

▮ BÀI GIẢNG 3 : ĐỘ DÀI VÀ BÀI TOÁN THỰC TẾ



LÝ THUYẾT



✎ Memorize :

✎ Lý thuyết bài giảng :



LÀM

Câu 236: Chứng minh rằng trong tam giác ABC , ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$

✎ Lời giải :

Câu 237: Cho tam giác ABC có $AB=2, AC=3, \angle BAC=60^\circ$. Cho điểm M thỏa $\vec{MB}+2\vec{MC}=\vec{0}$.
Tính độ dài AM .

 **Lời giải :**

Câu 238: Cho tam giác ABC có $AB=2, AC=3, \angle BAC=120^\circ$
a). Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ và độ dài trung tuyến AM .
b). Gọi AD là phân giác trong của góc A của tam giác ABC . Phân tích $\vec{AD}$ theo hai vectơ $\vec{AB}, \vec{AC}$. Suy ra độ dài đoạn AD .

 **Lời giải :**

Câu 239: Cho tam giác ABC có $AB = 2a$, $BC = a\sqrt{7}$, $AC = 3a$. Gọi M trung điểm của AB , N thuộc AC sao cho $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{NC}$ và D thuộc MN sao cho $2\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DN}$

a). Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

b). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và độ dài đoạn AD theo a .

 **Lời giải :**

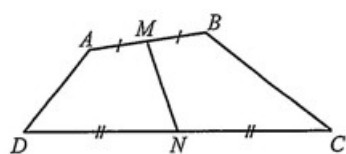
Câu 240: Một người dùng một lực F có độ lớn là 90 N làm một vật dịch chuyển một đoạn 100 m . Biết lực hợp F với hướng dịch chuyển là một góc 60° . Tính công sinh bởi lực F

 **Lời giải :**



MÓN QUÀ

Câu 241: Cho tứ giác $ABCD$ có M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD (Hình 51). Biết $AD = 2, BC = 3, AD \perp BC$. Tính độ dài đoạn thẳng MN .



Hình 51

Lời giải

Ta có: $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DN}$ và $\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN}$.

Từ đó, ta có:

$$\begin{aligned} 2\overline{MN} &= \overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DN} + \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN} = (\overline{MA} + \overline{MB}) + (\overline{DN} + \overline{CN}) + \overline{AD} + \overline{BC} \\ &= \overline{AD} + \overline{BC}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}).$$

$$\text{Do đó } \overline{MN}^2 = \frac{1}{4}(\overline{AD} + \overline{BC})^2 = \frac{1}{4}(\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + 2\overline{AD} \cdot \overline{BC})$$

$$= \frac{1}{4}(|\vec{AD}|^2 + |\vec{BC}|^2 + 0) = \frac{1}{4}(2^2 + 3^2) = \frac{13}{4}.$$

Vậy $MN = \frac{\sqrt{13}}{2}.$

Câu 242: Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC , ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}.$$

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cos A)^2}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 (1 - \cos^2 A)}$$

Mà $1 - \cos^2 A = \sin^2 A$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 \sin^2 A}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \quad (0^\circ < \hat{A} < 180^\circ \text{ nên } \sin A > 0)$$

Do đó $A = S_{ABC}$ hay $S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}.$ (đpcm)

Câu 243: Cho tam giác đều ABC có độ dài các cạnh bằng 1.

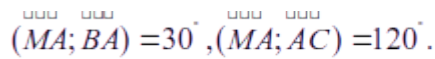
a) Gọi M là trung điểm của BC . Tính tích vô hướng của các cặp vector $\vec{MA}$ và $\vec{BA}, \vec{MA}$ và $\vec{AC}$

b) Gọi N là điểm đối xứng với B qua C . Tính tích vô hướng $\vec{AM} \cdot \vec{AN}$.

c) Lấy điểm P thuộc đoạn AN sao cho $AP = 3PN$. Hãy biểu thị các vector $\vec{AP}, \vec{MP}$ theo hai vector $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$. Tính độ dài đoạn MP .

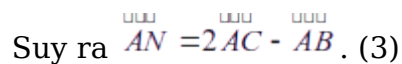
Lời giải

a) Do tam giác ABC là tam giác đều với độ dài các cạnh bằng 1, M là trung điểm BC , nên $MA = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

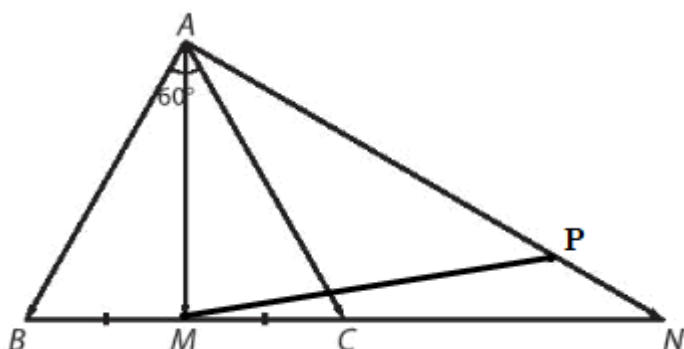


b) Do tam giác ABC đều, nên $(\overline{AB}; \overline{AC}) = 60^\circ$. (1)

Do N đối xứng với B qua C , nên C là trung điểm của BN .


$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

c) Do P thuộc đoạn AN thoả mãn $AP = 3PN$ nên



$$\vec{MP} = \vec{AP} - \vec{AM} = \left(\frac{3}{2} \vec{AC} - \frac{3}{4} \vec{AB} \right) - \left(\frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC} \right) = \vec{AC} - \frac{5}{4} \vec{AB}$$

Suy ra

$$MP^2 = |\vec{MP}|^2 = \left| \vec{AC} - \frac{5}{4} \vec{AB} \right|^2 = |\vec{AC}|^2 + \frac{25}{16} |\vec{AB}|^2 - 2 \cdot \vec{AC} \cdot \frac{5}{4} \vec{AB} = 1 + \frac{25}{16} - \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{16}$$

Từ đó

$$\text{Suy ra } MP = \frac{\sqrt{21}}{4}$$

Câu 244: Tính công sinh bởi một lực F có độ lớn 20 N kéo một vật dịch chuyển theo một vector d có độ dài 50 m và cho biết $(F, d) = 60^\circ$.

Lời giải

$$A = F \cdot d = |F| \cdot |d| \cdot \cos(F, d) = 20 \cdot 50 \cdot \cos 60^\circ = 20 \cdot 50 \cdot \frac{1}{2} = 500 \quad (\text{J}).$$

Ta có

Câu 245: Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 650 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 35 km/h . Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị km/h).

Lời giải

Gọi v_0 là vận tốc của máy bay khi không có gió, $|v_0| = 650 (\text{km/h})$;

v_1 là vận tốc của gió, $|v_1| = 35 (\text{km/h})$; v_2 là vận tốc của máy bay khi có gió.

Ta có: $v_2 = v_0 + v_1$. Vì $(v_1, v_0) = 45^\circ$ nên

$$\begin{aligned} v_2^2 &= (v_0 + v_1)^2 = v_0^2 + v_1^2 + 2v_0 \cdot v_1 = |v_0|^2 + |v_1|^2 + 2|v_0| \cdot |v_1| \cdot \cos 45^\circ \\ &= 650^2 + 35^2 + 2 \cdot 650 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 455898,36 \end{aligned}$$

Suy ra $|v_2| \approx 675,2 (\text{km/h})$.



Câu 246: Cho đoạn thẳng AB và O là trung điểm của AB . Với mỗi điểm M , chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + OA^2 + OB^2$.

Lời giải

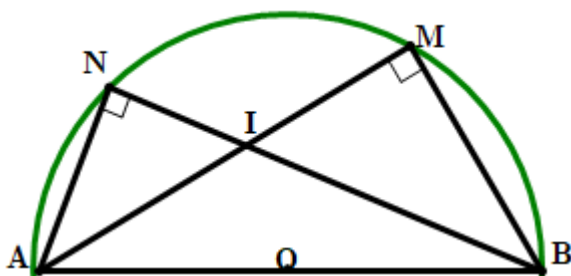
$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 \\ &= \overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2 \\ &= 2\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= 2\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{0} \\ &= 2\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2. \end{aligned}$$

Câu 247: Cho nửa đường tròn với đường kính $AB = 2R$. Gọi M và N là hai điểm trên nửa đường tròn sao cho hai dây cung AM và BN cắt nhau tại một điểm I .

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$. b) Tính $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN}$ theo R .

Lời giải

a) Do M thuộc nửa đường tròn với đường kính AB nên $\overline{AMB} = 90^\circ$.



Suy ra $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \cos \widehat{BAM}$. Từ đó, để ý rằng $\widehat{BAM} = (\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AB})$, ta có

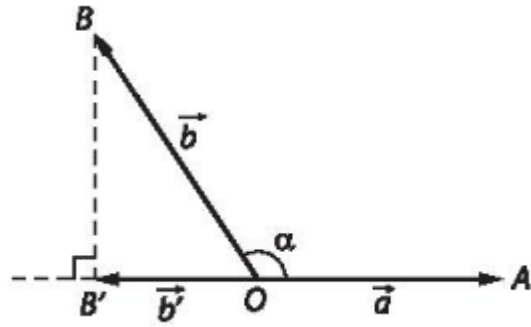
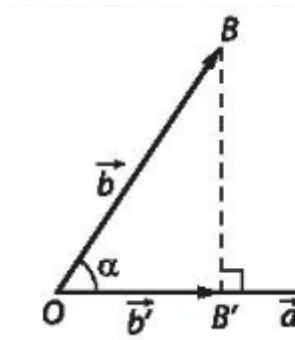
$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = |\overrightarrow{AI}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \cos \widehat{BAM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$$

b) Tương tự như phần a), ta cũng được $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Suy ra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} &= \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}^2 = 4R^2 \end{aligned}$$

Nhận xét. Một cách khái quát, ta chứng minh được $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a \cdot b'$, trong đó b' là hình chiếu vuông góc của vector b trên giá của vector a . Kết quả này được gọi là định lý chiếu.



Câu 248: Cho tam giác ABC đều cạnh a . Các điểm M, N lần lượt thuộc các tia BC và CA thỏa mãn $BM = \frac{1}{3}BC, CN = \frac{5}{4}CA$. Tính:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN}$

b) MN .

Lời giải

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}) = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \frac{5}{4}\overrightarrow{CA} \right)$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \frac{5}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \frac{5}{4}\overrightarrow{CA}$

$= a^2 \cos 120^\circ + \frac{5}{4}a^2 \cos 120^\circ + \frac{1}{3}a^2 + \frac{5}{12}a^2 \cos 120^\circ$

$= -a^2$.

b) $MN^2 = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN})^2 = \left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \frac{5}{4}\overrightarrow{CA} \right)^2 = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{5}{4}\overrightarrow{CA} \right)^2$

$= \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cos 120^\circ + \left(\frac{5}{4}\overrightarrow{CA} \right)^2 = \frac{4}{9}a^2 - \frac{5}{6}a^2 + \frac{25}{16}a^2 = \frac{169}{144}a^2$. Vậy

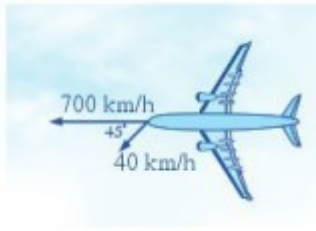
$MN = \frac{13}{12}a$.

Câu 249: Tính công sinh bởi một lực F có độ lớn 60 N kéo một vật dịch chuyển một vectơ d có độ dài 200m. Cho biết $(F, d) = 60^\circ$.

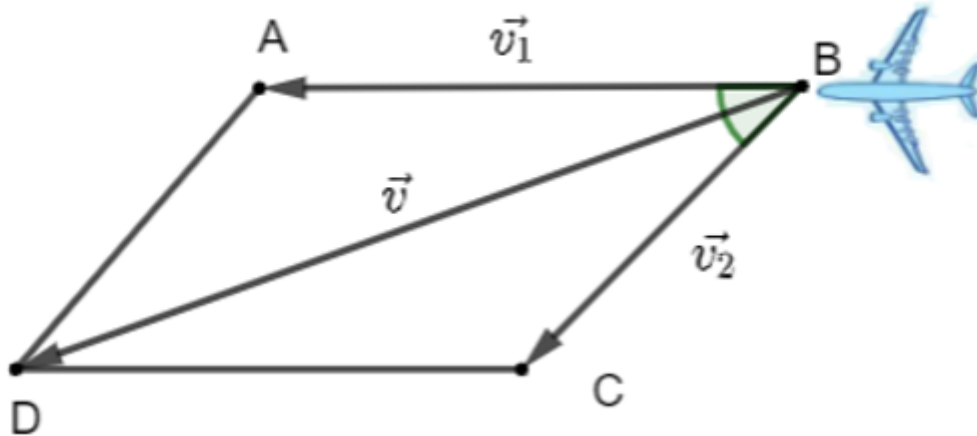
Lời giải

$A = |F| \cdot |d| \cdot \cos 60^\circ = 60 \cdot 200 \cos 60^\circ = 6000(J)$.

Câu 250: Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 700 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 40 km/h (Hình). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị km/h).



Lời giải



Khi đó ta có: $ABCD$ là hình bình hành có $\angle ABC = 45^\circ$.

Suy ra: $\angle DAB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$; $AD = |v_2| = 40$, $AB = |v_1| = 700$.

Ta cần tính độ dài đoạn thẳng BD , đây chính là độ dài vector v .

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABD , ta có:

$$\begin{aligned} BD^2 &= AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cdot \cos A \\ &= 40^2 + 700^2 - 2 \cdot 40 \cdot 700 \cdot \cos 135^\circ \approx 531197,98 \end{aligned}$$

Suy ra $BD \approx 728,83(km/h)$.

Vậy tốc độ mới của máy bay sau khi gặp gió thổi là 728,83km/h.

“Mỗi buổi sáng ở châu Phi, một con linh dương thức dậy
 Nó biết rằng nó phải chạy nhanh hơn cả con sư tử nếu không nó sẽ bị giết.
 Mỗi sáng một con sư tử thức dậy
 Nó biết rằng nó phải chạy nhanh hơn con linh dương chậm nhất... hoặc nó sẽ bị
 chết đói.
 Điều quan trọng không phải là việc bạn là sư tử hay linh dương
 Khi mặt trời mọc, bạn nên bắt đầu chạy...”

“Nếu bạn không làm bài tập của tớ mỗi ngày bạn sẽ bị tụt lại ở phía sau”.
