**HSG TOÁN 9 KHÁNH HÒA 2023-2024**

Thời gian làm bài : 150 phút

**Câu 1 (4,00 điểm):**

1. Rút gọn biểu thức 
2. Cho x y, là các số nguyên thỏa mãn đẳng thức 

Chứng minh rằng  là một số chính phương.

**Câu 2 (4,00 điểm):**

 1) Cho đa thức  với các hệ số nguyên thỏa mãn . Chứng minh rằng đa thức  không có nghiệm nguyên.

 2) Tìm 3 số nguyên tố sao cho tích của chúng gấp 5 lần tổng của chúng.

**Câu 3 (4,00 điểm):**

1. Giải phương trình 
2. Cho a, b là hai số thực lớn hơn 1 và thỏa mãn điều kiện . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Câu 4 (6,00 điểm):**

1) Cho tam giác , *I* là một điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Qua *I* vẽ đường thẳng *DE* song song với *AB*  và đường thẳng *IM* song song với *BC* . Tính giá trị của biểu thức .

2) Cho hình vuông *ABCD* có tâm *O*. Điểm *E* thay đổi trên cạnh *BC* (E khác B và C). Gọi F là giao điểm của tia AE và đường thẳng CD, gọi H là giao điểm của OE và BF .

a) Chứng minh rằng  không đổi.

b) Tìm vị trí của điểm E để diện tích tam giác HAD đạt giá trị lớn nhất.

**Câu 5 (2,00 điểm):**

Một tứ giác lồi có độ dài bốn cạnh đều là số tự nhiên sao cho tổng ba số bất kì trong chúng chia hết cho số còn lại. Chứng minh rằng tứ giác đó có ít nhất hai cạnh bằng nhau.

**ĐÁP ÁN**

**Câu 1 (4,00 điểm):**

1. Ta có :



Suy ra 

 

Vậy 

1. Với điều kiện , ta có:





Do x, y là các số nguyên nên x+y là số nguyên.

Vậy xy +1 là một số chính phương.

**Câu 2 (4,00 điểm):**

1. +) Giả sử đa thức  có nghiệm nguyên a .

Khi đó  với  là đa thức có hệ số nguyên.

Suy ra  và 

+) Ta có: 



+) Do 3 − a và 4 − a là hai số nguyên liên tiếp nên  là số chẵn. Do đó VT của (2) là số chẵn, nhưng VP của (2) là số lẻ, điều này mâu thuẫn.

Vậy giả sử trên sai. Suy ra đa thức  không có nghiệm nguyên.

1. +) Gọi 3 số nguyên tố cần tìm là a, b, c. Khi đó, ta có:



+) Vì a, b, c có vai trò bình đẳng nên không mất tính tổng quát, giả sử  (vì )

+) Khi đó: 

 

Suy ra  hoặc   hoặc 

  hoặc  (loại vì ) 

+) Do vai trò của a, b, c là bình đẳng nên ba số cần tìm là 2; 5; 7

 Vậy ba số cần tìm là 2; 5; 7

**Câu 3 (4,00 điểm):**

1. +) ĐK: 

+) Ta có: 

 

+) Ta có: (\*) 

 

 

+) Với  (thỏa ĐK)

+) Với  thì VT của (\*\*) luôn dương nên (\*\*) vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình là 

1. +) Do ,  nên , 

+) Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương, ta có:

  (1)

+) Ta lại có:  (2)

  (3)

 (4)

 Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra

 

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi 

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là 32 và đạt được khi 

**Câu 4 (6,00 điểm):**

1. 

+) Gọi N là giao điểm của IM và AB .

+) Xét ∆ABC, ta có: MN // BC

  (vì tứ giác BNIE là hình bình hành)

Suy ra: 

+) Ta lại có: DE // AB . Suy ra 



 Vậy 

1. 
2. + Ta có:

 

 + Ta lại có: 

 Suy ra 

 

  (không đổi vì AB không đổi)

 Vậy  không đổi

1. +) Gọi H ' là chân đường vuông góc hạ từ C xuống BF

+) Xét ∆BCF vuông tại C, ta có: 

 Xét ∆BCD vuông tại C, ta có: 

 Suy ra  hay 

+) Xét ∆BHO' và ∆BDF, ta có:  chung và  (cmt)

 Suy ra ∆BHO ᔕ ∆BDF ⇒ 

 Suy ra HO' là tia phân giác của  (1)

+) Ta có: ∆BHC ᔕ ∆BCF' (vì  chung và ).

 , mà  (vì AB // CF)

 Suy ra  là tia phân giác của  (2)

Từ (1) và (2) suy ra H, O, E ' thẳng hàng .

Do đó H ≡ H’. Suy ra CH ⊥ BF.

+) Gọi M là trung điểm của BC.

 Khi đó (vì ∆BHC vuông tại H)

+) Ta có:

 

 

Dấu “=” xảy ra khi thẳng hàng

⇔ (vì H, O, E thẳng hàng).

Vậy để diện tích tam giác HAD đạt giá trị lớn nhất thì E là trung điểm của BC.

**Câu 5 (2,00 điểm):**

+) Gọi độ dài các cạnh của tứ giác là  

+) Giả sử không có 2 cạnh nào của tứ giác bằng nhau.

+) Không mất tính tổng quát, giả sử  (\*)

+) Do tứ giác lồi nên 

 ⇒  (\*\*)

+) Từ giả thiết bài toán suy ra  chia hết cho các số .

Kết hợp với (\*\*), ta có:  (1)

+) Đặt  với  (2)

  với  (3)

Do  

Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta có: 

mà  (vì )

Suy ra 

⇔  mâu thuẫn (\*)

Vậy tứ giác có ít nhất 2 cạnh bằng nhau.