PHẦN I: PHẦN LÍ LỊCH

Họ tên tác giả: Đặng Thị Mến

Chức vụ: Giáo viên

Đơn vị công tác: Trường THPT chuyên Hưng Yên

Tên đề tài sáng kiến kinh nghiệm

"Một số ứng dụng của số phức trong đại số và toán tổ hợp"

PHẦN II: PHẦN NỘI DUNG

MỞ ĐẦU

1- Đặt vấn đề:

Thực trạng của vấn đề: Số phức và ứng dụng của nó đóng vai trò như là một công cụ đắc lực nhằm giải quyết hiệu quả nhiều bài toán của hình học, giải tích, đại số, số học và toán tổ hợp. Ngoài ra, các tính chất cơ bản của số phức còn được sử dụng trong toán cao cấp, toán ứng dụng và trong nhiều mô hình thực tế.

Trong các kỳ thi Olympic toán quốc gia và quốc tế, Olympic toán khu vực, thì các bài toán liên quan đến số phức thường được đề cập dưới nhiều dạng phong phú thông qua các đặc trưng và các biến đổi khác nhau của phương pháp giải, vừa mang tính tổng hợp cao, vừa mang tính đặc thù sâu sắc. Trong chương trình Toán ở bậc trung học, số phức được đưa vào chương trình giải tích 12, đối với chương trình chuyên toán số phức được giới thiệu đầu lớp 11, tuy nhiên còn rất đơn giản. Vì nhiều lí do khác nhau, rất nhiều học sinh, thậm chí là học sinh khá, giỏi sau khi học xong phần số phức cũng chỉ hiểu một cách đơn sơ: sử dụng số phức, có thể giải được mọi phương trình bậc hai, tính một vài tổng đặc biệt, chứng minh một số công thức lượng giác đơn giản,…. Hiện nay tài liệu về số phức không nhiều và thường tản mạn. Vì vậy tôi mạnh dạn chọn đề tài: "***Một số ứng dụng của số phức trong đại số và toán tổ hợp***", với mong muốn giúp học sinh, nhất là học sinh khá, giỏi và giáo viên các lớp chuyên toán, làm quen sử dụng, ứng dụng số phức vào giải toán và cách tiếp cận để giải các dạng toán liên quan, đồng thời giúp cho những học sinh có khả năng, có nguyện vọng và có điều kiện có thể tham gia tốt các kì thi học sinh giỏi trong nước và quốc tế.

Ý nghĩa và tác dụng của đề tài: Nghiên cứu đề tài "***Một số ứng dụng của số phức trong đại số và toán tổ hợp***" nhằm giúp học sinh rèn kỹ năng giải toán về số phức, nhằm phát triển tư duy logic cho học sinh đồng thời nâng cao chất lượng học tập của học sinh, tạo được hứng thú học tập môn toán, góp phần đổi mới phương pháp giảng dạy bộ môn theo hướng phát huy tính tích cực, tự giác, sáng tạo của học sinh, góp phần nâng cao chất lượng đội ngũ học sinh khá, giỏi về môn toán, góp phần kích thích sự đam mê, yêu thích môn toán, phát triển năng lực tự học, tự bồi dưỡng kiến thức cho học sinh.

Phạm vi nghiên cứu của đề tài:

Xác định cơ sở khoa học của số phức với dạng đại số và lượng giác, căn bậc n của số phức phân ra một số dạng toán ứng dụng số phức.

Tiếp cận một số ứng dụng của số phức trong giải toán đại số và toán tổ hợp.

Một số dạng ứng dụng của số phức trong giải các bài toán đại số và toán tổ hợp dành cho học sinh khá, giỏi và học sinh các lớp chuyên toán lớp 11, 12.

2- Phương pháp tiến hành

a). Nghiên cứu tài liệu

b). Thực nghiệm (giảng dạy), đây là phương pháp chính

Một số ứng dụng của số phức trong đại số và toán tổ hợp là kiến thức tương đối khó. Do đó nội dung kiến thức này chủ yếu nhằm phục vụ cho học sinh khá, giỏi với mục đích phát huy năng lực toán học, nâng cao tầm hiểu biết của học sinh, là tiền đề để các em tham gia tốt các kỳ thi học sinh giỏi.

Do tính đa dạng và phạm vi sâu rộng của kiến thức trong chuyên đề mà nó được sử dụng linh hoạt, uyển chuyển cho nhiều loại đối tượng học sinh khá giỏi khác nhau với thời gian học khác nhau. Nội dung kiến thức trong chuyên đề giảng dạy cho học sinh các lớp chuyên, chọn từ lớp11, sau khi các em đã học lượng giác.

Nếu đối tượng học là học sinh các lớp chuyên, chọn khối 11, thời gian học có thể từ 6 đến 8 tiết. Vì đây là kiến thức bồi dưỡng học sinh giỏi theo kế hoạch thường xuyên và đều đặn, do đó cần cung cấp cho học sinh kiến thức một cách hệ thống tỉ mỉ, giải thích và khắc sâu các ví dụ trong mỗi phương pháp.

Với học sinh lớp chuyên, chọn khối 12, nội dung kiến thức này được dùng cho các tiết chuyên đề. Thời gian tuỳ thuộc vào sự phân bố số tiết học của từng chuyên đề đã được quy định cho các lớp chuyên, chọn nhưng có thể gói gọn từ 4 đến 6 tiết. Ngoài ví dụ đã có, học sinh vận dụng các phương pháp được học để giải những bài tập nâng cao, tự nghiên cứu tìm lời giải cho các bài toán tương tự.

Nếu học sinh tham gia đội tuyển thi học sinh giỏi cấp tỉnh, thành phố, đội tuyển quốc gia hoặc quốc tế, thì cần xác định thời gian là cấp tốc, nên đưa ra những phương pháp với các ví dụ, bài tập chọn lọc vận dụng nhiều kiến thức tổng hợp và các dạng toán thường gặp. Thời gian học có thể từ 2 đến 4 tiết.

Ngoài ra đối với học sinh lớp 12, chuẩn bị thi đại học ta có thể dành từ 1-2 tiết để giới thiệu ứng dụng số phức để giải phương trình, hệ phương trình đại số.

NỘI DUNG

A - Mục tiêu: Đề tài sáng kiến kinh nghiệm đảm bảo các nội dung sau

Cở sở lý thuyết

Phần này hệ thống lại các kiến thức cơ bản của số phức

Một số ứng dụng của số phức

Phần này đưa ra một số ví dụ và phân tích áp dụng kiến thức lý thuyết

1. Các bài toán về phương trình, hệ phương trình đại số.
2. Rút gọn một số tổng tổ hợp, chứng minh các đẳng thức tổ hợp.
3. Các bài toán đếm
4. Các bài toán về đa thức
    a. Xác định đa thức
    b. Bài toán về sự chia hết của đa thức.

B - Giải pháp của đề tài

I. <u>CƠ SỞ LÝ THUYẾT</u>

1. Số phức

1.1 Một biểu thức dạng $z = a + bi$, trong đó a và b là những số thực và i thỏa mãn $i^2 = -1$ được gọi là một số phức.

a được gọi là phần thực

b được gọi là phần ảo

i được gọi là đơn vị ảo.

Tập các số phức được kí hiệu là **C**

Số phức có phần ảo bằng 0 gọi là số thực nên **R** $\subset$ **C.**

Số phức có phần thực bằng 0 gọi là số ảo.

Số $0 = 0 + 0i$ vừa là số thực vừa là số ảo.

1.2 Hai số phức bằng nhau

$z = a+bi \ (a, b \in \mathrm{R})$

$z' = a'+b'i \ (a,b \in \mathrm{R})$

$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

1.3 Cộng, trừ hai số phức

$z = a+bi \quad (a, b \in \mathrm{R})$

$z' = a'+b'i \ (a', b' \in \mathrm{R})$

$z+z' = (a+a')+(b+b')$

$z - z' = (a-a')+(b - b')i$

Số đối của số phức $z = a + bi$ là số phức $- z = - a – bi$.

Ta có $z + (-z) = 0$.

1.4 Nhân hai số phức

$z = a+bi \quad (a, b \in \mathrm{R})$

$z' = a'+b'i \ (a', b' \in \mathrm{R})$

$zz' = aa' – bb'+(ab'+a'b)i$

1.5 Môđun của số phức, số phức liên hợp

$z = a +bi \ (a, b \in \mathrm{R})$ thì môđun của z là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$z = a +bi \ (a, b \in \mathrm{R})$ thì số phức liên hợp của z là $\bar{z} = a - bi$. Ta có

$|zz'| = |z||z'|, \quad z\bar{z} = a^2 + b^2$

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}, \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}, \quad \bar{\bar{z}} = z.$

z là số thực khi và chỉ khi $z = \bar{z}$

1.6 Chia cho số phức khác 0

Nếu $z = a + bi$ ($a, b \in$ R) khác không thì số phức nghịch đảo của z là $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}.$

Thương của số phức z cho số phức $z' \neq 0$ là: $\frac{z}{z'} = z.(z')^{-1} = \frac{z\overline{z'}}{|z'|^2}$.

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$; $\forall z' \neq 0.$

1.7 Biểu diễn hình học của số phức

Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in$ R) được biểu diễn bởi $M(a; b)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy hay còn gọi là mặt phẳng phức.

Trục Ox biểu diễn các số thực gọi là trục thực, trục Oy biểu diễn các số ảo gọi là trục ảo

Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in$ R) cũng được biểu diễn bởi vecto $\vec{u} = (a;b)$, do đó $M(a; b)$ là điểm biểu diễn của số phức $z = a + bi$ ($a, b \in$ R) cũng có nghĩa là $\overrightarrow{OM}$ biểu diễn số phức đó.

Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ theo thứ tự biểu diễn các số phức z, z' thì

$\vec{u} + \vec{v}$ biểu diễn số phức $z + z'$,

$\vec{u} - \vec{v}$ biểu diễn số phức $z - z'$,

$k\vec{u}$ $(k \in R)$ biểu diễn số phức kz,

$-\vec{u}$ biểu diễn số phức $-z$,

$|\overrightarrow{OM}| = |\vec{u}| = |z|$, với M là điểm biểu diễn số phức z.

2. Dạng lượng giác của số phức

2.1 Acgumen của số phức z ≠0

Cho số phức $z \neq 0$. Gọi M là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Khi đó số đo (radian) của mỗi góc lượng giác có tia đầu Ox, tia cuối OM được gọi là một acgumen của z.

Chú ý:

+ Nếu φ là acgumen của z thì mọi acgumen của z đều có dạng $\varphi + k2\pi$, $k \in Z$.

+ Acgumen của $z \neq 0$ xác định sai khác $k2\pi$, $k \in Z$.

2.2 Dạng lượng giác của số phức

Cho số phức $z = a+bi$, $(a, b \in R)$, với $r = \sqrt{a^2+b^2}$ là modun của số phức z và φ là acgumen của số phức z. Dạng $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ được gọi là dạng lượng giác của số phức $z \neq 0$, còn dạng $z = a + bi$ được gọi là dạng đại số của số phức z.

2.3 Nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác

Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ $(r \geq 0$ và $r' \geq 0)$ thì

$$zz' = rr'[\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')]$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}\left[\cos(\varphi-\varphi') + i\sin(\varphi-\varphi')\right]$$ (khi $r' > 0$).

2.4 Công thức Moa-Vrơ

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$\left[\cos\varphi + i\sin\varphi\right]^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \forall n \in N^*.$$

3. Dạng mũ của số phức

Kí hiệu $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, gọi là lũy thừa của e với số mũ ảo.

Cho $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, khi đó z còn biểu diễn dưới dạng $z = re^{i\varphi}$ được gọi là dạng mũ của số phức z.

Các phép toán viết lại:

$$z = re^{i\varphi};\ z' = r'e^{i\varphi'} \Rightarrow z.z' = r.r'.e^{i(\varphi+\varphi')};\ \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\varphi-\varphi')} \quad (z' \neq 0)$$

$$\bar{z} = r.e^{-i\varphi};\ z^n = r^n e^{in\varphi}$$

Công thức Ơle (Euler): $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$; $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$

4. Căn bậc n của số phức.

Cho số phức $z \neq 0$ và số nguyên $n \geq 2$, số phức w được gọi là căn bậc n của z nếu $w^n = z$.

Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$ thì căn bậc n của z gồm n số phân biệt xác định bởi:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right)\right); k = 0;1;...n-1$$

. Khi $n = 2,$ có hai căn bậc hai của z là

$$\sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})\ ; -\sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}) = \sqrt{r}\left(\cos(\frac{\varphi}{2} + \pi) + i\sin(\frac{\varphi}{2} + \pi)\right).$$

. Căn bậc n của đơn vị:

Căn bậc n của số phức $z = 1$ gọi là căn bậc n của đơn vị. Từ định nghĩa ta có các căn bậc n của đơn vị là: $w_k = \cos\dfrac{k2\pi}{n} + i\sin\dfrac{k2\pi}{n}; k = 0;1;2...,n-1.$

w là một căn bậc n của đơn vị và được gọi là căn nguyên thủy bậc n của đơn vị nếu mọi số nguyên dương $m < n$ ta có $w^m \neq 1$.

Tính chất của căn nguyên thủy bậc n của đơn vị: Nếu w là một căn nguyên thủy bậc n của đơn vị thì $1 + w^k + w^{2k} + ... + w^{k(n-1)} = 0$ với $(k,n) = 1$

Đặc biệt $k = 1$ ta có $1 + w + w^2 + ... + w^{n-1} = 0.$

II. <u>MỘT SỐ ỨNG DỤNG SỐ PHỨC</u>

1. Các bài toán về phương trình, hệ phương trình đại số.

Một phương trình với ẩn phức $f(z) = 0$ ***và với nghiệm*** $z = x + yi\ \ (x, y \in R)$***, có thể giải bằng cách tách phần thực và phần ảo ta luôn có thể đưa về dạng hệ phương trình.***

$$\begin{cases} h(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Chẳng hạn, để tìm căn bậc ba của số phức $1+i$***, ta tìm số phức*** $z = x + yi$ ***sao cho*** $z^3 = 1 + i$***. Bằng cách tách phần thực và phần ảo trong đẳng thức*** $(x+yi)^3 = 1 + i$ ***ta được hệ phương trình:***

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$$

Giải hệ này, ta tìm được $(x;y)$***; từ đó ta sẽ tìm được*** z***. Tuy nhiên, rõ ràng*** z ***có thể tìm được bằng cách tìm căn bậc ba của*** $1+i$***, cụ thể là:***

$1 + i = \sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{4})$ ***nên*** $z = \sqrt[6]{2}(\cos(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k2\pi}{3}) + i\sin(\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k2\pi}{3})$***;*** $k \in \{0;1;2\}.$

Từ đó, ngược lại ta tìm được nghiệm của hệ phương trình là:

$$(x;y) \in \left\{\left(\sqrt[6]{2}\cos(\frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3}); \sqrt[6]{2}\sin(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right); k \in \{0;1;2\}\right\}$$

Như thế, một số hệ phương trình có thể có "xuất xứ" từ các phương trình nghiệm phức. Bằng cách đi ngược lại quá trình từ phương trình nghiệm phức về hệ phương trình, từ hệ phương trình đã cho ta thu được phương trình nghiệm phức gốc. Giải các phương trình nghiệm phức này, so sánh phần thực và phần ảo, ta được nghiệm của hệ phương trình.

Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 1. Giải các hệ phương trình sau

a. $\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x-y}\right)=4\sqrt{2} \end{cases}$

b. $\begin{cases} x+\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}=3 \\ y-\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4x-y+3\sqrt{1+y}=0 \\ 4\sqrt{(1+x)(1+y)}-6\sqrt{1+x}+1=0 \end{cases}$

Giải:

a. Điều kiện $x>0; y>0$ đặt $u=\sqrt{x}; v=\sqrt{y}$ $(u>0; v>0)$

Hệ đưa về: $\begin{cases} u\left(1+\dfrac{1}{u^2+v^2}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ v\left(1-\dfrac{1}{u^2+v^2}\right)=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{cases}$

Vì u^2+v^2 là bình phương modun của số phức $z=u+iv$, bằng cách cộng phương trình thứ nhất với phương trình thứ hai (sau khi nhân với i) ta được.

$$u+iv+\frac{u-iv}{u^2+v^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}+i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \quad (3)$$

Mà $\dfrac{u-iv}{u^2+v^2}=\dfrac{\bar{z}}{z^2}=\dfrac{\bar{z}}{z.\bar{z}}=\dfrac{1}{z}$

Nên (3) được viết dưới dạng: $z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}+i\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

$$\Leftrightarrow z^2-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+i\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right).z+1=0$$

$$\Delta'=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i\right)^2-1=-\frac{38}{21}+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}i=\left(\frac{2}{\sqrt{21}}+i\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\frac{2}{\sqrt{21}}+i\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\pm\sqrt{2}\right)$$

Từ đó suy ra $(u,v)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{21}};\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}+\sqrt{2}\right)$. Do đó, nghiệm của hệ pt đã cho là:

$$(x,y)=\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2;\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}+\sqrt{2}\right)^2\right)=\left(\frac{11+4\sqrt{7}}{21};\frac{22+8\sqrt{7}}{7}\right)$$

b. Nhân hai vế của phương trình thứ hai với i rồi cộng với phương trình thứ nhất ta được.

$$x+yi+\frac{3x-y-xi-3yi}{x^2+y^2}=3$$

$$\Leftrightarrow x+yi+\frac{3(x-yi)-i(x-yi)}{x^2+y^2}=3 \quad (4)$$

Giả sử $z=x+yi\Rightarrow z=x-yi;|z|^2=x^2+y^2$

(4) đưa về $z+\frac{3\overline{z}-i\overline{z}}{|z|^2}=3 \quad \Leftrightarrow z+\frac{(3-i)}{z}=3$

$\Leftrightarrow z^2-3z+3-i=0$, $\Delta=-3+4i=(1+2i)^2 \Leftrightarrow z=\frac{3+1+2i}{2}=2+i$

$z=\frac{3-1-2i}{2}=1-i$.

Từ đó suy ra nghiệm của hệ ban đầu là $(x;y)\in\{(2;1);(1;-1)\}$

c. Đkxđ: $x\geq -1; y\geq -1$

Đặt $a=2\sqrt{x+1};b=\sqrt{1+y}$ thì hệ trở thành $\begin{cases}a^2-b^2+3b-3=0\\2ab-3a+1=0\end{cases}$

Từ hệ trên ta biến đổi về dạng số phức như sau: $(a^2-b^2+3b-3)+(2ab-3a+1)i=0$

$$\Leftrightarrow (a+bi)^2-3i(a+bi)+i-3=0$$

$$\Leftrightarrow z^2-3iz+i-3=0 \text{ (1), với}$$

$z=a+bi, z\in C.$

Giải phương trình (1) ta được nghiệm $z=1+i$ hoặc $z=-1+2i$

Do $a\geq 0; b\geq 0$ nên $a=1; b=1$

Hệ có nghiệm $(x;y)=\left(-\frac{3}{4};0\right)$.

Trên thực tế, ta cũng có thể giải hệ trên bằng cách dùng biến đổi đại số, nhân x và y thích hợp vào từng vế của các phương trình rồi trừ vế với vế thu được quan hệ đơn giản hơn giữa các biến này.

Một số hệ sau cũng có cách giải tương tự:

1. $\begin{cases} x + \dfrac{3x+10y}{x^2+y^2} = 1 \\ y + \dfrac{10x-3y}{x^2+y^2} = 2 \end{cases} (x, y \in R)$

2. $\begin{cases} x + \dfrac{x+2y}{x^2+y^2} = 2 \\ y + \dfrac{2x-y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} (x, y \in R)$

3. $\begin{cases} x + \dfrac{16x-11y}{x^2+y^2} = 7 \\ y - \dfrac{11x+16y}{x^2+y^2} = -1 \end{cases} (x, y \in R)$

4. $\begin{cases} \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{12}{3x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{y}\left(1 + \dfrac{12}{3x+y}\right) = 6 \end{cases} (x, y \in R)$

5. $\begin{cases} \sqrt{10x}\left(1 + \dfrac{3}{5x+y}\right) = 3 \\ \sqrt{y}\left(1 - \dfrac{3}{5x+y}\right) = -1 \end{cases} (x, y \in R)$

6. $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = -\sqrt{3} \end{cases} (x, y \in R)$

Hướng dẫn - đáp số

1. Nhân hai vế của phương trình thứ 2 với i rồi cộng với phương trình thứ nhất ta được:

$z + \dfrac{(3+10i)\bar{z}}{|z|^2} = 1 + 2i$ với $z = x + yi$.

$\Leftrightarrow z^2 - (1+2i)z + 3 + 10i = 0$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1 \pm 2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{2 \mp 3\sqrt{3}}{2} i$

Hệ có nghiệm $(x; y) \in \left\{\left(\dfrac{2\sqrt{3}+1}{2}; \dfrac{2-3\sqrt{3}}{2}\right); \left(\dfrac{1-2\sqrt{3}}{2}; \dfrac{2+3\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$

2. Đáp số $(x; y) \in \{(2;1); (0;-1)\}$

3. Đáp số $(x; y) \in (2;-3); (5;2)$

4. Đáp số $(x; y) \in \{(4 - 2\sqrt{3}; 12 - 6\sqrt{3}); (4 + 2\sqrt{3}; 12 + 6\sqrt{3})\}$

5. Đáp số $(x; y) = \left\{\dfrac{1}{10}; 1\right\}$

6. Xét $z^3 = 1 - \sqrt{3}i$

Giả sử $z = x + yi$ thay vào phương trình ta được $(x;y)$ là nghiệm của hệ đã cho mà z là căn bậc ba của $1 - \sqrt{3}i$.

Có $1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos(\frac{-\pi}{3}) + i\sin(\frac{-\pi}{3})\right) \Rightarrow z = \sqrt[3]{2}\left(\cos(\frac{-\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}) + i\sin(\frac{-\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3})\right); k \in \{0;1;2\}$

Nghiệm của hệ đã cho là: $(x;y) \in \left\{\left(\sqrt[3]{2}\cos(\frac{-\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}); \sqrt[3]{2}\sin(\frac{-\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3})\right); k \in \{0;1;2\}\right\}$

2. Rút gọn một số tổng tổ hợp, chứng minh các đẳng thức tổ hợp.

Gọi w là một căn nguyên thủy bậc n của đơn vị thì ta có

$1 + w^k + w^{2k} + ... + w^{(n-1)k} = 0$***;*** $\forall k$ ***mà*** $(k,n) = 1$

Tính chất trên có ứng dụng khá hiệu quả trong việc rút gọn các tổng hợp, ta xét ví dụ sau:

<u>Ví dụ 2</u>. Tính tổng $S_1 = \sum_{0 \le 3k < n+1} C_n^{3k}$

Giải:

Xét đa thức $P(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$

Gọi $w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ là một căn nguyên thủy bậc ba của đơn vị (có $w^2 + w + 1 = 0$) thì

$w^{2k} + w^k + 1$ bằng 0 nếu k không chia hết cho 3, bằng 3 nếu k chia hết cho 3.

Vì thế $P(1) + P(w) + P(w^2) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (1 + w^k + w^{2k}) = 3\sum_{0 \le 3k < n+1} C_n^{3k}$

$\Rightarrow S_1 = \frac{1}{3}\left(P(1) + P(w) + P(w^2)\right)$ mà $P(1) = (1+1)^n = 2^n$

$$P(w) = \left(1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}$$

$$P(w^2) = \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^n = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)^n = \cos(\frac{-n\pi}{3}) + i\sin(\frac{-n\pi}{3})$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$$

Công thức Euler $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ***có thể đưa các tổng lượng giác thành các cấp số nhân hoặc công thức nhị thức Niutơn, cụ thể xét ví dụ sau:***

Ví dụ 3.

a. Tính tổng $S_2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos kx$.

b. Chứng minh rằng $2^{2m-1}\cos^{2m} x = \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos(2m-2k)x + \frac{1}{2}C_{2m}^m$

Giải:

a. Xét $T_2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin kx$, ta có

$$S_2 + iT_2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k(\cos kx + i\sin kx) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ikx}$$

$$= (1+e^{ix})^n = (1+\cos x + i\sin x)^n$$

$$= \left(2\cos\frac{x}{2}\right)^n \left(\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}\right)^n$$

$$S_2 + iT_2 = 2^n \cos^n\frac{x}{2}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right)$$

So sánh phần thực, phần ảo ta được $S_2 = 2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{nx}{2}$

b. Ta có $\begin{matrix} e^{ix} = \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i\sin x \end{matrix} \Rightarrow \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

Do đó $2^{2m}\cos^{2m} x = (2\cos x)^{2m} = (e^{ix}+e^{-ix})^{2m}$

$$= \sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^k (e^{ix})^k (e^{-ix})^{2m-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^k e^{2(k-m)ix}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k e^{2(k-m)ix} + \sum_{k=m+1}^{2m} C_{2m}^k e^{2(k-m)ix}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k e^{-2(m-k)ix} + \sum_{t=0}^{m-1} C_{2m}^{2m-t} e^{2(m-t)ix} + C_{2m}^m$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k e^{-2(m-k)ix} + \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{2m-k} e^{2(m-k)ix} + C_{2m}^m$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k}(e^{-2(m-k)ix}+e^{2(m-k)ix})+C_{2m}^{m}=2\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k}.\cos(2m-2k)x+C_{2m}^{m}$$

$$\Rightarrow\ 2^{2m-1}\cos^{2m}x=\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k}.\cos(2m-2k)x+\frac{1}{2}C_{2m}^{m}\quad \text{(đpcm)}$$

Với cách làm tương tự như trên, ta cũng chứng minh được đẳng thức

$$2^{2n}\cos^{2n+1}x=\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{k}\cos(2n+1-2k)x$$

Sử dụng công thức $2i\sin x=e^{ix}-e^{-ix}$ và biến đổi tương tự trên, ta chứng minh được các đẳng thức sau

$$2^{2n-1}.\sin^{2n}x=(-1)^{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}C_{2n}^{k}\cos(2n-2k)x+\frac{(-1)^{n}}{2}C_{2n}^{n}\right)$$

$$2^{2n}\sin^{2n+1}x=(-1)^{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C_{2n+1}^{k}\sin(2n+1-2k)x$$

Bài tập tương tự

1. Tính các tổng sau:

$$S_3=\sum_{0\le 2k<n+1}(-1)^{k}C_{n}^{2k}$$

$$S_4=\sum_{0\le 2k+1<n+1}(-1)^{k}C_{n}^{2k+1}$$

$$S_5=\sum_{0\le 4k<n+1}C_{n}^{4k}$$

$$S_6=\sum_{0<4k+1<n+1}C_{n}^{4k+1}$$

2. Chứng minh đẳng thức sau:

a. $\sum_{0<2k+1<n+1}(-1)^{k}(2k+1)C_{n}^{2k+1}=n(\sqrt{2})^{n-1}\cos(n-1)\frac{\pi}{4}$

b. $\sum_{0<2k<n+1}(-1)^{k}2kC_{n}^{2k}=n(\sqrt{2})^{n-3}\sin(n-1)\frac{\pi}{4}$

Hướng dẫn - đáp số

1. Xét $(1+i)^{n}=\left(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\right)^{n}=2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})$

Mà $(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k = \sum_{0\le 2k<n+1} (-1)^k C_n^{2k} + \sum_{0<2k+1<n+1} (-1)^k C_n^{2k+1} i$

Từ đó suy ra: $S_3 = 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi}{4}$

$$S_4 = 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4}$$

Lại có $2^n = (1+1)^n = \sum_{0\le k\le n} C_n^k$

$0 = (1-1)^n = \sum_{0\le k\le n} (-1)^k C_n^k$ suy ra $\sum_{0\le 2k\le n+1} C_n^{2k} = \sum_{0<2k+1<n+1} C_n^{2k+1} = 2^{n-1}$

$$S_5 = \frac{1}{2}(S_3 + \sum_{0\le 2k<n+1} C_n^{2k}) = \frac{1}{2}(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi}{4})$$

$$S_6 = \frac{1}{2}(S_4 + \sum_{0<2k+1<n+1} C_n^{2k+1}) = \frac{1}{2}(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4})$$

2. Xét $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$

Đạo hàm hai vế ta được $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2xC_n^2 + ... + nx^{n-1}C_n^n$. Cho $x = i$ so sánh phần thực, phần ảo hai vế ta được các đẳng thức cần chứng minh.

3. Các bài toán đếm.

Số phức có những ứng dụng rất hiệu quả trong các bài toán đếm và vai trò trung tâm trong kỹ thuật ứng dụng số phức vào các bài toán đếm tiếp tục lại là căn nguyên thủy của đơn vị. Với tính chất w ***là một căn nguyên thủy bậc n của đơn vị thì ta có:***

$1 + w + w^2 + ... + w^{n-1} = 0$

$1 + w^k + w^{2k} + ... + w^{k(n-1)} = 0$ ***với*** $(k,n) = 1$

<u>Ví dụ 4</u>.

Tìm số tất cả các số có *n* chữ số lập từ các chữ số 3, 4, 5, 6 và chia hết cho 3.

Giải:

Gọi C_n là số các số có *n* chữ số thỏa mãn đề bài. Gọi α là một nghiệm của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$.

Khi đó $\alpha^3 = 1$ và $\alpha^{2k} + \alpha^k + 1 = 0$ nếu k không chia hết cho 3 và $\alpha^{2k} + \alpha^k + 1 = 3$ nếu $k \vdots 3$.

Xét đa thức $P(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n$ dễ thấy C_n chính bằng tổng các hệ số của các số mũ chia hết cho 3 trong khai triển của $P(x)$. Nói cách khác, nếu $P(x) = \sum_{k=0}^{6n} a_k x^k$ thì $C_n = \sum_{k=0}^{2n} a_{3k}$. Mà $P(1) + P(\alpha) + P(\alpha^2) = \sum_{k=0}^{6n} a_k (1 + \alpha^k + \alpha^{2k}) = \sum_{k=0}^{2n} 3a_{3k}$

Do $P(1) = (1+1+1+1)^n = 4^n$

$P(\alpha) = (\alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6)^n = (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3)^n = (1 + \alpha + \alpha^2 + 1)^n = 1$

$P(\alpha^2) = (\alpha^6 + \alpha^8 + \alpha^{10} + \alpha^{12})^n = (1 + \alpha^2 + \alpha + 1)^n = 1^n = 1$

$\Rightarrow P(1) + P(\alpha) + P(\alpha^2) = 4^n + 2$

$\Rightarrow C_n = \sum_{k=0}^{2n} a_{3k} = \frac{1}{3}\left(P(1) + P(\alpha) + P(\alpha^2)\right) = \frac{4^n + 2}{3}$

<u>Ví dụ 5</u>.(IMO1995)

Cho p là một số nguyên tố lẻ, tìm số các tập con A của tập $\{1;2;3;..,2p\}$ biết rằng

a. A chứa đúng p phần tử.

b. Tổng các phân tử của A chia hết cho p.

Giải:

Xét đa thức $P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1$. Đa thức này có $(p-1)$ nghiệm phức phân biệt.

Gọi α là một nghiệm bất kỳ của $P(x)$. Chú ý rằng $\alpha, \alpha^2, ...\alpha^{p-1}$ là $p-1$ nghiệm phân biệt của $P(x)$ và $\alpha^p = 1$.

Theo định lý Viet có: $(x-\alpha)(x-\alpha^2)....(x-\alpha^{p-1}) = x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1$

Xét đa thức $Q(x) = (x-\alpha)(x-\alpha^2)...(x-\alpha^{2p})$

Gọi $H = \{A \subset \{1,2...,2p\} : |A| = p\}$.

Giả sử $Q(x) = \sum_{k=0}^{2p} a_k x^k$ khi đó $a_p = -\sum_{A \in H} \alpha^{S(A)}$ với $S(A) = \sum_{x \in A} x$

Nếu $S(A) = j (\bmod p)$ thì $\alpha^{S(A)} = \alpha^j$ nên $a_p = \sum_{j=0}^{p-1} n_j \alpha^j$, trong đó n_j là số các $A \in H$ sao cho $S(A) = j (\bmod p)$

Mặt khác $Q(x)=(x^p-1)^2 \Rightarrow a_p=-2$ nên $\sum_{j=0}^{p-1} n_j\alpha^j=2$ (*)

Xét đa thức $R(x)=\sum_{j=0}^{p-1} n_j x^j+n_0-2.$ Do (*) nên α là một nghiệm của $R(x)$ mà $\deg P(x)=\deg R(x)$ và α là một nghiệm bất kỳ của $P(x)$, nên $P(x)$ và $R(x)$ chỉ sai khác nhau hằng số nhân. Từ đó $n_{p-1}=n_{p-2}=...=n_1=n_0-2$

Suy ra $n_0-2=\dfrac{n_{p-1}+n_{p-2}+...+n_1+n_0-2}{p}=\dfrac{C_{2p}^p-2}{p} \Rightarrow n_0=2+\dfrac{C_{2p}^p-2}{2}$

Số các tập con A của tập hợp $\{1;2;3...,2p\}$ thỏa mãn đề bài là: $n_0=2+\dfrac{C_{2p}^p-2}{2}$

4. Các bài toán về đa thức

<u>a. Xác định đa thức</u>

Nghiệm của đa thức đóng vai trò quan trọng trong việc xác định một đa thức. Cụ thể nếu đa thức $P(x)$ bậc n có n nghiệm $x_1,x_2,...,x_n$ thì $P(x)$ có dạng

$$P(x)=c(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n).$$

Tuy nhiên, nếu chỉ xét các nghiệm thực của đa thức thì trong nhiều trường hợp sẽ không đủ số nghiệm, hơn nữa trong các bài toán phương trình hàm đa thức, nếu chỉ xét các nghiệm thực thì lời giải sẽ không hoàn chỉnh. Định lý cơ bản của đại số vì vậy đóng một vai trò hết sức quan trọng trong dạng toán này đó là: Một đa thức với hệ số phức (bao gồm cả số thực) luôn có ít nhất một nghiệm phức (bao gồm cả nghiệm thực)

<u>Ví dụ 6</u>. Xác định tất cả các đa thức $P(x)$ khác đa thức bằng sao cho

$$P(x)P(x+1)=P(x^2+x+1);\ \forall x\in R \quad (1)$$

Giải: Giả sử x_0 là nghiệm của $P(x)=0 \Rightarrow P(x_0{}^2+x_0+1)=0$. Khi đó $x_0{}^2+x_0+1$ cũng là nghiệm của $P(x)$. Thay x bởi $x-1$ trong (1) ta được $P(x-1)P(x)=P(x^2-x+1)$. Vì $P(x_0)=0$ nên $x_0{}^2-x_0+1$ cũng là nghiệm của $P(x)$.

Chọn α là nghiệm có modun lớn nhất (nếu tồn tại vài nghiệm với modun lớn nhất, ta chọn một trong số các nghiệm đó)

Từ cách chọn α suy ra: $|\alpha^2+\alpha+1|\le|\alpha|$ và $|\alpha^2-\alpha+1|\le|\alpha|$ vì cả $\alpha^2+\alpha+1$ và $\alpha^2-\alpha+1$ đều là nghiệm của $P(x)$.

Ta có $\alpha\neq 0$ và $2|\alpha|=|(\alpha^2+\alpha+1)-(\alpha^2-\alpha-1)|\le|\alpha^2+\alpha+1|+|\alpha^2-\alpha+1|$

$$\le|\alpha|+|\alpha|=2|\alpha|$$

Vậy phải xảy ra dấu đẳng thức nên $\alpha^2+\alpha+1=-k(\alpha^2-\alpha+1)$ với k là hằng số dương. Mà $|\alpha|$ là lớn nhất nên $|\alpha^2+\alpha+1|=|\alpha^2-\alpha+1|=|\alpha|$.

$\Rightarrow k=1\Rightarrow \alpha^2+\alpha+1=-(\alpha^2-\alpha+1)\Rightarrow \alpha^2+1=0\Rightarrow \alpha=\pm i$ nên x^2+1 là thừa số của $P(x)$. Như vậy ta có thể viết: $P(x)=(x^2+1)^m Q(x)$; $m\in N^*$. Trong đó $Q(x)$ là đa thức không chia hết cho x^2+1. Thế ngược trở lại vào (1) ta thấy $Q(x)$ thỏa mãn:

$Q(x)Q(x+1)=Q(x^2+x+1);\ \forall x\in R$ (2)

Nếu phương trình $Q(x)=0$ lại có nghiệm thì lập luận như trên ta suy ra nghiệm có modun lớn nhất của nó phải là $\pm i$. Điều này không thể xảy ra vì x^2+1 không chia hết $Q(x)$.

$Q(x)$ là một hằng số, giả sử $Q(x)=c$; $\forall x\in R$, thay vào (2) ta được $c=1$. Vậy các đa thức thỏa mãn đề bài là $P(x)=(x^2+1)^m$, $\forall n\in N^*$.

<u>Ví dụ 7</u>. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn: $P(x)P(x+1)=P(x^2)$, $\forall x\in R.$

Giải:

Giả sử α là nghiệm của $P(x)=0$. Khi đó từ phương trình suy ra $\alpha^2,\alpha^4,\alpha^8,\ldots$ cũng là nghiệm của $P(x)=0$. Từ đây suy ra $|\alpha|=0$ hoặc $|\alpha|=1$, vì nếu ngược lại ta sẽ thu được dãy vô hạn các nghiệm phân biệt của $P(x)$. Tương tự $\alpha-1$ là nghiệm của $P(x)$ và lập luận tương tự, ta cũng được $|\alpha-1|=0$ hoặc $|\alpha-1|=1$.

Giả sử rằng $|\alpha|=1$ và $|\alpha-1|=1$. Ta viết $\alpha=\cos\beta+i\sin\beta;\beta\in[0;2\pi]$, từ đây suy ra $\cos\beta=\frac{1}{2}$ hay $\beta=\frac{\pi}{3}$ hoặc $\beta=\frac{5\pi}{3}$.

Giả sử $\beta=\frac{\pi}{3}$, xét α^2 cũng là nghiệm của $P(x)$, như vậy α^2-1 cũng là nghiệm của $P(x)$ và $|\alpha^2-1|=\left(\cos\frac{2\pi}{3}-1\right)^2+\sin^2\frac{2\pi}{3}=3$ mâu thuẫn vì mọi nghiệm của $P(x)$ đều có modun bằng 0 hoặc 1.

Tương tự trên với trường hợp $\beta = \frac{5\pi}{3}$. Như vậy có thể kết luận $\alpha = 1$ hoặc $\alpha - 1 = 1$. Từ đây $P(x)$ có dạng $P(x) = cx^m(1-x)^n$, c là hằng số và $m, n \in N$, thay vào phương trình đã cho ta dễ dàng kiểm tra được $c = 1$ và $m = n$. Vậy các đa thức thỏa mãn: $P(x) = x^m(1-x)^m, m \in N$.

b. Bài toán về sự chia hết của đa thức

Ta biết rằng, nếu đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$ thì mọi nghiệm của $Q(x)$ đều là nghiệm của $P(x)$. Tính chất đơn giản này là chìa khóa để giải nghiệm bài toán về sự chia hết của đa thức.

Ví dụ 8. Với giá trị nào của n thì $x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 1$

Giải: Ta có $w = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)$ là nghiệm của $Q(x) = x^2 + x + 1 = 0$.

Đa thức $P(x) = x^{2n} + x^n + 1$ chia hết cho $Q(x)$ khi và chỉ khi $P(w) = 0$ điều này tương đương với

$$\cos\left(\pm\frac{4n\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{4n\pi}{3}\right) + \cos\left(\pm\frac{2n\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{2n\pi}{3}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{4n\pi}{3} + \cos\frac{2n\pi}{3} + 1 = 0 \\ \sin\frac{4n\pi}{3} + \sin\frac{2n\pi}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\cos\frac{2n\pi}{3} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{2n\pi}{3} = \frac{-1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 1 + 3k \\ n = 3k + 2 \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

Vậy với $n = 3k + 1$ hoặc $n = 3k + 2$; $(k \in Z)$ thì $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$.

Ví dụ dưới đây, một lần nữa, căn của đơn vị lại đóng vai trò then chốt.

Ví dụ 9.(USA MO 1976) Cho $P(x), Q(x), R(x), S(x)$ là các đa thức sao cho

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^7) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).S(x) \quad (1).$$

Chứng minh rằng $P(x)$ chia hết cho $x - 1$.

Giải:

Đặt $w = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ thì $w^5 = 1$ và $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = 0$ (*)

Thay x lần lượt bởi w, w^2, w^3, w^4 vào (1) ta được phương trình

$$\begin{array}{l} P(1) + wQ(1) + w^2R(1) = 0 \\ P(1) + w^2Q(1) + w^4R(1) = 0 \\ P(1) + w^3Q(1) + w^6R(1) = 0 \\ P(1) + w^4Q(1) + w^8R(1) = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} P(1) + wQ(1) + w^2R(1) = 0 & (2) \\ P(1) + w^2Q(1) + w^4R(1) = 0 & (3) \\ P(1) + w^3Q(1) + wR(1) = 0 & (4) \\ P(1) + w^4Q(1) + w^3R(1) = 0 & (5) \end{array}$$

Nhân các phương trình từ (2) đến (5) lần lượt với $-w;-w^2;-w^3;-w^4$ ta được

$$-wP(1)-w^2Q(1)-w^3R(1)=0$$
$$-w^2P(1)-w^4Q(1)-wR(1)=0$$
$$-w^3P(1)-wQ(1)-w^4R(1)=0$$
$$-w^4P(1)-w^3Q(1)-w^2R(1)=0$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên và áp dụng $(*)$ ta được $P(1)+Q(1)+R(1)=0 \quad (6)$

Cộng vế với vế của (2), (3), (4), (5), (6) suy ra $5P(1)=0$ suy ra $P(x)$ chia hết cho $x-1$.

Bài tập tương tự

1. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn: $(P(x))^2-P(x^2)=2x^4;\ \forall x\in R$

2. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn: $P(x^2-2)=(P(x))^2-2;\ \forall x\in R.$

3. (VN 2006). Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn:

$$P(x^2)+x(3P(x)+P(-x))=(P(x))^2+2x^2;\ \forall x\in R.$$

4. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ và hệ số thực thỏa mãn: $2x^2(P(x)=P(2x^3+x);\ \forall x\in R.$

Đáp số

1. $P(x)=x^4+1$; $P(x)=x^3+x$; $P(x)=2x^2$; $P(x)=-x^2$

2. Ta được dãy nghiệm: $P_0(x)=2; P_1(x)=x$; $P_{n+1}(x)=xP_n(x)-P_{n-1}(x);\ \forall n\ge 1.$

3. $P(x)=x; P(x)=2x; P(x)=2x+1; P(x)=x^{2k+1}+x; P(x)=x^{2k}+2x;\ \forall k\in N, k\ge 2.$

4. $P(x)=(x^2+1)^k;\ \forall k\in N^*.$

PHẦN III: KẾT LUẬN

KẾT QUẢ THỰC HIỆN ĐỀ TÀI

Việc học tập sáng kiến kinh nghiệm sẽ thu được kết quả tốt nếu đảm bảo các yêu cầu sau:

Học sinh phải có trình độ nhận thức và tư duy tương đối tốt. Nắm vững các kiến thức cơ bản về số phức: dạng đại số, dạng lượng giác, công thức Moavrơ, căn bậc n của đơn vị,... và các kiến thức đại số, tổ hợp như: nghiệm đa thức, tính chất của số C_n^k, …. Hiểu và sử dụng chính xác thuật ngữ, kí hiệu toán học.

Xuất phát từ đối tượng học đều là học sinh khá, giỏi, nên khả năng tiếp thu kiến thức khá nhanh và chắc chắn. Đó là tiền đề rất tốt để có thể truyền thụ một khối lượng kiến thức trong cùng một đơn vị thời gian nhiều hơn so với học sinh khác. Giáo viên cần biết tận dụng có hiệu quả những khả năng đó, chẳng hạn, bằng cách đưa tài liệu, yêu cầu học sinh tự nghiên cứu trước sau đó trình bày, đưa ra nhận xét, kết quả thu được trong tiết học chuyên đề….Như vậy sẽ giúp học sinh lĩnh hội kiến thức sâu sắc hơn, tạo điều kiện để các em bước đầu tập dượt nghiên cứu khoa học.

1. Kết quả thực tiễn

Qua thực tế, trực tiếp giảng dạy sáng kiến kinh nghiệm này trong các tiết chuyên đề của lớp 11 Toán và bồi dưỡng học sinh dự thi học sinh giỏi quốc gia môn Toán 12 tại trường THPT chuyên Hưng Yên từ năm học 2010 - 2011, với lượng kiến thức vừa phải và hệ thống ví dụ phù hợp đã giúp học sinh tiếp thu khá tốt, kích thích và phát huy khả năng tư duy, vận dụng tổng hợp kiến thức một cách lôgic, say mê tự giác học tập, gợi mở óc tìm tòi sáng tạo khoa học.

Học sinh đội tuyển lớp 12 dự thi học sinh giỏi quốc gia đã tự tin hơn khi gặp các bài toán về đa thức và tổ hợp.

Kết quả thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn Toán lớp 12:

Năm học 2010 - 2011 có 5/6 học sinh đạt giải

Năm học 2011 - 2012 có 6/6 học sinh đạt giải

Năm học 2012 - 2013 có 8/8 học sinh đạt giải

Năm học 2013 - 2014 có 5/8 học sinh đạt giải

Kết quả thi chọn học sinh giỏi khu vực Duyên hải và đồng bằng Bắc Bộ môn Toán lớp 10, lớp 11:

Năm học 2010 - 2011 có 6/6 học sinh đạt giải, trong đó có 2 giải nhì.

Năm học 2011 - 2012 có 6/6 học sinh đạt giải, trong đó có 1 giải nhì.

Năm học 2012 - 2013 có 6/6 học sinh đạt giải.

Năm học 2013 – 2014 có 5/6 học sinh đạt giải, trong đó có 1 giải nhất.

Kết quả thi chọn học sinh giỏi tỉnh Hưng Yên môn Toán lớp 12:

Năm học 2010 - 2011 có 9/10 học sinh đạt giải

Năm học 2011 - 2012 có 10/12 học sinh đạt giải

Năm học 2012 - 2013 có 10/10 học sinh đạt giải

2. Bài học kinh nghiệm

Khi dạy một số ứng dụng của số phức trong đại số và toán tổ hợp, cần nhấn mạnh kết quả áp dụng, khắc sâu ví dụ. Sau mỗi ứng dụng, yêu cầu học sinh nhận xét, lấy ví dụ minh họa, liên hệ đến các trường hợp riêng, trường hợp đặc biệt, nhìn nhận, so sánh với các cách giải khác đã được học. Từ đó tiết dạy đạt hiệu quả cao hơn, rèn được tính chủ động lĩnh hội kiến thức của học sinh, ý thức học tập nghiêm túc, có khả năng cảm nhận toán học tốt hơn.

Sáng kiến kinh nghiệm này được giảng dạy cho các thế hệ học sinh các lớp chuyên toán, nên cần được thường xuyên trao đổi, cập nhật liên tục, bổ sung thêm ứng dụng của số phức trong chứng minh đa thức bất khả quy, giải phương trình nghiệm nguyên,... và biết vận dụng các ứng dụng đó để giải các bài toán tương tự.

KẾT LUẬN

Nội dung sáng kiến kinh nghiệm này được dùng cho các tiết học chuyên đề. Tùy theo sự phân bố tiết học của từng chuyên đề đã được quy định, tuỳ theo khả năng tiếp thu của học sinh, giáo viên cần phải biết linh hoạt kết hợp, lồng ghép các kiến thức về số phức, các tính chất của số C_n^k,công thức khai triển nhị thức NiuTơn, định lý về nghiệm đa thức,... để việc chứng minh các bài toán trở lên dễ dàng hơn.

Do thời gian nghiên cứu hạn chế, sáng kiến kinh nghiệm này mới chỉ đưa ra một số ứng dụng của số phức trong đại số và toán tổ hợp, ta có thể tiếp tục nghiên cứu ứng dụng số phức trong hình học, số học,...

Đây là sáng kiến kinh nghiệm của bản thân tôi viết, không sao chép nội dung của người khác, vì vậy với khả năng và thời gian nghiên cứu có hạn, nên mức độ thành công của sáng kiến kinh nghiệm còn nhiều hạn chế, tôi rất mong nhận được sự động viên và những ý kiến đóng góp chân thành của quý Thầy cô, bạn bè đồng nghiệp và các em học sinh.

Hưng Yên, ngày 15 tháng 3 năm 2014

Tác giả

Đặng Thị Mến

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Bộ Giáo Dục và Đào Tạo - *"Giải Tích 12 Nâng Cao"(Tái bản lần thứ tư)*, NXBGD - 2012.

[2]. Đoàn Quỳnh - Trần Nam Dũng - Nguyễn Vũ Lương - Đặng Hùng Thắng - *"Tài liệu chuyên Toán - Đại Số và Giải Tích 11"*, NXBGD - 2010.

[3]. Nguyễn Văn Mậu - Trần Nam Dũng - Nguyễn Đăng Phất - Nguyễn Thủy Thanh - *" Chuyên đề chọn lọc - Số Phức và Áp Dụng"*, NXBGD - 2009.

[4]. Bộ Giáo dục và Đào tạo – *"Tạp chí Toán học và tuổi trẻ",* NXBGD.

MỤC LỤC
