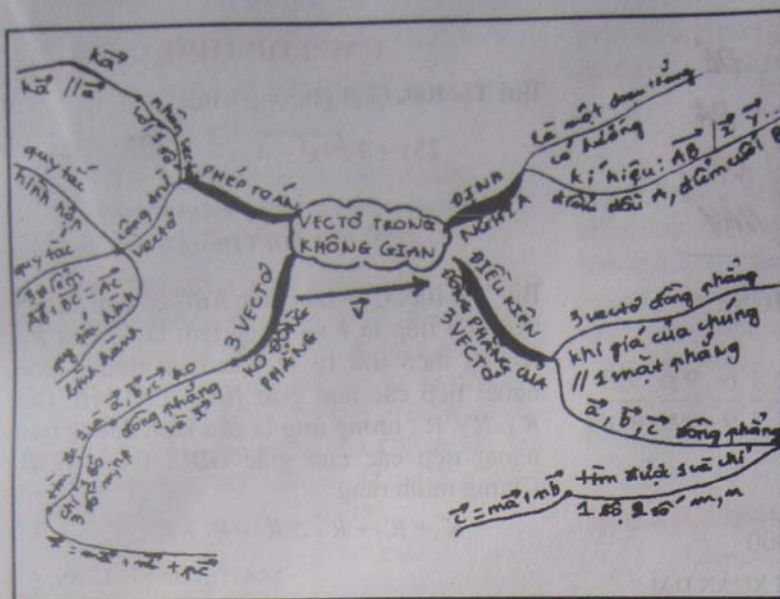
cho BĐTD những rung động cộng hưởng, mang lại sức sống và năng lượng vô tận cho tư duy sáng tạo”.

Cơ chế hoạt động của BĐTD chú trọng tới hình ảnh, màu sắc, với các mạng lưới liên tưởng các nhánh. BĐTD là công cụ đồ họa nối các hình ảnh có liên hệ với nhau, vì vậy có thể vận dụng BĐTD vào hỗ trợ dạy học hình thành kiến thức mới, củng cố sau mỗi bài học, ôn tập hệ thống hóa kiến thức sau mỗi chương, liên kết mạch kiến thức từ các lớp dưới.

★ THÍ DỤ 1. Thiết kế BĐTD về chủ đề Căn bậc hai (toán 9)

HS có thể tự “hệ thống” toàn bộ kiến thức cơ bản về căn bậc hai bằng việc lập BĐTD với từ khóa “căn bậc hai” thành ba nhánh cấp 1 là ba đường cong được vẽ với ba màu sắc khác nhau đó là: định nghĩa, tính chất và các phép biến đổi đơn giản căn bậc hai. Để vẽ được các nhánh này, HS phải nắm được kiến thức cơ bản, trọng tâm, có cái nhìn tổng thể toàn chương, biết liên kết các kiến thức thành mạch, chẳng hạn, kiến thức ở các bài: Hằng đẳng thức; Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương; Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương chính là các tính chất của căn bậc hai nên có nhánh cấp 1 là nhánh “tính chất”. Trong nhánh này mỗi một đơn vị kiến thức vừa nhắc trong mỗi bài là một nhánh con cấp 2. Tương tự trong nhánh cấp 1 “các phép biến đổi đơn giản” mỗi đơn vị kiến thức lại phát triển tiếp thành các nhánh cấp 2. Trong nhánh cấp 2 “trục căn thức ở mẫu”, để “chỉ tiết hóa” ba trường hợp trong mạch kiến thức này phát triển thành ba nhánh cấp 3. Các nhánh cấp 2, 3... của nhánh nào thì có đường cong và chữ viết cùng màu với nhánh cấp 1 trước đó (BĐTD sau được thiết kế trên phần mềm Mindmap) (h. 1).

Việc HS lập được BĐTD cho thấy HS đó nắm rất vững kiến thức của chương và biết cách trình bày mạch kiến thức một cách logic.



Hình 3

một bài toán, hệ thống hóa một chủ đề, qua đó, giúp HS biết cách tự học và tập dượt nghiên cứu khoa học.

Việc lập BĐTD có thể bằng cách sử dụng các dụng cụ đơn giản như bút chì, bút màu, phấn, tẩy,...thiết kế trên giấy, bìa, bảng phụ,...hoặc cũng có thể thiết kế trên phần mềm bản đồ tư duy. Có thể cài phần mềm Mindmap bằng cách vào trang web

www.download.com.vn gõ vào ô "tìm kiếm" cụm từ Mindmap, ta có thể tải về bản dùng thử

(không hạn chế số ngày sử dụng) ConceptDraw MINDMAP 5 Professional. Việc sử dụng phần mềm này khá đơn giản, HS có thể làm được.

Qua nghiên cứu và thực nghiệm sử dụng BĐTD dạy học môn Toán ở một số trường ở Hà Nội và Bắc Giang cho thấy nếu được hình thành thói quen vẽ BĐTD sẽ giúp cho hầu hết HS hứng thú, sáng tạo và ghi nhớ lâu. Các em rất hào hứng khi tự mình tập dượt sáng tạo "tác phẩm BĐTD" và khi thuyết trình về chủ đề kiến thức đó các em cũng trình bày theo cách hiểu, theo logic của các em và nhờ đó mà các em hiểu, nhớ rất sâu kiến thức. Mạch kiến thức toán được trình bày trong SGK và cả quá trình học (qua GV giảng dạy, sách tham khảo, Internet, câu lạc bộ...) được HS liên tưởng, liên kết, "thâu tóm", được mỗi HS trình bày theo cách hiểu của mình thành BĐTD. Việc trình bày BĐTD đã biến kiến thức "bên ngoài" thành kiến thức nhuần nhuyễn "bên trong" của chính các em. Việc lập BĐTD đòi hỏi quá trình tư duy tích cực, do vậy, các em tự mình trở thành "tác giả" làm chủ kiến thức, làm chủ "tác phẩm" và liên tục có được niềm vui trước sản phẩm hàng ngày của chính mình sau mỗi tiết học toán và các môn học khác, biết vận dụng kiến thức và phương pháp tư duy logic vào học tập và trong cuộc sống sau này.

Ngoài việc vẽ BĐTD trong học tập, nên tập cho các em có thói quen sử dụng BĐTD tự ghi tóm lược nội dung chính của cuốn sách dưới dạng BĐTD khi các em đọc sách. Hoặc gợi ý cho các em lập kế hoạch học tập, vạch kế hoạch cho bản thân để biến ước mơ thành hiện thực trong tương lai, các kế hoạch này có thể được bổ sung dần dần theo năm tháng bằng cách vẽ thêm nhánh khi mỗi người có sự điều chỉnh kế hoạch.

Việc cho các em lập BĐTD, tập dượt nghiên cứu góp phần làm cho các em yêu thích môn Toán hơn, chấp cánh cho những ước mơ trở thành nhà toán học, nhà khoa học trong tương lai.

Tài liệu tham khảo

1. Trần Đình Châu, *Sử dụng bản đồ tư duy – một biện pháp hiệu quả hỗ trợ học sinh học tập môn Toán* - Tạp chí Giáo dục, Kỳ 2- tháng 9/2009.
2. Trần Đình Châu, Đặng Thu Thủy, *Sử dụng bản đồ tư duy góp phần tích cực hóa hoạt động học tập của học sinh*, Tạp chí Khoa học giáo dục, số chuyên đề Thiết bị dạy học năm 2009.
3. Trần Đình Châu, Đặng Thu Thủy, *Sử dụng bản đồ tư duy góp phần dạy học tích cực và hỗ trợ công tác quản lý nhà trường*, Báo cáo tại Hội thảo Khoa học của Bộ GD&ĐT, 8/2010.
4. Tony Buzan - *Bản đồ Tư duy trong công việc*, NXB Lao động - Xã hội.
5. Stella Cottrell (2003), *The study skills handbook* (2nd edition), PalGrave Macmillian.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/400. (Lớp 6). Cho

$$A = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} \cdots \frac{995}{998} \cdot \frac{997}{1000} \text{ và } B = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} \cdots \frac{996}{999} \cdot \frac{998}{1001}.$$

1) So sánh A và B;

2) Chứng minh rằng $A < \frac{1}{12900}$.

LÊ XUÂN ĐẠI

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T2/400. (Lớp 7). Cho tam giác ABC, đường trung tuyến BM và đường phân giác CD cắt nhau tại J thỏa mãn điều kiện $JB = JC$. Từ A kẻ AH vuông góc với cạnh BC. Chứng minh rằng $JM = JH$.

TRẦN NHẬT

(SV lớp Toán Lí 29, CĐSP Quảng Ngãi)

Bài T3/400. Giả sử $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Xét các số tự nhiên $a_n = \overline{11\dots 1}$ được viết bởi n chữ số 1. Chứng minh rằng nếu a_n là một số nguyên tố thì n là ước của $a_n - 1$.

NGUYỄN HỮU BẰNG

(GV THCS Hưng Hòa, Vinh, Nghệ An)

Bài T4/400. Cho bốn số a, b, c, d thuộc

$\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4-a-b-c-d}\right)^4 \geq \frac{abcd}{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)}.$$

TRỊNH XUÂN TÌNH

(GV THPT Phú Xuyên B, Hà Nội)

Bài T5/400. Cho hình vuông ABCD cạnh a, M là điểm tùy ý trên cạnh AB ($M \neq A, M \neq B$). Nối MC cắt BD tại P, MD cắt AC tại Q. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MPQ và giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác CPQD.

CAO NGỌC TOÀN

(GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên - Huế)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/400. Giải phương trình

$$25x + 9\sqrt{9x^2 - 4} = \frac{2}{x} + \frac{18x}{x^2 + 1}.$$

ĐẬU THANH KỲ

(GV THPT Diễn Châu IV, Nghệ An)

Bài T7/400. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I và trọng tâm là G. Gọi R_1, R_2, R_3 theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác IBC, ICA, IAB. Gọi R'_1, R'_2, R'_3 tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác GBC, GCA, GAB. Chứng minh rằng

$$R'_1 + R'_2 + R'_3 \geq R_1 + R_2 + R_3.$$

NGUYỄN ĐÌNH TUẤN

(Quảng Trị)

Bài T8/400. Cho hàm số $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$

($0 < a < b$) liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$, $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a; b)$.

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho

$$\frac{2}{a-c} < \frac{f'(c)}{f(c)} < \frac{2}{b-c}.$$

ĐƯƠNG VIỆT THÔNG

(Khoa Toán Kinh tế, ĐHKT Quốc dân, Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T9/400. Cho dãy số $(a_n) (n=1, 2, \dots)$ thỏa

mãn $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n + 1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2010}^2 < 4020$.

TRẦN VINH HỢP

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T10/400. Cho tập hợp $A \subset \mathbb{R}$, ta định nghĩa tập $A+1 = \{a+1 | a \in A\}$. Hỏi có bao nhiêu tập con A của tập $\{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$) sao cho $A \cup (A+1) = \{1, 2, \dots, n\}$?

TRẦN MINH HIẾN

(GV THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Bài T11/400. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

Với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+$, ta luôn có

$$f(x)f(y) = \beta f(x+yf(x))$$
(với $\beta \in \mathbb{R}, \beta > 1$ cho trước).

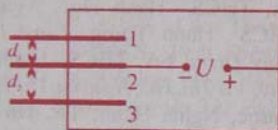
VÕ PHƯƠNG KHÁNH TOÀN
*(Ban Quản lý Khu Bảo tồn thiên nhiên Kê Gỗ,
 Cẩm Xuyên, Hà Tĩnh)*

Bài T12/400. Cho tam giác ABC nội tiếp trong một đường tròn và M là điểm chính giữa của cung BC . Gọi I, J, K theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ M đến các đường thẳng AB, BC, CA ; X là giao điểm của BK và AJ ; L là giao điểm của CX và IJ . Vẽ tia Jy vuông góc với MK cắt AL tại T . Chứng minh rằng CT vuông góc với IM .

TRẦN BÁ DUY LINH
(THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

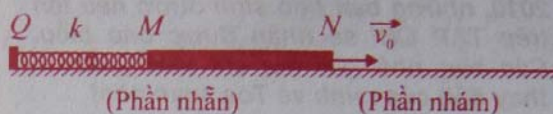
Bài L1/400. Ba tấm kim loại có diện tích bằng nhau, được đặt song song và đối diện nhau trong không khí. Các tấm kim loại này được nối với hiệu điện thế U như hình vẽ. Khoảng cách giữa các tấm ngoài và tấm giữa là d_1 và d_2 . Hãy xác định lực điện tác dụng lên tấm



giữa nếu khoảng cách giữa các tấm nhỏ hơn nhiều so với kích thước các tấm.

NGUYỄN VĂN THUẬN
(GV DHSP Hà Nội)

Bài L2/400. Một cái thước thẳng MN đồng chất, tiết diện đều, có chiều dài L và khối lượng m tiếp xúc đều với một mặt phẳng nằm ngang. Mặt phẳng nằm ngang đó có hai phần, ngăn cách bởi một đường thẳng: Một phần tuyệt đối phẳng (nhẵn), một phần nhám (hệ số ma sát trượt giữa thước và phần này là μ). Ta bố trí một hệ như hình vẽ:



Một lò xo nhẹ, đủ dài, có độ cứng k , một đầu gắn cố định vào tường tại Q , đầu còn lại nối với đầu M của thước. Lúc đầu thước và trục lò xo nằm trên một đường thẳng vuông góc với đường thẳng phân cách, lò xo không biến dạng và thước nằm hoàn toàn trong phần nhẵn và điểm N vừa chạm vào đường phân cách. Tại một thời điểm, ta truyền cho thước một vận tốc $\vec{v}_0$ có phương dọc theo thước và chiều hướng vào phía mặt nhám. Tìm độ giãn cực đại của lò xo sau đó.

NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Yên Thành 2, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOL

T1/400. (For 6th grade). Given

$$A = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{5}{8} \cdots \frac{995}{998} \cdot \frac{997}{1000} \text{ and } B = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9} \cdots \frac{996}{999} \cdot \frac{998}{1001}$$

1) Compare A and B .

2) Prove that $A < \frac{1}{12900}$.

T2/400. (For 7th grade). Let ABC be a triangle, the median BM and the angle-bisector CD meets at J and $JB = JC$. From A draw AH perpendicular to BC . Prove that $JM = JH$.

T3/400. Assume that $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Consider all natural numbers $a_n = \overline{11\dots 1}$ consisting of exactly n digits 1. Prove that if a_n is a prime number then n is a divisor of $a_n - 1$.

T4/400. Let a, b, c, d be real numbers in the half-open interval $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Prove that

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4-a-b-c-d}\right)^4 \geq \frac{abcd}{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)}.$$

(Xem tiếp trang 31)



LTS. Bắt đầu từ số 400, tháng 10 năm 2010, những bạn học sinh được nêu tên trên **TẠP CHÍ** sẽ nhận được bảo biểu. Các bạn nhớ gửi địa chỉ mới (nếu có thay đổi) của mình về Tòa soạn nhé!

★ **Bài T1/396.** Viết các số chính phương liên tiếp $1^2, 2^2, \dots, 2010^2$ liên nhau ta được số $A = 14916...4040100$. Nếu đặt dấu "+" vào giữa hai chữ số nào đó của số A thì được tổng của hai số B và C . Hỏi $B + C$ có chia hết cho 9 không? Vì sao?

Lời giải.

• Ta thấy số $A = 14916...4040100$ và số $B + C$ có tổng các chữ số bằng nhau nên khi chia cho 9 có số dư bằng nhau.

Tương tự, số A và số $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2010^2$ khi chia cho 9 cũng có số dư bằng nhau.

• Ta cần tìm số dư của tổng $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2010^2$ khi chia cho 9.

Xét tổng ba số

$$\begin{aligned} & (3k)^2 + (3k+1)^2 + (3k+2)^2 \\ &= 9k^2 + 9k^2 + 6k + 1 + 9k^2 + 12k + 4 \\ &= 27k^2 + 18k + 5 = 9(3k^2 + 2k) + 5, \text{ (với } k \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

Ta thấy số dư của tổng trên khi chia cho 9 là 5 mà trong S có 670 tổng ba số như thế, nên khi chia cho 9 thì S có dạng $9m + 5 \times 670 = 9m + 3350 = 9n + 2, (m, n \in \mathbb{N})$. Như vậy phép chia S cho 9 có số dư bằng 2.

• Vậy số A và $B + C$ khi chia cho 9 đều có số dư bằng 2 nên $B + C$ không chia hết cho 9. □

◀ **Nhận xét.** 1) Một số bạn sử dụng công thức

$$\begin{aligned} S &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2010^2 = \frac{2010(2010+1)(4020+1)}{6} \\ &= 335 \times 2011 \times 4021 = (9k+2)(9m+4)(9n+7) = 9l+2 \end{aligned}$$

với k, m, n thuộc $\mathbb{N}$.

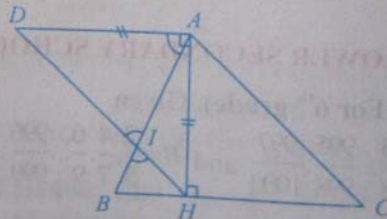
2) Các bạn sau có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Thị Lan, Nguyễn Hồng Ngọc, 6A, THCS Lập Thạch, Nguyễn Thị Nga, Đào Thị Hồng, Trương Thị Hoài Thu, Nguyễn Tuấn Huy, Phan Văn Nhiệm, 6A, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** Trần Bảo Trung, 6A, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương; **Quảng Ngãi:** Trần Văn Hiền, Trần Thị Mỹ Ninh, 6A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa, Nguyễn Thị Kiều Duyên, 6A, THCS Hành Đức, Nguyễn Khắc Cao Kỳ, 6B, THCS Hành Trung, Tống Thành Nguyên, Cao Thị Thúy Diễm, 6A, THCS Hành Phước, Đặng Lưu Việt Quý, Vũ Thị Thi, Nguyễn Thị Hạ Vy, 5A, TH số 2 Hành Phước, Nghĩa Hành; **TP. Hồ Chí Minh:** Đỗ Nguyễn Vĩnh Huy, 6A3, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

VIỆT HẢI

★ **Bài T2/396.** Cho tam giác ABC , đường cao AH thỏa mãn $BC = AH\sqrt{2}$. Tính số đo góc $\widehat{ACB}$ biết rằng $\widehat{ABC} = 67^\circ 30'$.

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Thị Kiều Duyên, 6A, THCS Hành Đức, Nghĩa Hành, **Quảng Ngãi**).



ACER VIET NAM, BGD PHONG TRÀO THI ĐUA "XÂY DỰNG TRƯỜNG HỌC THÂN THIÊN, HỌC SINH TÍCH CỰC" VÀ TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ
Phối hợp tổ chức và trao giải thưởng xuyên cho học sinh được nêu tên trên tạp chí

Dựng tam giác vuông cân ADH (D và C thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ AH), DH cắt AB tại I , ta có

$$\widehat{BHI} = \widehat{IDA} = 45^\circ \text{ (so le trong)}$$

$$\Rightarrow \widehat{BIH} = \widehat{DIA} = 67^\circ 30', \widehat{DAI} = \widehat{ABH} = 67^\circ 30'.$$

Suy ra hai tam giác DAI và IBH cân lần lượt tại D và H nên $DA = DI = AH$, $HB = IH$ (1)

$$\text{Mặt khác } DH = AH \cdot \sqrt{2} = BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $HC = DI = DA = AH$.

Vậy tam giác HAC vuông cân tại H do đó $\widehat{ACB} = 45^\circ$. $\square$

<Nhận xét. 1) Bài toán này có nhiều cách giải, tất cả các cách đều vẽ thêm tam giác vuông cân (ở vị trí khác nhau). Chẳng hạn lấy D trên AH sao cho $\widehat{HBD} = 45^\circ$ hoặc lấy E trên tia HC sao cho $HE = HA$ rồi chứng tỏ $E \equiv C$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: Đặng Hồng Thái, 7A2, THCS Lâm Thao;
Ninh Bình: Tô Minh Hiền, 7A, THCS Phát Diệm, Kim Sơn; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Ánh Hồng, 7D, THCS Bình Thịnh, Đức Thọ; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Thị Kiều Duyên, Nguyễn Thúy Phương, Cao Thị Thúy Diễm, 6A, Tổng Thành Nguyên, 7A, THCS Hành Phước, Nguyễn Khắc Cao Kỳ, 6B, Trần Thị Thu Hà, 6A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành, Trần Văn Hiền, 6A, Trần Thị Mỹ Ninh, 7A, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

★ Bài T3/396. Cho $n_1, n_2, \dots, n_m$ là các số tự nhiên thỏa mãn $n_1 > n_2 > \dots > n_m$. Với n là số tự nhiên, ta đặt

$$P_n = 2(3^n + 3^{n_1} + 3^{n_2} + \dots + 3^{n_m}).$$

Có tồn tại hay không số tự nhiên n với $n > n_1$ để P_n là một số chính phương?

Lời giải. Ta chứng minh được các nhận xét sau:

1) Nếu m, n là hai số chính phương và $m \mid n$ thì $\frac{m}{n}$ là số chính phương.

2) Một số chính phương khi chia cho 3 có số dư là 0 hoặc 1.

3) Một số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9.

Bây giờ, giả sử tồn tại số tự nhiên n với $n > n_1 > n_2 > \dots > n_m$ để P_n là số chính phương.

Xét hai trường hợp:

a) $n_m = 2k, k \in \mathbb{N}$. Khi đó

$$P_n = 2(3^n + 3^{n_1} + 3^{n_2} + \dots + 3^{2k})$$

$$= 2 \cdot 3^{2k} (3^{n-2k} + 3^{n_1-2k} + 3^{n_2-2k} + \dots + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{P_n}{3^{2k}} = 2(3^{n-2k} + 3^{n_1-2k} + 3^{n_2-2k} + \dots + 1) (*)$$

Vì P_n và 3^{2k} là hai số chính phương và $P_n : 3^{2k}$, nên theo nhận xét 1) thì $\frac{P_n}{3^{2k}}$ là số

chính phương. Nhưng từ (*) ta thấy $\frac{P_n}{3^{2k}}$ chia cho 3 dư 2, mâu thuẫn với nhận xét 2).

Vậy với n_m chẵn thì P_n không là số chính phương.

b) $n_m = 2k+1, k \in \mathbb{N}$. Ta có

$$P_n = 2(3^n + 3^{n_1} + 3^{n_2} + \dots + 3^{2k+1})$$

$$= 2 \cdot 3^{2k+1} (3^{n-2k-1} + 3^{n_1-2k-1} + 3^{n_2-2k-1} + \dots + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{P_n}{3^{2k}} = 2 \cdot 3 (3^{n-2k-1} + 3^{n_1-2k-1} + 3^{n_2-2k-1} + \dots + 1) (**)$$

Vì P_n và 3^{2k} là hai số chính phương và $P_n : 3^{2k}$, nên theo nhận xét 1) thì $\frac{P_n}{3^{2k}}$ là số

chính phương. Lại do $\frac{P_n}{3^{2k}} : 3$ nên $\frac{P_n}{3^{2k}} : 9$. Từ (***) suy ra

$$3^{n-2k-1} + 3^{n_1-2k-1} + 3^{n_2-2k-1} + \dots + 1 \text{ chia hết cho 3.}$$

Điều này là vô lí, vì

$$3^{n-2k-1} + 3^{n_1-2k-1} + 3^{n_2-2k-1} + \dots + 1 \text{ chia 3 dư 1.}$$

Vậy với n_m lẻ thì P_n cũng không là số chính phương.

Kết luận. Không tồn tại số tự nhiên n với $n > n_1$ để P_n là số chính phương. $\square$

<Nhận xét. Rất ít bạn tham gia giải bài này. Các bạn sau có lời giải tốt:

Vinh Phúc: Đỗ Xuân Việt, 9A, Phạm Thị Thanh Thanh, 8A, THCS Lập Thạch; Nghệ An: Nguyễn Văn Tiến, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

TRẦN HỮU NAM

★ Bài T4/396. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn

$$\begin{cases} x \geq 2, y \geq 9, z \geq 1945 \\ x + y + z = 2010. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất của tích xyz .

Lời giải. Từ điều kiện ta có

$$y < 2010 - z \leq 2010 - 1945 < 1945 \text{ và } z \geq 1945.$$

$$\text{Suy ra } (1945 - y)(1945 - z) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow yz \leq 1945(y + z - 1945).$$

Áp dụng BDT Cauchy cho hai số dương x và $y + z - 1945$, ta có

$$xyz \leq 1945x(y + z - 1945) \leq 1945 \left(\frac{x + y + z - 1945}{2} \right)^2$$

$$= 1945 \left(\frac{2010 - 1945}{2} \right)^2 = \frac{65^2}{4} \cdot 1945 = 2054406,25.$$

$$xyz = 2054406,25 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2010 \\ y = 1945 \\ x = y + z - 1945 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{65}{2} \\ z = 1945. \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của tích xyz bằng 2054406,25 khi và chỉ khi $x = y = \frac{65}{2}$; $z = 1945$. □

◀ Nhận xét. 1) Đa số các bạn giải bài này đều áp dụng BDT Cauchy cho ba số dương $\frac{778}{13}x, \frac{778}{13}y, z$ cũng cho kết quả đúng. Tuy nhiên, ở bậc THCS chỉ nên dùng BDT Cauchy cho hai số. Bài toán có thể tổng quát như sau:

"Cho các số thực x, y, z thỏa mãn

$$\begin{cases} x \geq a, y \geq b, z \geq c \\ x + y + z = k \end{cases}$$

với $a, b, c, k > 0$ và $a, b \leq \frac{k - c}{2} < c < k$ thì giá trị lớn

nhất của tích xyz là $\frac{c(k - c)^2}{4}$ khi $x = y = \frac{k - c}{2}$; $z = c$."

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

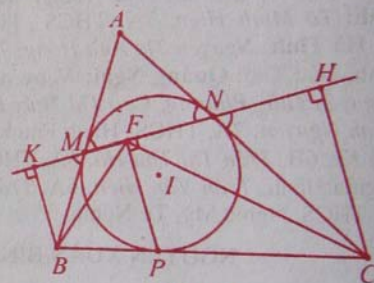
Vinh Phúc: Đỗ Xuân Việt, 9A, THCS Lập Thạch; Vinh Phúc: Đỗ Xuân Việt, 9A, THCS Lập Thạch; Hà Nội: Đặng Quang Tuấn, 9C, THCS Vĩnh Tường; Hà Nội: Trần Mạnh Hùng, 8A4, THCS Lê Lợi, Hà Đông; Phạm Huy Hoàng, 9A5, THCS Giảng Võ, Ba Đình; Thanh Hóa: Lê Thị Phương Mai, 9A3, THCS Nguyễn Văn Trỗi; Nghệ An: Đậu Hồng Quân, 8D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; Hà Tĩnh: Trần Hà Thi, 9H, THCS Bắc Hồng, TX. Hồng Lĩnh; TP. Hồ Chí Minh: Phạm Tuấn Huy, 9A6, THCS chuyên Trần Đại Nghĩa; Quảng Ngãi: Nguyễn Thị Thu Hiền, 8A, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành; Bình Định: Đào Duy Khoa, 8A3, THCS Ngô Mây, Phù Cát.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

★ Bài T5/396. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Gọi M, N, P lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (I) trên các cạnh AB, AC, BC và MD, NE, PF là các đường cao của tam giác MNP .

Chứng minh rằng $DA.FB.EC = EA.DB.FC$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn)



Hình 1

• Trước hết, ta chứng minh FP là tia phân giác của góc BFC .

Kẻ BK và CH vuông góc với đường thẳng MN . Vì AM, AN là tiếp tuyến của (I) nên $AM = AN \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM} \Rightarrow \widehat{KMB} = \widehat{HNC}$

$$\Rightarrow \triangle KMB \sim \triangle HNC \Rightarrow \frac{BM}{CN} = \frac{KM}{HN} = \frac{KB}{HC}.$$

$$\text{Mặt khác, do } BK \parallel PF \parallel CH \text{ nên } \frac{KB}{HC} = \frac{KF}{HF}.$$

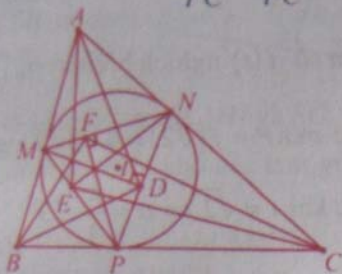
Từ đó suy ra

$$\frac{BM}{CN} = \frac{KM}{HN} = \frac{KF}{HF} = \frac{KF - KM}{HF - HN} = \frac{FM}{FN}.$$

kết hợp với $\widehat{BMF} = \widehat{CNF}$ ta được $\triangle BMF \sim \triangle CNF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MFB} = \widehat{NFC}$

$\Rightarrow \widehat{BFP} = \widehat{CFP}$ hay FP là tia phân giác của góc $\widehat{BFC}$.

• Từ kết quả trên, ta có $\frac{FB}{FC} = \frac{PB}{PC}$.



Hình 2

Hoàn toàn tương tự, ta có

$$\frac{DA}{DB} = \frac{MA}{MB} \text{ và } \frac{EC}{EA} = \frac{NC}{NA}.$$

Nhân ba đẳng thức trên với nhau, lưu ý rằng $AM = AN$, $BM = BP$, $CP = CN$, ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Một số bạn đưa ra cách giải khác khá ngắn gọn xuất phát từ đẳng thức $DP \cdot AN = MD \cdot r$ (do $\triangle MDP \sim \triangle ANI$) với r là bán kính của (I) . Tuy nhiên, cách giải trên (của đa số các bạn) sáng sủa và tìm ra một kết quả khá hay: " FP là tia phân giác của $\widehat{BFC}$ ".

2) Bạn **Ong Thế Phương (Đồng Nai)** đưa ra một kết quả đẹp khác nữa: $EF \parallel AB$, $ED \parallel BC$, $DF \parallel AC$.

3) Các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ**: Lê Hữu Hoàng, 9A₁, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc**: Nguyễn Đình Lộc, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Đô Xuân Việt**, 9A, THCS Lập Thạch; **Bắc Ninh**: Nguyễn Thị Nga, 9A, THCS Tiên Dư; **Hà Nội**: Phạm Huy Hoàng, Lê Minh Phúc, 9A5, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Trần Tuấn Nghĩa**, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Thanh Xuân; **Nam Định**: Bùi Trọng Dũng, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Nghệ An**: Trần Bảo Trung, 6A, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương; **Đồng Nai**: Ong Thế Phương, 9⁶, THCS Long Bình, Biên Hòa; **Quảng Ngãi**: Nguyễn Thị Thu Hiền, 8A, Bùi Thị Hàn My, 9A, THCS Hành Phước; **Tp. Hồ Chí Minh**: Phạm Tuấn Huy, 9A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Quận 1.

PHAN THỊ MINH NGUYỆT

★ **Bài T6/396.** Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$(1 + 9abc - a - b - c) \left(\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \right) \leq \frac{9}{2}.$$

Lời giải. • Nếu $1 + 9abc - a - b - c \leq 0$ thì BĐT cần chứng minh hiển nhiên đúng.

• Nếu $1 + 9abc - a - b - c > 0$ thì từ BĐT Cauchy cho ba số dương ta có

$$a + b + c = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc.$$

Suy ra $0 < 1 + 9abc - a - b - c \leq 1$, do đó

$$(1 + 9abc - a - b - c) \left(\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \right) \leq \frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \quad (1)$$

$$\text{Ta chứng minh } \frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2} \quad (2)$$

Thật vậy, BĐT (2) tương đương với

$$\frac{ab}{1-ab} + \frac{bc}{1-bc} + \frac{ca}{1-ca} \leq \frac{3}{2} \quad (3)$$

Từ giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ta có

$$\frac{ab}{1-ab} \leq \frac{2ab}{2 - (a^2 + b^2)} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+b)^2}{(a^2 + c^2) + (b^2 + c^2)}.$$

Sử dụng BĐT quen thuộc $\frac{a^2}{m} + \frac{b^2}{n} \geq \frac{(a+b)^2}{m+n}$

với $m, n > 0$, đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$, suy ra

$$\frac{ab}{1-ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{a^2 + c^2} + \frac{b^2}{b^2 + c^2} \right) \quad (4)$$

Tương tự

$$\frac{bc}{1-bc} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{b^2 + a^2} + \frac{c^2}{c^2 + a^2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{ca}{1-ca} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{c^2 + b^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} \right) \quad (6)$$

Cộng theo về các BĐT (4), (5), (6) ta được BĐT(3). Kết hợp với (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Nhiều bạn đã nhận ra BĐT cần chứng minh không đúng nếu $1 + 9abc - a - b - c < 0$. Đề bài ở trên đã được điều chỉnh lại cho hợp lí. Rất mong được bạn đọc thông cảm.

2) BDT cần chứng minh cũng có thể điều chỉnh như sau

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2+9abc-a-b-c}.$$

Khi đó, từ giả thiết có $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) = 3 \Rightarrow a+b+c \leq 2$, vì vậy $0 < 2+9abc-a-b-c (< 2)$. Bài toán cũng dẫn đến việc chứng minh BDT (1).

2) Các bạn sau đây đã điều chỉnh bài toán theo một trong hai cách trên và cho lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Đình Lộc, 9C, THCS Vĩnh Tường; Nguyễn Mạnh Quân, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Nội:** Nguyễn Văn Quý, 11A1 Toán, Trường chuyên Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** Phạm Đức Vượng, Nguyễn Ngọc Thiện, 10A1, THPT Thanh Miện I; **Thái Bình:** Nguyễn Thị Huyền Trang, 10 Toán, THPT chuyên Thái Bình; Vũ Huy Hoàng, 10A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy; **Thanh Hoá:** Nguyễn Anh Thắng, 11T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Duy Tùng, 10A12, THPT Diễn Châu 2; Phạm Hùng Vương, 10A1, THPT Phan Đăng Lưu, Yên Thành; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hoà.

NGUYỄN THANH HỒNG

★ **Bài T7/396.** Cho $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (\cos\alpha + 1) \left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right) + (\sin\alpha + 1) \left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right).$$

Lời giải. Biểu thức có thể biến đổi như sau

$$\begin{aligned} P &= \cos\alpha + \sin\alpha + \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha \sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 2 \\ &= \cos\alpha + \sin\alpha + \frac{\cos\alpha + \sin\alpha + 1}{\cos\alpha \sin\alpha} + 2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Vì } \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ nên } -\frac{\pi}{4} < \alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \text{ suy ra } 1 < t \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Lại có } t^2 = 1 + 2\cos\alpha \sin\alpha \Rightarrow \cos\alpha \sin\alpha = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Thay các kết quả trên vào (1) và rút gọn, ta được $P = t + \frac{2}{t-1} + 2$.

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t + \frac{2}{t-1} + 2 \quad (1 < t \leq \sqrt{2})$$

$$\text{có } f'(t) = 1 - \frac{2}{(t-1)^2}. \text{ Dễ thấy } f'(t) < 0.$$

Vậy hàm số $f(t)$ nghịch biến trong $(1; \sqrt{2}]$.

Ta được $\min P = f(\sqrt{2}) = 4 + 3\sqrt{2}$, giá trị đó

$$\text{đạt được khi } t = \sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Có thể giải bài toán bằng cách khác như sau: Chứng minh với $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì

$$\tan\alpha + \cot\alpha \geq 2; \quad \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha} \geq \frac{4}{\cos\alpha + \sin\alpha};$$

$$\text{đặt } t = \cos\alpha + \sin\alpha; \quad P \geq t + \frac{4}{t} + 4 = g(t); \text{ sử dụng}$$

$$\text{đạo hàm ta được } \min P = g(\sqrt{2}).$$

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Đỗ Xuân Việt, 9A, THCS Lập Thạch; **Phú Thọ:** Đỗ Quốc Tiến, 10A1, THPT Thanh Thủy; **Thanh Hoá:** Lê Văn Tuấn, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Quảng Ngãi:** Võ Văn Tiên, 10 Toán 1, Nguyễn Huỳnh Thanh Thiên, 10 Toán 2, THPT chuyên Lê Khiết, TP Quảng Ngãi; **Hà Tĩnh:** Phạm Tiến Dũng, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** Nguyễn Anh Quốc, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà; **Bình Định:** Nguyễn Danh Nhân, 10A1, THPT Phù Cát II; **Khánh Hoà:** Nguyễn Đình Luận, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Nha Trang.

NGUYỄN ANH DŨNG

★ **Bài T8/396.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \alpha$. Tính thể tích của hình chóp $S.ABC$ theo a , b , c và α .

Lời giải. Ta giải bài toán tổng quát hơn: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và các góc phẳng của góc tam diện $S.ABC$ lần lượt là $\widehat{ASB} = \alpha$, $\widehat{BSC} = \beta$, $\widehat{ASC} = \gamma$. Tìm thể tích hình chóp $S.ABC$ theo a , b , c , α , β , γ . Kẻ $AH \perp mp(BSC)$. Khi đó

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{BSC} \cdot AH$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} bc \cdot \sin \beta \cdot AH \quad (1)$$

Kẻ $AM \perp SB$, từ định lý ba đường vuông góc ta có $HM \perp SB$.

Giả sử N là giao điểm của MH và SC .

Sử dụng định lý cosin cho các tam giác AMN và ASN ta được

$$\begin{aligned} AN^2 &= AM^2 + MN^2 - 2AM \cdot MN \cdot \cos \widehat{AMN} \\ &= SA^2 + SN^2 - 2SA \cdot SN \cdot \cos \gamma \end{aligned} \quad (2)$$

Lại vì $AM = SM \cdot \tan \alpha$, $MN = SM \cdot \tan \beta$,

$$SA = \frac{SM}{\cos \alpha}, \quad SN = \frac{SM}{\cos \beta}, \text{ nên từ (2) suy ra}$$

$$\begin{aligned} \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta - 2 \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \cos \widehat{AMN} \\ = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} - \frac{2 \cos \gamma}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \cos \widehat{AMN} = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Từ đó $\sin \widehat{AMN}$

$$= \frac{\sqrt{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)}}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$\text{và } AH = AM \cdot \sin \widehat{AMN} = \frac{a \cdot \sin \widehat{AMN}}{\sin \beta} \quad (3)$$

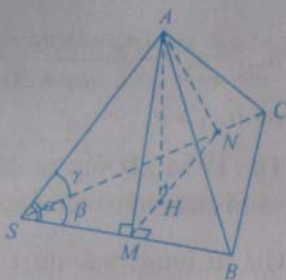
Từ (1) và (3) thu được công thức (4) sau

$$V_{S.ABC} = \frac{abc}{6} \sqrt{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)}$$

(Lưu ý $0^\circ < \alpha, \beta, \gamma < 180^\circ$ và $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$ nên công thức (4) hoàn toàn xác định).

Trở lại bài T8/396, với $\alpha = \beta = \gamma$ ta có

$$\begin{aligned} V_{S.ABC} &= \frac{abc}{6} \sqrt{1 + 2 \cos^3 \alpha - 3 \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{abc}{6} \sqrt{(1 - \cos \alpha)^2 (1 + 2 \cos \alpha)} \\ &= \frac{abc}{6} (1 - \cos \alpha) \sqrt{1 + 2 \cos \alpha}. \quad \square \end{aligned}$$



Nhận xét. 1) Có nhiều bạn tham gia giải bài toán này và hầu hết cho đáp số đúng theo hướng sử dụng phương pháp tỉ số thể tích. Kết quả tổng quát (4) ở trên đã được giới thiệu trong cuốn sách *Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ, Quyển 4*, NXBGD Việt Nam, trang 149.

2) Các bạn sau có lời giải gọn hơn cả:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Mạnh Quân, 11A1, Nguyễn Minh Thuận, 11A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Nguyễn Đức Anh**, 11A1, Lê Văn Trọng, 11A2, THPT Đội Cấn; **Bắc Ninh:** Nguyễn Văn Kỳ, 11 Hóa, THPT chuyên Bắc Ninh; **Hải Dương:** Tống Thị Thanh, 11A3, THPT Nam Sách; **Thái Bình:** Vũ Việt Anh, 11A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy; **Nghệ An:** Nguyễn Duy Hải, 11A7, THPT Đô Lương 1, Đặng Hữu Trọng, 11A1, THPT Quỳnh Hợp 2; **Quảng Trị:** Nguyễn Anh Quốc, 10 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đông Hà; **Quảng Nam:** Nguyễn Hồng Sơn, 12/1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Huỳnh Bảo Anh, 12T, THPT chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** Trần Đoàn Tấn, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nguyễn Quang Hải, 10TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn; **Đông Tháp:** Nguyễn Trường Thịnh, 11T, THPT TP. Cao Lãnh; **Đồng Nai:** Nguyễn Thị Thanh Hòa, 11 Toán, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Bến Tre:** Cao Thành Chương, 11 Toán, THPT chuyên Bến Tre.

HỒ QUANG VINH

★ **Bài T9/396.** Cho số nguyên dương n . Ký hiệu $p(n)$ là tích các chữ số khác 0 của số đó. (Nếu n có một chữ số thì $p(n) = n$). Xét biểu thức $S = p(1) + p(2) + \dots + p(999)$.

Hỏi ước số nguyên tố lớn nhất của S là bao nhiêu?

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Ngọc Thiện, 10A1, THPT Thanh Miện I, Hải Dương).

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $p(10n) = p(n)$;
 $p(10n + k) = kp(n)$, với $k = 1, 2, \dots, 9$. Suy ra

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^9 p(10n + k) &= p(10n) + \sum_{k=1}^9 p(10n + k) \\ &= p(n) + \sum_{k=1}^9 kp(n) = 46p(n). \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^9 p(i) + \sum_{i=1}^{99} \sum_{j=0}^9 p(10i + j) = 45 + \sum_{i=1}^{99} 46p(i) \\ &= 45 + 46 \left(\sum_{i=1}^9 p(i) + \sum_{i=1}^9 \sum_{j=0}^9 p(10i + j) \right) \end{aligned}$$

$$= 45 + 46 \sum_{i=1}^9 p(i) + 46 \sum_{i=1}^9 \sum_{j=0}^9 p(10i+j)$$

$$= 45 + 46 \cdot 45 + 46 \sum_{i=1}^9 46 p(i)$$

$$= 45 + 46 \cdot 45 + 46^2 \cdot 45 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 103.$$

Vậy ước số nguyên tố lớn nhất của S là 103. $\square$

◀ **Nhận xét.** 1) Bài toán này được nhiều bạn tham gia giải. Hầu hết có lời giải đúng.

2) Có nhiều cách giải bài toán này nhưng cách giải trên là sáng sủa, dễ hiểu và ngắn gọn nhất. Ngoài bạn *Thiện*, các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Phú Thọ: Nguyễn Quốc Hùng, 10T, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Xuân Việt, 9A, THCS Lập Thạch; **Nam Định:** Phùng Mạnh Linh, 11T, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hưng Yên:** Đào Thị Minh Ngọc, 10T, THPT chuyên Hưng Yên; **Thái Bình:** Vũ Huy Hoàng, 10A1, THPT Tây Thụy Anh, Thái Thụy; **Nghệ An:** Nguyễn Duy Hải, 11A7, THPT Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Kim Ngọc Khánh, 11 Toán, THPT chuyên Hà Tĩnh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

★ **Bài T10/396.** Dãy số (u_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2008}{-u_n + 2010}, (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng dãy (u_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) có giới hạn hữu hạn và tính $\lim u_n$.

b) Đặt $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k - 2008}$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n+2009}$.

Lời giải. (Theo đa số các bạn)

a) Trước hết ta chứng minh $u_n < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ bằng phương pháp quy nạp. Ta có $u_0 = 0 < 1$.

Giả sử $u_k < 1$ với $k \in \mathbb{N}$ thì

$$u_{k+1} - 1 = \frac{u_k + 2008}{-u_k + 2010} - 1 = \frac{2(u_k - 1)}{-u_k + 2010} < 0$$

$$\Leftrightarrow u_{k+1} < 1.$$

Theo nguyên lý quy nạp toán học ta có $u_n < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$

• Do $u_n < 1$ nên

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(u_n - 2008)}{-u_n + 2010} > 0$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$$

Từ (1) và (2) suy ra dãy số (u_n) là dãy tăng và bị chặn trên, nên dãy có giới hạn hữu hạn.

$$\text{Giả sử } \lim u_n = L \text{ thì } L = \frac{L + 2008}{-L + 2010}$$

$$\Leftrightarrow L^2 - 2009L + 2008 = 0$$

$$\Leftrightarrow L = 1 \text{ hoặc } L = 2008.$$

Do $u_n < 1$ nên $L \leq 1$. Vậy $\lim u_n = 1$.

$$\text{b) Ta có } u_k - 2008 = \frac{u_{k-1} + 2008}{-u_{k-1} + 2010} - 2008$$

$$= \frac{2009(u_{k-1} - 2008)}{-u_{k-1} + 2010} \text{ nên}$$

$$\frac{1}{u_k - 2008} = \frac{2}{2009(u_{k-1} - 2008)} - \frac{1}{2009}, (k \in \mathbb{N}^*).$$

Suy ra

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k - 2008} = \frac{2}{2009} \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_{k-1} - 2008} - \frac{n}{2009}$$

$$\Leftrightarrow T_n - \frac{1}{u_0 - 2008} = \frac{2}{2009} \left(T_n - \frac{1}{u_n - 2008} \right) - \frac{n}{2009}$$

$$\Leftrightarrow T_n = \frac{-2}{2007(u_n - 2008)} - \frac{n}{2007} + \frac{1}{2007(u_0 - 2008)}.$$

Do $\lim u_n = 1$; $u_0 = 0$ nên

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n+2009} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2}{2007(u_n - 2008)(n+2009)}$$

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+2009)2007}$$

$$+ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2007(u_0 - 2008)(n+2009)} = -\frac{1}{2007}. \square$$

◀ **Nhận xét.** 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài với nhiều cách khác nhau. Có bạn dùng công thức truy hồi

$$u_n = \left[\left(\frac{2}{2009} \right)^n - 1 \right] : \left[\frac{1}{2008} \left(\frac{2}{2009} \right)^n - 1 \right],$$

từ đó cũng tìm ra kết quả.

Có bạn áp dụng định lý Stolz bằng cách xét dãy (v_n) với $v_n = n + 2009$. Dãy (v_n) tăng và $\lim v_n = +\infty$ nên

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{n+1} - T_n}{v_{n+1} - v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_{n+1} - 2008} = -\frac{1}{2007} \dots$$

Tuy nhiên cần phải chứng minh khi sử dụng định lý này.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Yến Bái: Hồ Tuấn Dũng, 10K, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Vĩnh Phúc:** Đàm Văn Tú, Lê Văn Trọng, 11A2, THPT Đội Cấn; **Hà Nội:** Nguyễn Việt Dũng, 10A1 Toán, Mạc Đức Huy, Nguyễn Văn Quý, 11A1 Toán, Trường chuyên Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** Đông Xuân Bách, 10 Toán, Nguyễn Tuấn Dũng, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Nguyễn Ngọc Thiện, 10A1, Thanh Miện I; **Thái Bình:** Vũ Huy Hoàng, 10A1, THPT Thái Thụy Anh, Thái Thụy; **Thanh Hóa:** Lê Thanh Công, 11B10, THPT Hậu Lộc II; **Nghệ An:** Nguyễn Thanh Long, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Đặng Hữu Trọng, 11A1, THPT Quý Hợp 2; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Kim Ngọc Khánh, 11 Toán I, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Nam:** Nguyễn Hồng Sơn, 12A1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Quảng Ngãi:** Mai Xuân Việt, 12A, THPT số II Mộ Đức; **Khánh Hòa:** Nguyễn Đình Luận, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Bình Định:** Nguyễn Quang Hải, 10TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn; **TP. Hồ Chí Minh:** Bùi Trần Long, 12B, TT GDTX Quận I; **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa; **Bến Tre:** Trần Hoàng Ân, 12T, THPT chuyên Bến Tre; **Kiên Giang:** Nguyễn Minh Tú, THPT chuyên Huỳnh Mẫn Đạt; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 12A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng;

THANH LOAN

★ Bài T11/396. Giải phương trình

$$4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x} = x^2 + 8 \quad (1)$$

Lời giải. Điều kiện xác định $-2 \leq x \leq \frac{22}{3}$.

Ta có

$$\begin{aligned} & x^2 + 8 - 4\sqrt{x+2} - \sqrt{22-3x} \\ &= (x^2 - 4) - 4(\sqrt{x+2} - 2) - (\sqrt{22-3x} - 4) \\ &= (x-2)(x+2) - 4 \cdot \frac{x+2-4}{\sqrt{x+2}+2} - \frac{22-3x-16}{\sqrt{22-3x}+4} \\ &= (x-2) \cdot A(x) \end{aligned} \quad (2)$$

Trong đó

$$A(x) = x+2 - \frac{4}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{3}{\sqrt{22-3x}+4}$$

Nhận xét rằng, nếu $-2 \leq x < y \leq \frac{22}{3}$ thì

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+2} < \sqrt{y+2}; \sqrt{22-3x} > \sqrt{22-3y} \\ \Rightarrow & -\frac{4}{\sqrt{x+2}+2} < -\frac{4}{\sqrt{y+2}+2}; \\ & \frac{3}{\sqrt{22-3x}+4} < \frac{3}{\sqrt{22-3y}+4} \end{aligned}$$

Suy ra $A(x) < A(y)$.

Lại có $A(-1) = 0$ nên $x = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình $A(x) = 0$.

Kết hợp với (2) ta suy ra phương trình (1) có hai nghiệm: $x = -1$ và $x = 2$. □

◀ **Nhận xét.** 1) Dạng bài toán trên đã rất quen thuộc với các bạn học sinh THPT, kể cả một số không ít các bạn học sinh THCS.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Minh Hiếu, 8A1, THCS Yên Lạc; **Hà Nội:** Trần Mạnh Hùng, 8A4, THCS Lê Lợi, Hà Đông; **Nam Định:** Trần Đại Tân, 8A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định, Bùi Trọng Dũng, 9A, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Nghệ An:** Trần Bảo Trung, 6A, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương, Đỗ Hồng Quân, 8D, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Phú Yên:** Huỳnh Văn Thống, 9D, THCS Phạm Văn Đồng, Tây Hòa.

NGUYỄN MINH ĐỨC

★ Bài T12/396. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Gọi R, r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\max \left\{ \frac{HB}{HC} + \frac{HC}{HB}; \frac{HC}{HA} + \frac{HA}{HC}; \frac{HA}{HB} + \frac{HB}{HA} \right\} \geq \frac{2R}{r} - 2.$$

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Chí Linh, 10A1, THPT chuyên Biên Hoà, Hà Nam).

Trong lời giải này các kí hiệu $\sum \cos A$, $\sum \cos B \cos C$, $\sum \cos^2 A$, ... theo thứ tự chỉ các tổng

$$\begin{aligned} & \cos A + \cos B + \cos C; \\ & \cos B \cos C + \cos C \cos A + \cos A \cos B; \\ & \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C; \dots \end{aligned}$$

Các kí hiệu $\prod \tan A$, $\prod \cot \frac{A}{2}$, $\prod \sin A$, $\prod \cos A$ theo thứ tự chỉ các tích

$$\tan A \tan B \tan C; \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2};$$

$$\sin A \sin B \sin C; \cos A \cos B \cos C.$$

Trước hết ta cần bố ba bổ đề.

Bổ đề 1. Nếu x, y thuộc khoảng $(0; \pi)$ thì

$$\frac{\tan x + \tan y}{2} \geq \tan \frac{x+y}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Bổ đề 2. Với mọi tam giác ABC , ta có

$$\sum \cos A = 1 + \frac{r}{R}.$$

Các Bổ đề 1 và 2 quen thuộc.

Bổ đề 3. Với mọi tam giác ABC , ta có

$$\sum \cos^2 A + \sum \cos B \cos C \geq \sum \cos A.$$

Chúng minh Bổ đề 3.

Nếu tam giác ABC không nhọn thì

$$\prod (1 - \cos A) > 0 \geq \prod \cos A.$$

Nếu tam giác ABC nhọn thì, theo Bổ đề 1:

$$\sum \tan A = \sum \frac{\tan B + \tan C}{2} \geq \sum \tan \frac{B+C}{2} = \sum \cot \frac{A}{2}.$$

Từ đó, chú ý rằng

$$\prod \tan A = \sum \tan A, \prod \cot \frac{A}{2} = \sum \cot \frac{A}{2},$$

$$\text{suy ra } \prod \tan A \geq \prod \cot \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \prod \sin A \prod \sin \frac{A}{2} \geq \prod \cos A \prod \cos \frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \prod \sin^2 A \geq 8 \prod \cos A \prod \cos^2 \frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \prod (1 - \cos^2 A) \geq \prod \cos A \prod (1 + \cos A)$$

$$\Leftrightarrow \prod (1 - \cos A) \geq \prod \cos A.$$

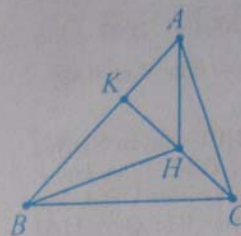
Tóm lại, với mọi tam giác ABC , ta có

$$\prod (1 - \cos A) \geq \prod \cos A.$$

Do đó

$$1 - \sum \cos A + \sum \cos B \cos C - \prod \cos A \geq \prod \cos A.$$

Từ đó, chú ý rằng $\sum \cos^2 A = 1 - 2 \prod \cos A$,
suy ra $\sum \cos^2 A + \sum \cos B \cos C \geq \sum \cos A$.



Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Trở lại giải bài toán **T12**.

Gọi K là giao điểm của AB và CH (hình vẽ).

Chú ý rằng các góc

$\widehat{HBK}, \widehat{HAK}$ theo thứ tự phụ với các góc $\widehat{BAC}, \widehat{CBA}$, ta có

$$\frac{HA}{HB} = \frac{HA}{HK} \cdot \frac{HK}{HB} = \frac{\sin \widehat{HBK}}{\sin \widehat{HAK}} = \frac{\cos A}{\cos B}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{HA}{HB} + \frac{HB}{HA} = \frac{\cos A}{\cos B} + \frac{\cos B}{\cos A}.$$

Do đó, nếu $\frac{HA}{HB} + \frac{HB}{HA} < \frac{2R}{r} - 2$ thì theo Bổ

đề 2, $\frac{\cos A}{\cos B} + \frac{\cos B}{\cos A} < \frac{2}{\sum \cos A - 1}$, điều đó có

nghĩa là

$$(\sum \cos A - 1)(\cos B + \cos C)^2 < 2 \cos B \cos C.$$

Vậy, nếu

$$\max \left\{ \frac{HA}{HB} + \frac{HB}{HA}; \frac{HB}{HC} + \frac{HC}{HB}; \frac{HC}{HA} + \frac{HA}{HC} \right\} < \frac{2R}{r} - 2$$

$$\begin{cases} (\sum \cos A - 1)(\cos B + \cos C)^2 < 2 \cos B \cos C \\ (\sum \cos A - 1)(\cos C + \cos A)^2 < 2 \cos C \cos A \\ (\sum \cos A - 1)(\cos A + \cos B)^2 < 2 \cos A \cos B. \end{cases}$$

Do đó

$$(\sum \cos A - 1) \sum (\cos B + \cos C)^2 < 2 \sum \cos B \cos C.$$

$$\text{Suy ra } (\sum \cos A - 1)(\sum \cos^2 A + \sum \cos B \cos C) < \sum \cos B \cos C.$$

Từ đó, theo Bổ đề 3, ta có

$$(\sum \cos A - 1) \sum \cos A < \sum \cos B \cos C$$

$$\Rightarrow (\sum \cos A)^2 - \sum \cos A < \sum \cos B \cos C$$

$$\Rightarrow \sum \cos^2 A + \sum \cos B \cos C < \sum \cos A.$$

Mâu thuẫn với Bổ đề 3.

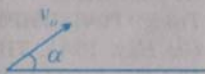
$$\text{Vậy } \max \left\{ \frac{HA}{HB} + \frac{HB}{HA}; \frac{HB}{HC} + \frac{HC}{HB}; \frac{HC}{HA} + \frac{HA}{HC} \right\} \geq \frac{2R}{r} - 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. $\square$

◀ **Nhận xét.** Ngoài bạn *Linh*, các bạn sau đây cũng có lời giải đúng: **Phú Yên:** Võ Văn Huy, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa. **Hà Nội:** Nguyễn Văn Quý, 11A1, Trường chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

★ **Bài L1/396.** Một đĩa tròn ném một hòn đá dưới



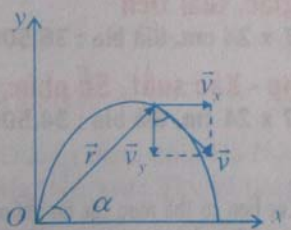
góc α so với phương ngang (hình vẽ). Bỏ qua sức cản của không khí. Hỏi với những góc α có giá trị nằm trong khoảng nào thì hòn đá sẽ luôn luôn bay ra xa đĩa tròn?

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Thành phần vận tốc và tọa độ của hòn đá ở thời điểm t là

$$v_x = v_0 \cos \alpha; \quad x = v_0 \cos \alpha \cdot t.$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt; \quad y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Khoảng cách từ hòn đá tới điểm ném $|\vec{r}|$ sẽ cực đại khi vector vị trí $|\vec{r}|$ vuông góc với vector vận tốc tức thời $\vec{v}$. Điều này chỉ có thể xảy ra nếu hạt đang trên phần quỹ đạo đi



$$\text{xuống, ta có } \frac{y}{x} = -\frac{v_y}{v_x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_0 \sin \alpha - \frac{gt}{2}}{v_0 \cos \alpha} = -\frac{v_0 \sin \alpha - gt}{v_0 \cos \alpha}$$

$$\Leftrightarrow g^2 t^2 - 3v_0 \sin \alpha \cdot g \cdot t + 2v_0^2 = 0 \quad (1)$$

Để $|\vec{r}|$ luôn tăng thì phương trình (1) (ẩn t) phải vô nghiệm, tức là

$$\Delta = 9v_0^2 \sin^2 \alpha \cdot g^2 - 8v_0^2 g^2 < 0$$

$$\Rightarrow \sin \alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \alpha < 70,5^\circ.$$

Vậy khoảng cách giữa hòn đá và điểm ném luôn tăng nếu góc ném thỏa mãn $0^\circ < \alpha < 70,5^\circ$. $\square$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau có lời giải đúng:

Nghe An: Nguyễn Văn Hoàng, 10T7, THPT Đô Lương I; **Vĩnh Phúc:** Trần Thị Nụ 11A2, THPT Đội Cấn, Vĩnh Tường; **Bến Tre:** Liêu Khắc Vũ, 10 Lí, THPT chuyên Bến Tre; **Thanh Hóa:** Mai Văn Tùng, Vũ Hoàng Nguyễn, Nguyễn Văn Mạnh, 12A1, THPT Hậu Lộc 4; **Bình Phước:** Trần I Giôn, 11B, THPT chuyên Quang Trung.

NGUYỄN XUÂN QUANG

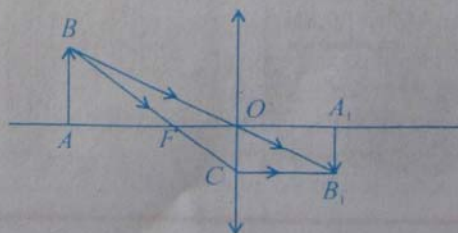
★ **Bài L2/396.** Một vật sáng AB đặt vuông góc với trục chính của một thấu kính hội tụ có tiêu cự f (điểm A nằm trên trục chính), cách thấu kính một khoảng d (với $d > f$).

1) Bằng phương pháp hình học, chứng minh rằng khoảng cách d' từ thấu kính đến ảnh A_1B_1 của AB tạo bởi thấu kính được tính theo

$$d \text{ và } f \text{ là } d' = \frac{df}{d-f}.$$

2) Từ vị trí đã cho, nếu dịch chuyển vật AB lại gần thấu kính thêm một đoạn bằng 10 cm sao cho nó vẫn vuông góc với trục chính thì ảnh của vật qua thấu kính là ảnh thật A_2B_2 cách A_1B_1 một khoảng là 20 cm và cao gấp 2 lần A_1B_1 . Tính tiêu cự của thấu kính.

Lời giải. 1) Vẽ ảnh A_1B_1 của vật AB qua thấu kính hội tụ (hình vẽ).



Hai tam giác OAB và OA_1B_1 đồng dạng, nên

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA} = \frac{d'}{d} \quad (1)$$

Hai tam giác FAB và FOC đồng dạng, nên

$$\frac{OC}{AB} = \frac{FO}{FA} = \frac{FO}{AO - FO} = \frac{f}{d - f} \quad (2)$$

Để chứng minh $A_1B_1 = OC$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\frac{d'}{d} = \frac{f}{d - f} \Rightarrow d' = \frac{df}{d - f} \quad (4)$$

2) Ảnh dịch chuyển cùng chiều với vật nên

$$d_2 = d_1 - 10, \quad d'_2 = d'_1 + 20 \quad (5)$$

Theo bài ra $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = 2$, suy ra

$$\frac{d'_2}{d_2} = \frac{2d'_1}{d_1} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) ta có

$$\frac{d'_1 + 20}{d_1 - 10} = \frac{2d'_1}{d_1} \Rightarrow 20(d_1 + d'_1) = d_1d'_1 \quad (7)$$

Chia cả hai vế của (7) cho $20d_1d'_1$, ta được

$$\frac{1}{d'_1} + \frac{1}{d} = \frac{1}{20} = \frac{1}{f}, \text{ do đó } f = 20\text{cm}. \quad \square$$

◀ **Nhận xét.** Các bạn sau đây có lời giải đúng và gọn:

Thái Nguyên: Vũ Quang Minh, 11Lí, Trần Việt Hùng, 10Toán, THPT chuyên Thái Nguyên; **Hà Nam:** Đinh Ngọc Hải, 10Lí, THPT chuyên Hà Nam; **Hưng Yên:** Nguyễn Thị Mĩ Hằng, 11TN7, THPT Văn Giang; **Nam Định:** Lê Quang Trung, 12Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** Nguyễn Văn Sơn, 10Lí, THPT Bắc Đông Quan, Phan Chí Mai, 12Toán, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** Nguyễn Minh Hiếu, 12A3, THPT Hậu Lộc I, Mai Văn Tùng, Nguyễn Văn Mạnh, 12A1, THPT Hậu Lộc 4, Trịnh Văn Tam, 10T, THPT chuyên Lam Sơn; **Nghệ An:** Trương Lê Văn, A3K38, Nguyễn Trung Hưng, A3K37, THPT Phan Bội Châu, Hồ Văn Dũng, 11A1, THPT Hoàng Mai, Đặng Hữu Trọng, 11A1, THPT Quý Hợp 2; **Bình Định:** Phạm Gia Huy, 10A1, THPT số 1 An Nhơn; **Cần Thơ:** Lê Đại Thành, 12A1, Nguyễn Long Phước Đường, 11A3, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Quảng Ngãi:** Phạm Quốc Đô, 11B1, Bùi Đức Khánh, 12Lí, Võ Văn Cường, 10A1, THPT chuyên Lê Khiết; **Bến Tre:** Liêu Khắc Vũ, 10Lí, THPT chuyên Bến Tre.

NGUYỄN VĂN THUẬN

SÁCH MỚI



TUYỂN CHỌN THEO CHUYÊN ĐỀ CHUẨN BỊ CHO KÌ THI TỐT NGHIỆP THPT VÀ THI VÀO ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG MÔN TOÁN

Tập 1: Đại số, Lượng giác, Giải tích

260 trang, khổ 17 x 24 cm. Giá bìa : 36.500 đồng

Tập 2: Hình học, Tổ hợp - Xác suất, Số phức

240 trang, khổ 17 x 24 cm. Giá bìa : 34.500 đồng



Các bạn có thể mua các ấn phẩm trên tại Tòa soạn, các cơ sở Bưu điện, các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương, các cửa hàng sách của NXBGD Việt Nam. Các đơn vị mua nhiều xin gửi phiếu đặt mua sách (có kí tên đóng dấu) về tòa soạn theo địa chỉ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

Để biết thêm chi tiết xin liên hệ với Tòa soạn:

ĐT - FAX : 04.35121606.

Email : tapchitoanhoc_tuoitre@yahoo.com.vn

HÙNG THẮNG LONG - HÀ NỘI TRÒN 1000 TUỔI

ĐÁP ÁN ĐỀ ĐỢT 3

Bài 7. CHUYẾN DU LỊCH MIỄN PHÍ

(Theo bạn *Hồ Ngọc Hiệp*, 10A5, THPT Nam Khoái Châu, **Hưng Yên**).

Từ giả thiết suy ra:

- Sau khi người thứ 2 lên tàu thì chắc chắn ghế của người thứ 2 đã có người ngồi.

- Sau khi người thứ 3 lên tàu thì chắc chắn các ghế của người thứ 2, 3 đã có người ngồi.

Lập luận tiếp tục như thế.

- Sau khi người thứ 999 lên tàu thì chắc chắn ghế của những người thứ 2, 3, ..., 999 đã có người ngồi.

Vậy hành khách thứ 1000 chỉ có thể ngồi ở ghế của anh ta hoặc của người thứ nhất. Chẳng hạn, nếu hành khách thứ nhất ngồi đúng ghế của mình thì hành khách thứ 1000 ngồi đúng ghế của anh ta; nếu hành khách thứ nhất ngồi ghế của hành khách thứ 1000 thì hành khách thứ 1000 sẽ ngồi ghế của hành khách thứ nhất.

THANH HỒNG

Bài 8. ĐI THĂM HÀ NỘI

Sông Hồng và sông Đuống phân chia Hà Nội thành ba khu vực: Phía Bắc, phía Tây và phía Đông.

Từ giả thiết suy ra: Với mỗi khu vực nếu có một cặp cầu (cầu đi vào và cầu đi ra), hoặc có cầu đi vào cuối cùng thì thăm được từ một đến hai địa điểm, còn nếu có cầu đi ra đầu tiên thì trước đó chỉ thăm được một địa điểm.

Khu vực phía Bắc có 4 địa điểm và 2 cặp cầu nên có thể đi thăm đủ 4 địa điểm. Khu vực phía Tây có 6 địa điểm và 5 cầu: Với 2 cặp cầu thì đi thăm được từ 2 đến 4 địa điểm, còn

một cầu nữa ứng với 2 địa điểm nên ta chọn đó là cầu đi vào cuối cùng để thăm được đủ 6 địa điểm. Khu vực phía Đông có 4 địa điểm và 7 cầu: Với 3 cặp cầu thì đi thăm được từ 3 đến 6 địa điểm, còn một cầu nữa nên ta chọn đó là cầu đi ra đầu tiên mà trước khi đi thăm một địa điểm, và 3 cặp cầu chỉ đi thăm 3 địa điểm.

Với cách chọn trên có thể đi thăm đủ **14** địa điểm. Dưới đây nêu ra một trong các đáp án:

Vàng Kiều Ky → Cầu Phù Đồng → Đền thờ An Dương Vương, Đền Sóc → Cầu Đuống → Rấn Lệ Mật → Cầu Đông Trù → Địa đạo Nam Hồng, Đền thờ Hai Bà Trưng → Cầu Thăng Long → Lăng Chủ tịch Hồ Chí Minh, Chùa Thầy → Cầu Long Biên → Chùa Bỏ Đê → Cầu Chương Dương → Đền Ngọc Sơn, Lụa Vạn Phúc → Cầu Vĩnh Tuy → Gồm Bát Tràng → Cầu Thanh Trì → Đền thờ Nguyễn Trãi, Chùa Trầm.

HOÀNG NGUYỄN

Bài 9. ĐẶT CHẬU HOA

Nhận xét. Giả sử có hai chữ số mà số hình tròn còn trống là bằng nhau thì người đi sau sẽ thắng khi chọn cách đặt như sau: Nếu người đi trước đặt n chậu hoa ở chữ số này thì người đi sau đặt n chậu hoa ở chữ số kia, và cứ tiếp tục như thế.

Ta thấy ở trạng thái ban đầu một chữ số **2** và bốn chữ số **0** đều có 8 hình tròn, còn lại ba chữ số **1** đều có 5 hình tròn. Nếu người A đi đầu tiên chọn một trong các chữ số **0** hoặc chữ số **2** và đặt 3 chậu hoa vào đó thì còn lại bốn chữ số có 8 hình tròn và bốn chữ số có 5 hình tròn. Sau đó người A thực hiện việc đặt các chậu hoa theo *nhận xét* trên thì chắc chắn người A sẽ giành thắng lợi.

AN MINH

DANH SÁCH CÁC BẠN ĐOẠT GIẢI CUỘC THI MỪNG THĂNG LONG - HÀ NỘI TRẦN 1000 TUỔI

GIẢI NHẤT (2 giải)

- 1) Nguyễn Anh Phúc, 11C3, THPT chuyên Hùng Vương, Pleiku, Gia Lai;
- 2) Võ Văn Huy, 11A1, THPT Lê Hồng Phong, Tây Hòa, Phú Yên.

GIẢI NHÌ (5 giải)

- 1) Võ Minh Trí, 12T, THPT chuyên Bến Tre, Bến Tre;
- 2) Võ Duy Thức, 12T, THPT chuyên Bến Tre, Bến Tre;
- 3) Hồ Ngọc Hiệp, 10A5, THPT Nam Khoái Châu, Hưng Yên;
- 4) Phạm Tiến Dũng, 10T2, THPT chuyên Hà Tĩnh, Hà Tĩnh;
- 5) Cao Thành Chương, 11T, THPT chuyên Bến Tre, Bến Tre.

GIẢI BA (10 giải)

- 1) Phạm Thái Hà, 10 Toán, THPT chuyên Biên Hòa, Hà Nam;
- 2) Đinh Quang Danh, 10TN2, THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, Bình Định;
- 3) Nguyễn Đức Minh, 11A2, THPT Lạng Giang số 1, Lạng Giang, Bắc Giang;
- 4) Nguyễn Văn Dũng, Đường 6, Thôn Tân Trại I, Vĩnh Giang, Vĩnh Linh, Quảng Trị;
- 5) Phan Cao Thanh Bình, 11T, THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi;
- 6) Đỗ Văn Anh, 11A1, THPT Dương Quảng Hàm, Hưng Yên;
- 7) Nguyễn Long Phước Đường, 11A3, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ;
- 8) Trương Đình Đức, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Nghệ An;
- 9) Nguyễn Thị Phương Trang, 10A1, THPT Ninh Giang, Hải Dương;
- 10) Phạm Thị Thủy, 11A1, THPT Nam Đàn I, Nghệ An.

Các bạn nhớ gửi địa chỉ mới của mình về Tòa soạn để nhận Giải thưởng và Giấy Chứng nhận. Lưu ý: ghi rõ tên, lớp, trường, tỉnh.

PROBLEMS... (Tiếp trang 17)

T5/400. Let $ABCD$ be a square whose side length is a , M is an arbitrary point on AB ($M \neq A$, $M \neq B$). MC meets BD at P , MD cuts AC at Q . Find the maximum value of the area of triangle MPQ and the minimum value of the area of the quadrilateral $CPQD$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/400. Solve the equation

$$25x + 9\sqrt{9x^2 - 4} = \frac{2}{x} + \frac{18x}{x^2 + 1}.$$

T7/400. Let ABC be a triangle with incenter I and centroid G . Let R_1, R_2, R_3 be the circumradii of the triangles IBC, ICA , and IAB respectively. Let R'_1, R'_2, R'_3 be the of circumradii of the triangles GBC, GCA , and GAB respectively. Prove that

$$R'_1 + R'_2 + R'_3 \geq R_1 + R_2 + R_3.$$

T8/400. Let $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($0 < a < b$) be a continuous function on $[a; b]$ and differentiable on $(a; b)$, $f(x) \neq 0$ for all $x \in (a; b)$. Prove that there exists $c \in (a; b)$ so that

$$\frac{2}{a-c} < \frac{f'(c)}{f(c)} < \frac{2}{b-c}.$$

TOWARD MATHEMATICAL OLYMPIAD

T9/400. Let (a_n) ($n=1, 2, \dots$) be a sequence given

by $a_1=1$, $a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n+1}$ for all $n \in \mathbb{N}^*$. Prove that

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2010}^2 < 4020.$$

T10/400. Given any set $A \subset \mathbb{R}$, let $A+1$ be the set $A+1=\{a+1 | a \in A\}$. How many subsets A of set $\{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$) are there such that

$$A \cap (A+1) = \{1, 2, \dots, n\}?$$

T11/400. Find all the functions $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ so that For every $x, y \in \mathbb{R}^+$,

$$f(x)f(y) = \beta f(x+yf(x))$$

(for a given $\beta \in \mathbb{R}, \beta > 1$).

T12/400. Let ABC be a triangle and M be the midpoint of the arc BC of its circumcircle. Let I, J, K be the projections of M onto the lines AB, BC, CA respectively; X is the intersection of BK and AJ ; L is the intersection of CX and IJ . The ray Jy perpendicular to MK cuts AL at T . Prove that CT is perpendicular to IM .

Translated by LE MINH HA

TOÁN TUỔI THƠ

10 năm tròn

ra số đầu tiên

NĂM THỨ
MƯỜI MỘT
1959-2740

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

Năm 1998, khi Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ bước sang năm thứ 35 và đã có những đóng góp đáng kể vào sự phát triển của Giáo dục toán học Việt Nam, ý tưởng về một tờ tạp chí như Toán học và Tuổi trẻ nhưng dành cho đối tượng là học sinh Tiểu học được những người tâm huyết như GS. Vũ Dương Thụy, Ông Ngô Đạt Từ, GS. Đỗ Trung Hiệu, TS. Lê Thống Nhất, ThS. Vũ Kim Thủy... nhen nhóm và triển khai. Ngày 25/10/2000 số đầu tiên của Toán Tuổi thơ được phát hành trên cả nước.

Toán Tuổi thơ là nơi phát hiện, bồi dưỡng những mầm non năng khiếu toán học, là nơi gặp gỡ giao lưu của các thầy cô giáo Tiểu học để trao đổi về phương pháp dạy toán và cũng tạo ra môi trường tự học lí thú.

Đến nay, qua chặng đường 10 năm phát triển, Tạp chí Toán Tuổi thơ đã trưởng thành. Mỗi tháng, tạp chí xuất bản hai kì phục vụ cho cấp Tiểu học và Trung học cơ sở với số lượng phát hành tổng cộng gần 100.000 bản. Với số lượng xuất bản hàng kì như thế, tuy còn non trẻ nhưng Toán Tuổi thơ tự hào là một tạp chí được nhiều bạn đọc yêu thích. Trong 10 năm hoạt động, với sự đóng góp bài vở của các nhà toán học, các nhà giáo, các bạn học sinh, với sự góp ý xây dựng của rất nhiều bạn đọc trên cả nước, cùng với sự cố gắng, sáng tạo của Hội đồng biên tập, sự cẩn mẫn của những người làm công tác trị sự, Toán Tuổi thơ đã chuyển tải nhiều kiến thức bổ ích tới bạn đọc thông qua 10 triệu bản tạp chí và trên 500 nghìn bản sách đã phát hành.

Cùng với việc hàng tháng xuất bản 2 số tạp chí và các cuốn sách tham khảo về toán, tạp chí còn tổ chức rất nhiều hoạt động xã hội để tạo môi trường gần gũi và hiệu hơn độc giả của mình như Giao lưu Toán Tuổi thơ hàng năm, Câu lạc bộ Các nhà Toán học nhỏ, thi Tú tài Toán Tuổi thơ và nhiều hội thảo, hội nghị khác. Từ năm 2008, được sự đồng ý của Bộ Giáo dục và Đào tạo, Olympic Toán Tuổi thơ được tổ chức như một hoạt động thường niên với sự tham gia của hàng trăm bạn học sinh ở cấp Tiểu học và THCS đến từ 43 tỉnh,

thành trên cả nước. Cuộc thi Giải toán qua thư theo năm học thu hút rất nhiều bạn đọc nhỏ tuổi. Bên cạnh đó, Tạp chí Toán Tuổi thơ cũng phối hợp với Phòng Thiếu nhi, Phòng Nhà trường, Ban Khoa giáo, Đài Truyền hình Việt Nam, Đài Truyền hình Kỹ thuật số tổ chức nhiều chương trình và các cuộc thi lí thú, bổ ích như: Câu lạc bộ toán, Thần đồng đất Việt, Phát hiện Trí tuệ Việt, ...

Sự năng động, nhiệt huyết của những người làm Toán Tuổi thơ đã được bạn đọc và lãnh đạo của các cấp, các ngành ghi nhận. Năm 2003, Toán Tuổi thơ đón nhận Bằng khen của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo. Năm 2006, tạp chí vinh dự đón nhận Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ. Bằng khen của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo. Năm 2007, Phó Chủ tịch nước Nguyễn Thị Doan đã gửi thư chúc mừng đến Hội đồng Biên tập và Tòa soạn Toán Tuổi thơ. Năm 2008, Tổng Bí thư Nông Đức Mạnh đã gặp gỡ cán bộ, nhân viên tạp chí. Trong 10 năm hoạt động, tạp chí cũng được nhận nhiều Bằng khen, Cờ thi đua của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Năm 2010, Tạp chí Toán Tuổi thơ tròn 10 tuổi cũng là năm đáng nhớ của Toán học Việt Nam khi GS. Ngô Bảo Châu vinh dự dành Giải thưởng Fields. Cũng như Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã từng gắn bó với GS. Ngô Bảo Châu khi còn là học sinh, Toán Tuổi thơ hi vọng sẽ góp một phần làm nên thành công của các bạn nhỏ trong tương lai, vì toán học là chìa khóa vàng để mở ra cánh cửa các môn khoa học khác. Hãy bắt đầu ngay bây giờ, từ cấp tiểu học với Toán Tuổi thơ.

Với các chuyên mục phong phú, Toán Tuổi thơ đã, đang và sẽ mãi là người bạn đồng hành của các bạn học sinh nhỏ tuổi và những người yêu Toán.

Để làm công tác viên tham gia vào các hoạt động của tạp chí, các bạn liên lạc theo địa chỉ:

TẠP CHÍ TOÁN TUỔI THƠ

Tầng 5, số 361 Trường Chinh, Thanh Xuân, Hà Nội.

Điện thoại: 04.35682701; Fax: 04. 35682702;

Email: toantt@tpt.vn; Website: www.toantuoitho.vn.

TOÁN HỌC

Số 400 (10-2010)

10-2010



Tap chi TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 400 (10.2010)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT Biên tập: 04.35121607

ĐT - Fax Phát hành, Trĩ sự : 04.35121606

Email: tapchitoanhoc_tuoiitre@yahoo.com.vn

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG

TS. NGUYỄN VĂN VỌNG

GS. ĐOÀN QUỲNH

PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục Việt Nam

NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm
Tổng biên tập NXB Giáo dục Việt Nam

TS. NGUYỄN QUỲ THAO

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Tổng biên tập : TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Thư kí Tòa soạn : ThS. HỒ QUANG VINH

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, ThS. NGUYỄN ANH DŨNG, TS. TRẦN NAM DŨNG, TS. NGUYỄN MINH ĐỨC, TS. NGUYỄN MINH HÀ, TS. NGUYỄN VIỆT HẢI, PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN, ThS. PHẠM VĂN HÙNG, PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT, GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, TS. TRẦN HỮU NAM, PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PGS. TS. TẠ DUY PHỤNG, ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH, GS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG, PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI, ThS. VŨ KIM THỦY, PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY, GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

- 1 Thư của Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo NGUYỄN PGS. TS Trần Quang Quý.
- 2 Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary School
Phan Mạnh Hà – Tính giá trị của biểu thức nhiều biến có điều kiện.
- 4 BITEK – Thương hiệu nổi tiếng Quốc gia năm 2010.
- 5 Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation
Phạm Văn Hùng – Một số chú ý khi giải hệ phương trình.
- 8 Thử sức trước kì thi - Đề số 1.
- 9 Phương pháp giải toán – Math Problem Solving
Kiều Đình Minh – Cách giải một dạng toán giới hạn dãy số đặc biệt.
- 12 Giải trí toán học – Math Recreation
- 13 Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum
Trần Đình Châu, Đặng Thu Thủy - Thiết kế bản đồ tư duy giúp học sinh tự học và tập vượt nghiên cứu toán học.
- 16 Đề ra kì này – Problems in This Issue
T1/400 ..., T12/400, L1/400, L2/400.
- 18 Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems
Giải các bài của số 396.
- 29 Cuộc thi Mừng Thăng Long – Hà Nội tròn 1000 tuổi.
Đáp án Để Đạt 3.
- 30 Danh sách các bạn đoạt giải.
- 31 10 năm tròn Toán Tuổi thơ ra số đầu tiên.

Biên tập : NGUYỄN THỊ THANH

Trĩ sự, phát hành : NGUYỄN KHOA ĐIỂM, VŨ ANH THƯ

Mĩ thuật : MINH THƠ

Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH