PHÒNG GD&ĐT HẠ HOÀ

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2023-2024
MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề thi có 03 trang)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN: *(16 câu; 8,0 điểm)*

Câu 1. Cho a là nghiệm của phương trình $\sqrt{(x-3)(x-6)}-4\sqrt{3-x}=0$ với $x<3$.
Khi đó a^2-a bằng

A. 110. **B.** 100. **C.** 90. **D.** -110.

Câu 2. Số các giá trị hữu tỉ của x để biểu thức $B=\dfrac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+1}$ nhận giá trị nguyên là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 3. Đường thẳng $(d): y=(2-2m)x+8m-10$ luôn đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ với mọi giá trị của m. Khi đó biểu thức $A=x_0^3+y_0^3$ có giá trị bằng

A. -56. **B.** 56. **C.** 72. **D.** -72.

Câu 4. Số các giá trị của m để phương trình $x^2-(m+1)x+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt và nghiệm này bằng một nửa nghiệm kia là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 5. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(-2;3); B(-4;-4); C(5;-1)$. Kẻ $AH\perp BC$ tại H. Toạ độ của điểm H là

A. $\left(\dfrac{1}{10};\dfrac{-28}{10}\right)$. **B.** $(-3;7)$. **C.** $\left(\dfrac{-1}{10};\dfrac{-27}{10}\right)$. **D.** $(-3;4)$.

Câu 6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx-2y=m-2 \\ (m-1)^2x-y=m^2-1 \end{cases}$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để hệ phương trình đã cho có nghiệm nguyên là

A. 5. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=mx+1$ (với m là tham số) cắt nhau tại A và B. Giá trị của m để đoạn thẳng AB có độ dài nhỏ nhất là

A. $m=-1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=2\sqrt{2}$. **D.** $m=0$.

Câu 8. Cho phương trình $x^2-2x+m-1=0$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1^2+x_2^2-3x_1x_2=2m^2+|m-3|$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 9. Cho hình thang $ABCD$ có đáy nhỏ AB và hai cạnh bên vuông góc với nhau. Kẻ $AH\perp CD\,(H\in CD)$. Đẳng thức nào sau đây là **đúng**?

A. $AH^2=HD.HC$. **B.** $AH^2=AD.BC$.

C. $AH(DC-AB)=AD.BC.$ **D.** $AH.DC=AD.BC.$

Câu 10. Cho hình vuông $ABCD.$ Gọi M là trung điểm của $BC.$ Giá trị của $\sin \widehat{AMD}$ là

A. $\frac{4}{5}.$ **B.** $\frac{3}{5}.$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}.$ **D.** $\frac{\sqrt{5}}{5}.$

Câu 11. Cho tam giác ABC có $AB=14cm;\ AC=35cm,$ đường phân giác AD bằng $12cm.$ Diện tích của tam giác ADC là

A. $588\ cm^2.$ **B.** $440\ cm^2.$ **C.** $84\ cm^2.$ **D.** $168\ cm^2.$

Câu 12. Cho tam giác ABC, vẽ hình bình hành $AMON$ sao cho $M\in AB;O\in BC;N\in AC.$ Biết $S_{MOB}=a^2;S_{NOC}=b^2$ (đvdt). Diện tích S của hình bình hành $AMON$ bằng bao nhiêu ?

A. $S=ab.$ **B.** $S=2ab.$ **C.** $S=0,5(a^2+b^2).$ **D.** $S=(a^2+b^2).$

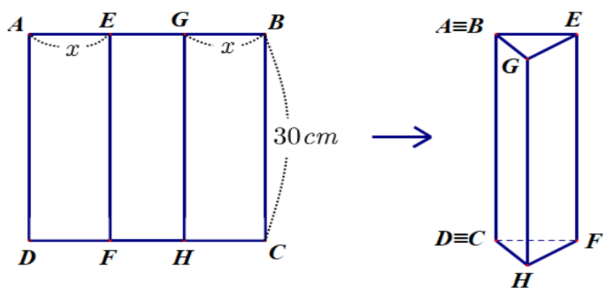
Câu 13. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp $(O;R)$ có $AB=130cm;\ BC=110cm;$ $AD=90cm.$ Khi đó độ dài cạnh CD là

A. $60cm.$ **B.** $70cm.$ **C.** $80cm.$ **D.** $100cm.$

Câu 14. Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ tiếp xúc ngoài tại A và cùng tiếp xúc với đường thẳng d lần lượt tại các tiếp điểm S và $T.$ Khi đó độ dài AT bằng

A. $\frac{2R\sqrt{r}}{\sqrt{R+r}}.$ **B.** $\frac{2r\sqrt{R}}{\sqrt{R+r}}.$ **C.** $\frac{4R^2r}{\sqrt{R+r}}.$ **D.** $\frac{4Rr^2}{\sqrt{R+r}}.$

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là $30\ cm.$ Trên cạnh AB lấy hai điểm E,G sao cho $AE=BG=x\ (cm)$ và điểm E nằm giữa hai điểm A và điểm $G.$ Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt CD tại $F.$ Qua G kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt CD tại H. Người ta gập hình vuông theo hai cạnh EF và GH sao cho cạnh AD trùng với cạnh BC như hình vẽ để tạo thành hình lăng trụ đứng khuyết đáy. Tìm x để thể tích hình lăng trụ lớn nhất.



A. $10\ cm.$ **B.** $3\ cm.$ **C.** $15\ cm.$ **D.** $5\ cm.$

Câu 16. Trong một đề thi có 3 bài toán (bài 1, bài 2, bài 3). Có 25 thí sinh tham gia giải đề, mỗi thí sinh đều đã giải được ít nhất một trong 3 bài toán đó. Biết rằng, trong số thí sinh không giải được bài 1 thì số thí sinh đã giải được bài 2 nhiều gấp hai lần số thí sinh đã giải được bài 3. Số thí sinh chỉ giải được bài 1 nhiều hơn số thí sinh giải được bài 1 và thêm bài khác là một thí sinh. Số thí sinh chỉ giải được bài 1 bằng số thí sinh chỉ giải được bài 2 cộng với số thí sinh chỉ giải được bài 3. Hỏi có bao nhiêu thí sinh chỉ giải được bài 2?

A. 4 thí sinh. **B.** 5 thí sinh. **C.** 6 thí sinh. **D.** 8 thí sinh.

II. PHẦN TỰ LUẬN: ***(4 câu; 12,0 điểm)***

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $y^2 + 2y - 3 = x^2 - 3x$.

b) Cho hai số tự nhiên a,b thỏa mãn $b > a$ và $(2a-1)^2 = 12b^2 - 4ab - a^2$.

Chứng minh rằng: $6b + a$ là một số chính phương.

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Cho các số thực $a;b;c$ thoả mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 4;$

$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} = 1$ (với $abc \neq 0; (a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$).

Tính giá trị của biểu thức: $P = abc.$

b) Giải phương trình: $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = (2-x)\sqrt[3]{x^4 - x^2}$.

c) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x - 12y + 7 = 3x^2 - 6y^2 \\ (y-3)^5 + (x+3)^5 = (2x+1)^5 \end{cases}$.

Câu 3. (4,0 điểm).

Cho $(O;R)$ và điểm A cố định sao cho $OA = 2R$, đường kính BC quay quanh tâm O sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng OA tại điểm thứ hai là I. Các đường thẳng AB, AC cắt đường tròn $(O;R)$ lần lượt tại điểm thứ hai là D và E. Gọi K là giao điểm của DE với OA.

a) Chứng minh rằng $AK.AI = AE.AC$.

b) Tính độ dài đoạn thẳng AK theo R.

c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp ΔADE luôn thuộc một đường cố định khi đường kính BC quay quanh tâm O sao cho tam giác ABC thoả mãn là tam giác nhọn.

Câu 4 (1,0 điểm).

Với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M = \frac{a+1}{a^2+2a+2} + \frac{b+1}{b^2+2b+2} + \frac{c+1}{c^2+2c+2}$.

---------------------- Hết ----------------------

Họ và tên thí sinh:..SBD:..................

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

PHÒNG GD&ĐT HẠ HÒA	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN** **LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2023 – 2024** **Môn: Toán** HƯỚNG DẪN CHẤM CHÍNH THỨC *(Hướng dẫn chấm có 07 trang)*

I. Một số chú ý khi chấm bài tự luận.

- Hướng dẫn chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm thi giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.
- Thí sinh làm bài theo cách khác với hướng dẫn chấm mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của hướng dẫn chấm.
- Điểm bài thi là tổng điểm các câu không làm tròn số.

III. Đáp án – Thang điểm.

Phần I. TRẮC NGHIỆM (8,0 điểm).

Mỗi câu trắc nghiệm đúng được 0,5 điểm

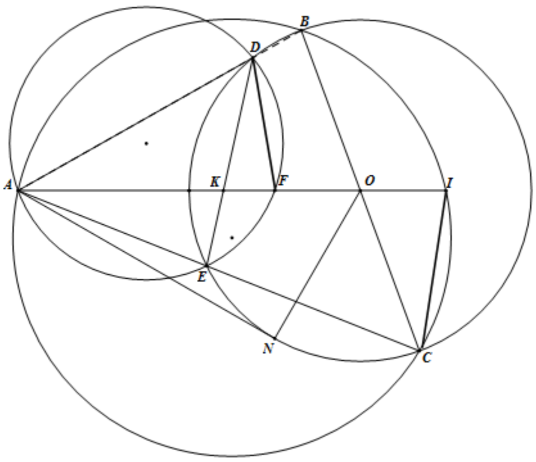
Câu	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Đ Án	**A**	**C**	**B**	**C**	**C**	**C**	**D**	**C**	**C**	**A**	**D**	**B**	**B**	**B**	**A**	**C**
Điểm	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5

Phần II. TỰ LUẬN (12,0 điểm).

Câu	**NỘI DUNG**	**Điểm**
Câu 1 **3,0 Điểm**	a)Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $y^2+2y-3=x^2-3x$.	**1,5**
	PT $\Leftrightarrow 4y^2+8y-12=4x^2-12x \Leftrightarrow (2y+2)^2-(2x-3)^2=7$ $\Leftrightarrow (2y+2x-1)(2y-2x+5)=7$	0,5
	Với x, y nguyên dương thì $2y+2x-1>0$. Nên ta có $\begin{cases}2y+2x-1=1\\2y-2x+5=7\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}2y+2x-1=7\\2y-2x+5=1\end{cases}$.	0,5
	Trường hợp 1: $\begin{cases}2y+2x-1=1\\2y-2x+5=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x-6=-6\\2y+2x-1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ (loại). Trường hợp 2: $\begin{cases}2y+2x-1=7\\2y-2x+5=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x-6=6\\2y+2x-1=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$ (TM). Vậy phương trình có nghiệm là $(x;y)=(3;1)$.	0,5
	b) Cho hai số tự nhiên a,b thỏa mãn $b>a$ và $(2a-1)^2=12b^2-4ab-a^2$. Chứng minh rằng: $6b+a$ là một số chính phương.	**1,5**
	Ta có $(2a-1)^2=12b^2-4ab-a^2 \Leftrightarrow (2a-1)^2=(2b-a)(6b+a)$	0,25
	Vì $(2a-1)^2$ là số chính phương lẻ nên $2b-a;6b+a$ là các số tự nhiên $\Rightarrow a$ lẻ	0,25
	Gọi $d=(2b-a;6b+a)$ với $d\in\mathbb{N}^* \Rightarrow d$ lẻ.	0,25

	Suy ra $\begin{cases}2b-a\,\vdots\,d\\6b+a\,\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6b-3a\,\vdots\,d\\6b+a\,\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow 4a\,\vdots\,d$	0,25
	Mặt khác $\begin{cases}2b-a\,\vdots\,d\\6b+a\,\vdots\,d\end{cases}\Rightarrow(2b-a)(6b+a)\,\vdots\,d^2$ suy ra $(2a-1)^2\,\vdots\,d^2\Rightarrow 2a-1\Rightarrow 4a-2\,\vdots\,d\Rightarrow 4a-(4a-2)\,\vdots\,d\Rightarrow 2\,\vdots\,d\Rightarrow d\in\{1;2\}$ Mà d lẻ nên $d=1$. Hay $(2b-a;\,6b+a)=1$.	0,25
	Từ đó suy ra $2b-a;6b+a$ đều là số chính phương. Vậy $6b+a$ là một số chính phương.	0,25
Câu 2 4,0 Điểm	a) Cho các số thực $a;b;c$ thoả mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=4;$ $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=1$ (với $abc\neq 0;\,(a+b)(b+c)(c+a)\neq 0$). Tính giá trị của biểu thức $P=abc$.	**1,0**
	Ta có $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=4\Rightarrow\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1=7$ $\Rightarrow(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=7$	0,25
	Suy ra $a+b+c=7$ (1) (vì $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=1$) Mặt khác từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4\Rightarrow ab+bc+ca=4abc$ (2)	0,25
	Ta lại có $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}=1$ $\Rightarrow(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b)=(a+b)(b+c)(c+a)$ Hay $a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca=(a+b)(b+c)(c+a)$ $\Leftrightarrow(a+b+c)^2+ab+bc+ca=(a+b)(b+c)(c+a)$ $\Leftrightarrow(a+b+c)^2+ab+bc+ca=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ (3)	0,25
	Từ (1); (2) và (3) suy ra $7^2+4abc=7.4abc-abc\Rightarrow 23abc=49\Rightarrow abc=\frac{49}{23}$	0,25
	b) Giải phương trình: $x^3-4x^2+3x+2=(2-x)\sqrt[3]{x^4-x^2}$ (*)	**1,5**
	PT (*) $\Leftrightarrow x^3-4x^2+4x-x+2=(2-x)\sqrt[3]{x^4-x^2}$ $\Leftrightarrow x(x-2)^2-(x-2)+(x-2)\sqrt[3]{x^4-x^2}=0$ $\Leftrightarrow(x-2)\left(x^2-2x-1+\sqrt[3]{x^4-x^2}\right)=0$	0,25
	TH1: $x-2=0\Leftrightarrow x=2$	0,25
	TH2: $x^2-2x-1+\sqrt[3]{x^4-x^2}=0$ Ta có $x=0$ không là nghiệm của phương trình. Với $x\neq 0$ chia cả 2 vế của phương trình cho x ta được: $x-\frac{1}{x}-2+\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=0$.	0,25

	Đặt $\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=y$ ta có PT: $y^3+y-2=0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2+y+2)=0$ $\Leftrightarrow y-1=0 \Leftrightarrow y=1 \quad \left(Do\ y^2+y+2=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0\right)$	0,5
	Với $y=1 \Rightarrow x-\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \quad (TM)$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{2;\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.	0,25
	c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3+3x-12y+7=3x^2-6y^2 & (1) \\ (y-3)^5+(x+3)^5=(2x+1)^5 & (2) \end{cases}$	**1,5**
	Từ PT(1) ta có $(x-1)^3=(y-2)^3 \Leftrightarrow x-1=y-2 \Leftrightarrow y=x+1 \quad (3)$	0,25
	Thay(3) vào(2)ta được pt: $(x+1-3)^5+(x+3)^5=(2x+1)^5$ $(x-2)^5+(x+3)^5=(2x+1)^5\ (*)$	0,25
	Đặt $a=x-2; b=x+3 \Rightarrow a+b=2x+1$ thay vào (*) ta được $a^5+b^5=(a+b)^5$ $\Leftrightarrow a^5+b^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ $\Leftrightarrow 5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4=0$ $\Leftrightarrow 5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)=0$ $\Leftrightarrow 5ab\left[(a+b)^3-ab(a+b)\right]=0$ $\Leftrightarrow 5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)=0$	0,5
	+) Với $a=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$ suy ra $y=2+1=3$. +) Với $b=0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3$ suy ra $y=-3+1=-2$. +) Với $a+b=0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ suy ra $y=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$. +) Với $a^2+ab+b^2=0 \Rightarrow a=b=0 \Rightarrow x-2=x+3=0$ (vô lí). Vậy $S=\left\{(2;3);(-3;-2);\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\right\}$	0,5
Câu 3 4,0	Cho $(O;R)$ và điểm A cố định sao cho $OA=2R$, đường kính BC quay quanh tâm O sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng OA tại điểm thứ hai là I. Các đường thẳng AB, AC cắt đường tròn $(O;R)$ lần lượt tại điểm thứ hai là D và E. Gọi K là giao điểm của DE với OA. a) Chứng minh rằng $AK.AI=AE.AC$. b) Tính độ dài đoạn thẳng AK theo R. c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn thuộc một	**4,0**

Điểm		
	đường cố định khi đường kính BC quay quanh tâm O sao cho tam giác ABC thoả mãn là tam giác nhọn.	
		
	a) Chứng minh rằng $AK.AI = AE.AC$.	**1,5**
	Ta có tứ giác $BDEC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AED} = \widehat{AEK}$ (1)	0,25
	Ta lại có tứ giác $ABIC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AIC}$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AIC} = \widehat{AEK}$	0,25
	Mà $\widehat{CAI}$ *chung*	0,25
	$\Rightarrow \Delta AEK \backsim \Delta AIC(g.g) \Rightarrow \dfrac{AE}{AK} = \dfrac{AI}{AC} \Rightarrow AK.AI = AE.AC$	0,5
	b) Tính độ dài đoạn thẳng AK theo R.	**1,5**
	Xét ΔBOI và ΔAOC có $\widehat{IBC} = \widehat{IAC}; \widehat{BOI} = \widehat{AOC} \Rightarrow \Delta BOI \backsim \Delta AOC(g.g)$	0,25
	$\Rightarrow \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{OI}{OC} \Rightarrow OI = \dfrac{OB.OC}{OA} = \dfrac{R.R}{2R} = \dfrac{R}{2} \Rightarrow AI = AO + OI = 2R + \dfrac{R}{2} = \dfrac{5R}{2}$	0,25
	Kẻ tiếp tuyến AN của $(O;R)$. Dễ có $\Delta AEN \backsim \Delta ANC(g.g) \Rightarrow AN^2 = AE.AC$	0,5
	Xét tam giác AON vuông tại N có $AN^2 = AO^2 - ON^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \Rightarrow AE.AC = AN^2 = 3R^2$	0,25
	Theo câu a) ta có $AK = \dfrac{AE.AC}{AI} = \dfrac{3R^2}{\frac{5R}{2}} = \dfrac{6R}{5}$. Vậy $AK = \dfrac{6R}{5}$.	0,25
	c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn thuộc một đường cố định khi đường kính BC quay quanh tâm O sao cho tam giác ABC thoả mãn là tam giác nhọn.	**1,0**
	Gọi F là giao của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE với AI. Ta có $\widehat{AFD} = \widehat{AED}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AD)	0,25
	Mà $\widehat{AED} = \widehat{ABC}$ ($BDEC$ nội tiếp) $\widehat{AFD} = \widehat{ABC}$. Suy ra tứ giác $BDFO$ nội tiếp	0,25
	$\Rightarrow AF.AO = AD.AB$ và $AN^2 = AD.AB \Rightarrow AF.AO = AN^2$ $\Rightarrow AF = \dfrac{AN^2}{AO} = \dfrac{3R^2}{2R} = \dfrac{3R}{2}$	0,25
	Do AF không đổi, mà A cố định nên F cố định. Vậy tâm đường tròn ngoại	0,25

	tiếp tam giác ADE luôn thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AF cố định.	
Câu 4 1,0 Điểm	Với a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=\dfrac{a+1}{a^2+2a+2}+\dfrac{b+1}{b^2+2b+2}+\dfrac{c+1}{c^2+2c+2}$	**1,0**
	Ta có: $ab+bc+ca+abc=2 \Leftrightarrow (a+1)(b+1)(c+1)=(a+1)+(b+1)+(c+1)$ $\Leftrightarrow \dfrac{1}{(a+1)(b+1)}+\dfrac{1}{(b+1)(c+1)}+\dfrac{1}{(c+1)(a+1)}=1$ vì $a,b,c>0$ $M=\dfrac{a+1}{(a+1)^2+1}+\dfrac{b+1}{(b+1)^2+1}+\dfrac{c+1}{(c+1)^2+1}=\dfrac{\frac{1}{a+1}}{1+\frac{1}{(a+1)^2}}+\dfrac{\frac{1}{b+1}}{1+\frac{1}{(b+1)^2}}+\dfrac{\frac{1}{c+1}}{1+\frac{1}{(c+1)^2}}$ Đặt $\dfrac{1}{a+1}=x;\ \dfrac{1}{b+1}=y;\ \dfrac{1}{c+1}=z$ Khi đó : $xy+yz+zx=1$ và $M=\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{y}{1+y^2}+\dfrac{z}{1+z^2}$	0,25
	Ta có: $1+x^2=xy+yz+zx+x^2=(x+z)(x+y)$ Tương tự $1+y^2=(y+x)(y+z)$; $1+z^2=(z+x)(z+y)$ Khi đó $M=\dfrac{x}{(x+y)(z+x)}+\dfrac{y}{(x+y)(y+z)}+\dfrac{z}{(z+x)(y+z)}=\dfrac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+}{(x+y)(y+z)(z+x)}$ $M=\dfrac{2(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\dfrac{2}{(x+y)(y+z)(z+x)}$	0,25
	Dễ dang chứng minh được $(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz$ $\Rightarrow 9(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8(x+y)(y+z)(z+x)+8xyz$ $\Leftrightarrow 9(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8(x+y+z)(xy+yz+zx)$ $\Leftrightarrow 9(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8(x+y+z)$. (vì $xy+yz+zx=1$)	0,25
	Mặt khác: $(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)\Rightarrow (x+y+z)^2\ge 3 \Leftrightarrow x+y+z\ge\sqrt{3}$ $\Rightarrow 9(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8\sqrt{3} \Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x)\ge\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$ $\Rightarrow \dfrac{1}{(x+y)(y+z)(z+x)}\le\dfrac{9}{8\sqrt{3}}$ $\Rightarrow M=\dfrac{2}{(x+y)(y+z)(z+x)}\le\dfrac{18}{8\sqrt{3}}=\dfrac{9}{4\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ Dấu " =" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}-1$	0,25

........................Hết........................

Hướng dẫn Câu 16:

Gọi a số thí sinh chỉ giải được bài 1, b là số thí sinh chỉ giải được bài 2, c là số thí sinh chỉ giải được bài 3, d là số thí sinh giải được 2 bài bài 2 và bài 3 nhưng không giải được bài 1. Khi đó số thí sinh giải được bài 1 và thêm ít nhất một bài trong hai bài còn lại (bài 2 và bài 3) là:

$25-a-b-c-d$

Từ giả thiết ta có $b+d=2(c+d)$; $a=1+25-a-b-c-d$ và $a=b+c$.

Suy ra $\begin{cases}4b+c=26\\ d=b-2c>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b<7\\ 8b+2c=52\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b<7\\ 52<9b\end{cases} \Rightarrow b=6; c=2$

Đáp số 6 thí sinh