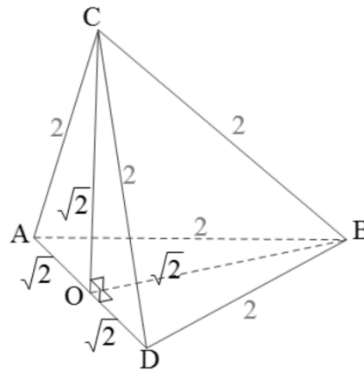


Dạng 2.2 Khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

Câu 1. (THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019) Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt ABC và BCD là các tam giác đều cạnh bằng 2; hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) vuông góc với nhau. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

- A.** $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Gọi O là trung điểm AD .

$$\begin{cases} (ABD) \perp (ACD) \\ (ABD) \cap (ACD) = AD \Rightarrow CO \perp (ABD) \\ CO \perp AD \end{cases}$$

ΔCOB vuông cân tại O và $CB = 2$ suy ra $OB = OC = \sqrt{2}$.

$$OD = OA = \sqrt{AC^2 - OC^2} = \sqrt{2}.$$

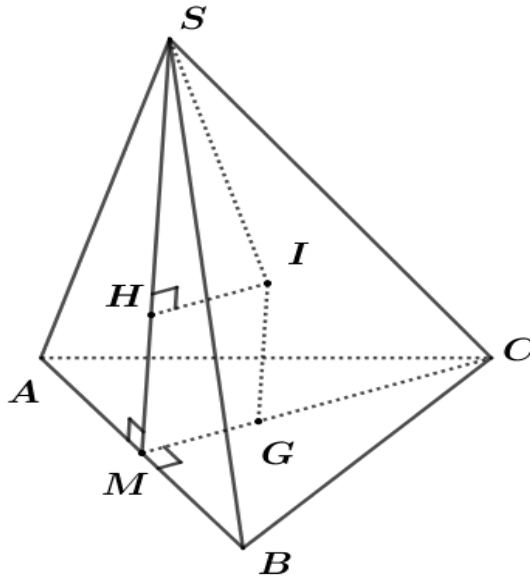
Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Câu 2. (THPT Nguyễn Khuyến 2019) Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- A.** $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$ **B.** $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$ **C.** $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ **D.** $V = \frac{5\pi}{3}$

Lời giải

Chọn B



Gọi M, G, H lần lượt là trung điểm của AB , trọng tâm $\triangle ABC, \triangle SAB$.

Vì $\triangle ABC, \triangle SAB$ là hai tam giác đều nên $CM \perp AB; SM \perp AB$.

$$\text{Mà } \begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ CM \perp AB; SM \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CM \perp (SAB) \\ SM \perp (ABC) \end{cases}$$

Trong (SMC) từ G, H lần lượt kẻ các đường thẳng song song với SM, MC và cắt nhau tại I . Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

Ta có

$$\begin{aligned} SI^2 &= SH^2 + HI^2 = SH^2 + MG^2 = \left(\frac{2}{3}SM\right)^2 + \left(\frac{1}{3}SM\right)^2 \\ &= \frac{5}{9}SM^2 = \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{12} \\ \Rightarrow V &= \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot SI^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\sqrt{\frac{5}{12}}\right)^3 = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54} \end{aligned}$$

(Với V là thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$)

Câu 3. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang cân, $AB = 2a$, $CD = a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

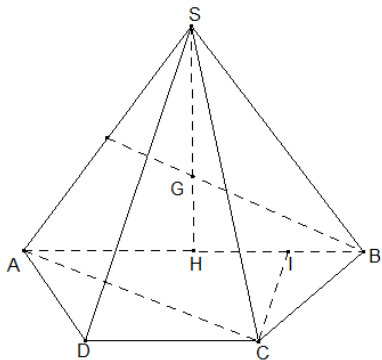
B. $R = a$

C. $R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

D. $R = \frac{2a}{3}$

Lời giải

Chọn C



Do AB và CD không bằng nhau nên hai đáy của hình thang là AB và CD . Gọi H là trung điểm của AB . Khi đó SH vuông góc với AB nên SH vuông góc với $(ABCD)$.

Gọi I là chân đường cao của hình thang $ABCD$ từ đỉnh C của hình thang $ABCD$.

$$\text{Ta có } BI = \frac{AB - CD}{2} = \frac{a}{2}$$

Do $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên $BC = a$. Từ đó ta có tam giác ABC vuông tại C .

Do đó SH chính là trục của tam giác ABC .

Mặt khác do tam giác SAB đều nên tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ chính là trọng tâm G của tam giác SAB .

$$\text{Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } S.ABC \text{ là } R = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Câu 4. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ theo a .

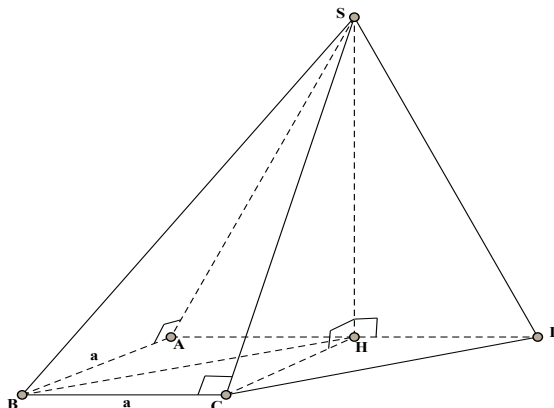
A. $6\pi a^2$.

B. $10\pi a^2$.

C. $3\pi a^2$.

D. $5\pi a^2$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AD . Tam giác SAD đều và $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có $AH = a$, $SH = a\sqrt{3}$ và tứ giác $ABCH$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow BH = a\sqrt{2}$.

Mặt khác $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp S \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp SA \text{ hay } \widehat{SAB} = 90^\circ \quad (1).$

Chứng minh tương tự ta có $BC \perp SC \text{ hay } \widehat{SCB} = 90^\circ \quad (2).$

Từ (1) và (2) ta thấy hai đỉnh A và C của hình chóp $S.ABC$ cùng nhìn SB dưới một góc vuông. Do đó bốn điểm S, A, B, C cùng nằm trên mặt cầu đường kính SB .

Xét tam giác vuông SHB , ta có $SB = \sqrt{BH^2 + SH^2} = a\sqrt{5}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S = 4\pi \left(\frac{SB}{2}\right)^2 = 5\pi a^2$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a, \widehat{ACB} = 30^\circ$. Biết SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC) . Tính diện tích mặt cầu S_{mc} ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

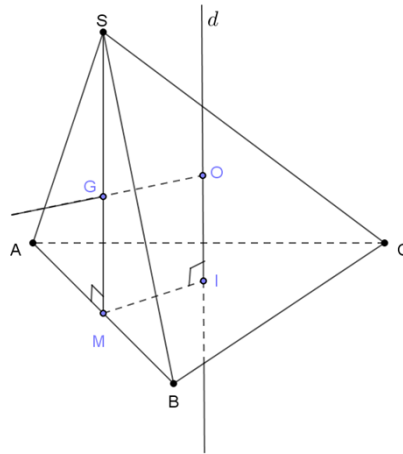
A. $S_{mc} = \frac{7\pi a^2}{3}$.

B. $S_{mc} = \frac{13\pi a^2}{3}$.

C. $S_{mc} = \frac{7\pi a^2}{12}$.

D. $S_{mc} = 4\pi a^2$.

Lời giải



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow IA = IB = IC = R = \frac{AB}{2 \sin 30^\circ} = a$.

Dựng đường thẳng d qua I và vuông góc với (ABC) .

Gọi M là trung điểm của AB .

Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow GA = GB = GC$

Kẻ đường thẳng đi qua G và vuông góc với (SAB) cắt d tại $O \Rightarrow OA = OB = OC = OS$.

Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bán kính là $r = OA = OB = OC = OS$.

Khi đó $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow GM = \frac{1}{3}SM = \frac{a\sqrt{3}}{6} = OI$.

$r^2 = OB^2 = OI^2 + IB^2 = \frac{a^2}{12} + a^2 = \frac{13a^2}{12}$.

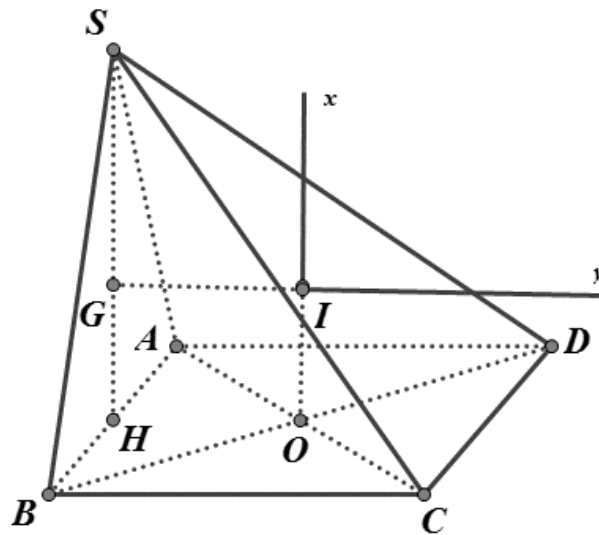
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S_{mc} = 4.\pi.r^2 = 4\pi \frac{13a^2}{12} = \frac{13\pi a^2}{3}$.

Câu 6. (KTNL GV Bắc Giang 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính diện tích S của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

- A. $S = 3\pi a^2$. B. $S = \frac{4\pi a^2}{3}$. C. $S = \frac{7\pi a^2}{3}$. D. $S = 7\pi a^2$.

Lời giải

Chọn C.



+) Xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Gọi SH là đường cao của tam giác SAB . Vì SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy nên SH là đường cao của hình chóp $S.ABCD$.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, từ O dựng $Ox \perp (ABCD)$.

Từ trọng tâm G của tam giác SAB dựng $Gy \perp (SAB)$.

Gọi $I = Ox \cap Gy$. Vậy I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

+) Chứng minh I là tâm mặt cầu cần tìm

Vì $I \in Ox$, mà $Ox \perp (ABCD)$, O là tâm hình vuông $ABCD$ nên I cách đều A, B, C, D (1).

Mặt khác G là trọng tâm của tam giác đều SAB , $I \in Gy$, mà $Gy \perp (SAB)$ nên I cách đều S, A, B (2).

Từ (1) và (2) suy ra I cách đều S, A, B, C , **D. Nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$, bán kính $R=IB$**

+) Tìm độ dài bán kính mặt cầu

Vì $OI \perp (ABCD)$, $SH \perp (ABCD)$ nên $OI \parallel GH$ vì $G \in SH$ (3)

Mặt khác $Gy \perp (SAB)$, $I \in Gy$ mà $OH \perp (SAB)$ (vì $OH \perp AB, OH \perp SH$) nên $GI \parallel OH$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $GHOI$ là hình bình hành $OI = GH = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Vì $OI \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp OB \Rightarrow \triangle BOI$ vuông tại B

Xét $\triangle BOI$ vuông tại B ta có

$$IB^2 = IO^2 + OB^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}a^2 \Rightarrow IB = \frac{\sqrt{21}}{6}a = R.$$

$$\Rightarrow \text{Diện tích mặt cầu là } S = 4\pi R^2 = \frac{7}{3}\pi a^2.$$

Câu 7. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}$.

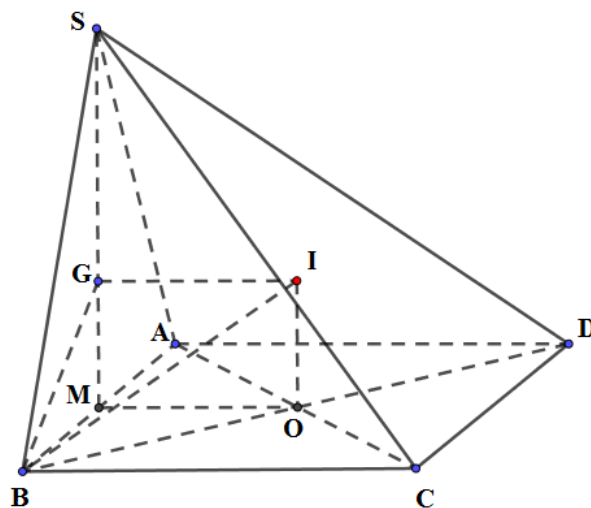
B. $V = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{18}$.

C. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{81}$.

D. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$.

Lời giải

Chọn A



***) Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$:**

Gọi G là trọng tâm tam giác SAB , O là tâm của hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của AB .

Do $\triangle SAB$ đều $\Rightarrow SM \perp AB$

Mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp OM$

OM là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow OM \parallel AC \Rightarrow OM \perp AB$ (do $AC \perp AB$)

$\Rightarrow OM \perp (SAB)$

Dựng các đường thẳng qua G, O lần lượt song song với MO, SM , hai đường thẳng này cắt nhau tại I

Ta có: $IO // SM, SM \perp (ABCD) \Rightarrow IO \perp (ABCD)$, mà O là tâm của hình vuông $ABCD$

$$\Rightarrow IA = IB = IC = ID \quad (1)$$

Ta có: $GI // OM, MO \perp (SAB) \Rightarrow GI \perp (SAB)$, mà G là trọng tâm tam giác đều SAB

$$\Rightarrow IS = IA = IB \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra: I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

***) Tính bán kính, thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$:**

Ta có: $OM = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2} \Rightarrow GI = OM = \frac{a}{2}$ (do tứ giác $OMIG$ là hình chữ nhật)

$$\Delta SAB \text{ đều cạnh bằng } a \text{ có } G \text{ là trọng tâm} \Rightarrow BG = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Do $GI \perp (SAB) \Rightarrow GI \perp BG \Rightarrow \Delta BGI$ vuông tại G

$$\Rightarrow IB = \sqrt{IG^2 + GB^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{7}{12}}$$

Bán kính khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là: $R = IB = a\sqrt{\frac{7}{12}}$

Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(a\sqrt{\frac{7}{12}}\right)^3 = \frac{7\sqrt{21}\pi a^3}{54}.$$

Câu 8. (Sở Phú Thọ 2019) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BC = AC = BD = 2a, AD = a\sqrt{3}$; hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{64\pi a^2}{27}$

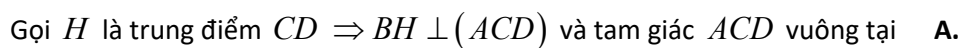
B. $\frac{4\pi a^2}{27}$

C. $\frac{16\pi a^2}{9}$

D. $\frac{64\pi a^2}{9}$

Lời giải

Chọn D



Trong mặt phẳng (BHA) kẻ đường trung trực Δ của cạnh BA và gọi $I = \Delta \cap SH$

Khi đó ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Ta có

Suy ra bán kính mặt cầu là $R = BI = \frac{4}{3}a$.

Câu 9. (THPT Nghĩa Hưng ND- 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết rằng $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$ và $\widehat{ASB} = 60^\circ$. Tính diện tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

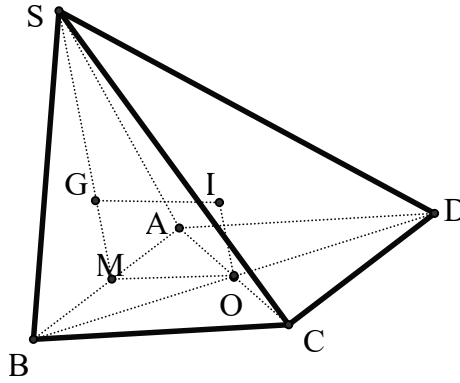
D. $S = \frac{11\pi a^2}{3}$.

Lời giải

D. $\frac{a\sqrt{13}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của đáy, M là trung điểm của AB và G là tâm của tam giác đều SAB .

Gọi d, Δ lần lượt là trục của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ và tam giác SAB .

Do $(SAB) \perp (ABCD), (SAB) \cap (ABCD) = AB, SM \perp AB$ nên $SM \perp (ABCD)$.

Mặt khác $d \perp (ABCD)$ nên $d \parallel SM$ hay $\Delta \subset mp(d, SM)$, Δ và d cắt nhau tại I .

Ta có I cách đều S, A, B, C, D nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Tứ giác $GMOI$ có $GM \perp MO, IG \perp GM, SM \parallel IO$ nên $GMOI$ là hình chữ nhật.

$$SM = a\sqrt{3}, GM = \frac{1}{3}SM = \frac{a\sqrt{3}}{3}, AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là } R = IA = \sqrt{IO^2 + AO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{5a^2}{4}} = \frac{\sqrt{57}a}{6}.$$

Câu 11. (Nam Định 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{5a^2\pi}{12}$.

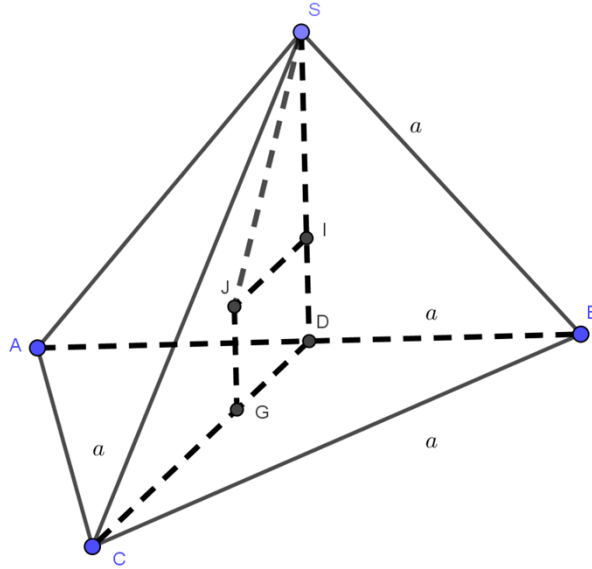
B. $\frac{5a^2\pi}{3}$.

C. $\frac{5a^2}{3}$.

D. $\frac{5a^2}{12}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi G, I là lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và SAB .

Trục của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và SAB cắt nhau tại J nên J là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, bán kính mặt cầu là $R = SJ$

$$\text{Ta có } IJ = GD = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ và } SI = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ nên } R = SJ = \sqrt{SI^2 + IJ^2} = \frac{\sqrt{15}a}{6}$$

$$\text{Vậy Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } S.ABC \text{ là } S = 4\pi R^2 = \frac{5\pi a^2}{3}$$

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

A. $6\pi a^2$.

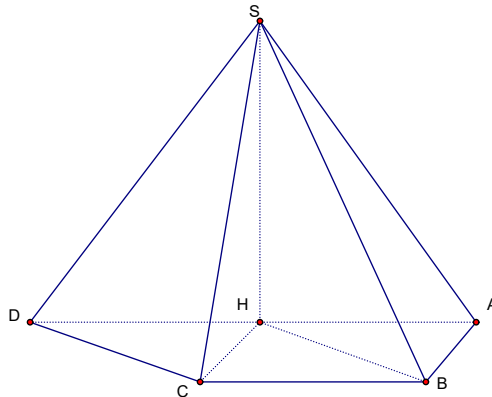
B. $10\pi a^2$.

C. $3\pi a^2$.

D. $5\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



$$\text{Gọi } H \text{ là trung điểm } AD \text{ thì } SH \perp AD \text{ và } SH = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \text{ (vì } \triangle SAD \text{ đều).}$$

Suy ra $SH \perp (ABCD)$ (vì (SAD) và $(ABCD)$ vuông góc nhau theo giao tuyến AD)

Ta có thể xem hình chóp $S.ABC$ là một phần của hình hộp chữ nhật có một đáy là hình vuông $ABCH$ và một cạnh bên là SH (lúc này SB là một đường chéo của hình hộp).

$$\text{Do đó bán kính mặt cầu là } R = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2 + SH^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Diện tích mặt cầu cần tìm là } S = 4\pi R^2 = 5\pi a^2.$$

Câu 13. (Chuyên Thái Bình 2022) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{\pi a^3}{3}$.

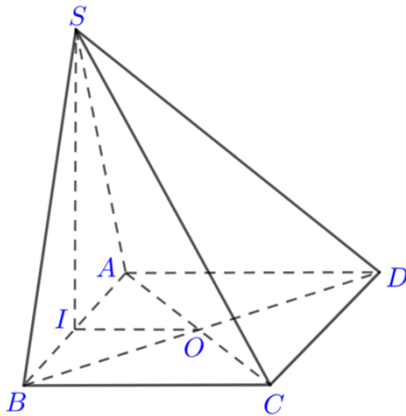
B. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

C. $\frac{\pi a^3}{6}$.

D. $\frac{11\sqrt{11}\pi a^3}{162}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của AB .

Do tam giác SAB vuông tại S nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB .

Gọi $O = AC \cap BD$ nên $OA = OB = OC = OD$ (1).

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, ta có:

$$\begin{cases} OI \parallel AD \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow OI \perp AB.$$

Mặt khác, ta lại có:

$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow OI \perp (SAB) \\ OI \subset (ABCD); OI \perp AB \end{cases}$$

Công thức tính nhanh: Tứ diện đều $ABCD$ có: độ dài cạnh bên $AB = AC = AD = x$ và chiều cao h . Khi đó, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $R = \frac{x^2}{2h}$.

Câu 2. (Đề Tham Khảo 2017) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$, cạnh bên bằng $5a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \sqrt{3}a$.

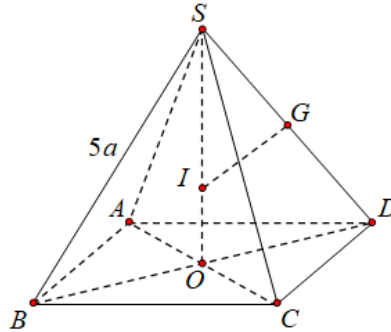
B. $R = \sqrt{2}a$.

C. $R = \frac{25a}{8}$.

D. $R = 2a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, G là trung điểm SD , $GI \perp SD, I \in SO$.

Ta có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$ nên $BD = 3\sqrt{2}a \cdot \sqrt{2} = 6a$, $OD = 3a$.

Xét $\triangle SOD$ vuông tại O ta có: $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = 4a$

Ta có $\triangle SOD \sim \triangle SGI$, suy ra $\frac{SO}{SG} = \frac{SD}{SI} \Rightarrow 4a \cdot R = \frac{1}{2}(5a)^2 \Rightarrow R = \frac{25a}{8}$

Câu 3. Hình chóp đều $S.ABCD$ tất cả các cạnh bằng a . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

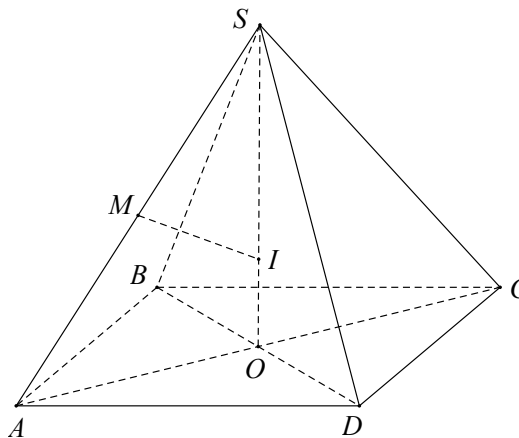
A. $4\pi a^2$.

B. πa^2 .

C. $\sqrt{2}\pi a^2$

D. $2\pi a^2$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$; M là trung điểm SA .

Trong mặt phẳng (SAC) gọi I là giao điểm của trung trực đoạn SA với SO .

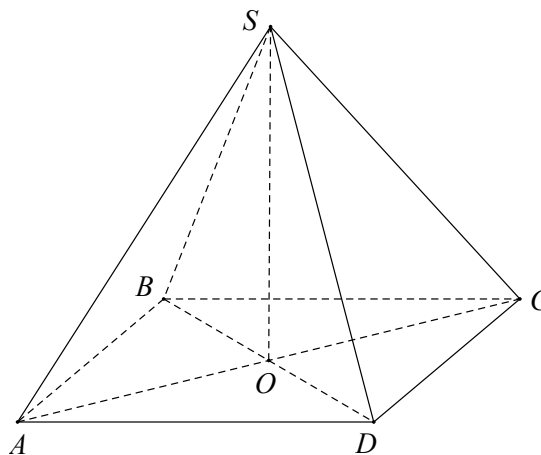
Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Tam giác SAO đồng dạng với tam giác SIM .

$$\Rightarrow \frac{SI}{SA} = \frac{SM}{AO} \Rightarrow R = SI = \frac{SM \cdot SA}{AO} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $S = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 2\pi a^2$.

Cách 2:



Gọi $O = AC \cap BD$.

Vì $\triangle SBD = \triangle ABD$ nên $OS = OA$.

Mà $OA = OB = OC = OD \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Bán kính mặt cầu $R = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $S = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 2\pi a^2$.

Câu 4. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Cho hình chóp tứ giác đều có góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Biết rằng mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính $R = a\sqrt{3}$. Tính độ dài cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều nói trên.

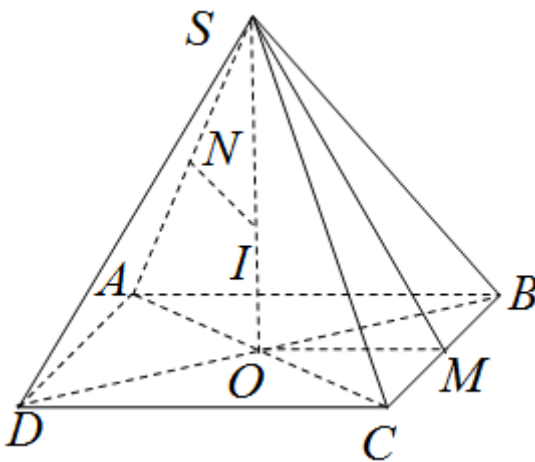
A. $\frac{12}{5}a$

B. $2a$

C. $\frac{3}{2}a$

D. $\frac{9}{4}a$

Lời giải



Gọi các điểm như hình vẽ.

Ta có $SI = a\sqrt{3}$. Góc $SMO = 60^\circ$.

Gọi cạnh đáy bằng x thì $SO = OM \cdot \tan 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

$$SA = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$$

$$\triangle SNI \sim \triangle SOA \text{ nên } \frac{SN}{SI} = \frac{SO}{SA} \Leftrightarrow \frac{5x^2}{8} = \frac{3ax}{2} \Leftrightarrow x = \frac{12}{5}a (x > 0)$$

Câu 5. (Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $AB = a$, góc giữa mặt bên với mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính bán kính mặt cầu đi qua bốn đỉnh của hình chóp $S.ABC$

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

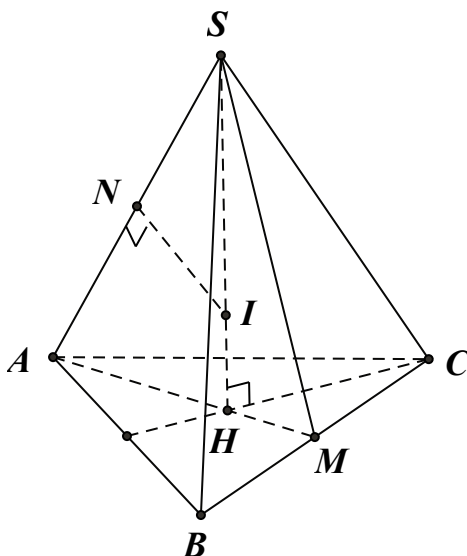
B. $\frac{7a}{12}$.

C. $\frac{7a}{16}$.

D. $\frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của BC , H là trọng tâm tam giác ABC

$$\text{Khi đó } SH \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{((SBC), (ABC))} = \widehat{SMA} = 60^\circ$$

Gọi N là trung điểm của SA , kẻ $NI \perp SA (I \in SH)$

Khi đó ta có $IS = IA = IB = IC$, nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

$$\Delta ABC \text{ đều cạnh } a \text{ nên } AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{3}}{6}, AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\tan \widehat{SMA} = \frac{SH}{HM} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2}a$$

$$SA^2 = SH^2 + AH^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3} = \frac{7a^2}{12}$$

$$\Delta SAH \sim \Delta SIN \Rightarrow \frac{SA}{SI} = \frac{SH}{SN} \Rightarrow SI = \frac{SA \cdot SN}{SH} = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{7a^2}{12 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}a} = \frac{7a}{12}.$$

Câu 6. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019) Cho hình chóp tứ giác đều có góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Biết rằng mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó có bán kính $R = a\sqrt{3}$. Tính độ dài cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều nói trên.

A. $\frac{12}{5}a$.

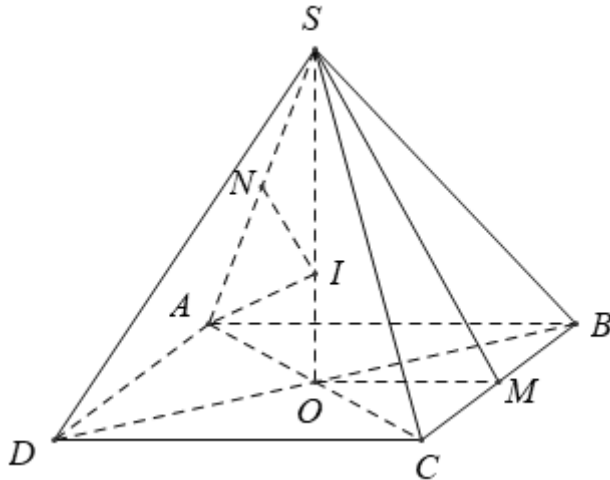
B. $2a$.

C. $\frac{3}{2}a$.

D. $\frac{9}{4}a$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow \widehat{((SBC), (ABCD))} = \widehat{SMO} = 60^\circ$.

Gọi N là trung điểm SA , dựng mp trung trực của SA , cắt SO tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

$$\Rightarrow R = IA = IS = a\sqrt{3}$$

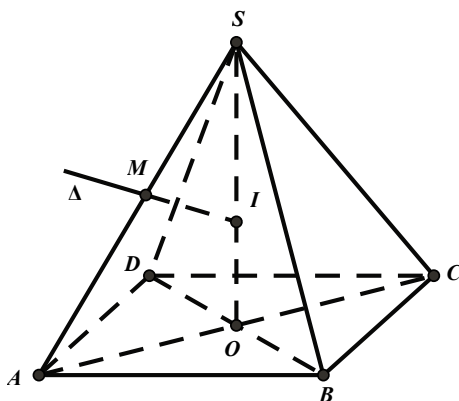
Gọi $AB = x$

$$\text{C6} \quad SO = OM \cdot \tan 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2}, \quad OA = \frac{1}{2}AC = \frac{x\sqrt{2}}{2}, \quad SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$$

$$\Delta SNI \text{ đồng dạng } \Delta SOA \Rightarrow SN \cdot SA = SO \cdot SI$$

$$\Leftrightarrow \frac{x\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{x\sqrt{5}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{12a}{5}.$$

Câu 7. (Gia Lai 2019) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60° (tham khảo hình vẽ). Tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.



A. $\frac{8\pi a^2}{3}.$

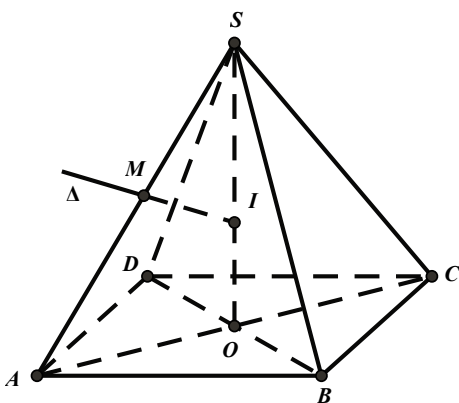
B. $\frac{5\pi a^2}{3}.$

C. $\frac{\sqrt{6}\pi a^2}{3}.$

D. $\frac{7\pi a^2}{3}.$

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD$. Khi đó SO là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

Gọi Δ là đường trung trực của cạnh SA và $I = \Delta \cap SO$ thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Theo giả thiết ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Mà góc giữa SA và mặt phẳng

$(ABCD)$ bằng 60° hay $\widehat{SAO} = 60^\circ \Rightarrow \tan 60^\circ = \frac{SO}{AO}, \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$

Ta có $\triangle SMI$ và $\triangle SOA$ đồng dạng nên $\frac{SM}{SO} = \frac{SI}{SA} \Rightarrow SI = \frac{SM.SA}{SO} \Rightarrow SI = \frac{SA^2}{2.SO}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R = IS = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

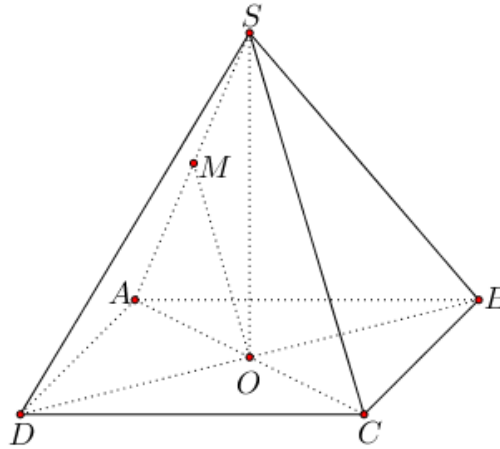
$$S_{xq} = 4\pi.R^2 = 4\pi.\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{8\pi a^2}{3}.$$

Câu 8. (Vũng Tàu - 2019) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

- A.** $2\pi a^2$. **B.** πa^2 . **C.** $\frac{2}{3}\pi a^2$. **D.** $\frac{1}{2}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm SA .

Ta có SO là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

Gọi (P) là mặt phẳng trung trực cạnh SA , (P) cắt SO tại I .

Ta có $IA = IS$.

Suy ra $IS = IA = IB = IC = ID$.

Mặt cầu ngoại tiếp $S.ABCD$ có tâm I , bán kính IS .

$$\text{Ta có } SM = \frac{a}{2}, SO = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ta có } \triangle SMI \sim \triangle SOA (\text{g.g}) \Rightarrow \frac{IS}{SA} = \frac{SM}{SO} \Leftrightarrow IS = \frac{SM.SA}{SO} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra $I \equiv O$.

$$\text{Vậy } S = 4\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi a^2.$$

Câu 9. Cho tứ diện đều có thể tích bằng $\frac{1}{3}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện

A. $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

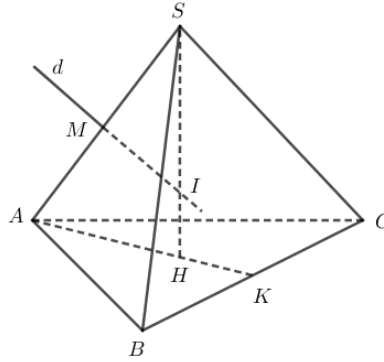
C. $R = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

D. $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử tứ diện đều là $S.ABC$ có cạnh a



Gọi K là trung điểm của BC , H là hình chiếu của S trên (ABC) .

Khi đó SH là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Ta có $AH = \frac{2}{3}AK = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AK \cdot BC \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Theo đề bài ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \sqrt{2}$.

Trong mặt phẳng (SAK) gọi d là đường trung trực của cạnh SA và $\begin{cases} d \cap SA = M \\ d \cap SH = I \end{cases}$ thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ có bán kính $R = SI$.

Trong tam giác SAH ta có: $SI \cdot SH = SM \cdot SA \Rightarrow SI = \frac{SM \cdot SA}{SH} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 10. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp.

A. $V = 3\pi a^3\sqrt{6}$.

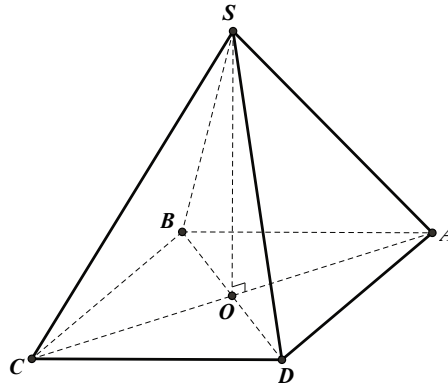
B. $V = \pi a^3\sqrt{6}$.

C. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}$.

D. $V = \frac{3\pi a^3\sqrt{6}}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là giao điểm của AC và BD ta có $OA = OB = OC = OD$

Ta lại có $\triangle ABC = \triangle ADC$ (c-c-c) $\Rightarrow BO = DO$ (trung tuyến tương ứng)

$\Rightarrow OA = OB = OC = OD = SO$

Suy ra O là tâm của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Ta có $r = OA = \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $V = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{6}}{2} \right)^3 = \pi a^3 \sqrt{6}$

Câu 11. (Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng 45° . Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{4\pi a^2}{3}$

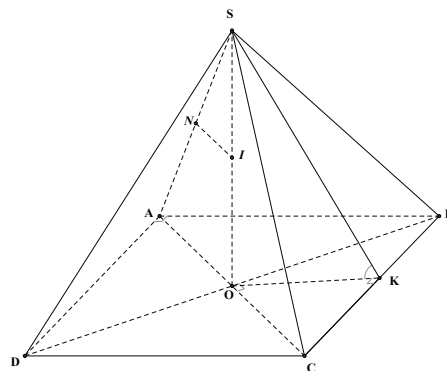
B. $\frac{3\pi a^2}{4}$

C. $\frac{2\pi a^2}{3}$

D. $\frac{9\pi a^2}{4}$

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của đáy suy ra SO là trục của đường tròn ngoại tiếp đáy đa giác.

Từ O dựng OK vuông góc với BC , suy ra K là trung điểm BC .

Xét tam giác SBC cân tại S có $SK \perp BC$

Từ đó ta có $\begin{cases} SK \perp BC \\ OK \perp BC \end{cases} \Rightarrow$ Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy $ABCD$ là góc $\widehat{SKO}$

Xét tam giác OBC vuông cân tại O có $OK = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$

Xét tam giác SKO vuông tại O có $SO = OK \cdot \tan(\widehat{SKO}) = \frac{a}{2} \cdot \tan 45^\circ = \frac{a}{2}$

Mặt khác $SA^2 = SO^2 + OA^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi N là trung điểm SA . Trong mặt phẳng (SAO) vẽ đường trung trực của cạnh SA cắt SO tại I , suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

Xét hai tam giác đồng dạng SNI và SOA có $\frac{SN}{SO} = \frac{SI}{SA}$

$$R = SI = \frac{SN \cdot SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a}{2}} = \frac{3a}{4}$$

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{9\pi a^2}{4}$

Câu 12. (THPT Võ Nguyên Giáp - Quảng Bình - 2022) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và các cạnh còn

lại đều bằng a . Biết rằng bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{a\sqrt{m}}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$; $m \leq 15$

. Tổng $T = m + n$ bằng

A. 15.

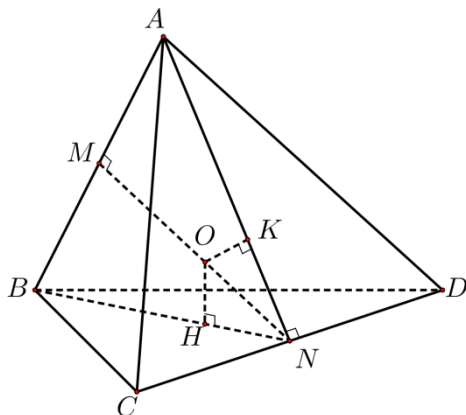
B. 17.

C. 19.

D. 21.

Lời giải

Chọn C



Gọi H, K lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, ACD . Do các tam giác BCD, ACD đều nên

$$AN = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow NH = NK = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \text{ suy ra } \triangle ABN \text{ đều} \Rightarrow MN = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}.$$

Do đó trục các tam giác BCD, ACD cắt nhau tại O trên đường cao NM của tam giác ABN và O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

$$\text{Ta có: } OH = NH \cdot \tan \widehat{ONH} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{6}.$$

$$\text{Từ đó: } R = OB = \sqrt{OH^2 + BH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{36} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{13}}{6} \Rightarrow m = 13, n = 6 \Rightarrow T = m + n = 19.$$

Dạng 2.4 Khối chóp khác

Câu 1. (Chuyên Quốc Học Huế 2019) Cho mặt cầu tâm O và tam giác ABC có ba đỉnh nằm trên mặt cầu với góc $BAC = 30^\circ$ và $BC = a$. Gọi S là điểm nằm trên mặt cầu, không thuộc mặt phẳng (ABC) và thỏa mãn $SA = SB = SC$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích V của khối cầu tâm O theo a .

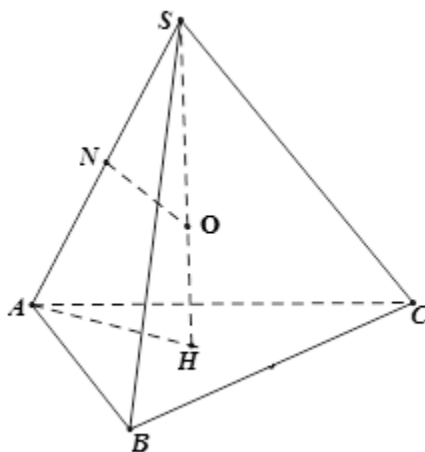
A. $V = \frac{\sqrt{3}}{9} \pi a^3$

B. $V = \frac{32\sqrt{3}}{27} \pi a^3$

C. $V = \frac{4\sqrt{3}}{27} \pi a^3$

D. $V = \frac{15\sqrt{3}}{27} \pi a^3$

Lời giải



Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , khi đó $SH \perp (ABC)$ và SH là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SAH} = 60^\circ$.

Gọi N là trung điểm SA , mặt phẳng trung trực của cạnh SA cắt SH tại O . Khi đó $OS = OA = OB = OC$ nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $AH = \frac{BC}{2 \sin 30^\circ} = a$. $SH = AH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$,
 $SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = 2a$.

Bán kính mặt cầu là $R = SO = \frac{SN \cdot SA}{SH} = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

Thể tích của khối cầu tâm O là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\sqrt{3}}{27}\pi a^3$.

Câu 2. (Chuyên Bắc Giang 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, các cạnh còn lại cùng bằng a . Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $R = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

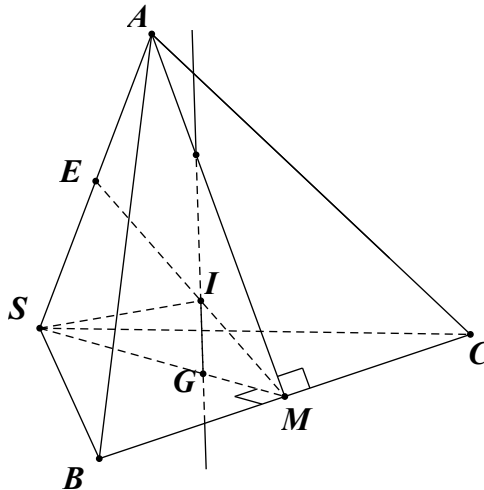
B. $R = \frac{a}{3}$

C. $R = \frac{a\sqrt{13}}{3}$

D. $R = \frac{a\sqrt{13}}{6}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $SM = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, do đó tam giác SAM đều.

Gọi M là trung điểm đoạn BC . Ta có (SAM) là mặt phẳng trung trực đoạn BC .

Gọi G là trọng tâm tam giác SBC , Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC .

Gọi E là trung điểm SA , ta có $I = \Delta \cap EM$, khi đó I là tâm đường mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$.

$$IG = GM \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{6}, SG = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Do đó } R = SI = \sqrt{IG^2 + GS^2} = \sqrt{\frac{a^2}{36} + \frac{a^2}{3}} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

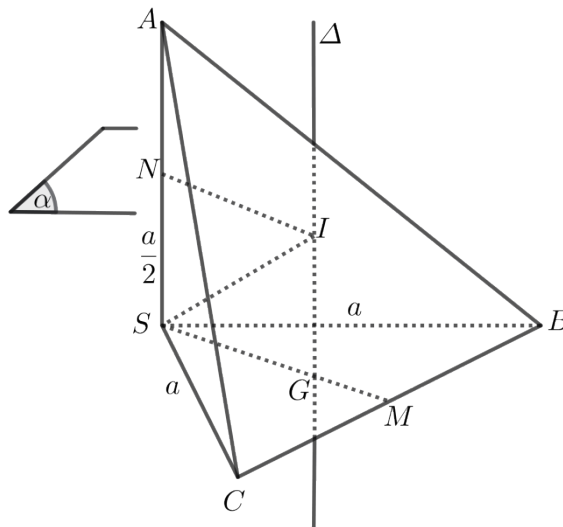
Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = \widehat{ASC} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

- A. $\frac{7\pi a^2}{18}$ B. $\frac{7\pi a^2}{12}$ C. $\frac{7\pi a^2}{3}$ D. $\frac{7\pi a^2}{6}$

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC); \Delta SBC \text{ có } SB = SC = a, \widehat{BSC} = 60^\circ \Rightarrow \Delta SBC \text{ đều.}$



Gọi M là trung điểm của BC .

Gọi G là trọng tâm của tam giác $SBC \Rightarrow G$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC .

+ dựng đường thẳng Δ đi qua G và vuông góc với (SBC) thì Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC .

+ Dựng mặt phẳng (α) là mặt phẳng trung trực của cạnh bên SA .

+ Gọi I là giao điểm của Δ và (α) . Khi đó:
$$\begin{cases} I \in \Delta \Rightarrow IB = IS = IC \\ I \in (\alpha) \Rightarrow IS = IA \end{cases} \Rightarrow IA = IS = IB = IC \text{ hay } I \text{ là tâm}$$
 mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.SBC$ và bán kính của mặt cầu này là $R = IS$.

Ta có tứ giác $SNIG$ là hình chữ nhật nên $IG = NS = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$.

Lại có: $SG = \frac{2}{3}, SM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét ΔSGI vuông tại G ta có: $R^2 = IS^2 = IG^2 + SG^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{21a^2}{36}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là: $S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{21a^2}{36} = \frac{7\pi a^2}{3}$.

Câu 4. (Sở Vĩnh Phúc 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC thỏa mãn $AC = 4AH$ và $SH = a$. Tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ (mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt bên của hình chóp)

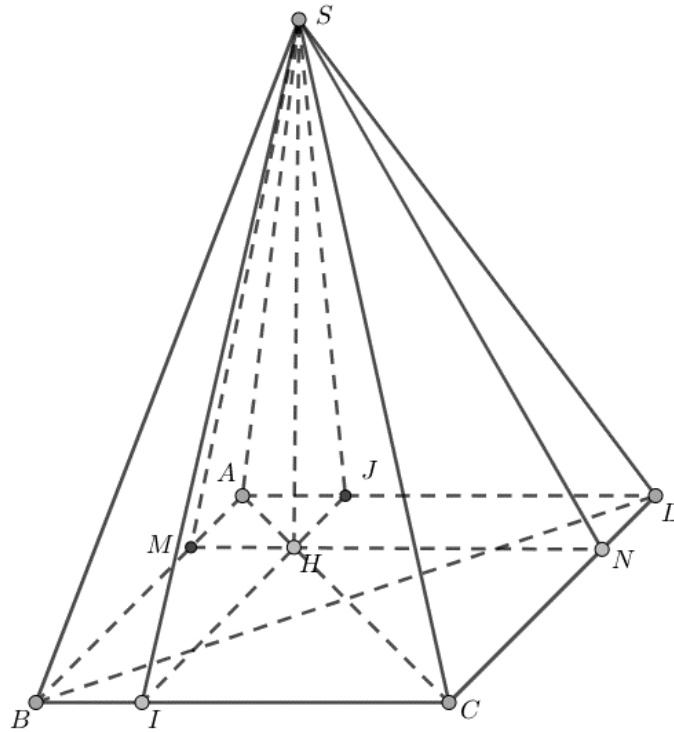
A. $\frac{4a}{9 + \sqrt{13}}$.

B. $\frac{4a}{5 + \sqrt{17}}$.

C. $\frac{4a}{5 + \sqrt{13}}$.

D. $\frac{4a}{9 + \sqrt{17}}$.

Lời giải



Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$ và r là bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Ta có $d(I, (ABCD)) = d(I, (SAD)) = d(I, (SAB)) = d(I, (SBC)) = d(I, (SCD)) = r$

Mặt khác, ta lại có: $V_{S.ABCD} = V_{I.ABCD} + V_{I.SAD} + V_{I.SAB} + V_{I.SBC} + V_{I.SCD}$ (*)

$$V_{S.ABCD} = r \cdot S_{ABCD} + r \cdot S_{\Delta SAD} + r \cdot S_{\Delta SAB} + r \cdot S_{\Delta SBC} + r \cdot S_{\Delta SCD} \quad (*)$$

$$\text{Suy ra } r = \frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD} + S_{\Delta SAD} + S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SBC} + S_{\Delta SCD}}.$$

Ta tính được thể tích khối tứ diện đều là $V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{3}$.

Từ H ta dựng đường thẳng song song với AB cắt BC, AD lần lượt tại I và J

Từ H ta dựng đường thẳng song song với AD cắt AB, CD lần lượt tại M và N .

Ta có $HI = HN = \frac{3a}{4}$ và $HM = HJ = \frac{a}{4}$

Suy ra $SI = SN = \frac{5a}{4}$ và $SM = SI = \frac{\sqrt{17}a}{4}$

Do đó $S_{\Delta SBC} = S_{\Delta SCD} = \frac{5a^2}{8}$ và $S_{\Delta SAD} = S_{\Delta SAB} = \frac{\sqrt{17}a^2}{8}$

Do đó, từ (*) ta suy ra: $r = \frac{9 - \sqrt{17}}{16}a = \frac{4a}{9 + \sqrt{17}}$.

Câu 5. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3, AD = 4$ và các cạnh bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

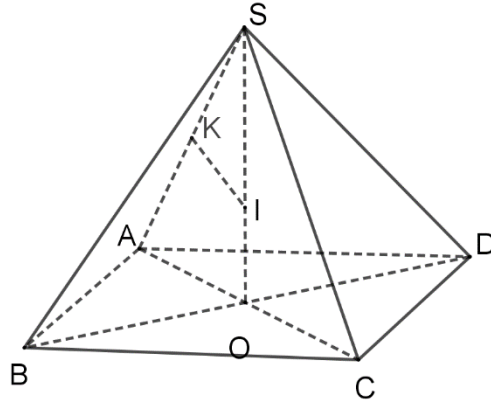
A. $V = \frac{250\sqrt{3}}{3}\pi$.

B. $V = \frac{125\sqrt{3}}{6}\pi$.

C. $V = \frac{50\sqrt{3}}{3}\pi$.

D. $V = \frac{500\sqrt{3}}{27}\pi$.

Lời giải



Gọi O là hình chiếu vuông góc của điểm S xuống mặt phẳng đáy. Ta có $\Delta SBO = \Delta SDO$ nên $SD = SB$. Chứng minh tương tự, $SC = SA$, hay O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$. Do tam giác SAC đều nên $SA = SC = AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5$. Trong mặt phẳng (SAC) kẻ đường trung trực của cạnh SA đi qua trung điểm K và cắt SO tại điểm I . Suy ra $R = SI = \frac{SA^2}{2 \cdot SO} = \frac{25}{5\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Suy ra,

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{5\sqrt{3}}{3} \right)^3 = \frac{500\sqrt{3}}{27}\pi.$$

Câu 6. (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều và tam giác SCD vuông cân tại S . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

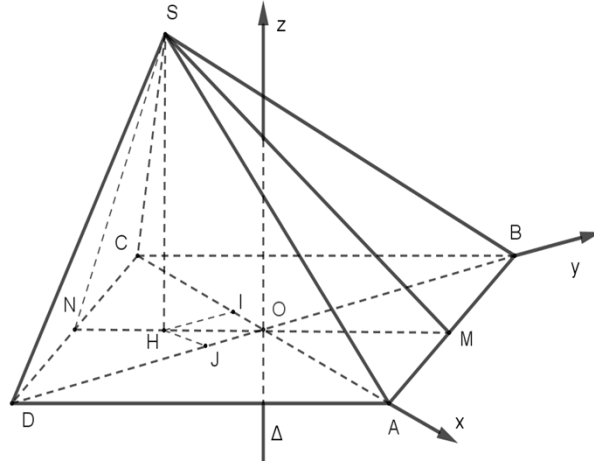
A. $\frac{7\pi a^2}{3}$.

B. $\frac{8\pi a^2}{3}$.

C. $\frac{5\pi a^2}{3}$.

D. πa^2 .

Lời giải



+ Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD . Kẻ $SH \perp MN$ tại $H \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

$$\Rightarrow SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; SN = \frac{a}{2}; MN = a \Rightarrow \triangle SMN \text{ vuông tại } S \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}, OH = \frac{a}{4}.$$

+ Gọi I, J là hình chiếu vuông góc của H lên $OC, OD \Rightarrow OI = OJ = \frac{a\sqrt{2}}{8}$.

+ Gọi $O = AC \cap BD$. Qua O dựng đường thẳng $\Delta \perp (ABCD)$.

Cách 1:

+ Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right) \in Ox$, $B\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right) \in Oy$ và $\Delta \equiv Oz$.

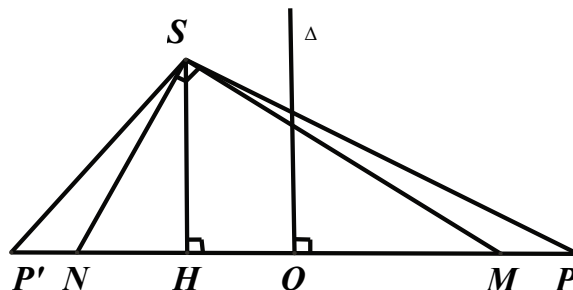
$$\Rightarrow C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), S\left(\frac{-a\sqrt{2}}{8}; \frac{-a\sqrt{2}}{8}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$$

+ Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là mặt cầu đi qua 4 điểm S, A, B, C

$$\text{Suy ra phương trình mặt cầu là: } x^2 + y^2 + z^2 + \frac{\sqrt{3}a}{3}z - \frac{a^2}{2} = 0.$$

$$\Rightarrow r = \frac{a\sqrt{21}}{6} \Rightarrow S = 4\pi r^2 = \frac{7\pi a^2}{3}.$$

Cách 2:



Trên 2 tia OM, ON lấy hai điểm P, P' sao cho $OP = OP' = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow PP' = a\sqrt{2}$.

$$+ SP = \sqrt{SH^2 + HP^2} = \frac{a\sqrt{3+\sqrt{2}}}{2}; SP' = \sqrt{SH^2 + HP'^2} = \frac{a\sqrt{3-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$+ \text{Trong tam giác } SPP' \text{ có: } S_{\Delta SPP'} = \frac{1}{2} PP' \cdot SH = \frac{SP \cdot SP' \cdot PP'}{4R} \Rightarrow R = \frac{SP \cdot SP'}{2 \cdot SH} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

$$\text{Vậy diện tích mặt cầu là: } S = 4\pi R^2 = \frac{7\pi a^2}{3}$$

Câu 7. (Chuyên Hưng Yên 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I cạnh $AB = 3a$, $BC = 4a$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của ID . Biết rằng SB tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° . Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

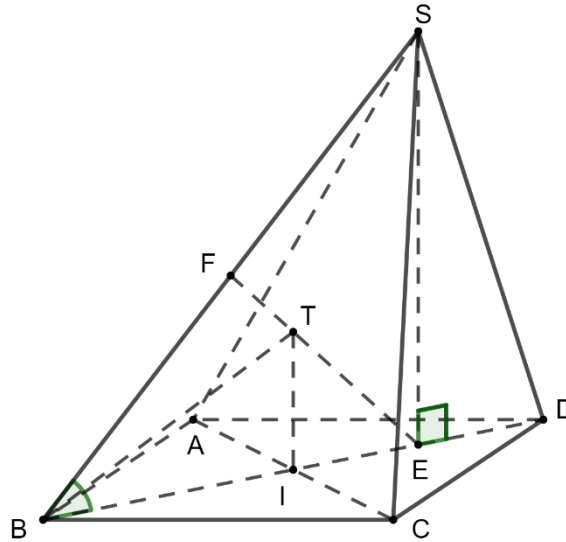
A. $\frac{25\pi}{2}a^2$.

B. $\frac{125\pi}{4}a^2$.

C. $\frac{125\pi}{2}a^2$.

D. $4\pi a^2$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm của ID , F là trung điểm của SB . Trong mặt phẳng (SBD) , vẽ IT song song với SE và cắt EF tại T .

Ta có $SE \perp (ABCD)$, suy ra $\widehat{SBE} = [SB; (ABCD)] = 45^\circ$. Suy ra ΔSBE vuông cân tại E . Suy ra EF là trung trực của SB . Suy ra $TS = TB$. (1)

Ta có $IT \parallel SE$, suy ra $IT \perp (ABCD)$. Suy ra IT là trục đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$. Suy ra $TA = TB = TC = TD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra T là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a$, suy ra $IB = ID = \frac{5}{2}a$.

Do E là trung điểm của ID nên $IE = \frac{1}{2}ID = \frac{5}{4}a$.

$\triangle BEF$ vuông tại F có $\widehat{EBF} = 45^\circ$ nên $\triangle BEF$ vuông cân tại F .

$\triangle EIT$ vuông tại I có $\widehat{IET} = 45^\circ$ nên $\triangle EIT$ vuông cân tại I . Suy ra $IT = IE = \frac{5}{4}a$.

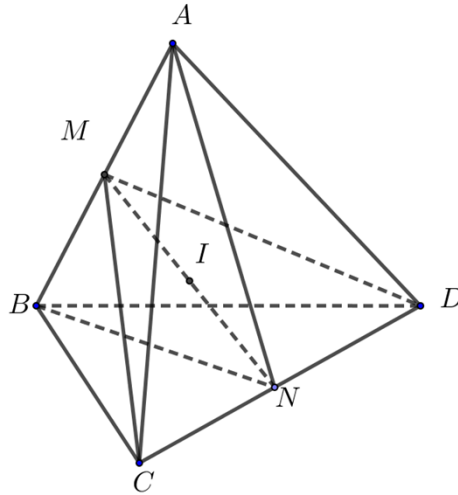
Do $\triangle BIT$ vuông tại I nên $TB = \sqrt{IB^2 + IT^2} = \frac{5\sqrt{5}}{4}a$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $S = 4\pi TB^2 = \frac{125\pi}{4}a^2$.

Câu 8. (Chuyên Hạ Long -2019) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 3$, $AD = BC = 5$, $AC = BD = 6$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

- A. 35π (đvtt). B. 35 (đvtt). C. $\frac{35\sqrt{35}}{6}\pi$ (đvtt). D. $35\sqrt{35}\pi$ (đvtt).

Lời giải



Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AB, CD và MN .

Ta có $\triangle ACD = \triangle BCD \Rightarrow AN = BN \Rightarrow \triangle ABN$ cân tại N , mà AM là đường trung tuyến

$\Rightarrow AM$ là đường trung trực của $AB \Rightarrow IA = IB = \frac{MN}{2}$ (1).

Chứng minh tương tự ta có $\Rightarrow IC = ID = \frac{MN}{2}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Áp dụng công thức trung tuyến cho tam giác ACD ta có $AN^2 = \frac{36+25}{2} - \frac{9}{4} = \frac{113}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{Xét tam giác vuông } AMI \text{ có: } AI^2 &= AM^2 + MI^2 = AM^2 + \frac{MN^2}{4} = AN^2 - MN^2 + \frac{MN^2}{4} \\ &= AN^2 - \frac{3MN^2}{4} = AN^2 - \frac{3}{4}(AN^2 - AM^2) = \frac{1}{4}(AN^2 + 3AM^2) = \frac{1}{4}\left(\frac{113}{4} + 3 \cdot \frac{9}{4}\right) = \frac{35}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện } ABCD \text{ là } R = AI = \frac{\sqrt{35}}{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện } ABCD \text{ là: } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{35\sqrt{35}}{6}\pi.$$

Câu 9. (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019) Cho đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2a$ nằm trong mặt phẳng (P) . Gọi I là điểm đối xứng với O qua A . Lấy điểm S sao cho SI vuông góc với mặt phẳng (P) và $SI = 2a$. Tính bán kính R của mặt cầu qua đường tròn tâm O và điểm S .

A. $R = \frac{a\sqrt{65}}{4}.$

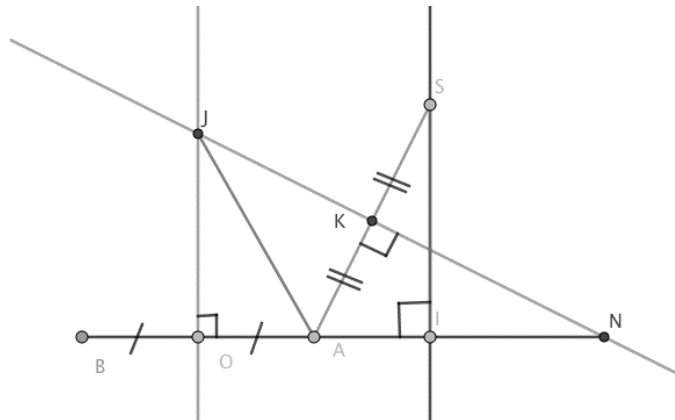
B. $R = \frac{a\sqrt{65}}{16}.$

C. $R = a\sqrt{5}.$

D. $R = \frac{7a}{4}.$

Lời giải

Chọn A



* Gọi J là tâm mặt cầu qua đường tròn tâm O và điểm $S \Rightarrow J$ nằm trên đường trung trực của AB và SA .

$$* \Delta SIA \text{ vuông tại } I \Rightarrow \begin{cases} SA = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{5}}{2} \\ \sin S = \frac{AI}{SA} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \tan S = \frac{AI}{SI} = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

*Ta có: Góc N và S bằng nhau vì cùng phụ với góc $\widehat{SAN}$.

$$* \Delta AKN \text{ vuông tại } K \Rightarrow \sin N = \frac{AK}{AN} \Leftrightarrow \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2}}{AN} = \sin S = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow AN = \frac{5a}{2} \Rightarrow ON = \frac{7a}{2}.$$

$$* \Delta OJN \text{ vuông tại } O \Rightarrow \frac{OJ}{ON} = \tan N = \tan S = \frac{1}{2} \Rightarrow OJ = \frac{7a}{4}.$$

$$* \Delta OAJ \text{ vuông tại } O \Rightarrow R = JA = \sqrt{OJ^2 + OA^2} = \frac{a\sqrt{65}}{4}.$$

Cách 2

Gắn hệ trục tọa độ lxy sao cho A, B, O thuộc tia lx, S thuộc tia ly và giả sử a = 1.

Khi đó: $A(1;0); S(0;2); B(3;0)$.

Gọi (C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là đường tròn tâm J qua 3 điểm A, S, B

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a + c = -1 \\ -6a + c = -9 \\ -4b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{7}{4} \\ c = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra: } J\left(2; \frac{7}{4}\right) \Rightarrow R = JA = \frac{\sqrt{65}}{4} \text{ vậy } R = \frac{a\sqrt{65}}{4}.$$

Câu 10. (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 3a\sqrt{2}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $2a\sqrt{3}$. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

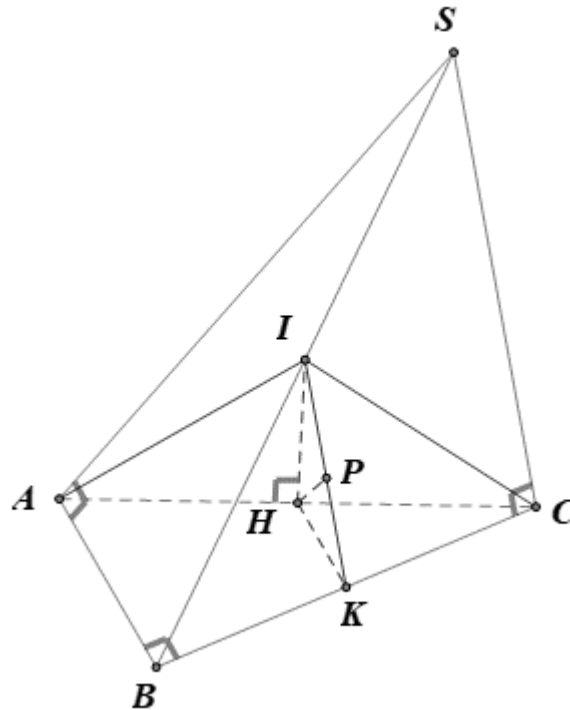
A. $72\sqrt{18}\pi a^3$.

B. $18\sqrt{18}\pi a^3$.

C. $6\sqrt{18}\pi a^3$.

D. $24\sqrt{18}\pi a^3$.

Lời giải



Gọi I, H lần lượt là trung điểm của cạnh SB và AC

Mặt khác, theo giả thiết ta có $\Delta SAB, \Delta SCB$ lần lượt là các tam giác vuông tại A và C

$$\Rightarrow IA = IB = IC = IS$$

$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

Mặt khác: ΔABC vuông tại $B \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$$\Rightarrow IH \perp (ABC)$$

Ta có:
$$\frac{d(A; (SBC))}{d(H; (SBC))} = \frac{AC}{HC} = 2 \Rightarrow d(H; (SBC)) = a\sqrt{3}$$

Gọi K là trung điểm của cạnh $BC \Rightarrow HK \perp BC$ ($HK \parallel AB, AB \perp BC$)

Lại có: $BC \perp IH$ ($IH \perp (ABC)$) $\Rightarrow BC \perp (IHK)$

Mặt khác: $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (IHK)$ theo giao tuyến IK

Trong (IHK) , gọi $HP \perp IK \Rightarrow HP \perp (SBC)$ tại $P \Rightarrow HP = d(H; (SBC)) = a\sqrt{3}$

Xét ΔIHK :
$$\frac{1}{HP^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{\frac{AB^2}{4}} \Rightarrow HI = 3a$$

xét ΔIHB : $IB = \sqrt{IH^2 + HB^2} = 3a\sqrt{2} = R$. Vậy $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 24\sqrt{18}\pi a^3$

Câu 11. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội 2019) Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA = OB = OC = a$, $\widehat{AOB} = 60^\circ$, $\widehat{BOC} = 90^\circ$, $\widehat{AOC} = 120^\circ$. Gọi S là trung điểm cạnh OB . Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

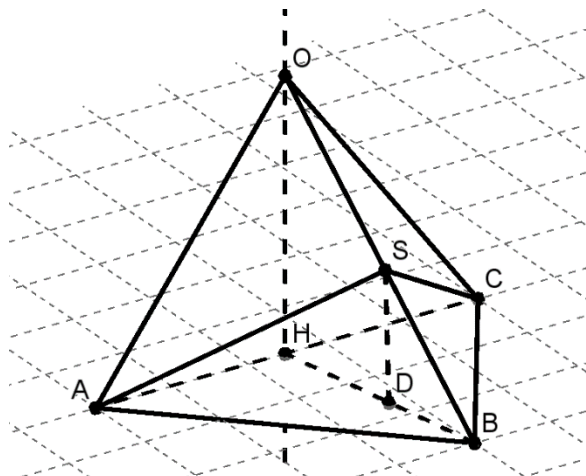
A. $\frac{a}{4}$

B. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$

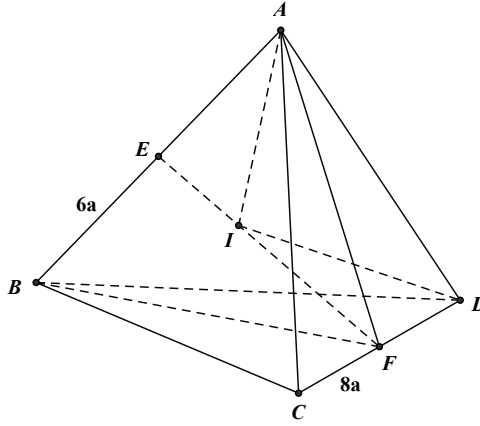
C. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$

D. $\frac{a}{2}$

Lời giải



Lời giải



Gọi E, F thứ tự là trung điểm của AB, CD . Coi $a = 1$, từ giả thiết ta có $AC = AD = BC = BD = \sqrt{74}$ nên $AF \perp CD, BF \perp CD \Rightarrow (ABF) \perp CD \Rightarrow EF \perp CD$. Chứng minh tương tự $EF \perp AB$.

Khi đó EF là đường trung trực của CD và AB . Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ ta có $IA = IB = IC = ID = R$ nên I thuộc đoạn thẳng EF .

$$EF = \sqrt{AF^2 - AE^2} = \sqrt{AD^2 - DF^2 - AE^2} = \sqrt{74 - 16 - 9} = 7.$$

Đặt $EI = x \Rightarrow FI = 7 - x$ (với $0 < x < 7$).

$$\begin{cases} IA = \sqrt{EA^2 + EI^2} = \sqrt{x^2 + 9} \\ ID = \sqrt{FI^2 + FD^2} = \sqrt{16 + (7 - x)^2} = \sqrt{x^2 - 14x + 65} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } IA = ID \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{x^2 - 14x + 65} \Leftrightarrow 9 = -14x + 65 \Leftrightarrow x = 4$$

Khi đó $IA = \sqrt{x^2 + 9} = 5$. Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $R = 5a$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 25a^2 = 100\pi a^2$.

Câu 13. (Sở Bắc Ninh 2019) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$, đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc 30° . Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho bằng:

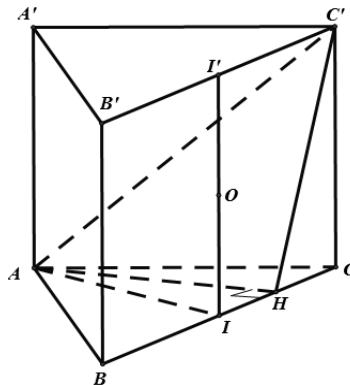
A. $3\pi a^2$.

B. $6\pi a^2$.

C. $4\pi a^2$.

D. $24\pi a^2$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $BC \Rightarrow AH \perp (BCC'B') \Rightarrow \widehat{(AC', (BCC'B'))} = \widehat{HC'A} = 30^\circ$.

ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$ suy ra $AC = a$.

$$\text{Ta có: } AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC' = 2AH = a\sqrt{3} \Rightarrow AA' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = a\sqrt{2}.$$

Gọi I, I' lần lượt là trung điểm $BC, B'C'$. Dễ thấy I, I' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$.

Gọi O là trung điểm của II' suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

$$\text{Bán kính mặt cầu là: } R = OB = \sqrt{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BB'}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho bằng: $S = 4\pi R^2 = 6\pi a^2$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC) , $AB = a, AC = a\sqrt{2}, \widehat{BAC} = 45^\circ$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$ bằng

A. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$.

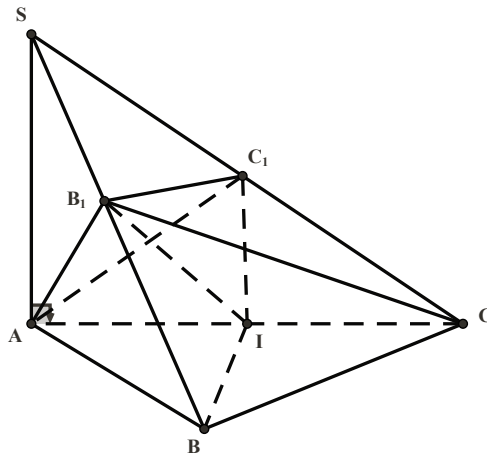
B. $\frac{\pi a^3}{\sqrt{2}}$.

C. $\pi a^3 \sqrt{2}$.

D. $\frac{4}{3} \pi a^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của $AC \Rightarrow IA = IC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Có } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = a^2 \Rightarrow BC^2 + AB^2 = AC^2.$$

Suy ra $\triangle ABC$ vuông tại $B \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow AB_1 \perp (SBC) \Rightarrow AB_1 \perp CB_1$.

Các tam giác ABC, AB_1C, AC_1C là các tam giác vuông có chung cạnh huyền AC .

Do đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$ và có bán kính $R = IA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích khối cầu đó là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$.

Câu 15. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $G.ABC$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{12}$.

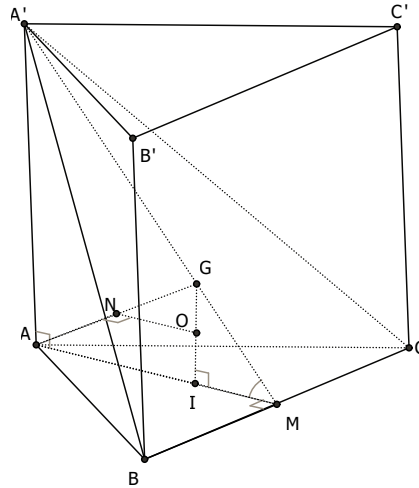
B. a .

C. $\frac{7a}{12}$.

D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm BC và I là trọng tâm tam giác ABC .

Ta có

$$\begin{cases} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ (ABC): AM \perp BC \\ (A'BC): A'M \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((ABC), (A'BC)) = \widehat{A'MA} = 60^\circ.$$

Do tam giác ABC đều nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác $A'AM$ vuông tại A : $\tan 60^\circ = \frac{AA'}{AM} \Rightarrow AA' = \frac{3a}{2}$.

Vì G là trọng tâm tam giác $A'BC$, I là trọng tâm tam giác ABC và $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên $GI \perp (ABC)$ và $IG = \frac{1}{3} \cdot AA' = \frac{a}{2}$.

Từ đó suy ra hình chóp $G.ABC$ là hình chóp đều.

Xét tam giác GAI vuông tại I : $AG = \sqrt{AI^2 + IG^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$ với $AI = \frac{2}{3} \cdot AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $G.ABC$ và N là trung điểm GA .

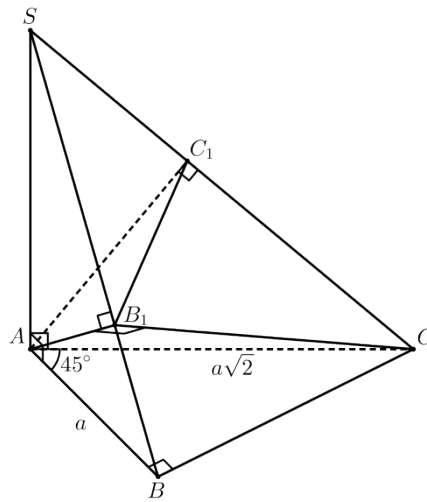
Ta có: O thuộc GI và $\Delta GNO \sim \Delta GIA$ nên $R = GO = \frac{GA^2}{2.GI} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2}{2 \cdot \frac{a}{2}} = \frac{7a}{12}$.

Câu 16. (Bắc Ninh 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Gọi B_1 , C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB , SC . Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$ bằng

- A. $\frac{\pi a^3}{\sqrt{2}}$. B. $\pi a^3 \sqrt{2}$. C. $\frac{4}{3} \pi a^3$. D. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Trước hết, ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos BAC = a^2$

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B .

Vì $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB_1$.

Vì $\begin{cases} AB_1 \perp BC \\ AB_1 \perp SB \end{cases} \Rightarrow AB_1 \perp (SBC) \Rightarrow AB_1 \perp B_1C \Rightarrow \Delta AB_1C$ vuông tại B_1 .

Như vậy, 3 điểm B , B_1 , C_1 cùng nhìn cạnh AC dưới một góc vuông nên cùng thuộc mặt cầu đường kính AC hay mặt cầu đường kính AC ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$.

$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu: $R = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

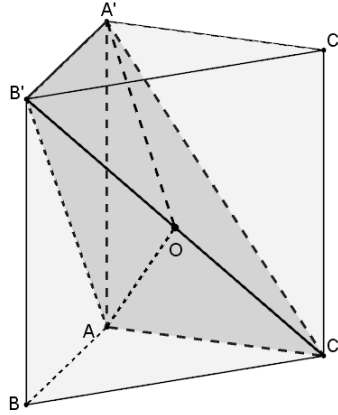
Vậy thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC_1B_1$ bằng $\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$.

Câu 17. (Thi thử Lâmônôxốp - Hà Nội 2019) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A và $AB = AC = a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình tứ diện $AA'B'C$ là:

- A. $\frac{8\pi a^3}{3}$. B. $\frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. C. $\frac{4\pi a^3}{3}$. D. $\frac{4\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Vì hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A nên trục của 2 đáy trùng nhau và là đường thẳng đi qua trung điểm của BC và $B'C'$. Đồng thời $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng nên tứ giác $BCC'B'$ là hình chữ nhật. Do vậy điểm O (trung điểm $B'C$) chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$.

Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện $AA'B'C$.

Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $BC = AB\sqrt{2} = 2a$.

Vì $BCC'B'$ là hình chữ nhật nên $B'C = \sqrt{BB'^2 + BC^2} = 2a\sqrt{2}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện $AA'B'C$ là $R = OB' = \frac{1}{2} B'C = a\sqrt{2}$.

Thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện $AA'B'C$ là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác với $AB = 2\text{cm}$, $AC = 3\text{cm}$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $SA \perp (ABC)$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Tính thể tích khối cầu đi qua năm điểm A, B, C, B_1, C_1 .

A. $\frac{28\sqrt{21}\pi}{27}\text{cm}^3$.

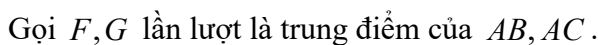
B. $\frac{76\sqrt{57}\pi}{27}\text{cm}^3$.

C. $\frac{7\sqrt{7}\pi}{6}\text{cm}^3$.

D. $\frac{27\pi}{6}\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi d là trung trực của đoạn $AB \Rightarrow d \perp (SAB)$. Do đó mọi điểm thuộc d thì cách đều các điểm A, B, B_1 .

Gọi d' là trung trực của đoạn $AC \Rightarrow d' \perp (SAC)$. Do đó mọi điểm thuộc d' thì cách đều các điểm A, C, C_1 .

$H = d \cap d' \Rightarrow H$ là tâm mặt cầu đi qua năm điểm A, B, C, B_1, C_1 .

H cũng chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

$$R = \frac{BC}{2 \sin \hat{A}} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A}}}{2 \cdot \sin \hat{A}} = \frac{\sqrt{21}}{3} \text{ cm}.$$

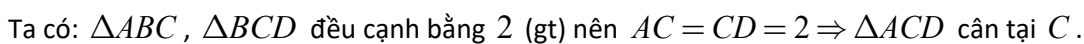
$$\text{Thể tích khối cầu: } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{28\sqrt{21}\pi}{27} \text{ cm}^3$$

Câu 19. (Trường THPT Thăng Long 2019) Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt ABC và BCD là các tam giác đều cạnh bằng 2, hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) vuông góc với nhau. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm $AD \Rightarrow CI \perp AD$.

Ta có:

$$\begin{cases} (ACD) \perp (ADB) (gt) \\ (ACD) \cap (ADB) = AD \Rightarrow CI \perp (ABD) \Rightarrow CI \perp IB \text{ (do } IB \subset (ABD)) \text{ (1).} \\ IC \perp AD (cmt) \end{cases}$$

Ta có: $\triangle ACD = \triangle ABD (c.c.c) \Rightarrow CI = IB \text{ (2)}.$

Từ (1) và (2) ta có $\triangle CIB$ vuông cân tại $I \Rightarrow CB = IB\sqrt{2} \Rightarrow IB = \frac{CB}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = IC.$

$\triangle DIB$ vuông tại $I \Rightarrow ID = \sqrt{BD^2 - IB^2} = \sqrt{2} \Rightarrow AD = 2ID = 2\sqrt{2}.$

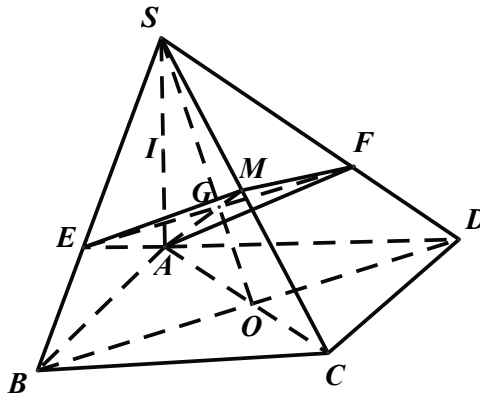
Xét $\triangle ADB$ có: $AB = DB = 2; AD = 2\sqrt{2} \Rightarrow \triangle ABD$ vuông tại $B \Rightarrow \widehat{ABD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACD} = 90^\circ$ Suy ra mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có đường kính là AD nên bán kính là: $R = ID = \sqrt{2}.$

Câu 20. (Cụm liên trường Hải Phòng -2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Đường thẳng $SA = a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của SC , mặt phẳng (α) đi qua điểm A và M đồng thời song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F . Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F nhận giá trị nào sau đây?

- A. a . B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $\{O\} = AC \cap BD$. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC .

Vì (α) chứa A, M nên (α) qua G và song song với BD và $EF \parallel BD$.

$$\text{Ta có: } SB = SD = a\sqrt{3}, AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} SE = \frac{2}{3} SB \\ SF = \frac{2}{3} SD \end{cases}.$$

$$\text{Ta lại có: } SA^2 = SB \cdot SE; SA^2 = SD \cdot SF \Rightarrow \begin{cases} AE \perp SB \\ AF \perp SD \end{cases}.$$

Gọi I là trung điểm cạnh SA .

Ta có: $\triangle SAC$ vuông cân tại $A \Rightarrow AM \perp SC \Rightarrow \triangle SAM$ vuông tại $M \Rightarrow IA = IS = IM$

Ta lại có: $\triangle SAE$ vuông tại $E \Rightarrow IA = IS = IE$.

$\triangle SAF$ vuông tại $F \Rightarrow IA = IS = IF$.

Từ,, $\Rightarrow IA = IS = IM = IE = IF \Rightarrow$ Mặt cầu đi qua năm điểm S, A, E, M, F có tâm là I và bán kính

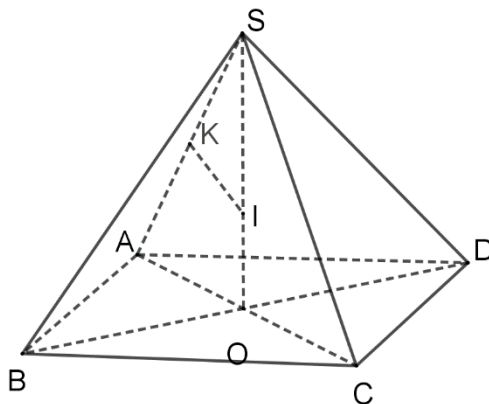
$$R = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 21. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3, AD = 4$ và các cạnh bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \frac{250\sqrt{3}}{3}\pi$. B. $V = \frac{125\sqrt{3}}{6}\pi$. C. $V = \frac{50\sqrt{3}}{3}\pi$. D. $V = \frac{500\sqrt{3}}{27}\pi$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi O là hình chiếu vuông góc của điểm S xuống mặt phẳng đáy. Ta có $\triangle SBO = \triangle SDO$ nên $SD = SB$. Chứng minh tương tự, $SC = SA$, hay O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$. Do tam giác SAC đều nên

$SA = SC = AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5$. Trong mặt phẳng (SAC) kẻ đường trung trực của cạnh SA đi qua

trung điểm K và cắt SO tại điểm I . Suy ra $R = SI = \frac{SA^2}{2 \cdot SO} = \frac{25}{5\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Suy ra,

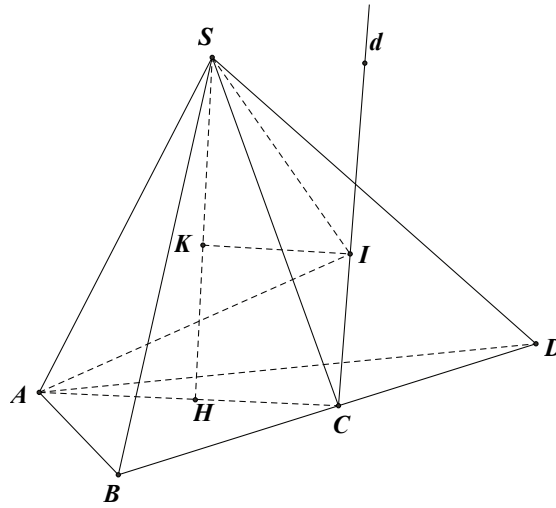
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{500\sqrt{3}}{27}\pi.$$

Câu 22. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1. Mặt bên (SAC) là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SA = SC = \frac{3}{2}$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua C . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABD$.

A. $\frac{\sqrt{34}}{8}$. B. $\frac{3\sqrt{34}}{4}$. C. $\frac{3\sqrt{34}}{16}$. D. $\frac{3\sqrt{34}}{8}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của AC, do SAC là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên $SH \perp AC \Rightarrow SH \perp (ABC)$ và $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{2}$.

Tam giác ABD có AC là đường trung tuyến và $AC = \frac{1}{2}BD$ nên ABD là tam giác vuông tại A, suy ra C là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

Dựng trục (d) của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Gọi I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABD \Rightarrow I \in d$ và $IA = IS = ID = IB = R$.

$$\text{Kẻ } IK \perp SH \Rightarrow IK = CH = \frac{1}{2}$$

$$\text{Giả sử } HK = x \Rightarrow SK = \sqrt{2} - x \Rightarrow IS = \sqrt{SK^2 + HC^2} = \sqrt{(\sqrt{2} - x)^2 + \frac{1}{4}} = R$$

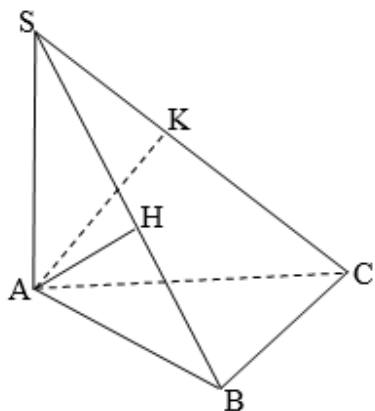
$$\text{Mặt khác: } R = IA = \sqrt{AC^2 + IC^2} = \sqrt{1 + x^2}.$$

$$\text{Ta có phương trình: } \sqrt{(\sqrt{2} - x)^2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{16}$$

$$\text{Suy ra: } R = \frac{3\sqrt{2}}{16} + 1 \quad R = \sqrt{x^2 + 1} = \frac{3\sqrt{34}}{16}.$$

Vậy phương án C đúng.

Câu 23. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, đáy là tam giác đều, $SA = a\sqrt{3}$ và góc giữa đường thẳng SB và đáy bằng 60° . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Tính bán kính mặt cầu đi qua các điểm A, B, H, K .



A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a}{6}$.

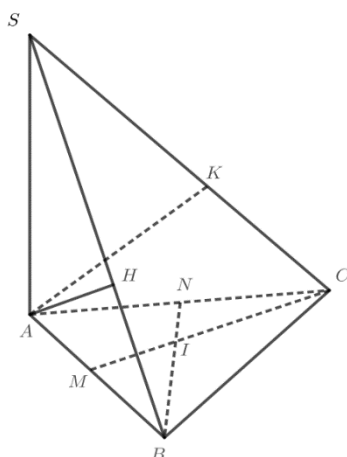
C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:



Góc giữa đường thẳng SB và đáy bằng $60^\circ \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ \Rightarrow AB = \frac{SA}{\tan 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = a$.

Gọi BN, CM lần lượt là hai đường cao của tam giác ABC và I là trọng tâm của $\triangle ABC$.

Do tam giác ABC đều nên M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC .

Tam giác ABH vuông tại H nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH ,

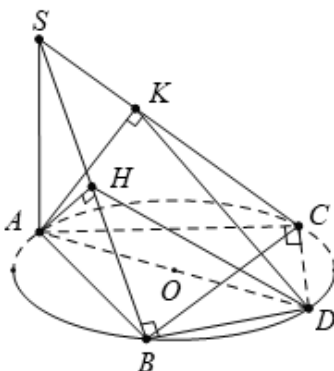
mặt khác $\left. \begin{matrix} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{matrix} \right\} \Rightarrow CM \perp (SAB)$, ta suy ra CM là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác

ABH . Hoàn toàn tương tự ta có BN là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACK . Từ đó suy ra $IA = IB = IH = IC = IK$ hay I là tâm mặt cầu đi qua các điểm A, B, H, K bán kính mặt cầu là

$$R = IA = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } R = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Cách 2:



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và D là điểm đối xứng của A qua điểm O .

Ta có $BD \perp AB$ và $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAB) \Rightarrow BD \perp AH$.

Từ giả thuyết $\Rightarrow AH \perp SB$

$\Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow AH \perp HD$.

Tương tự $AK \perp KD$.

Do các điểm B, H, K nhìn AD dưới một góc vuông nên B, H, K nằm trên mặt cầu đường kính AD .

$$\left(\widehat{SB; (ABC)} \right) = \widehat{SBA} = 60^\circ$$

$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} \Rightarrow AB = \frac{SA}{\tan 60^\circ} = a. \text{ Tam giác } ABC \text{ đều cạnh } a \text{ ta có } AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy mặt cầu qua } A, B, H, K \text{ có bán kính } R = \frac{AD}{2} = AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 24. (Chuyên Vĩnh Phúc - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC) . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB và SC . Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKCB$ bằng

A. $\sqrt{2}\pi a^3$.

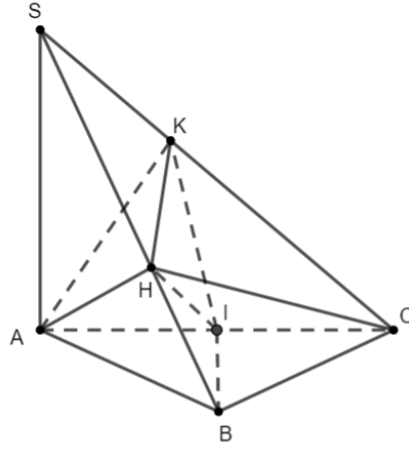
B. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

C. $\frac{\pi a^3}{6}$.

D. $\frac{\pi a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của AC . Do tam giác ABC vuông cân tại B nên $IA = IB = IC = \frac{1}{2}AC$.

Do $AK \perp SC$ nên $\triangle AKC$ vuông tại K , khi đó $IA = IK = IC = \frac{1}{2}AC$.

Ta có $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$, mà $AH \perp SB$ nên $AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH \perp HC$ hay $\triangle AHC$ vuông tại $H \Rightarrow IH = IA = IC = \frac{1}{2}AC$.

Như vậy $IA = IB = IC = IH = IK = \frac{1}{2}AC$ hay mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.HKCB$ có tâm I là

trung điểm AC , bán kính $R = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}.BC\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Câu 25. (Sở Ninh Bình 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = \sqrt{3}$, $AC = 2$ và $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC . Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ là

A. $R = 2$.

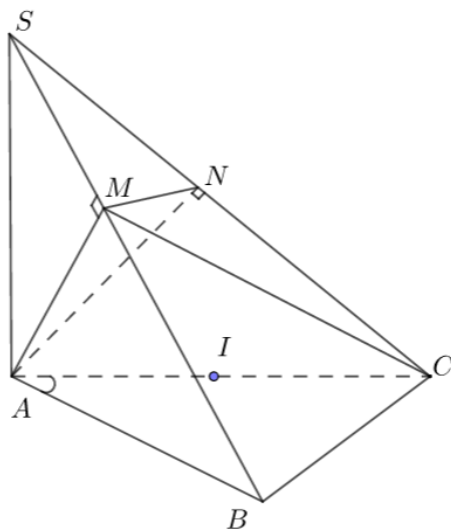
B. $R = \sqrt{13}$.

C. $R = 1$.

D. $R = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Xét tam giác ABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC \cos B = 3 + 2^2 - 2.\sqrt{3}.2 \cos 30^\circ = 1$.

Suy ra: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4$ hay tam giác ABC vuông tại B .

Gọi I là trung điểm AC suy ra $IA = IC = IB$. (1)

Tương tự tam giác ANC vuông tại N ta được $IA = IC = IN$. (2)

Xét BC và (SAB) có

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \text{ (cmt)} \\ BC \perp SA \text{ (gt)} \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \text{ mà } AM \subset (SAB) \Rightarrow AM \perp BC.$$

Ta được

$$\left. \begin{array}{l} AM \perp BC \\ AM \perp SB \text{ (gt)} \end{array} \right\} \Rightarrow AM \perp (SBC) \text{ mà } MC \subset (SBC) \Rightarrow AM \perp MC.$$

Suy ra tam giác AMC vuông tại M ta được $IA = IB = IM$. (3)

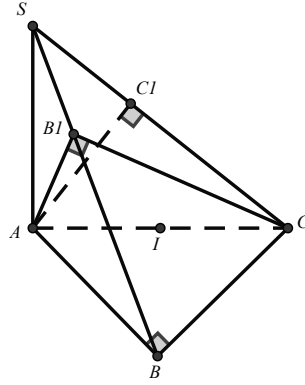
Từ (1), (2) và (3) suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $ABCNM$ có bán kính $R = AI = \frac{AB}{2} = 1$.

Câu 26. (Kim Thành - Hải Dương - 2020) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $AB = a, AC = a\sqrt{2}, \widehat{BAC} = 45^\circ$. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC . Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $ABCC_1B_1$ bằng

- A. $\frac{\pi a^3}{\sqrt{2}}$. B. $\pi a^3 \sqrt{2}$. C. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{4}{3} \pi a^3$.

Lời giải

Chọn C



Xét tam giác ABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos \widehat{BAC} = a^2 + 2a^2 - 2a.a\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = a^2$

$$\Rightarrow BC = a$$

Tam giác ABC có $BA = BC = a, \widehat{BAC} = 45^\circ$ là tam giác vuông cân tại B

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB_1$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} AB_1 \perp SB \\ AB_1 \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB_1 \perp (SBC) \Rightarrow AB_1 \perp CB_1 \Rightarrow \Delta AB_1C \text{ vuông tại } B_1$$

Gọi I là trung điểm của AC

Vì tam giác ABC vuông tại B nên $IA = IB = IC$

Vì tam giác AB_1C vuông tại B_1 nên $IA = IC = IB_1$

Vì tam giác ACC_1 vuông tại C_1 nên $IA = IC = IC_1$

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $ABCC_1B_1$ với bán kính $R = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$\text{Thể tích khối cầu đó là: } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$$

