

ĐỀ SỐ 45

Họ và tên:Số báo danh:.....

Câu 1: (6 đ) a) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^3(x-2)^2$. Tìm các điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x + 3) + 2021$.

b) Tìm m để phương trình $(3m^2 + 1)x + m(3x^2 + m^2 + 1) = \sqrt[3]{x^3 + 1} + 1$ có nghiệm thực.

Câu 2: (2.5 đ) Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 1 số từ A . Tính xác suất số lấy được số chia hết cho 15.

Câu 3: (2.5 đ) Cho hàm số $f(x) = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 6x^2 + a \right|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 4]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên tham số $a \in [-20; 20]$ sao cho $M \leq 4m$?

Câu 4: (4.5 đ) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là $\triangle ABC$ vuông tại B , biết $AB = 3a, BC = 2a, SC = 2a\sqrt{2}$, $\widehat{SCB} = 90^\circ, \cos \widehat{SAB} = \frac{1}{3}$ và tam giác SAB nhọn.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a .

b) Mặt phẳng (α) song song với $mp(ABC)$ cắt các cạnh SA, SB, SC theo thứ tự A', B', C' . Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A', B', C' trên $mp(ABC)$. Tính giá trị lớn nhất của thể tích lăng trụ $A'B'C'.A_1B_1C_1$.

Câu 5: (3.0 đ) Cho tứ diện $ABCD$ có góc $\widehat{BDC} = 90^\circ$ và chân đường vuông góc hạ từ D xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trực tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$(AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$$

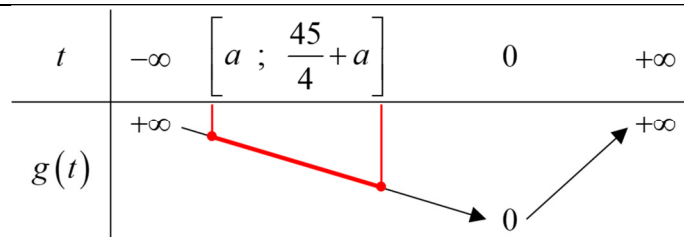
Câu 6: (1.5 đ) Cho x, y là hai số thực dương thay đổi thỏa mãn $3x^2 + 8y^3 = 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $P = \frac{4}{x^2} + \frac{4}{y^2} + \frac{1}{(x-y)^2}$.

-----HẾT-----

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm																
1a (3đ)	Ta có $g'(x) = f'(x^3 - 3x + 3)(3x^2 - 3)$ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + 3 = 1 \\ 3x^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (kép)} \\ x = -2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$ (tìm cực trị nên ta bỏ qua các nghiệm bội chẵn của phương trình $(x^3 - 3x + 3 - 2)^2 = 0$) Vậy $g'(x)$ đổi dấu khi x đi qua các nghiệm $x = -1, x = 1, x = 2$ hay hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị là $x = -1, x = 1, x = 2$.	1đ 1đ 1đ																
1b (3đ)	Ta có $(3m^2 + 1)x + m(3x^2 + m^2 + 1) = \sqrt[3]{x^3 + 1} + 1$ $\Leftrightarrow (x + m)^3 + (x + m) = \sqrt[3]{x^3 + 1} + (x^3 + 1) (*)$ $\Leftrightarrow f(x + m) = f(\sqrt[3]{x^3 + 1}) \Leftrightarrow x + m = \sqrt[3]{x^3 + 1} \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{x^3 + 1} - x$ (vì ở đây hàm số $f(t) = t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$) Xét hàm số $g(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1} - x, g'(x) = \frac{3x^2}{3\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ Bảng biến thiên: <table><tr><td></td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td></td><td>$\sqrt[3]{4}$</td><td></td></tr></table> 0 $\nearrow$ $\searrow$ 0 Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $0 < m \leq \sqrt[3]{4}$.		$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$+\infty$	x				$g'(x)$				$g(x)$		$\sqrt[3]{4}$		1đ 1đ 1đ
	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$+\infty$															
x																		
$g'(x)$																		
$g(x)$		$\sqrt[3]{4}$																
2 (2.5đ)	+ $n(\Omega) = 9.9.8.7 = 4536$ Kí hiệu $M = \{0, 3, 6, 9\}, N = \{1, 4, 7\}, P = \{2, 5, 8\}$ a) Số tự nhiên dạng $\overline{abc0}$: Để lập số này ta chọn các chữ số khác nhau và khác 0 từ M,N,P mà $a + b + c \vdots 3$ rồi hoán vị ra dạng $\overline{abc0}$. + Chọn 3 chữ số cùng thuộc M, hoặc N, hoặc P: có $3.3!$ số. + Chón 1 chữ số thuộc M 1 chữ số thuộc N, 1 chữ số thuộc P: có $3.3.3!$ số Vậy Tha) này có tất cả 180 số. b) Số tự nhiên dạng $\overline{abc5}$: Để lập số này ta chọn các chữ số khác nhau và khác 5 từ M,N,P mà $a + b + c$ chia cho 3 dư 1, rồi hoán vị ra dạng $\overline{abc0}$. + Chọn 2 chữ số thuộc M, 1 chữ số thuộc N: có $C_3^2.3.3! + C_3^1.3.4$ + Chọn 2 chữ số thuộc N, 1 chữ số thuộc P: có $C_3^2.2.3!$	0.5đ 1đ 1đ																

	+ Chọn 1 chữ số thuộc M, 2 chữ số thuộc P: có 3.1.3!+1.4 Vậy Thb) này có tất cả 148 số Vậy xác suất cần tính là $\frac{180+148}{9.9.8.7} = \frac{41}{567}$																												
3 (2.5đ)	Xét hàm số $t = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 6x^2 + a \Rightarrow t' = x^3 - 7x^2 + 12x$. Ta có $t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0;4] \\ x = 3 \in [0;4] \\ x = 4 \in [0;4] \end{cases}$ BBT: <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>t'</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table> t a $\frac{45}{4} + a$ $\frac{32}{3} + a$ Suy ra $t \in \left[a; \frac{45}{4} + a \right]$. Ta có $g(t) = t$. <table><tr><td>t</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g(t)$</td><td>$+\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table> Trường hợp 1: $a \geq 0$ (1). <table><tr><td>t</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$\left[a; \frac{45}{4} + a \right]$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g(t)$</td><td>$+\infty$</td><td>0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table> Khi đó $M = \left \frac{45}{4} + a \right = \frac{45}{4} + a; m = a = a$. Với $M \leq 4m \Leftrightarrow \frac{45}{4} + a \leq 4a \Leftrightarrow \frac{15}{4} \leq a$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\boxed{\frac{15}{4} \leq a}$. Trường hợp 2: $\frac{45}{4} + a \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -\frac{45}{4}$ (3).	x	0	3	4	t'		+	0	-	t	$-\infty$	0	$+\infty$	$g(t)$	$+\infty$	0	$+\infty$	t	$-\infty$	0	$\left[a; \frac{45}{4} + a \right]$	$+\infty$	$g(t)$	$+\infty$	0		$+\infty$	0.5đ 0.5đ
x	0	3	4																										
t'		+	0	-																									
t	$-\infty$	0	$+\infty$																										
$g(t)$	$+\infty$	0	$+\infty$																										
t	$-\infty$	0	$\left[a; \frac{45}{4} + a \right]$	$+\infty$																									
$g(t)$	$+\infty$	0		$+\infty$																									



0.5đ

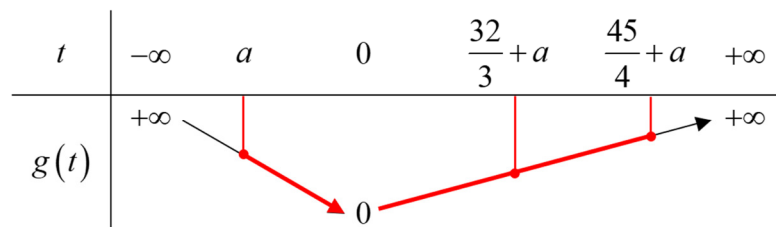
Khi đó $M = |a| = -a$; $m = \left| \frac{45}{4} + a \right| = -\frac{45}{4} - a$.

Với $M \leq 4m \Leftrightarrow -a \leq 4\left(-\frac{45}{4} - a\right) \Leftrightarrow -a \leq -45 - 4a \Leftrightarrow a \leq -15$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $\boxed{a \leq -15}$.

0.5đ

Trường hợp 3: $a < 0 < \frac{32}{3} + a \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ -\frac{32}{3} < a \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{32}{3} < a < 0$ (5).



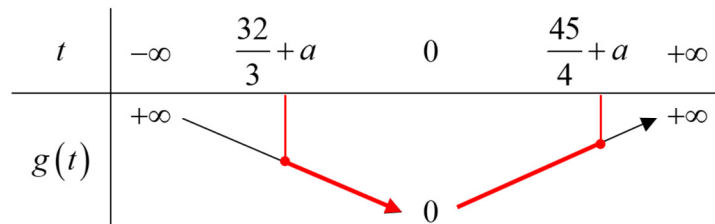
Khi đó $m = 0$; $M = \max \left\{ |a| ; \left| \frac{45}{4} + a \right| \right\}$.

i) Với $M = |a| = -a$, ta có $M \leq 4m \Leftrightarrow -a \leq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$ (so với (5): loại).

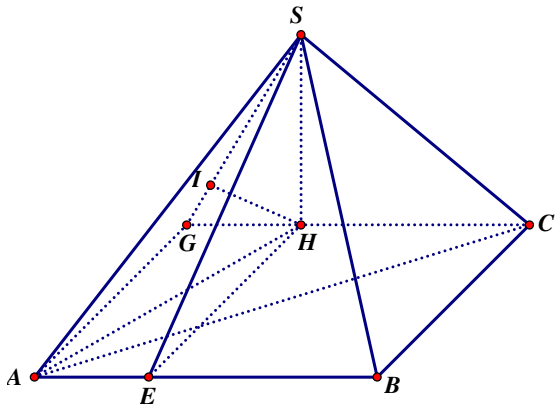
ii) Với $M = \left| \frac{45}{4} + a \right| = \frac{45}{4} + a$, ta có $M \leq 4m \Leftrightarrow \frac{45}{4} + a \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -\frac{45}{4}$ (so với (5): loại).

Trường hợp 4: $\frac{32}{3} + a < 0 < \frac{45}{4} + a \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{32}{3} + a < 0 \\ 0 < \frac{45}{4} + a \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{45}{4} < a < -\frac{32}{3}$

(6).



Khi đó $m = 0$; $M = \max \left\{ \left| \frac{32}{3} + a \right| ; \left| \frac{45}{4} + a \right| \right\}$.

	i) Với $M = \left \frac{32}{3} + a \right = -\frac{32}{3} - a$, ta có $M \leq 4m \Leftrightarrow -\frac{32}{3} - a \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{32}{3} \leq a \text{ (so với (6): loại).}$ ii) Với $M = \left \frac{45}{4} + a \right = \frac{45}{4} + a$, ta có $M \leq 4m \Leftrightarrow \frac{45}{4} + a \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -\frac{45}{4}$ (so với (6): loại). Ta có $\begin{cases} \frac{15}{4} \leq a \\ a \leq -15 \\ a \in [-20; 20] \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}$, suy ra $a \in \{-20; -19; \dots; -15; 4; 5; \dots; 20\}$. Vậy có 23 giá trị nguyên a thỏa mãn yêu cầu bài toán.	
4a (2.5đ)	 Gọi H là hình chiếu của S trên $mp(ABC)$. Do $\begin{cases} BC \perp SC \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp CH$ suy ra $ABCH$ là hình thang vuông tại B, C. Lấy E thuộc cạnh AB sao cho $BCHE$ là hình chữ nhật, dễ dàng thấy $SE \perp AB$. Tam giác SHC vuông, đặt $SH = x \Rightarrow EB = HC = \sqrt{8a^2 - x^2} \Rightarrow AE = 3a - \sqrt{8a^2 - x^2}$ $SE = \sqrt{x^2 + 4a^2}$ Do $\cos \widehat{SAB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan \widehat{SAB} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{SE}{AE} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 + 4a^2}}{3a - \sqrt{8a^2 - x^2}} = 2\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow x = 2a \text{ và } CH = 2a.$ Vẽ hình chữ nhật $ABCG$, ta thấy $d(SA, BC) = d(C, (SAG)) = 3d(H, (SAG))$ Kẻ $HI \perp SG$ tại $I \Rightarrow HI = \frac{HG \cdot SH}{\sqrt{HG^2 + SH^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ Vậy $d(SA, BC) = \frac{6a\sqrt{5}}{5}$	0.5đ 0.5đ 0.5đ 0.5đ

4b (2đ)	Đặt $A'A_1 = y (0 < y < 2)$, ta có $\frac{A'B'}{AB} = \frac{SA'}{SA} = \frac{2a-y}{2a} \Rightarrow S_{\Delta A'B'C'} = \left(\frac{2a-y}{2a}\right)^2 \cdot S_{\Delta ABC} = 3a^2 \left(\frac{2a-y}{2a}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot (2a-y)^2$ Thể tích lăng trụ $A'B'C'.A_1B_1C_1$ là $V = \frac{3y}{4} \cdot (2a-y)^2 = \frac{3}{8} \cdot 2y(2a-y)^2 \leq \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{2y+2a-y+2a-y}{3}\right)^3 = \frac{8a^3}{9}$ Dấu bằng xảy ra khi $y = \frac{2a}{3}$. Vậy $\max V = \frac{8a^3}{9}$.	0.5đ 0.5đ 0.5đ 0.5đ
5a (3đ)	Trước tiên ta sẽ chứng minh rằng $\widehat{CDA} = 90^\circ$ Thật vậy, gọi H là hình chiếu của D xuống mặt phẳng (ABC). Ta có $BD \perp DC$, hình chiếu của BD trên (ABC) là $BH \perp AC \Rightarrow BD \perp AC$, vậy $BD \perp AD$. Ta có $CD \perp BD$, hình chiếu CD trên (ABC) là $CH \perp AB \Rightarrow CD \perp AB$, vậy $CD \perp AD$. Từ đó ta được: $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2 + CD^2)$. Mặt khác bất đẳng thức AM-GM cho ta: $(AB + BC + CA)^2 \leq 3(AB^2 + BC^2 + CA^2)$ Kết hợp ta được $(AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$ Dấu bằng xảy ra khi $AB = BC = CA$.	1đ 1đ 1đ
6 (1.5đ)	Ta có: $P \cdot xy = 4xy \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{xy}{(x-y)^2} = 4 \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \frac{1}{\frac{x}{y} - 2 + \frac{y}{x}}$. Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, (t > 2)$ đưa về $P \cdot xy = 4t + \frac{1}{t-2}$. Xét hàm số $f(t) = 4t + \frac{1}{t-2}$ với $t > 2$ ta được:	0.5đ

	$f'(t) = 4 - \frac{1}{(t-2)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \min_{t>2} f(t) = 12$ • Ta có: $20 = 3x^2 + 8y^3 = 3x^2 + 4(y^3 + y^3 + 1) - 4 \geq 3x^2 + 12y^2 - 4$. $\Rightarrow 8 = x^2 + 4y^2 \geq 4xy \Leftrightarrow xy \leq 2$. Do đó $P \geq \frac{1}{2} f(t) \geq \frac{1}{2} f\left(\frac{5}{2}\right) = 6$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 6 đạt tại $x = 2, y = 1$.	0.5đ 0.5đ
--	---	-------------------------