**Bài 9.** Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện 

Xét hàm số:  với 

Ta có    

Lập bảng biến thiên cho ta . Từ đó suy ra



Bây giờ ta sẽ chứng minh 

Thật vậy 

Ta đặt    Khi đó ta có được  (luôn đúng). Từ đó suy ra  là nghiệm duy nhất của phương trình.

**- Nhận xét.** Có thể nói, đây là một làn gió mới trong tư duy khi giải phương trình kết hợp hàm số, ý tưởng đầu là đánh giá sao cho càng chặt càng tốt biểu thức vế phải, nhưng nếu sử dụng bất đẳng thức BCS thì sẽ lệch dấu bằng, nhưng nhận thấy  nên việc khảo sát hàm số ở mẫu thức là điều ta có thể làm. Chính vì thế, nhiều lúc đánh giá càng chặt lại làm bài toán càng khó!

**Bài tập tương tự.**

1) Giải phương trình 

2) Giải phương trình 

3) Giải phương trình 

**Bài 10.** Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện  Ta xét hai trường hợp

Trường hợp 

Do  nên ta có 

Từ đây suy ra 

Tuy nhiên, ta lại có 

Do đó  

Như vậy, để phương trình đã cho thỏa mãn thì trước tiên ta phải có , tức 

Thử lại, ta nhận thấy  là một nghiệm của phương trình.

Trường hợp  Do  nên ta có  Tuy nhiên ta lại thấy rằng   nên từ đây ta cũng suy ra

 

Như vậy, để phương trình đã cho thỏa mãn thì trước tiên ta phải có  tức 

Thử lại, ta nhận thấy  một nghiệm của phương trình.

Vậy   là hai nghiệm của phương trình đã cho.

**- Bình luận.** Khi đọc và suy ngẫm lời giải của bài toán trên, các ban chắc hẳn nhận ra nét tinh ý rất hay của người giải. Với những đánh giá tưởng chừng nhỏ nhưng hiệu quả của nó lại giúp ta

 Có những ý tưởng sáng trong. Nét then chốt của bài toán đó là hai đánh giá 

Để có hai bất đẳng thức trên, chúng ta nên có những nhận xét nhỏ ban đầu rằng:

- Phương trình có hai nghiệm   nên 

- Nếu  thì phương trình có nghiệm

Ta cần chọn  sao cho  

- Nếu  thì phương trình có nghiệm , đến đây ta dễ đánh giá hơn vì   

**Bài 11.** Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện 

Thật ra, nét tinh ý của bài toán chính là hai nhận xét:

 với mọi 

 với mọi 

Ta chứng minh nhận xét thứ nhất  với mọi 

Thật vậy, bình phương hai vế của  ta được



Mặt khác, dễ thấy rằng  cho nên ta cần chứng minh  

Điều này luôn đúng, suy ra ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét thứ  ta chứng minh hoàn toàn tương tự. Từ đó suy ra  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 

Vậy  là nghiệm của phương trình đã cho.

**- Nhận xét.** Có thể thấy bài toán xuất phát từ ý tưởng của những đánh giá dạng  . Những lớp bài như thế không nhiều nhưng lời giải đẹp và tự nhiên. Từ lời giải trên, ta rút ra được bất đẳng thức khá thú vị:  

Ngoài ra, lớp căn thức của đề bài cho ta nhớ đến một bổ đề bất đẳng thức nhỏ, có nhiều ứng dụng “Cho  ta có ” từ đây, ta liên hệ đến sự thay đổi căn thức, có thể cho rnhững bài toán khá đẹp.

**Bài 12.** Giải phương trình  Nguyễn Duy Hồng

**Lời giải**

Điều kiện  

Áp dụng bất đẳng thức **Cauchuy – Schwarz** ta có:



Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cauchuy – Schwarz và kết hợp  ta có:



Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cauchuy – Schwarz và kết hợp  ta có:





Vậy phương trình tương đương với:

 

Tóm lại phương trình có nghiệm duy nhất 

**- Nhận xét.** Với cách chứng minh trên ta có thể tổng quát bài toán trên thành

   k chẵn.

**Bài tập tương tự.**

Giải phương trình 

**Bài 13.** Giải phương trình  Nguyễ Duy Hồng

**Lời giải**

Điều kiện 

Xét hàm số: 



Áp dụng bất đẳng thức trung bình lũy thừa ta có:



 

Mặt khác ta có: 

 

Mặt khác ta có:





 



Từ  và  ta có: 





Vậy hàm số  liên tục và đơn điệu tằng trên tập số thực 

Mặt khác ta có , vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

**- Nhận xét.** Lời giải trên nhắc đến bất đẳng thức trung bình lũy thừa, ta có thể hiểu ở đây là chứng minh    luôn đúng theo BCS.

**Bài 14.** Giải phương trình  Nguyễn Duy Hồng

**Lời giải**

Điều kiện  

Xét hàm số 



Mặt khác theo AM – GM ta có:

 

 

Mặt khác ta lại có:  

Từ ,  và  ta có: 



 

Vậy hàm số  liên tục và đơn điệu tăng trên tập số thực .

- Khi  thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn, vậy  không phải là nghiệm của phương trình.

- Khi  ta có , vậy phương trình  vô nghiệm.

- Khi  thay vào phương trình thấy đúng nghiệm, vậy  là một nghiệm của phương trình.

- Khi  thì ta có  vậy phương trình  vô nghiệm.

- Khi  thay vào phương trình thấy không thỏa mãn, vậy  không là nghiệm của phương trình.

Kết hợp với điều kiện  ta có  là nghiệm duy nhất của phương trình.

**- Nhận xét.** Lời giải trên dựa vào các đánh giá AM – GM và BCS rất đẹp, tuy nhiên cách nghĩ ra những đánh giá như thế không phải dễ. Nhận thấy  là một nghiệm của phương trình, ta có thể dùng phương pháp liên hợp và kết hợp bất đẳng thức để giải. Tuy nhiên, cách giải trên dài và gặp nhiều tính toán, nên chúng tôi không trình bày tại đây. Bạn đọc có thể thử sức với ý tưởng trên.

**Bài 15.** Giải phương trình 

**Lời giải 1**

Điều kiện . Phương trình đã cho tương đương với:



Xét 

Suy ra 

Ta sẽ chứng minh  với  Thật vậy

Vì  nên theo bất đẳng thức AM – GM và so sánh lũy thừa ta có



Như vậy ta chỉ cần chứng minh  

Bất đẳng thức  luôn đúng với  Do đó  nghịch biến trên 

Mặt khác  nên  là nghiệm duy nhất của phương trình.

**Lời giải 2**

Điều kiện  Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng:



Trường hợp 1: 

Ta có  nên  và 

Nên 

Ta chứng minh 

Bất đẳng thức này tương đương với   (đúng, do ).

Cộng theo vế các bất đẳng thức   và  ta được  đẳng thức xảy ra 

Trường hợp 2: 

Ta có  nên  và  nên 

Ta tiếp tục chứng minh 

Bất đẳng thức này tương đương với   (đúng, do ).

Cộng theo vế các bất đẳng thức   và  ta được  đẳng thức xảy ra  Vậy  là nghiệm duy nhất của phương trình.

**Lời giải 3**

Tập xác định: 

Khi , thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn, vậy  không là nghiệm của phương trình.

Kh , thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn, vậy  không là nghiệm của phương trình. Khi 

Xét hàm số 

Ta có:



 

Mặt khác theo AM – GM ta có:





Cộng các vế của các bất đẳng thức  và  lại ta được:



Mặt khác ta lại có: 

Vậy ta có:  





Vậy hàm số  nghịch biến trên tập , mặt khác ta thấy , vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

**- Bình luận.** Loạt các bài toán trên cho chúng ta thấy sựu táo bạo và tinh tế trong việc sử dụng các bất đẳng thức kinh điển trong việc chứng minh đạo hàm không đổi dấu.

**Bài 16.** Giải phương trình 

**Lời giải**

**- Nhận xét.** Ta nhận thấy nếu thay x bởi  thì phương trình không thay đổi. Suy ra ta chỉ cần xét 

Ta lại chú ý đến hằng đẳng thức đã nhắc đến ở các ví dụ trước là

 đẳng thức xảy ra kh 

Đến đây ta chỉ cần chứng minh  với 

Thật vậy, bình phương hai vế lên ta được

 

Đẳng thức xảy ra khi . Vậy  là nghiệm của phương trình đã cho.

**Bài 17.** Giải phương trình  Nguyễn Duy Hồng

**Lời giải**

Nhận thấy nếu  là nghiệm thì  cũng là nghiệm, vậy ta chỉ cần xét phương trình trên tập số thực 

Xét hàm số:  trên tập số thực 





Ta đi chứng minh: 

Thật vậy khi  ta có:

 

 



 



với 

Vậy hàm số:  nghịch biến với mọi 

Phương trình tương đương với:   

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 