ĐỀ VDC SỐ 21 Bài toán tương giao đồ thị hàm số 02

Câu 1: Cho hai hàm số $y=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}$ và $y=|x+2|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $(-2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2]$. **C.** $[-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Câu 2: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số $y=(2x^2+1)\sqrt{x-1}$ và $y=\frac{11}{3x-4}-\frac{1}{2-x}+11+m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $(-\infty;2]$.

Câu 3: Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ để bất phương trình $(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 4: Cho 2 hàm số $y=x^7+x^5+x^3+3m-1$ và $y=|x-2|-x-2m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) cắt (C_2) là

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\in(2;+\infty)$. **C.** $m\in(-\infty;2)$. **D.** $m\in[2;+\infty)$.

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để phương trình $\sqrt{3+x}\left(2\sqrt{3+x}-m\right)+\sqrt{1-x}\left(5\sqrt{1-x}+2m\right)=4\sqrt{-x^2-2x+3}$ có nghiệm thực?

A. 2019. **B.** 4032. **C.** 4039. **D.** 4033.

Câu 6: Có bao nhiêu m nguyên dương để hai đường cong $(C_1): y=\left|2+\frac{2}{x-10}\right|$ và $(C_2): y=\sqrt{4x-m}$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương?

A. 35. **B.** 37. **C.** 36. **D.** 34.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=(x-1).(x-2)...(x-2020)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để phương trình $f'(x)=m.f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt?

A. 2020. **B.** 4040. **C.** 4041. **D.** 2020.

Câu 8: Cho hai hàm số $y=\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|$ và $y=\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x}+4m-2020$, Tổng tất các các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại một điểm duy nhất là

A. 506. **B.** 1011. **C.** 2020. **D.** 1010.

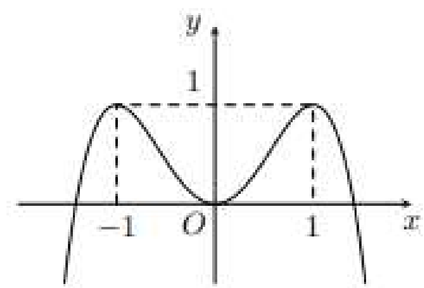
Câu 9: Cho hai hàm số $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)$; $y=-12x^4-22x^3-x^2+10x+3$ có đồ thị lần lượt là (C_1), (C_2). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2020;2020]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt?

A. 4040. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 4041.

Câu 10: Cho hai hàm số $y=x^6+6x^4+6x^2+1$ và $y=x^3\sqrt{m-15x}(m+3-15x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của tập hợp S bằng

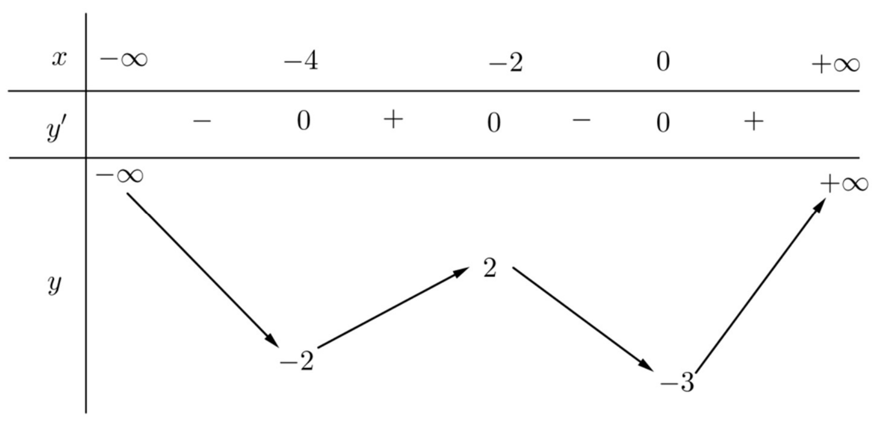
A. 2006. **B.** 2005. **C.** 2007. **D.** 2008.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ có đồ thị như hình vẽ bên đây, trong đó a,b,c,d,e là các hệ số thực. Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{f(x)}\right)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0$ là



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

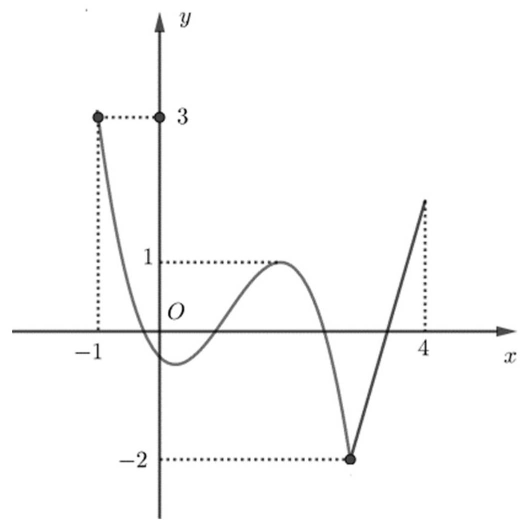
Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f(x^2-4x)=m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

A. 25. **B.** 30. **C.** 29. **D.** 24.

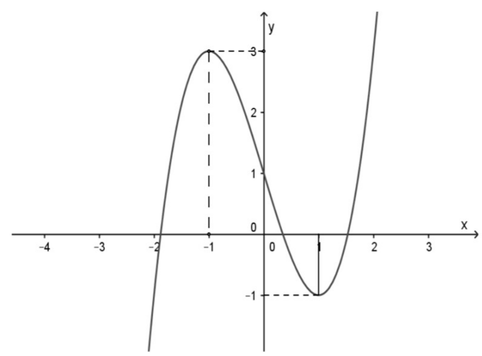
Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $|f(x)+m|<2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1;4]$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x)-m+2=2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



A. 4. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)=x^3+x+2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=-x^3-x+2$ có nghiệm $x\in[-1;2]$?

A. 1750. **B.** 1748. **C.** 1747. **D.** 1746.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[2;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x+2\sqrt{x^2-2x}=m.f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $[2;4]$?

x	2		3		$\frac{7}{2}$		4
$f(x)$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\sqrt{11}$	$\searrow$	2

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 17: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $\left[-2;4\right]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-2		0		1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$1{,}5$	$\searrow$	1	$\nearrow$	6

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{9}{x^2} - 4 \geq 0 \\ 6f\left(-2x+1\right) - 8x^3 + 6x - m = 0 \end{cases}$$

có ba nghiệm phân biệt?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.C	4.A	5.B	6.C	7.B	8.A	9.C	10.A
11.B	12.B	13.C	14.D	15.A	16.C	17.D			

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}=|x+2|-x-m \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-|x+2|+x=-m\ (1)$$

Xét $f(x)=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-|x+2|+x, x\in D=\mathbb{R}\setminus\{-3;-2;-1;0\}$

Ta có $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-2, x\in(-2;+\infty)\cup D=D_1\\ \frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+2x+2, x\in(-\infty;-2)\cup D=D_2\end{cases}$

Có $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}, \forall x\in D_1\\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+2, \forall x\in D_2\end{cases}$

Dễ thấy $f'(x)>0, \forall x\in D_1\cup D_2$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		1		0		$+\infty$
f'(x)		$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
f(x)	$-\infty$ ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗		2

Hai đồ thị cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biện khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt, từ bảng biến thiên ta có: $-m\ge 2\Leftrightarrow m\le -2$.

Câu 2: Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $(2x^2+1)\sqrt{x-1}=\frac{11}{3x-4}-\frac{1}{2-x}+11+m\quad (*)$

Điều kiện: $\begin{cases}x-1\ge 0\\ x\ne\frac{4}{3}\\ x\ne 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x\ne\frac{4}{3}\\ x\ne 2\end{cases}$

Ta có:

$(*)\Leftrightarrow(2x^2+1)\sqrt{x-1}-\frac{11}{3x-4}+\frac{1}{2-x}-11=m$

Xét hàm số $f(x)=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11$ trên $\left[1;+\infty\right)\setminus\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$

Nhận thấy, hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên các khoảng $\left[1;\dfrac{4}{3}\right),\left(\dfrac{4}{3};2\right),\left(2;+\infty\right)$

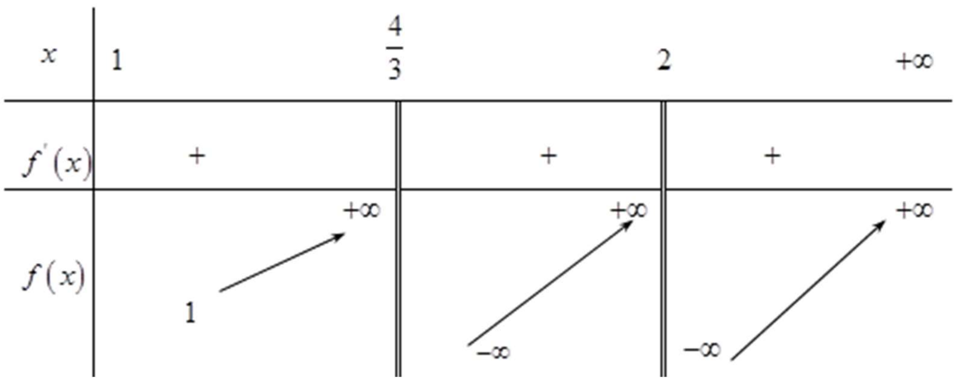
Ta có, $f'(x)=\left(\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}-\dfrac{11}{3x-4}+\dfrac{1}{2-x}-11\right)'$

$=4x\sqrt{x-1}+\left(2x^2+1\right)\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{33}{\left(3x-4\right)^2}+\dfrac{1}{\left(2-x\right)^2}=\dfrac{10x^2-8x+1}{2\sqrt{x-1}}+\dfrac{33}{\left(3x-4\right)^2}+\dfrac{1}{\left(2-x\right)^2}>0$

với $\forall x\in\left[1;+\infty\right)\setminus\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$

Suy ra, hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)\setminus\left\{\dfrac{4}{3};2\right\}$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta suy ra đồ thị hai hàm số $y=\left(2x^2+1\right)\sqrt{x-1}$ và $y=\dfrac{11}{3x-4}-\dfrac{1}{2-x}+11+m$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt khi $m\in\left(-\infty;1\right]$.

Câu 3: **Chọn C**

Đặt $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(ax^2+bx+2\right)$

Giả sử $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $g\left(x\right)=\left(x+2\right)\left(ax^2+bx+2\right)=0$ thì hàm số $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(ax^2+bx+2\right)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=1$, nghĩa là $\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(ax^2+bx+2\right)\geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g\left(x\right)=\left(x+2\right)\left(ax^2+bx+2\right)=0$ có nghiệm $x=1$ suy ra $a+b+2=0$

Lí luận tương tự có $h\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(ax^2+bx+2\right)=0$ cũng phải nhận $x=-2$ là nghiệm, suy ra $4a-2b+2=0$

Từ và ta có hệ $\begin{cases}a+b+2=0\\4a-2b+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$

Điều kiện đủ:

Với $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$ có $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(-x^2-x+2\right)=-\left(x-1\right)^2\left(x+2\right)^2\leq 0$, $x\in\mathbb{R}$.

Vậy không tồn tại cặp số thực $(a;b)$ nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: **Chọn A**

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$x^7+x^5+x^3+3m-1=|x-2|-x-2m \Leftrightarrow x^7+x^5+x^3-|x-2|+x=-5m+1$ (1).

Xét hàm số $f(x)=x^7+x^5+x^3-|x-2|+x$.

Ta có $f(x)=\begin{cases} x^7+x^5+x^3+2 & \text{khi } x\in[2;+\infty) \\ x^7+x^5+x^3+2x-2 & \text{khi } x\in(-\infty;2) \end{cases}$.

$f'(x)=\begin{cases} 7x^6+5x^4+3x^2>0 & \text{khi } x\in(2;+\infty) \\ 7x^6+5x^4+3x^2+2>0 & \text{khi } x\in(-\infty;2) \end{cases}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	|	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi $m\in\mathbb{R}$. Vậy để (C_1) cắt (C_2) thì $m\in\mathbb{R}$.

Câu 5: **Chọn B**

Đk: $x\in[-3;1]$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 11-3x-4\sqrt{(3+x)(1-x)}+m\left(2\sqrt{1-x}-\sqrt{3+x}\right)=0$.

Đặt $t=2\sqrt{1-x}-\sqrt{3+x}=g(x)$, với $x\in[-3;1] \Rightarrow 11-3x-4\sqrt{(3+x)(1-x)}=t^2+4$.

Có $g'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3+x}}<0, \forall x\in(-3;1)$. Suy ra $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$.

$\Rightarrow \min\limits_{[-3;1]} g(x)=g(1)=-2$: $\max\limits_{[-3;1]} g(x)=g(-3)=4 \Rightarrow t\in[-2;4]$.

Từ $\Rightarrow t^2+mt+4=0$.

Nếu $t=0 \Rightarrow 0+4=0$.

Nếu $t\in[-2;4]\setminus\{0\}$, ta có $m=\dfrac{-t^2-4}{t}=-t-\dfrac{4}{t}=f(t)$.

Có $f'(t)=\dfrac{4-t^2}{t^2}, f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\pm 2$.

Bảng biến thiên

t	-2		0		2		4
$f'(t)$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
$f(t)$	4	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	-5

Từ bảng biến thiên, suy ra phương trình có nghiệm thực khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m \ge 4 \\ m \le -4 \end{array}\right.$.

Do đó $\begin{cases} m \in [-2019;2019] \\ \left[\begin{array}{l} m \ge 4 \\ m \le -4 \end{array}\right. \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2019;-2018;....;-4;4;...;2018;2019\}$.

Vậy có $(2019-4+1).2 = 4032$ giá trị nguyên của tham số thực m.

Câu 6: ChọnC

Điều kiện: $\begin{cases} x \ne 10 \\ x \ge \dfrac{m}{4} \end{cases}$.

Xét trên $(0;+\infty)\setminus\{10\}$, phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là

$\left|2+\dfrac{2}{x-10}\right| = \sqrt{4x-m} \Leftrightarrow m = 4x - \left(\dfrac{2x-18}{x-10}\right)^2$.

Đặt $g(x) = 4x - \left(\dfrac{2x-18}{x-10}\right)^2$ với $x \in (0;+\infty)\setminus\{10\}$.

Ta có: $g'(x) = 4\left(1+\dfrac{2x-18}{(x-10)^3}\right)$; $g''(x) = \dfrac{-4x+34}{(x-10)^4}$.

$g'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	0		$\frac{17}{2}$		10		$+\infty$
$g''(x)$		+	0	−	$\parallel$	−	
$g'(x)$	4,072	↗		↘	$-\infty$ $\parallel$ $+\infty$	↘	0

Suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất $\alpha \in \left(\dfrac{17}{2};10\right)$. Lại có $g'(9,22) > 0$ nên $\alpha \in (9,22;10)$. Ta có bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0;+\infty)\setminus\{10\}$:

x	0		9		α		10		$+\infty$
$g'(x)$		+		+	0	−	$\parallel$	+	
$g(x)$	$\frac{-81}{25}$	↗	36	↗	$g(\alpha)$	↘	$-\infty$ $\parallel$ $-\infty$	↗	$+\infty$

Từ đó suy ra phương trình $m = g(x)$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $\dfrac{-81}{25} < m < g(\alpha)$.

Trên khoảng $(9,22;10)$ thì $\begin{cases} 4x < 40 \\ 3 < \left(\dfrac{2x-18}{x-10}\right)^2 \end{cases}$ nên $g(x) < 37 \Rightarrow g(\alpha) \in (36;37)$.

Vậy những giá trị m nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1; 2; 3; …; 36 hay có 36 giá trị của m cần tìm.

Câu 7: Chọn B

Ta có nhận xét: khi $f(x) = 0$ thì phương trình $f'(x) = m.f(x)$ vô nghiệm.

Do đó: $f'(x) = m.f(x) \Leftrightarrow m = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} + \ldots + \dfrac{1}{x-2020}$.

Ta có $g'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2} + \dfrac{-1}{(x-2)^2} + \dfrac{-1}{(x-3)^2} + \ldots + \dfrac{-1}{(x-2020)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1;2;3...;2020\}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3	...	2020		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	...	$\|\|$	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	$-\infty \;\|\|$	...	$\|\|\; +\infty$	$\searrow$	0

Dựa vào BBT, phương trình $f'(x) = m.f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > 0$ hoặc $m < 0$.

Kết hợp với điều kiện m là số nguyên thuộc $[-2020;2020]$ nên $m \in \{n \in \mathbb{Z} \mid -2020 \le n \le 2020, n \ne 0\}$.

Vậy có tất cả 4040 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8: Chọn A

+ Phương trình hoành độ điểm chung của hai đồ thị hàm số là

$$\ln\left|\frac{x-2}{x}\right| = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x} + 4m - 2020 \Leftrightarrow \ln\left|\frac{x-2}{x}\right| - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} = 4m - 2020 \quad (*)$$

Đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại một điểm duy nhất khi và chỉ khi có duy nhất một nghiệm.

+ Xét hàm số $y = \ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right| - \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{1}{x} = \begin{cases} g_1(x) = \ln(x-2) - \ln x - \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{1}{x} & \text{khi } x > 2 \\ g_2(x) = \ln(2-x) - \ln x - \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{1}{x} & \text{khi } 0 < x < 2 \\ g_3(x) = \ln(2-x) - \ln(-x) - \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{1}{x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} g_1'(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x>2 \\ g_2'(x)=\dfrac{-1}{2-x}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } 0<x<2 \\ g_3'(x)=\dfrac{-1}{2-x}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x<0 \end{cases}$, do vậy $y=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

bảng biến thiên hàm số như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	‖	-	0	+	‖	+	
y	0	↗	ln3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

+ Qua bảng biến thiên này ta có có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} 4m-2020=4 \\ 4m-2020=\ln 3 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=506\in\mathbb{Z} \\ m=\dfrac{2020+\ln 3}{4}\notin\mathbb{Z} \end{array}\right.$

+ Tư đây yêu cầu bài toán xãy ra khi và chỉ khi $m=506$.

Câu 9: Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2):

$(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)=-12x^4-22x^3-x^2+10x+3$

Để đồ thị (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt thì phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Với $x\in\left\{-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right\}$: Không là nghiệm của phương trình.

Với $x\notin\left\{-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right\}$ ta có:

$$(1)\Leftrightarrow m=\frac{-12x^4-22x^3-x^2+10x+3}{(x+1)(2x+1)(3x+1)}-2|x|\Leftrightarrow m=-2x-2|x|+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{3x+1}.$$

Xét hàm số $f(x)=-2x-2|x|+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{3x+1}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right\}$.

Suy ra: $f'(x)=-2-\dfrac{2x}{\sqrt{x^2}}-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{(2x+1)^2}-\dfrac{3}{(3x+1)^2}$.

Ta có: $f'(x)=\begin{cases} -4-\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{(2x+1)^2}-\dfrac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x\in(0;+\infty) \\ -\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{(2x+1)^2}-\dfrac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x(-\infty;0)\setminus\left\{-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right\} \end{cases}$ và $f'(x)$ không xác định tại $x=0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, +\infty$		$\searrow$		$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $m \ge 0$. Do đó có 2021 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: Chọn A

Ta biết (C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^6+6x^4+6x^2+1=x^3\sqrt{m-15x}\,(m+3-15x)$ $\quad(1)$ có hai nghiệm phân biệt.

Điều kiện: $m-15x\ge 0 \Leftrightarrow m\ge 15x$ $(*)$.

Nếu $x=0$ thì phương trình (1) vô nghiệm. Suy ra $x\ne 0$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow x^3+6x^2+6x+\frac{1}{x^3}=\sqrt{m-15x}\,(m+3-15x)$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(\sqrt{m-15x}\right)^3+3\sqrt{m-15x}$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t$. Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$f'(t)=3t^2+3>0, \forall t\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t)=t^3+3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1)\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=\sqrt{m-15x}$ (2).

Nếu $x<0 \Rightarrow x+\frac{1}{x}<0 \Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm $\Rightarrow x>0$.

Khi đó $\begin{cases} m>0 \\ x+\frac{1}{x}>0 \end{cases}$ nên $(2)\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2=m-15x \Leftrightarrow m=x^2+\frac{1}{x^2}+2+15x$.

Đặt $g(x)=x^2+\frac{1}{x^2}+2+15x, x>0$. $g'(x)=2x-\frac{2}{x^3}+15$.

Phương trình $g'(x)=0$ có một nghiệm $x=\frac{1}{2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
g'			$-$	0	$+$	
g		$+\infty$	$\searrow$	$\frac{55}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > \dfrac{55}{4}$.

Kết hợp với m nguyên và $m \in [-2019; 2019]$ ta có được m nguyên và $m \in [14; 2019]$.

Khi đó S có $2019 - 14 + 1 = 2006$ phần tử.

Câu 11: Chọn B

Từ hình vẽ ta có dạng đồ thị của hàm trùng phương nên $b = d = 0 \Rightarrow f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 2cx.$

Từ đồ thị $\Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2c = 0 \\ e = 0 \\ a + c + e = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ e = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^4 + 2x^2.$

$\Rightarrow f\left(\sqrt{x}\right) = x^2 + 2x$ và $f\left(\sqrt{f(x)}\right) = f^2(x) + 2f(x).$

Như vậy phương trình $f\left(\sqrt{f(x)}\right) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0.$

$\Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ với $f(x) \geq 0.$

Đặt $t = f(x) (t \geq 0)$ ta được phương trình $g(t) = 0$ với $g(t) = t^2 - 3t - 2\sqrt{t} + 1.$

Nhận thấy: Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $g(0).g(1) < 0$

$\Rightarrow g(t) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0;1)$.

Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và $g(1).g(4) < 0$

$\Rightarrow g(t) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(1;4)$.

Mà $g(t) = 0$ là phương trình bậc hai chỉ có tối hai nghiệm nên $g(t) = 0$ có duy nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$. Suy ra $f\left(\sqrt{f(x)}\right) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ có duy nhất một nghiệm $f(x) \in (0;1)$. Suy ra phương trình $f(x) = a$ với $a \in (0;1)$ luôn có 4 nghiệm x phân biệt.

Câu 12: Chọn B

Ta đặt: $g(x) = f\left(x^2 - 4x\right)$.

$g'(x) = (2x - 4) f'\left(x^2 - 4x\right) = 2(x - 2)\left(x^2 - 4x + 4\right)\left(x^2 - 4x + 2\right)\left(x^2 - 4x\right)$

$= 2(x - 2)^3 \left(x^2 - 4x + 2\right) x (x - 4)$.

Mặt khác: $g(0) = f(0) = -3$; $g\left(2 - \sqrt{2}\right) = g\left(2 + \sqrt{2}\right) = f(-2) = 2$; $g(2) = f(-4) = -2$;

$g(4) = f(0) = -3$. Ta có bảng biến thiên:

x	0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta được: yêu cầu bài toán tương đương $-3<\dfrac{m}{6}\le 2$

$\Leftrightarrow -18<m\le 12$. Vậy có tất cả 30 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13: Chọn C

Để bất phương trình $\left|f\left(x\right)+m\right|<2m$ có nghiệm ta suy ra điều kiện $m>0$.

$\left|f\left(x\right)+m\right|<2m\Leftrightarrow -2m<f\left(x\right)+m<2m\ \Leftrightarrow\begin{cases}f\left(x\right)>-3m\\ f\left(x\right)<m\end{cases}$.

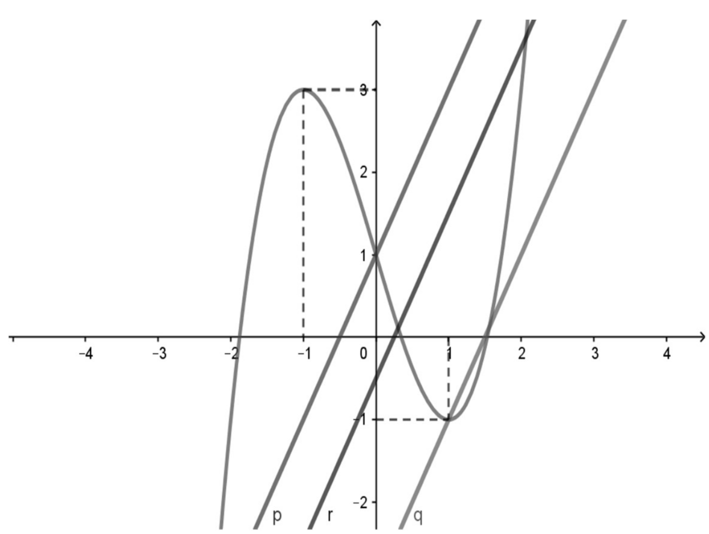
Bất phương trình $\left|f\left(x\right)+m\right|<2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $\left[-1;4\right]$ $\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(x\right)>-3m\\ f\left(x\right)<m\end{cases}$ đúng với mọi x thuộc đoạn $\left[-1;4\right]\Leftrightarrow\begin{cases}-3m<\min\limits_{\left[-1;4\right]}f\left(x\right)\\ m>\max\limits_{\left[-1;4\right]}f\left(x\right)\end{cases}$.

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta suy ra $\min\limits_{\left[-1;4\right]}f\left(x\right)=-2;\ \max\limits_{\left[-1;4\right]}f\left(x\right)=3$.

$\Rightarrow\begin{cases}-3m<\min\limits_{\left[-1;4\right]}f\left(x\right)\\ m>\max\limits_{\left[-1;4\right]}f\left(x\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3m<-2\\ m>3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{2}{3}\\ m>3\end{cases}\Leftrightarrow m>3$

Vậy trên đoạn $\left[-10;10\right]$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 14: Chọn D



Đặt $t=\sin x$, với $x\in\left(0;\pi\right)\Rightarrow t\in\left(0;1\right]$.

Ta được phương trình: $f\left(t\right)-2t=m-2\Leftrightarrow f\left(t\right)=2t+m-2$

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(t)$ và đường thẳng $y=2t+m-2$ (r).

Gọi $(p): y=2x+1$ song song với đường thẳng $(\Delta): y=2t$ và đi qua điểm $A(0;1)$.

Gọi $q: y=2x-3$ song song với đường thẳng $(\Delta): y=2t$ và đi qua điểm $B(1;-1)$.

Để phương trình $f(\sin x)-m+2=2\sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ thì phương trình phải có nghiệm $t\in(0;1]$, suy ra đường thẳng r nằm trong miền nằm giữa hai đường thẳng q và p

$\Rightarrow -3\le m-2<1 \Leftrightarrow -1\le m<3 \Rightarrow m\in\{-1;0;1;2\} \Rightarrow S=\{-1;0;1;2\}$.

Do đó tổng các phần tử là: $-1+0+1+2=2$.

Câu 15: Chọn A

Xét hàm số $f(t)=t^3+t+2$, ta có $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f\left(\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m}\right)=f(-x)$

$\Leftrightarrow -x=\sqrt[3]{f^3(x)+f(x)+m} \Leftrightarrow f^3(x)+f(x)+x^3+m=0 \quad (1)$

Xét $h(x)=f^3(x)+f(x)+x^3+m$ trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có $h'(x)=3f'(x)\cdot f^2(x)+f'(x)+3x^2=f'(x)\left[3f^2(x)+1\right]+3x^2$.

Ta có $f'(x)=3x^2+1>0, \forall x\in[-1;2] \Rightarrow h'(x)>0, \forall x\in[-1;2]$.

Hàm số $h(x)$ đồng biến trên $[-1;2]$ nên $\min\limits_{[-1;2]} h(x)=h(-1)=m-1,\quad \max\limits_{[-1;2]} h(x)=h(2)=m+1748.$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}\min_{[-1;2]} h(x)\cdot\max_{[-1;2]} h(x)\le 0 \quad &\Leftrightarrow \quad h(-1)\cdot h(2)\\ &\Leftrightarrow \quad (m-1)(1748+m)\le 0\\ &\Leftrightarrow \quad -1748\le m\le 1.\end{aligned}$$

Do m nguyên nên tập các giá trị m thỏa mãn là $S=\{-1748;-1747;\ldots;0;1\}$.

Vậy có tất cả 1750 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 16: Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\underset{[2;4]}{Min}\, f(x)=f(4)=2$ và $\underset{[2;4]}{Max}\, f(x)=f(2)=4$

Hàm số $g(x)=x+2\sqrt{x^2-2x}$ liên tục và đồng biến trên $[2;4]$

Suy ra $\underset{[2;4]}{Min}\, g(x)=g(2)=2$ và $\underset{[2;4]}{Max}\, g(x)=g(4)=4+4\sqrt{2}$

Ta có $x+2\sqrt{x^2-2x}=m.f(x) \Leftrightarrow \dfrac{x+2\sqrt{x^2-2x}}{f(x)}=m \Leftrightarrow \dfrac{g(x)}{f(x)}=m$

Xét hàm số $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ liên tục trên $[2;4]$

Vì $g(x)$ nhỏ nhất và $f(x)$ lớn nhất đồng thời xảy ra tại $x=2$ nên

$$\underset{[2;4]}{Min}\,h(x)=\frac{\underset{[2;4]}{Min}\,g(x)}{\underset{[2;4]}{Max}\,f(x)}=\frac{g(2)}{f(2)}=h(2)=\frac{1}{2}$$

Vì $g(x)$ lớn nhất và $f(x)$ nhỏ nhất đồng thời xảy ra tại $x=4$ nên

$$\underset{[2;4]}{Max}\,h(x)=\frac{\underset{[2;4]}{Max}\,g(x)}{\underset{[2;4]}{Min}\,f(x)}=\frac{g(4)}{f(4)}=h(4)=2+2\sqrt{2}$$

Từ đó suy ra phương trình $h(x)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{1}{2}\le m\le 2+2\sqrt{2}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm.

Câu 17: Chọn D

Ta có: $\frac{9}{x^2}-4\ge 0\Leftrightarrow \frac{9-4x^2}{x^2}\ge 0\Leftrightarrow \begin{cases}9-4x^2\ge 0\\ x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{3}{2}\le x\le \frac{3}{2}\\ x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\backslash\{0\}$.

Xét phương trình $6f(-2x+1)-8x^3+6x-m=0\Leftrightarrow m=6f(-2x+1)-8x^3+6x$

Xét hàm số $g(x)=6f(-2x+1)-8x^3+6x$, với $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\backslash\{0\}$.

Ta có $g'(x)=-12f'(-2x+1)-24x^2+6=-6\left[2f'(-2x+1)+4x^2-1\right]$

Từ giả thiết ta suy ra $f'(-2x+1)<0\Leftrightarrow \begin{cases}-2x+1<2\\ -2x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$;

$$f'(-2x+1)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<-2x+1<0\\ 2<-2x+1<4\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2}\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)=6f(-2x+1)-8x^3+6x$ trên $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\backslash\{0\}$.

x	$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$
$f'(-2x+1)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$4x^2-1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	54	$\searrow$	4	$\nearrow$	9	$\nearrow$	14	$\searrow$	-36

Từ bảng biến thiên ta suy ra hệ có đúng ba nghiệm $\Leftrightarrow$ có đúng ba nghiệm $x \in \left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right] \setminus \{0\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 < m < 14 \\ m \neq 9 \end{cases}$. Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 5;6;7;8;10;11;12;13$. Vậy có 8 số nguyên m.