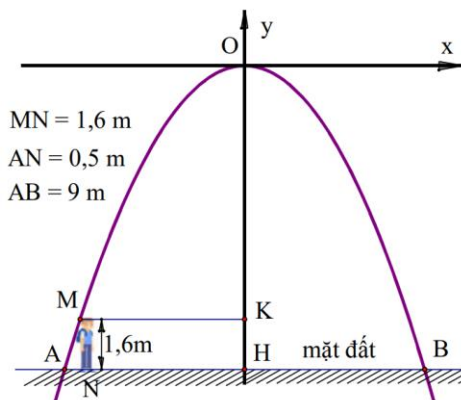


Câu 1. (1,5 điểm). Cho $(P): y = -\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d): y = -\frac{3}{2}x + 2$.

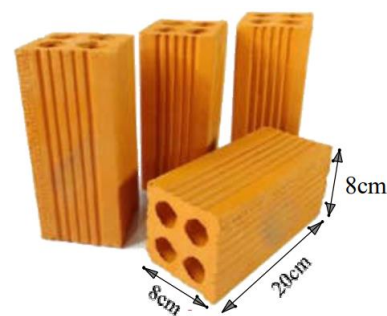
- a) Vẽ đồ thị (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.
b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Câu 2. (1 điểm). Cho phương trình $2x^2 - 6x - 1 = 0$ có 2 nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $A = \frac{x_1 - 2}{x_2 - 1} + \frac{x_2 - 2}{x_1 - 1}$.

Câu 3. (1 điểm). Với thiết kế độc đáo, cổng Parabol trường Đại học Bách Khoa Hà Nội được xây dựng cách đây hơn 50 năm và đã từng là niềm tự hào của tri thức thế hệ mới. Để đo chiều cao của cổng một bạn sinh viên cao 1,6m đứng cách chân cổng 0,5m thì đỉnh đầu bạn ấy vừa chạm vào cổng. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 9m. Hãy tính chiều cao cổng Parabol (làm tròn một chữ số thập phân)



Câu 4. (0,75 điểm). Gạch ống là một sản phẩm được tạo hình thành từ đất sét và nước, được kết hợp lại với nhau theo một công thức chung hợp lý mới có thể tạo ra hỗn hợp dẻo quánh, sau đó chúng được đổ vào khuôn, rồi đem phơi hoặc sấy khô và cuối cùng là đưa vào lò nung. Một viên gạch hình hộp chữ nhật có kích thước dài 20cm, rộng 8cm. Bên trong có bốn lỗ hình trụ bằng nhau có đường kính 2,5cm.



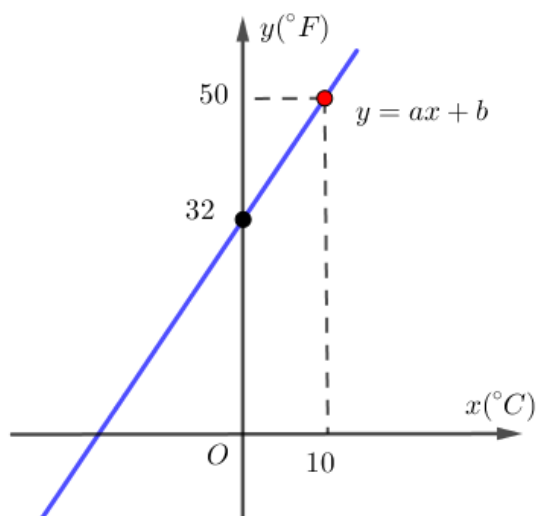
- a) Tính thể tích đất sét để làm một viên gạch. (lấy $\pi = 3,14$)

Theo toán học, bác Ba muốn xây một ngôi nhà phải mua 10 nghìn gạch, giá một viên là 1100 đồng. Nhưng khi thi công, bác Ba phải mua dư 2% số gạch cần dùng dự phòng cho hư hao. Tính số tiền bác Ba mua gạch để xây căn nhà, biết 1 nghìn gạch là 1000 viên.

Câu 5. (1 điểm). Một nhóm học sinh tham gia hoạt động ngoại khóa được chia thành các tổ để sinh hoạt. Nếu mỗi tổ có 7 nam và 7 nữ thì thừa 8 bạn nam. Nếu mỗi tổ có 6 nam và 5 nữ thì thừa 12 nữ. Hỏi có bao nhiêu học sinh nam và bao nhiêu học sinh nữ?

Câu 6. (1 điểm). Trong một đợt khuyến mãi, siêu thị giảm giá cho mặt hàng A là 20% và mặt hàng B là 15% so với giá niêm yết. Một khách hàng mua 2 món hàng A và 1 món hàng B phải trả số tiền là 362000 đồng. Nhưng nếu mua trong khung giờ vàng thì món hàng A được giảm giá 30% còn món hàng B được giảm giá 25% so với giá niêm yết. Một người mua 3 món hàng A và 2 món hàng B trong khung giờ vàng nên chỉ trả số tiền là 552000 đồng. Tính giá niêm yết của mỗi món hàng A và B .

Câu 7. (1 điểm). Mỗi quan hệ giữa thang nhiệt độ y (độ $F - Fahrenheit$) và thang nhiệt độ x (độ $C - Celsius$) được cho bởi hàm số bậc nhất $y = ax + b$.



a) Tìm a và b .

b) Trong không khí, tốc độ âm thanh v (tính bằng mét/giây) là một hàm số bậc nhất theo nhiệt độ t (tính bằng $^{\circ}C$) được cho bởi công thức: $v = 0,06t + 331$. Hãy tính tốc độ âm thanh tại nơi có nhiệt độ không khí là $0^{\circ}C, 77^{\circ}F$.

Câu 8. (3 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , kẻ đường cao BE của $\triangle ABC$. Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ E đến AB và BC .

a) Chứng minh tứ giác $BHEK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh: $BH.BA = BK.BC$.

c) Kẻ đường cao CF của tam giác ABC $F \in AB$ và I là trung điểm của EF . Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.

----HẾT----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho $(P): y = -\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $(d): y = -\frac{3}{2}x + 2$.

- a) Vẽ đồ thị (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.
- b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

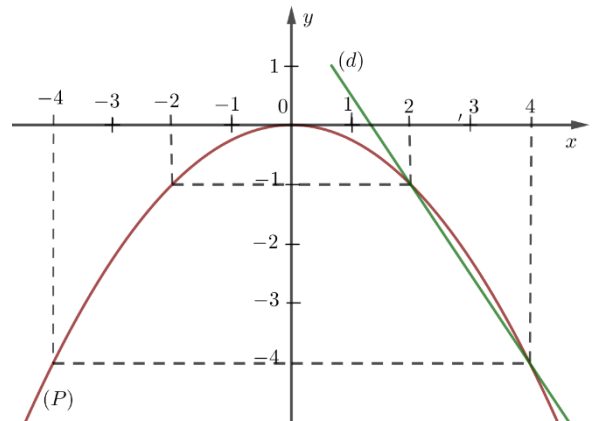
Lời giải

- a) Vẽ đồ thị (P) và (d) trên cùng hệ trục tọa độ.

a) BGT:

x	-4	-2	0	2	4
$y = -\frac{1}{4}x^2$	-4	-1	0	-1	-4

x	0	2
$y = -\frac{3}{2}x + 2$	2	-1



- b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}x^2 &= -\frac{3}{2}x + 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Thay $x = 4$ vào $y = -\frac{1}{4}x^2$, ta được: $y = -\frac{1}{4}.4^2 = -4$.

Thay $x = 2$ vào $y = -\frac{1}{4}x^2$, ta được: $y = -\frac{1}{4}.2^2 = -1$.

Vậy $(4; -4)$, $(2; -1)$ là hai giao điểm cần tìm.

Câu 2. Cho phương trình $2x^2 - 6x - 1 = 0$ có 2 nghiệm là x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính

giá trị của biểu thức $A = \frac{x_1 - 2}{x_2 - 1} + \frac{x_2 - 2}{x_1 - 1}$.

Lời giải

Ta có: $ac = 2 \cdot -1 = -2 < 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo định lí Vi-et, ta có:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{(-6)}{2} = 3 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Ta có:
$$A = \frac{x_1 - 2}{x_2 - 1} + \frac{x_2 - 2}{x_1 - 1}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{x_1 - 2}{x_2 - 1} + \frac{x_2 - 2}{x_1 - 1} \\ &= \frac{(x_1 - 2)(x_1 - 1) + (x_2 - 2)(x_2 - 1)}{(x_2 - 1)(x_1 - 1)} \\ &= \frac{x_1^2 - x_1 - 2x_1 + 2 + x_2^2 - x_2 - 2x_2 + 2}{x_2x_1 - x_2 - x_1 + 1} \\ &= \frac{(x_1^2 + x_2^2) - 3(x_1 + x_2) + 4}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1} \\ &= \frac{S^2 - 2P - 3S + 4}{P - S + 1} \\ &= \frac{3^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 3 \cdot 3 + 4}{\frac{-1}{2} - 3 + 1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Câu 3. Với thiết kế độc đáo, cổng Parabol trường Đại học Bách Khoa Hà Nội được xây dựng cách đây hơn 50 năm và đã từng là niềm tự hào của tri thức thế hệ mới. Để đo chiều cao của cổng một bạn sinh viên cao 1,6m đứng cách chân cổng 0,5m thì đỉnh đầu bạn ấy vừa chạm vào cổng. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 9m. Hãy tính chiều cao cổng Parabol (làm tròn một chữ số thập phân)

Lời giải

Ta có: $AH = \frac{AB}{2} = 4,5m$; $MK = NH = AH - AN = 4,5 - 0,5 = 4m$.

Đặt hệ trục Oxy như hình vẽ, ta thấy đồ thị của hàm số $y = ax^2$

Đặt $OH = h$ $h > 0$

Đồ thị của hàm số đi qua hai điểm $A\left(-\frac{9}{2}; -h\right)$ và $M(-4; -(h-1,6))$.

Thay hai điểm A và M vào hàm số ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -h = a \cdot \left(-\frac{9}{2}\right)^2 \\ -h - 1,6 = a \cdot (-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -h = \frac{81}{4}a \\ \frac{81}{4}a + 1,6 = 16a \end{cases}$$

$$\text{Ta giải tìm được } \begin{cases} a = -\frac{32}{85} \\ h = \frac{648}{85} \approx 7,6m \end{cases}$$

Vậy chiều cao cổng Parabol là $7,6m$.

Câu 4. Gạch ống là một sản phẩm được tạo hình thành từ đất sét và nước, được kết hợp lại với nhau theo một công thức chung hợp lý mới có thể tạo ra hỗn hợp dẻo quánh, sau đó chúng được đổ vào khuôn, rồi đem phơi hoặc sấy khô và cuối cùng là đưa vào lò nung. Một viên gạch hình hộp chữ nhật có kích thước dài 20cm, rộng 8cm. Bên trong có bốn lỗ hình trụ bằng nhau có đường kính 2,5cm.

- Tính thể tích đất sét để làm một viên gạch. (lấy $\pi = 3,14$)
- Theo toán học, bác Ba muốn xây một ngôi nhà phải mua 10 nghìn gạch, giá một viên là 1100 đồng. Nhưng khi thi công, bác Ba phải mua dư 2% số gạch cần dùng dự phòng cho hư hao. Tính số tiền bác Ba mua gạch để xây căn nhà, biết 1 nghìn gạch là 1000 viên.

Lời giải

- a) -Thể tích đất sét làm viên gạch hình hộp chữ nhật chưa trừ bốn lỗ rỗng bên trong là:

$$V = 8.8.20 = 320 \text{ cm}^3$$

$$\text{Thể tích của bốn lỗ hình trụ bằng nhau là: } V_1 = \pi R^2 h = 3,14 \cdot \left(\frac{2,5}{2}\right)^2 \cdot 20 = 98,125 \text{ cm}^3$$

$$\text{Thể tích đất sét để làm một viên gạch là: } V_2 = V - V_1 = 320 - 98,125 \approx 221,9 \text{ cm}^3$$

- b) Số viên gạch bác Ba cần mua là: $10.1000 \cdot 1 + 2\% = 10200$ (viên gạch)

$$\text{Số tiền bác Ba mua gạch để xây căn nhà là: } 10200.1100 = 11220000 \text{ (đồng)}$$

Câu 5. Một nhóm học sinh tham gia hoạt động ngoại khóa được chia thành các tổ để sinh hoạt. Nếu mỗi tổ có 7 nam và 7 nữ thì thừa 8 bạn nam. Nếu mỗi tổ có 6 nam và 5 nữ thì thừa 12 nữ. Hỏi có bao nhiêu học sinh nam và bao nhiêu học sinh nữ?

Lời giải

Gọi x, y (số tổ) lần lượt là số tổ trong trường hợp 1 và trường hợp 2.

Điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}^*$

Nếu mỗi tổ có 7 nam và 7 nữ thì thừa 8 bạn nam nên số học sinh nam là $7x + 8$ (học sinh) và số học sinh nữ là $7x$ (học sinh).

Nếu mỗi tổ có 6 nam và 5 nữ thì thừa 12 nữ thì số học sinh nam là $6y$ (học sinh) và số học sinh nữ là $5y + 12$ (học sinh).

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 7x + 8 = 6y \\ 7x = 5y + 12 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $x = 16; y = 20$ (nhận)

Vậy số học sinh nam là 120 học sinh, số học sinh nữ là 112 học sinh.

Câu 6. Trong một đợt khuyến mãi, siêu thị giảm giá cho mặt hàng A là 20% và mặt hàng B là 15% so với giá niêm yết. Một khách hàng mua 2 món hàng A và 1 món hàng B phải trả số tiền là 362 000 đồng. Nhưng nếu mua trong khung giờ vàng thì món hàng A được giảm giá 30% còn món hàng B được giảm giá 25% so với giá niêm yết. Một người mua 3 món hàng A và 2 món hàng B trong khung giờ vàng nên chỉ trả số tiền là 552 000 đồng. Tính giá niêm yết của mỗi món hàng A và B.

Lời giải

Gọi x, y (đồng) lần lượt là giá niêm yết của món hàng A và món hàng B.

Điều kiện: $x, y > 0$

Theo đề ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2.x \cdot 1 - 20\% + y \cdot 1 - 15\% = 362\,000 \\ 3.x \cdot 1 - 30\% + 2.y \cdot 1 - 25\% = 552\,000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1,6x + 0,85y = 362\,000 \\ 2,1x + 1,5y = 552\,000 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 120\,000 \\ y = 200\,000 \end{cases}^n$$

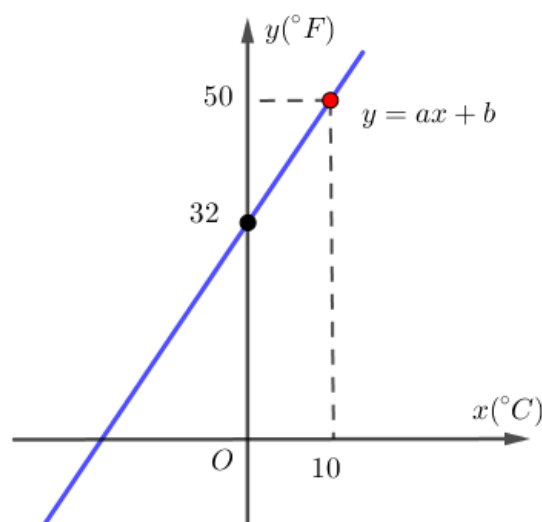
Vậy giá niêm yết của món hàng A là 120 000 đồng, của món hàng B là 200 000 đồng.

Câu 7. Mối quan hệ giữa thang nhiệt độ y (độ $F - Fahrenheit$) và thang nhiệt độ x

(độ $C - Celsius$) được cho bởi hàm số bậc nhất $y = ax + b$.

a. Tìm a và b .

b. Trong không khí, tốc độ âm thanh v (tính bằng mét/giây) là một hàm số bậc nhất theo nhiệt độ t (tính bằng $^{\circ}C$) được cho bởi công thức: $v = 0,06t + 331$. Hãy tính tốc độ âm thanh tại nơi có nhiệt độ không khí là $0^{\circ}C, 77^{\circ}F$.



Lời giải

a) Thay $\begin{cases} x = 0 \\ y = 32 \end{cases}$ vào $y = ax + b$ ta có: $a.0 + b = 32$ 1 .

Thay $\begin{cases} x = 10 \\ y = 50 \end{cases}$ vào $y = ax + b$ ta có: $a.10 + b = 50$ 2 .

Từ 1 và 2 , giải hệ phương trình ta được: $a = \frac{9}{5}; b = 32$.

b) Với $t_1 = 0^\circ C$ thay vào công thức $v = 0,06t_1 + 331$ ta có $v = 0,06.0 + 331 = 331 \text{ m/s}$.

Với $t_2 = 77^\circ F$ thay $y = 77$ vào công thức $y = \frac{9}{5}x + 32$ ta có

$$77 = \frac{9}{5}x + 32 \Leftrightarrow x = 25^\circ C \Rightarrow t_2 = 25^\circ C$$

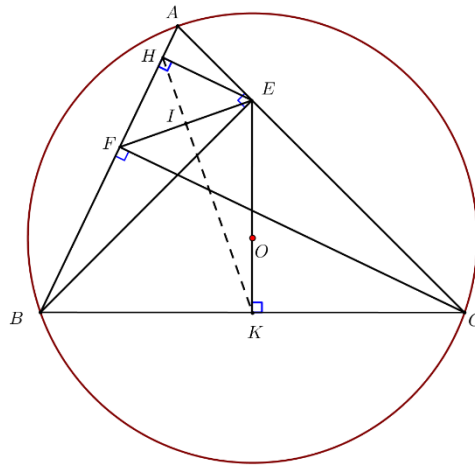
Thay $t_2 = 25^\circ C$ vào công thức $v = 0,06t_2 + 331$ ta có $v = 0,06.25 + 331 = 332,5 \text{ m/s}$

.

Vậy tốc độ âm thanh tại nơi có nhiệt độ không khí $0^\circ C$ là 331 m/s , tại nơi có nhiệt độ không khí $77^\circ F$ là $332,5 \text{ m/s}$.

Câu 8. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , kẻ đường cao BE của $\triangle ABC$. Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ E đến AB và BC .

- Chứng minh tứ giác $BHEK$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh: $BH.BA = BK.BC$.
- Kẻ đường cao CF của tam giác ABC $F \in AB$ và I là trung điểm của EF . Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.



a) Chứng minh tứ giác $BHEK$ nội tiếp

Xét tứ giác $BHEK$, có:

$$\begin{cases} BHE = 90^\circ (EH \perp AB) \\ EKB = 90^\circ (EK \perp BC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow BHE + EKB = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BHEK$ nội tiếp vì có hai góc đối bù nhau.

b) Chứng minh $BH.BA = BK.BC$

Xét $\triangle AEB$ vuông tại E $BE \perp AC$, có EH là đường cao $EH \perp AB$

$$\Rightarrow EB^2 = BH.BA \text{ (HTL) } 1$$

Xét $\triangle BEC$ vuông tại E $BE \perp AC$, có EK là đường cao $EK \perp BC$

$$\Rightarrow EB^2 = BK.BC \text{ (HTL) } 2$$

Từ 1 và 2, suy ra: $BH.BA = BK.BC = EB^2$

c) Kẻ đường cao CF của tam giác ABC $F \in AB$ và I là trung điểm của EF . Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.

Ta có: tứ giác $BHEK$ nội tiếp $\Rightarrow BHK = BEK$ (2 góc nội tiếp cùng chắn BK)

$\triangle FHE$ vuông tại H $EH \perp AB$ có HI là đường trung tuyến ứng với cạnh EF

(I là trung điểm của EF)

$$\Rightarrow HI = IF = \frac{EF}{2}$$

$\Rightarrow \triangle HIF$ cân tại $I \Rightarrow FHI = IFH$ 3

Xét tứ giác $BFEC$ có

$$BFC = 90^\circ \quad CF \perp AB$$

$$BEC = 90^\circ \quad BE \perp AC$$

$$\Rightarrow BFC = BEC = 90^\circ$$

Mà hai góc này liên tiếp cùng nhìn cạnh BC

$\Rightarrow$ tứ giác $BFEC$ nội tiếp

$$\Rightarrow HFE = ECB \text{ (góc trong bằng góc đối ngoài)} \quad 4$$

Mặt khác $ECB = BEK$ (cùng phụ KEC) 5

Từ 3, 4 và 5, suy ra: $FHI = BEK$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BHK = BEK \text{ cmt} \\ FHI = BEK \text{ cmt} \end{cases} \Rightarrow BHK = FHI$$

$\Rightarrow H, I, K$ thẳng hàng.

----HẾT----