

Chương 3 :

Áp dụng vào một số vấn đề khác

“Có học thì phải có hành”

Sau khi đã xem xét các bất đẳng thức lượng giác cùng các phương pháp chứng minh thì ta phải biết vận dụng những kết quả đó vào các vấn đề khác.

Trong các chương trước ta có các ví dụ về bất đẳng thức lượng giác mà dấu bằng thường xảy ra ở trường hợp đặc biệt : tam giác đều, cân hay vuông ... Vì thế lại phát sinh ra một dạng bài mới : định tính tam giác dựa vào điều kiện cho trước.

Mặt khác với những kết quả của các chương trước ta cũng có thể dẫn đến dạng toán tìm cực trị lượng giác nhờ bất đẳng thức. Dạng bài này rất hay : kết quả được “giấu” đi, bắt buộc người làm phải tự “mò mẫm” đi tìm đáp án cho riêng mình. Công việc đó thật thú vị ! Và tất nhiên muốn giải quyết tốt vấn đề này thì ta cần có một “vốn” bất đẳng thức “kha khá”.

Bây giờ chúng ta sẽ cùng kiểm tra hiệu quả của các bất đẳng thức lượng giác trong chương 3 : “Áp dụng vào một số vấn đề khác”

Mục lục :

3.1.	Định tính tam giác.....	67
3.1.1.	Tam giác đều.....	67
3.1.2.	Tam giác cân.....	70
3.1.3.	Tam giác vuông.....	72
3.2.	Cực trị lượng giác.....	73
3.3.	Bài tập.....	76

3.1. Định tính tam giác :

3.1.1. Tam giác đều :

Tam giác đều có thể nói là tam giác đẹp nhất trong các tam giác. Ở nó ta có được sự đồng nhất giữa các tính chất của các đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác, tâm ngoại tiếp, tâm nội tiếp, tâm bàng tiếp tam giác ... Và các dữ kiện đó lại cũng trùng hợp với điều kiện xảy ra dấu bằng ở các bất đẳng thức lượng giác đối xứng trong tam giác. Do đó sau khi giải được các bất đẳng thức lượng giác thì ta cần phải nghĩ đến việc vận dụng nó trở thành một phương pháp khi nhận dạng tam giác đều.

Ví dụ 3.1.1.1.

$$CMR \Delta ABC \text{ đều khi thỏa : } m_a + m_b + m_c = \frac{9}{2}R$$

Lời giải :

Theo BCS ta có :

$$\begin{aligned} (m_a + m_b + m_c)^2 &\leq 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \\ \Leftrightarrow (m_a + m_b + m_c)^2 &\leq \frac{9}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \\ \Leftrightarrow (m_a + m_b + m_c)^2 &\leq 9R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \end{aligned}$$

$$\text{mà : } \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow (m_a + m_b + m_c)^2 \leq 9R^2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{81}{4}R^2$$

$$\Rightarrow m_a + m_b + m_c \leq \frac{9}{2}R$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều $\Rightarrow đpcm$.

Ví dụ 3.1.1.2.

$$CMR \text{ nếu thỏa } \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{ab}}{4c} \text{ thì } \Delta ABC \text{ đều.}$$

Lời giải :

Ta có :

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{ab}}{4c} &\leq \frac{a+b}{8c} = \frac{2R(\sin A + \sin B)}{2R \cdot 8 \sin C} = \frac{2R \cdot 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2R \cdot 8 \cdot 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{8 \sin \frac{C}{2}} \leq \frac{1}{8 \cos \frac{A+B}{2}} \\
 &\Rightarrow \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \leq \frac{1}{8 \cos \frac{A+B}{2}} \\
 &\Leftrightarrow 8 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \leq 1 \\
 &\Leftrightarrow 4 \cos \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) - 1 \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow 4 \cos^2 \frac{A+B}{2} - 4 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(2 \cos \frac{A+B}{2} - \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{A-B}{2} \geq 0 \\
 &\Rightarrow \text{đpcm.}
 \end{aligned}$$

Ví dụ 3.1.1.3.

CMR ΔABC đều khi nó thỏa : $2(h_a + h_b + h_c) = (a + b + c)\sqrt{3}$

Lời giải :

Điều kiện đề bài tương đương với :

$$\begin{aligned}
 2.2p \left(\frac{r}{a} + \frac{r}{b} + \frac{r}{c} \right) &= (a + b + c)\sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow \frac{r}{a} + \frac{r}{b} + \frac{r}{c} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}} + \frac{1}{\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2}} &= \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

Mặt khác ta có :

$$\frac{1}{\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\cot \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cot \frac{B}{2}} \right) = \frac{1}{4} \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} \right)$$

Tương tự :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}} &\leq \frac{1}{4} \left(\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) \\ \frac{1}{\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2}} &\leq \frac{1}{4} \left(\tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}} + \frac{1}{\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2}} &\leq \frac{1}{2} \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{1}{2} \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) &\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3} \\ \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Ví dụ 3.1.1.4.

CMR nếu thỏa $S = 3Rr \frac{\sqrt{3}}{2}$ thì ΔABC đều.

Lời giải :

Ta có :

$$\begin{aligned} S &= 2R^2 \sin A \sin B \sin C = 2R^2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = r 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &\leq r 4R \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{2} Rr \\ &\Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Ví dụ 3.1.1.5.

CMR ΔABC đều khi nó thỏa $m_a m_b m_c = pS$

Lời giải :

Ta có :

$$m_a^2 = \frac{1}{4} (2b^2 + 2c^2 - a^2) = \frac{1}{4} (b^2 + c^2 + 2bc \cos A) \geq \frac{1}{2} bc (1 + \cos A) = bc \cos^2 \frac{A}{2}$$

mà :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow \cos^2 A = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{4bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc} = \frac{p(p-a)}{bc}$$

$$\Rightarrow m_a \geq \sqrt{p(p-a)}$$

Tương tự :

$$\begin{cases} m_b \geq \sqrt{p(p-b)} \\ m_c \geq \sqrt{p(p-c)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_a m_b m_c \geq p \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pS$$

$\Rightarrow$ đpcm.

3.1.2. Tam giác cân :

Sau tam giác đều thì tam giác cân cũng đẹp không kém. Và ở đây thì chúng ta sẽ xét những bất đẳng thức có dấu bằng xảy ra khi hai biến bằng nhau và khác biến thứ ba. Ví dụ $A = B = \frac{\pi}{6}; C = \frac{2\pi}{3}$. Vì thế nó khó hơn trường hợp xác định tam giác đều.

Ví dụ 3.1.2.1.

CMR $\triangle ABC$ cân khi nó thỏa điều kiện $\tan^2 A + \tan^2 B = 2 \tan^2 \frac{A+B}{2}$ và nhọn.

Lời giải :

$$\text{Ta có : } \tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \frac{2 \sin(A+B)}{\cos(A+B) + \cos(A-B)} = \frac{2 \sin C}{\cos(A-B) - \cos C}$$

$$\text{vì } \cos(A-B) \leq 1 \Rightarrow \cos(A-B) - \cos C \leq 1 - \cos C = 2 \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin C}{\cos(A-B) - \cos C} \geq \frac{2 \sin C}{2 \sin^2 \frac{C}{2}} = \frac{4 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin^2 \frac{C}{2}} = 2 \cot \frac{C}{2} = 2 \tan \frac{A+B}{2}$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B \geq 2 \tan \frac{A+B}{2}$$

$$\text{Từ giả thiết : } \tan^2 A + \tan^2 B = 2 \tan^2 \frac{A+B}{2} \leq 2 \left(\frac{\tan A + \tan B}{2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(\tan^2 A + \tan^2 B) \leq \tan^2 A + \tan^2 B + 2 \tan A \tan B$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\tan A - \tan B)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \tan A = \tan B \\ &\Leftrightarrow A = B \\ &\Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Ví dụ 3.1.2.2.

CMR ΔABC cân khi thỏa $h_a = \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}$

Lời giải :

Trong mọi tam giác ta luôn có : $h_a \leq l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$
mà $b+c \geq 2\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{2bc}{b+c} \leq \frac{bc}{\sqrt{bc}} = \sqrt{bc}$
 $\Rightarrow \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} \leq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2} \Rightarrow h_a \leq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}$
Đẳng thức xảy ra khi ΔABC cân $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 3.1.2.3.

CMR nếu thỏa $r + r_a = 4R \sin \frac{B}{2}$ thì ΔABC cân.

Lời giải :

Ta có :

$$\begin{aligned} r + r_a &= (p-b) \tan \frac{B}{2} + p \tan \frac{B}{2} = (2p-b) \tan \frac{B}{2} = (a+c) \tan \frac{B}{2} = 2R(\sin A + \sin C) \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} \\ &= 4R \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} \cdot \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = 4R \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2} \cdot \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = 4R \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2} \leq 4R \sin \frac{B}{2} \\ &\Rightarrow r + r_a \leq 4R \sin \frac{B}{2} \quad \text{Đẳng thức xảy ra khi } \Delta ABC \text{ cân} \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Ví dụ 3.1.2.4.

CMR nếu $S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ thì ΔABC cân.

Lời giải :

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } a^2 + b^2 &\leq 2ab \Rightarrow \frac{1}{4}(a^2 + b^2) \geq \frac{1}{2}ab \geq \frac{1}{2}ab \sin C = S \\ \Rightarrow \frac{1}{4}(a^2 + b^2) &\geq S \Rightarrow \Delta ABC \text{ cân nếu thỏa điều kiện đề bài.} \end{aligned}$$

Ví dụ 3.1.2.5.

CMR ΔABC cân khi thỏa $2\cos A + \cos B + \cos C = \frac{9}{4}$

Lời giải :

$$\begin{aligned} \text{Ta có :} \\ 2\cos A + \cos B + \cos C &= 2\left(1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}\right) + 2\cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ &= -4\sin^2 \frac{A}{2} + 2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = -\left(2\sin \frac{A}{2} - \frac{1}{2}\cos \frac{B-C}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cos^2 \frac{B-C}{2} - \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \\ &= -\left(2\sin \frac{A}{2} - \frac{1}{2}\cos \frac{B-C}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\sin^2 \frac{B-C}{2} + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4} \\ \text{Đẳng thức xảy ra khi } B &= C \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

3.1.3. Tam giác vuông :

Cuối cùng ta xét đến tam giác vuông, đại diện khó tính nhất của tam giác đối với bất đẳng thức lượng giác. Dường như khi nhận diện tam giác vuông, phương pháp biến đổi tương đương các đẳng thức là được dùng hơn cả. Và ta hiếm khi gặp bài toán nhận diện tam giác vuông mà cần dùng đến bất đẳng thức lượng giác.

Ví dụ 3.1.3.1.

CMR ΔABC vuông khi thỏa $3\cos B + 6\sin C + 4\sin B + 8\cos C = 15$

Lời giải :

Theo BCS ta có :

$$\begin{cases} 3\cos B + 4\sin B \leq \sqrt{(3^2 + 4^2)(\cos^2 B + \sin^2 B)} = 5 \\ 6\sin C + 8\cos C \leq \sqrt{(6^2 + 8^2)(\sin^2 C + \cos^2 C)} = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3\cos B + 4\sin B + 6\sin C + 8\cos C \leq 15$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} 3\cos B + 4\sin B = 5 \\ 6\sin C + 8\cos C = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\cos B}{3} = \frac{\sin B}{4} \\ \frac{\sin C}{6} = \frac{\cos C}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan B = \frac{4}{3} \\ \cot C = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \tan B = \cot C \Leftrightarrow B + C = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

3.2. Cực trị lượng giác :

Đây là lĩnh vực vận dụng thành công và triệt để bất đẳng thức lượng giác vào giải toán. Đặc biệt trong dạng bài này, gần như ta là người đi trong sa mạc không biết phương hướng đường đi, ta sẽ không biết trước kết quả mà phải tự mình dùng các bất đẳng thức đã biết để tìm ra đáp án cuối cùng. Vì lẽ đó mà dạng toán này thường rất “khó xơi”, nó đòi hỏi ta phải biết khéo léo sử dụng các bất đẳng thức cũng như cân một vốn liếng kinh nghiệm về bất đẳng thức không nhỏ.

Ví dụ 3.2.1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$f(x, y) = \frac{a \sin^4 x + b \cos^4 y}{c \sin^2 x + d \cos^2 y} + \frac{a \cos^4 x + b \sin^4 y}{c \cos^2 x + d \sin^2 y}$$

với a, b, c, d là các hằng số dương.

Lời giải :

$$\text{Đặt } f(x, y) = af_1 + bf_2 \quad \text{với } f_1 = \frac{\sin^4 x}{c \sin^2 x + d \cos^2 y} + \frac{\cos^4 x}{c \cos^2 x + d \sin^2 y}$$

$$f_2 = \frac{\cos^4 x}{c \sin^2 x + d \cos^2 y} + \frac{\sin^4 x}{c \cos^2 x + d \sin^2 y}$$

$$\text{Ta có : } c + d = c(\sin^2 x + \cos^2 x) + d(\sin^2 y + \cos^2 y)$$

Do đó :

$$\begin{aligned}
 (c+d)f_1 &= \left[(c \sin^2 x + d \cos^2 y) + (c \cos^2 x + d \sin^2 y) \right] \left[\frac{\sin^4 x}{c \sin^2 x + d \cos^2 y} + \frac{\cos^4 x}{c \cos^2 x + d \sin^2 y} \right] \\
 &\geq \left(\sqrt{c \sin^2 x + d \cos^2 y} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{c \sin^2 x + d \cos^2 y}} + \sqrt{c \cos^2 x + d \sin^2 y} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{c \cos^2 x + d \sin^2 y}} \right)^2 = 1 \\
 \Rightarrow f_1 &\geq \frac{1}{c+d} \quad \text{Tương tự : } f_2 \geq \frac{1}{c+d} . \text{ Vậy } f(x, y) = af_1 + bf_2 \geq \frac{a+b}{c+d}
 \end{aligned}$$

Ví dụ 3.2.2.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :
 $P = \cos 3A + \cos 3B - \cos 3C$

Lời giải :

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có : } \cos 3C &= \cos 3[\pi - (A + B)] = \cos [3\pi - 3(A + B)] = -\cos 3(A + B) \text{ nên} \\
 P &= \cos 3A + \cos 3B + \cos 3(A + B) = 2 \cos 3\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos 3\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2 \cos^2 3\left(\frac{A+B}{2}\right) - 1 \\
 \Rightarrow P + \frac{3}{2} &= 2 \cos^2 3\left(\frac{A+B}{2}\right) + 2 \cos 3\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos 3\left(\frac{A+B}{2}\right) + \frac{1}{2} = f(x, y) \\
 \Delta' &= \cos^2 3\left(\frac{A-B}{2}\right) - 1 \leq 0 \Rightarrow P \geq -\frac{3}{2} \\
 P = -\frac{3}{2} &\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ \cos 3\left(\frac{A+B}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cos 3\left(\frac{A-B}{2}\right) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 3\left(\frac{A-B}{2}\right) = 1 \\ \cos 3\left(\frac{A+B}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cos 3\left(\frac{A-B}{2}\right) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \cos 3A = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \begin{cases} A = \frac{2\pi}{9} \\ A = \frac{4\pi}{9} \end{cases} \end{cases} \\
 \text{Vậy } P_{\min} &= -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B = \frac{2\pi}{9}, C = \frac{5\pi}{9} \\ A = B = \frac{4\pi}{9}, C = \frac{\pi}{9} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ví dụ 3.2.3.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C}$$

Lời giải :

Ta có :

$$\begin{aligned} P &= \frac{3}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} - 1 \\ &= \frac{3}{3 - (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)} - 1 \\ &\leq \frac{3}{3 - \frac{9}{4}} - 1 = 3 \end{aligned}$$

Do đó : $P_{\max} = 3 \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Ví dụ 3.2.4.

Tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x}$

Lời giải :

Điều kiện : $\sin x \geq 0, \cos x \geq 0$

Ta có : $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x} \leq \sqrt[4]{\sin x} \leq 1$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Mặt khác : $y = \sqrt[4]{\sin x} - \sqrt{\cos x} \geq -\sqrt{\cos x} \geq -1$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = k2\pi$

$$\text{Vậy } \begin{cases} y_{\max} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ y_{\min} = -1 \Leftrightarrow x = k2\pi \end{cases}$$

Ví dụ 3.2.5.

Cho hàm số $y = \frac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x - 2}$. Hãy tìm Max y trên miền xác định của nó.

Lời giải :

Vì $\sin x$ và $\cos x$ không đồng thời bằng 1 nên y xác định trên $\mathbb{R}$.

Y_0 thuộc miền giá trị của hàm số khi và chỉ khi $Y_0 = \frac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x - 2}$ có nghiệm.

$$\Leftrightarrow Y_0 \sin x + (Y_0 - 1) \cos x = 2Y_0 + 2 \text{ có nghiệm.}$$

$$(2Y_0 + 2)^2 \leq Y_0^2 + (Y_0 - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2Y_0^2 + 10Y_0 + 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5 - \sqrt{19}}{2} \leq Y_0 \leq \frac{-5 + \sqrt{19}}{2}$$

$$\text{Vậy } y_{\max} = \frac{-5 + \sqrt{19}}{2}$$

3.3. Bài tập :

CMR $\triangle ABC$ đều nếu nó thỏa một trong các đẳng thức sau :

$$3.3.1. \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A = \frac{3}{4}$$

$$3.3.2. \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \sin A + \sin B + \sin C$$

$$3.3.3. \frac{1}{\sin 2A} + \frac{1}{\sin 2B} + \frac{1}{\sin 2C} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \tan A \tan B \tan C$$

$$3.3.4. \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\cot A + \cot B + \cot C} \right)^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}$$

$$3.3.5. \frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{a + b + c} = \frac{1}{2}$$

$$3.3.6. m_a m_b m_c = abc \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$3.3.7. l_a l_b l_c = abc \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$3.3.8. bc \cot \frac{A}{2} + ca \cot \frac{B}{2} + ab \cot \frac{C}{2} = 12S$$

$$3.3.9. \left(1 + \frac{1}{\sin A} \right) \left(1 + \frac{1}{\sin B} \right) \left(1 + \frac{1}{\sin C} \right) = 5 + \frac{26\sqrt{3}}{9}$$

$$3.3.10. \frac{\sin A \sin B \sin C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} = \frac{1}{6\sqrt{3}}$$