Nguyễn Hữu Điển

OLYMPIC TOÁN NĂM 1997-1998
49 ĐỀ THI VÀ LỜI GIẢI
(Tập 5)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Lời nói đầu

Để thử gói lệnh lamdethi.sty tôi biên soạn một số đề toán thi Olympic, mà các học trò của tôi đã làm bài tập khi học tập LaTeX. Để phục vụ các bạn ham học toán tôi thu thập và gom lại thành các sách điện tử, các bạn có thể tham khảo. Mỗi tập tôi sẽ gom khoảng 51 bài với lời giải.

Rất nhiều bài toán dịch không được chuẩn, nhiều điểm không hoàn toàn chính xác vậy mong bạn đọc tự ngẫm nghĩ và tìm hiểu lấy. Nhưng đây là nguồn tài liệu tiếng Việt về chủ đề này, tôi đã có xem qua và người dịch là chuyên về ngành Toán phổ thông. Bạn có thể tham khảo lại trong [1].

Rất nhiều đoạn vì mới học TeX nên cấu trúc và bố trí còn xấu, tôi không có thời gian sửa lại, mong các bạn thông cảm.

Hà Nội, ngày 2 tháng 1 năm 2010

Nguyễn Hữu Điển

$\frac{51}{\text{GD-05}}$89/176-05 Mã số: 8I092M5

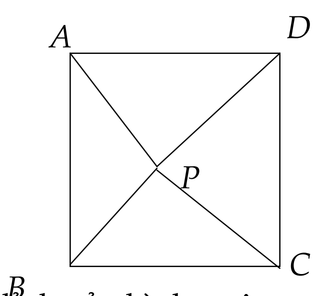
Mục lục

Chương 1

Đề thi olympic Hy Lạp

▷**1.1**. *Cho P là một điểm nằm bên trong hay trên 1 cạnh bất kì của hình vuông ABCD. Hãy xác định giá tri lớn nhất và giá trị nhỏ nhất có thể có của hàm số*

$$f(P) = \widehat{ABP} + \widehat{BCP} + \widehat{CDP} + \widehat{DAP}$$



Lời giải:
Đặt các đỉnh của hình vuông tương ứng với các giá trị 1, i, -1, -i trong mặt phẳng và coi P là số phức z. Khi đó f(P) là argument của số phức z thoả mãn $\frac{z-1}{i+1}\frac{z-i}{-1-i}\frac{z+1}{-i+1}\frac{z+1}{1+i} = \frac{z^4-1}{4}$
Khi $|P| \leq 1$, $\frac{z^4-1}{4}$ chạy trên miền phẳng được giới hạn bởi đường tròn bán kính 1/4, tâm có toạ độ -1/4. Do đó giá trị lớn nhất của góc đạt được tại 1 điểm trên biên của hình tròn trên, điều đó xảy ra khi P nằm trên cạnh của hình vuông. Do vai trò của các cạnh là như nhau, không mất tổng quát ta có thể giả sử cạnh đó là AB.

Khi P chạy từ A đến B thì $\widehat{CDP}$ giảm từ $\dfrac{\pi}{2}$ đến $\dfrac{\pi}{4}$; $\widehat{BCP}$ giảm từ $\dfrac{\pi}{4}$ đến 0; Hai góc còn lại nhận các giá trị là $\dfrac{\pi}{2}$ và 0.

Vậy ta có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(P)$ lần lượt là $\dfrac{5\pi}{4}$ và $\dfrac{3\pi}{4}$

▷**1.2**. *Cho hàm f : $(0;\infty)$ →R thoả mãn các điều kiện sau:*

(a) f tăng nghiêm ngặt

(b) f(x)>$\dfrac{-1}{x}$ với mọi x>0

(c) f(x)f(f(x)+$\dfrac{1}{x}$)=1 với mọi x>0

Tính f(1).

Lời giải: Đặt k=f(x)+$\dfrac{1}{x}$. Vì k>0 nên f(k)f(f(k)+$\dfrac{1}{k}$)=1

Mặt khác f(x)f(k)=1. Do đó f(x)=f(f(k)+$\dfrac{1}{k}$)=f($\dfrac{1}{f(x)}$+$\dfrac{1}{f(x)+\dfrac{1}{x}}$)

Do f tăng nghiêm ngặt nên ta có x=$\dfrac{1}{f(x)}$+$\dfrac{1}{f(x)+\dfrac{1}{x}}$

Giải ra ta thu được f(x)=$\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2x}$.

Dễ dàng kiểm tra được rằng chỉ có $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2x}$ thoả mãn các yêu cầu của đề bài.

Do đó f(1)=$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

▷**1.3**. *Tìm tất cả các số nguyên thoả mãn phương trình sau:*

$$\frac{13}{x^2}+\frac{1996}{y^2}=\frac{z}{1997}$$

Lời giải: Đặt d=gcd(x,y), từ đó x=dx_1, y=dy_1

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

1997(13)y_1^2+1997(1996)x_1^2=$d^2zy_1^2x_1^2$

Khi x_1 và y_1 nguyên tố cùng nhau, ta phải có $x_1^2|1997\times 13$, $y_1^2|1997\times 1996$

Dễ dàng kiểm tra được rằng 1997 không phải số chính phương và rõ ràng nó nguyên tố cùng nhau với 13 và 1996. Hơn nữa $1996 = 2^2.499$, và cũng dễ dàng kiểm tra được rằng 499 không phải số chính phương.

Khi đó $(x_1, y_1) = (1, 1)$ hoặc (1,2)

Bài toán được chia thành 2 trường hợp:

* Trường hợp 1: $(x_1, y_1) = (1, 1)$. Khi đó

$d^2z = (13 + 1996)1997 = 1997.7^2.41$

Khi 1997 nguyên tố cùng nhau với 7 và 41 thì d=1,7. Từ đó ta có kết quả lần lượt là:

(x,y,z)=(1,1,4011973), (7,7,81877)

* Trường hợp 2: $(x_1, y_1) = (1, 2)$.Khi đó $d^2z = (13 + 499)1997 = 1997.2^9$

Do đó d=1,2,4,8,16. Ta lại có các kết quả lần lượt là:

(x,y,z)=(1,2,1022464),(2,4,255616),(4,8,63904), (8,16,15976), (16,32,3994)

Đó là các kết quả thu được.

▷**1.4**. *Cho P là một đa thức với các hệ số nguyên có 13 nghiệm nguyên phân biệt. Hãy chỉ ra rằng nếu $n \in Z$ không phải là nghiệm của P thì $|P(n)| \geq 7(6!)^2$. Hãy cho 1 ví dụ khi dấu bằng xảy ra.*

Lời giải: Phân tích đa thức với các hệ số nguyên thành tích của các đa thức cũng có hệ số nguyên với bậc nhỏ hơn thì P(x) có thể viết dưới dạng

$(x - r_1)(x - r_2)...(x - r_{13})Q(x)$

trong đó r_s là 1 trong 13 nghiệm phân biệt của đa thức đó.

Do đó với tất mỗi số nguyên x, P(x) có giá trị bằng tích của 13 số nguyên phân biệt với 1 số nguyên khác.

Rõ ràng giá trị tuyệt đối nhỏ nhất của kết quả trên là

$|(1)(-1)(2)(-2)...(6)(-6)(7)(1)| = 7(6!)^2$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Một ví dụ khi dấu bằng đạt được đó là khi $x = 0$

và P(x)=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)...(x+7)

Chương 2

Đề thi olympic Hungary

▷**2.5**. *Mỗi thành viên trong hội đồng xếp hạng các ứng viên A, B, C theo thứ tự. Điều đó chỉ ra rằng phần lớn các thứ hạng hội đồng A cao hơn nhiều so với B và cũng có thể là phần lớn các thứ hạng B cao hơn nhiều so với C. Có phải mà theo đó A cao hơn C.*

Lời giải: Không. Giả sử giả hội đồng có ba thành viên, một trong những người xếp hạng $A > B > C$, một trong những người xếp hạng $B > C > A$, và là một trong những người xếp hạng $C > A > B$. Sau đó, thứ nhất và thứ ba cả hai thích A đến B, và thứ nhất và thứ hai thích cả hai B to C, nhưng chỉ là người đầu tiên thích A đến C.

▷**2.6**. *Cho phép a, b, c được các bên,*

$$m_a, m_b, m_c$$

là các độ cao, và

$$d_a, d_b, d_c$$

là các khoảng cách từ đỉnh vào trong một trọng tâm tam giác. Chứng minh rằng.

$$m_a d_a + m_b d_b + m_c d_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

Lời giải: Cho D, E, F là chân của chiều cao từ A, B, C tương ứng, và cho H là trực tâm của hình tam giác ABC, Sau đó hình tam giác ACD là giống với hình tam giác AHE. Vậy

$$m_a d_a = AD \cdot AH = CE \cdot AE = AE \cdot b.$$

Tương tự hình tam giác ABD là giống với hình tam giác AHF. Vậy

$$m_a d_a = AD \cdot AB = AF \cdot AE = AB \cdot c.$$

Do đó

$$m_a d_a = \frac{AE \cdot b + AF \cdot c}{2}$$

Tương tự

$$m_b d_b = \frac{BF \cdot c + BD \cdot a}{2}$$

và

$$m_c d_c = \frac{CD \cdot a + CE \cdot b}{2}$$

Do đó

$$\begin{gathered} m_a d_a + m_b d_b + m_c d_c \\ = \frac{1}{2}(AE \cdot b + AF \cdot c + BF \cdot c + BD \cdot a + CD \cdot a + CE \cdot b) \\ = \frac{1}{2}\left((BD + CD) \cdot a + (CE + AE) \cdot b + (AF + BF) \cdot c\right) \\ = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \end{gathered}$$

▷**2.7**. *Cho R là bán kính hình tam giác ABC và G, H là trọng tâm và trực tâm tương ứng. Cho F là trung điểm của GH. Để*

$$AF^2 + BF^2 + CF^2 = 3R^2$$

Lời giải: Chúng ta sử dụng Vector với gốc tọa độ tại tâm hình tam giác ABC. Sau đó chúng ta có công thức $H = A + B + CvG = H/3$. Vậy $F = (G + H)/2 = 2H/3v2(A + B + C) = 3F$.
Do đó

$$AF^2 + BF^2 + CF^2$$

=(A-F).(A-F) + (B-F).(B-F) + (C-F).(C-F)

$$= A \cdot A + B \cdot B + C \cdot C - 2(A + B + C) \cdot F + 3F \cdot F$$

$$= 3R^2 - F \cdot (2(A + B + C) - 3F) = 3R^2$$

▷**2.8**. *Một hộp chứa 4 quả bóng trắng và 4 quả bóng đỏ, chúng ta cần vẽ từ cái hộp theo một số thứ tự mà không cần thay thế. Trước khi vẽ chúng ta cần đoán màu của quả bóng sẽ vẽ. Con số được mong đợi của các dự đoán chính xác là bao nhiêu?*

Lời giải: Con số được chờ đợi của các dự đoán chính xác là 373/70. Cho

$$i, j \geq 0, a_{ij}$$

biểu thị con số mong đợi của các dự đoán chính xác khi có i quả bóng trắng và j quả bóng đỏ. Giả sử i>j>=1. Sau đó dự đoán của chúng ta là chính xác với xác suất i/(i+j), đưa ra con số mong muốn của các dự đoán chính xác của

$$1 + a_{i-1,j}$$

và sai với xác suất j/(i+j), đưa ra con số mong muốn của

$$a_{i,j-1}$$

Vậy

$$a_{ij} = \frac{i}{i+j}(1 + a_{i-1,j}) + \frac{i}{i+j}a_{i,j-1}$$

if

$$i > j$$

Cũng vậy, chúng ta có

$$a_{ij} = a_{ji}$$

cho

$$i, j \geq 0$$

Nếu

$$i = j \geq 1$$

sau đó chúng ta đoán với xác suất 1/2 và

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(1 + a_{i-1,j}) + \frac{1}{2}a_{i,i-1} = \frac{1}{2} + a_{i,i-1}$$

Như

$$a_{i,i-1} = a_{i-1,i}$$

. Cuối cùng, điều kiện bắt đầu là:

$$a_{i0} = a_{0i} = i$$

với

$$i \geq 0$$

Chúng ta có thể sử dụng những phương trình này cho việc tính toán

$$a_{4,4} = 373/70$$

▷**2.9**. *Tìm tất cả các giải pháp cho những số nguyên của phương trình*

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 + ... + (x+7)^3 = y^3$$

Lời giải: các giải pháp là: (-2,6), (-3,4), (-4,-4), (-5,-6) Cho

$$P(x) = x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 + ... + (x+7)^3 = 8x^3 + 84x^2 + 420x + 784.$$

Nếu

$$x \geq 0$$

thì:

$$(2x+7)^3 = 8x^3 + 84x^2 + 294x + 343 < P(x) < 8x^3 + 120x^2 + 600x + 1000 = (2x+10)^3$$

Vậy 2x+7 < y < 2x100: do đó y là 2x + 8 hoặc 2x + 9 nhưng cả hai phương trình

$$P(x) - (2x+8)^3 = -12^2 + 36x + 272 = 0$$

$$P(x) - (2x+9)^3 = -24x^2 + 66x + 55 = 0$$

có bất kỳ căn nguyên. Do vậy nên ko có giải pháp bào với

$$x \geq 0$$

Tiếp theo, chú ý rằng P thỏa mãn P (-x-7) = -P(x), vậy (x.y) là 1 giải pháp nếu (-x-7,-y) là một giải pháp. Do vậy không có giải pháp nào với

$$x \leq -7$$

Do vậy (x.y) là một giải pháp. Chúng ta phải có

$$-6 \leq x \leq -1$$

Cho

$$-3 \leq x \leq -1$$

Chúng ta có P(-1) = 440
không một lũy thừa 3.

$$P(-2) = 216 = 6^3$$

và

$$P(-3) = 64 = 4^3$$

vậy (-2,6) và (-3,4) và chỉ các giải pháp với

$$-3 \leq x \leq -1$$

Do đó (-4,-4) và (-5,-6) chỉ là giải pháp với

$$-6 \leq x \leq -4$$

Vậy đáp án chỉ có thể là (-2,6), (-3,4), (-4,-4) và (-5,-6).

▷**2.10**. *Chúng ta có 1997 số nguyên dương không trùng nhau, bất kỳ 10 trong số đó có cùng ít nhất chung. Tìm số lớn nhất có thể của các số nguyên tố cùng nhau giữa chúng.*

Lời giải: số lớn nhất của từng đôi số nguyên tố trong tập hợp này là 9. Trước tiên, giả sử có 10 số nguyên tố..

$$n_1, n_2, ...n_{10}$$

Sau đó ít nhất của 10 thành viên của tập hợp này là

$$lcm(n_1, n_2, ...n_{10}) = (n_1 n_2 ... n_{10})$$

Cá biệt, cho bất kỳ N khác trong tập hợp này

$$lcm(N n_2, ...n_{10}) - (n_1 n_2 ... n_{10})$$

là chia hết cho

$$n_1$$

Như

$$n_1$$

có quan hệ với

$$n_j$$

cho

$$-2 \leq j \leq 10$$

chi cho N.
Tương tự

$$n_1$$

chia cho N với mỗi

$$i \in \{2......10\}$$

như vậy

$$n_i$$

có quan hệ nguyên tố.

$$n_1 n_2 ... n_{10}$$

chia cho N. Nhưng

$$N \le lcm(N.n_2....n10) = n_(1)n_(2)...n_(10)$$

Vậy chúng ta phải có

$$N = n_(1)n_(2)....n_(10)$$

Từ đây nó lưu giữ mỗi thành phần của tập hợp của chúng ta hơn

$$n_(1).......n_(10)$$

Tập hợp của chúng ta chỉ có thể chứa 11 thành phần, một sự mâu thuẫn.
Bây giờ chúng ta khởi tạo một ví dụ mà có 9 số nguyên tố.
Cho

$$p_(n)$$

biểu thị số nguyên tố thứ n và cho

$$S = \left\{ \frac{p_1 p_2 ... p_{1988}}{p_j} | 1 \le j \le 1988 \right\} \bigcup \{n_1, n_2....n_9\}$$

khi

$$n_(i) = p_(i)$$

với

$$1 \le i \le 8$$

$$n_(9) = p_(9)p_(10)......p_(1988)$$

Rõ ràng bất kỳ 2 thành phần của

$$n_(1).........n_(9)$$

là cặp nguyên tố.

Chương 3

Đề thi olympic Iran

▷**3.11**. *Giả sử* $w_1, ..., w_k$ *là những số thực phân biệt với tổng khác không. CMR : tồn tại các số nguyên* $n_1, ..., n_k$ *sao cho :* $n_1w_1 + ... + n_kw_k > 0$ *và một số hoán vị* π *của* $\{1, .. ., k\}$ *không đồng nhất bằng nhau. Ta có :*

$$n_1w_{1(1)} + ... + n_kw_{\pi(k)} < 0$$

Lời giải:

Đầu tiên, ta "sắp xếp lại" bất đẳng thức :

Nếu $a_1 < ... < a_n, b_1 < ... < b_n$ là những số thực, $\alpha = \min\{a_{i+1} - a_i\}$,

$\beta = \min\{b_{i+1} - b_i\}$ thì với 1 vài hoán vị không thông thường π của $\{1, ..., n\}$

: $\sum b_i a_{\pi(i)} \leq \sum b_i a_i - \alpha\beta$

Điều này là hiển nhiên vì nếu $i < j$ nhưng $\pi(i) > \pi(j)$ thì thay π bởi những sự hợp thành đó với sự chuyển vế của i và j tăng lên thì tổng bằng $(a_j - a_i)(b_j - b_i)$

Giả sử rằng $w_1 < ... < w_k$ và $s = |\sum w_i|$

Đặt $\alpha = \min\{w_{i+1} - w_i\}$ và chọn 1 số tự nhiên $N = \frac{s}{\alpha}$

Ta đặt $(n_1, n_2, ..., n_k) = (N, 2N, ..., kN) + p(1, ..., 1)$

Ở đây p là số nguyên duy nhất sao cho $\sum n_i w_i \in (0, s]$

Đây là định lý bao hàm rằng $\pi \neq 1$

$$\sum n_i w_{\pi(i)} \leq \sum n_i w_i - N\alpha \leq s - N\alpha < 0$$

.

▷**3.12**. *Giả sử điểm P di động dọc theo cung BC của đường tròn ngoại tiếp ΔABC, và cho I_1, I_2 tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp ΔPAB, ΔPAC. CMR :*
a) Đường tròn ngoại tiếp ΔPI_1I_2 đi qua một điểm cố định.
b) Đường tròn đường kính I_1I_2 đi qua một điểm cố định.
c) Trung điểm của đoạn I_1I_2 nằm trên một đường tròn cố định.

Lời giải:
Cho B_1, C_1 là điểm giữa của các cung AC, AB. Do I_1, I_2 là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác $\Delta ABP, \Delta ACP$, ta có : $C_1A = C_1B = C_1I_1, B_1A = B_1C = B_1I_2$.
Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và Q là giao điểm thứ 2 của đường tròn ngoại tiếp ΔABC và ΔPI_1I_2. Do C_1I_1 và B_1I_2 đi qua P nên ΔQI_1C_1 và ΔQI_2B_1 đồng dạng, vậy : $\frac{QC_1}{QB_1} = \frac{C_1I_1}{B_1I_2} = \frac{C_1A}{B_1A}$ không đổi.
Do đó Q là giao của đường tròn ngoại tiếp ΔABC với đường tròn Apollonius cố định, nên Q cố định và phần a) được chứng minh.
Từ : $\widehat{I_1QI_2} = \widehat{I_1PI_2} = \widehat{C_1PB_1} = \frac{\left(\widehat{B}+\widehat{C}\right)}{2}$
Các tam giác ΔQI_1I_2 với $Q \neq P$ đều đồng dạng với nhau. Vì thế nếu M là trung điểm của I_1I_2 thì các tam giác ΔQI_1M cũng đều đồng dạng.
Nếu $k = \frac{QM}{QI_1}, \alpha = \widehat{MQI_1}$, nghĩa là M là ảnh của I_1 qua qua các phép dời hình tâm Q với góc α và tỉ số k.
Do $C_1I_1 = C_1A$ không đổi, I_1 chuyển động trên một cung của đường tròn cố định nên M nằm trên một đường tròn cố định và (c) được chứng minh.
Cuối cùng ta tính được góc $\widehat{I_1II_2} = \frac{\pi}{2}$. Vì thế đường tròn đường kính I_1I_2 đi qua I cố định và phần (b) được chứng minh.

▷**3.13**. *Giả sử $f : R^+ \to R^+$ là hàm liên tục, giảm sao cho $\forall x, y \in R^+$,*

$$f(x+y) + f(f(x) + f(y)) = f(f(x + f(y))) + f(y + f(x))$$

CMR : $f(f(x)) = x$.

Lời giải:
Đặt $y = x$, ta được:

$$f(2x) + f(2f(x)) = f(2f(x + f(x)))\ (1)$$

Thay x bởi $f(x)$, ta được :

$$f(2f(x)) + f(2f(f(x))) = f(2f(f(x) + f(f(x)))) \ (2)$$

Lấy (2) trừ (1) , ta được :

$$f(2f(f(x))) - f(2x) = f(2f(f(x) + f(f(x)))) - f(2f(x + f(x)))$$

Nếu $f(f(x)) > x$ thì vế trái của phương trình là âm, do đó :

$$f(f(x) + f(f(x))) > f(x + f(x))$$

Và $f(x) + f(f(x)) < x + f(x)$, mâu thuẫn.
Điều mẫu thuẫn tương tự cũng xảy ra nếu $f(f(x)) < x$.
Vậy : $f(f(x)) = x$.

▷**3.14**. *Cho A là một ma trận gồm các số 0 và 1 đối xứng $\left(A_{ij} = A_{ji}, \forall i, j\right)$ sao cho $A_{ii} = 1$ với mọi i. Hãy chỉ ra rằng tồn tại một tập con của các dãy mà tổng tất cả thành phần của véctơ là lẻ.*

Lời giải:
Giả sử ngược lại , tồn tại một véctơ $(v_1, ..., v_n)$ sao cho $\sum_i v_i \mathrm{w}_i = 0$ với một vài dãy $(w_1, ..., w_n)$ nhưng $\sum v_i \neq 0$ (Tất cả các số ở đây là chia hết cho 2) . Cộng trên tất cả các dãy, ta có :

$$\sum_j \sum_i v_i A_{ij} v_j = 0$$

Do ma trận là đối xứng, điều này được quy về $\sum\limits_i v_i^2 A_{ii} = 0$ hoặc $\sum\limits_i v_i = 0$ $(v_1 \in \{0, 1\})$, mâu thuẫn .

Chương 4

Đề thi olympic Ireland

▷**4.15**. *Tìm tất cả các cặp số nguyên* (x, y) *sao cho* $1 + 1996x + 1998y = xy$

Lời giải: Ta có: $(x - 1998)(y - 1996) = xy - 1998y - 1996x + 1996.1998 = 1997^2$
Do 1997 là số nguyên tố, nên ta có: $x - 1998 = \pm 1; \pm 1997; \pm 1997^2$. Vậy có 6 giá trị (x, y) thỏa mãn là

$$(x, y) = \left(1999, 1997^2 + 1996\right), \left(1997, -1997^2 + 1996\right),$$

$$(3995, 3993), (1, -1) \left(1997^2 + 1998, 1997\right), \left(-1997^2 + 1998, 195\right)$$

▷**4.16**. *Cho* ΔABC*, M là điểm trong tam giác. Goi D,E,F lần lượt là hình chiếu của M xuống BC, CA, AD. Tìm tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn* $\widehat{FDE} = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải: Từ các tứ giác nội tiếp MDBF và MDCE ta có $\widehat{MDE} = \widehat{MCE}$ và $\widehat{MDF} = \widehat{MBE}$ do đó $\widehat{FDE} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \widehat{MCB} + \widehat{MBC} = \frac{\pi}{6}$ hay $\widehat{BMC} = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow$ M nằm trên cung tròn đi qua B và C.

▷**4.17**. *Tìm tất cả các đa thức* $P(x)$ *sao cho đối với mọi x ta có :*

$$(x - 16) P(2x) = 16(x - 1) P(x).$$

Lời giải: Goi $d = degP$ và a là hệ số của x trong $P(x)$ với số mũ lớn nhất. Khi đó hệ số của x mũ lớn nhất ở bên trái là $2^d a$ phải bằng $16a$ do đó $d = 4$
Do vế phải lúc này chia hết cho $(x-1)$, nhưng trong trường hợp đó vế phải lại chia hết cho $(x-2)$, tương tự là chia hết cho $(x-4)$ và $(x-8)$. Vậy đa thức $P(x)$ là bội của $(x-1)(x-2)(x-4)(x-8)$ là tất cả các đa thức thỏa mãn.

▷**4.18**. *Cho a, b, c là các số thức không âm sao cho $a + b + c \geq abc$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc$.*

Lời giải: Giả sử phản chứng rằng với $a, b, c > 0$ mà $a^2 + b^2 + c^2 < abc$ do đó $abc > a^2 \Rightarrow a < bc$. Làm tương tự ta cũng có $b < ca, c < ab$. Do đó $abc \geq a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Theo bất đẳng thức AM-GM và $ab + bc + ca > a + b + c$ suy ra $abc > a + b + c$. Trái với giả thiết. Vậy bài toán được chứng minh.

▷**4.19**. *Cho tập hợp $S = \{3, 5, 7, ...\}$. Với mỗi $x \in S$ ta đặt $\delta(x)$ là xác định một số nguyên duy nhất sao cho: $2^{\delta(x)} < x < 2^{\delta(x)+1}$*
Đối với $a, b \in S$ ta định nghĩa phép toán

$$a * b = 2^{\delta(a)-1}(b-3) + a$$

a, Chứng minh rằng nếu $a, b \in S$ thì $a * b \in S$
b, Chứng minh rằng nếu $a, b, c \in S$ thì $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Lời giải: a, Hiển nhiên
b, Nếu $2^m < a < 2^{m+1}, 2^n < b < 2^{n+1}$ thì

$$a * b = 2^{m-1}(b-3) + a \geq 2^{m-1}(2^n - 2) + 2^m + 1 = 2^{n+m-1} + 1$$

và $a * b \leq 2^{m-1}\left(2^{n+1} - 4\right) + 2^{m+1} - 1 = 2^{m+n} - 1$. Vì vậy $\delta(a * b) = m + n - 1$
Nếu $2^p < c < 2^{p+1}$ thì

$$(a * b) * c = \left(2^{m-1}(b-3) + a\right) * c = 2^{m+n-2}(c-3) + 2^{m-1}(b-3) + a$$

Và

$$a * (b * c) = a * \left(2^{m-1}(c-3) + b\right) = 2^{m-1}\left(2^{n-1}(c-3) + b - 3\right) + a = (a * b) * c.$$

▷**4.20**. *Cho tứ giác lồi ABCD có một đường tròn nội tiếp. Nếu*

$$A = B = \frac{2\pi}{3}, D = \frac{\pi}{2}, BC = 1$$

Tìm độ dài AD

Lời giải: Goi I là tâm đường tròn nôi tiếp . Do ΔABC là tam giác đều, $\widehat{BIC} = 105^0, \widehat{ICB} = 15^0, \widehat{AID} = 75^0, \widehat{IDA} = 45^0$ nên

$$AD = \frac{BI}{BC}\frac{AD}{AI} = \frac{\sin 15^0}{\sin 105^0}\frac{\sin 75^0}{\sin 45^0} = \sqrt{2}\sin 15^0.$$

▷**4.21**. *Gọi A là tập con của $\{0, 1, 2, ..., 1997\}$ gồm hơn 1000 phần tử. Chứng minh rằng A chỉ gồm những lũy thừa của 2 hoặc hai phần tử phân biệt có tổng là lũy thừa của 2.*

Lời giải: Giả sử tập A không thỏa mãn bài toán. Khi đó A sẽ bao gồm hơn nửa số nguyên từ 51 tới 1997 mà chúng được chia thành từng cặp có tổng là 2048 ($VD : 51 + 1997 = 2048...$). Tương tự như vậy, A bao gồm nhiều nhất nửa số nguyên từ 14 tới 50, gồm nhiều nhất nửa số nguyên từ 3 tới 13, và có thể cả số 0, do đó A có tổng cộng $937 + 18 + 5 + 1 = 997$ số nguyên, trái với giả thiết A gồm hơn 1000 số nguyên từ tập $\{0, 1, 2, ..., 1997\}$.

▷**4.22**. *Xác định số tự nhiên n thỏa mãn những điều kiện sau:*
a, Khai triển thập phân của n gồm 1000 số
b, Tất cả các số trong khai triển là số lẻ.
c, Hai phần tử bất kỳ liền nhau trong khai triển của n hơn kém nhau 2 đơn vị

Lời giải: Đặt a_n, b_n, c_n, d_n, e_n là số trong khai triển của n, đó là những số lẻ và hai số liên tiếp khác nhau 2 đơn vị do đó tận cùng theo thứ tự là $1, 3, 5, 7, 9$ do đó

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \\ e_{n+1} \end{pmatrix}$$

Gọi A là ma trận vuông trong biểu thức đó. Ta tìm giá trị riêng của của A, giả sử $Av = \lambda v$ với $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$. Do đó

$$
\begin{aligned}
v_2 &= \lambda v_1 \\
v_3 &= \lambda v_2 - v_1 = \left(\lambda^2 - 1\right) v_1 \\
v_4 &= \lambda v_3 - v_2 = \left(\lambda^3 - 2\lambda\right) v_1 \\
v_5 &= \lambda v_4 - v_3 = \left(\lambda^4 - 3\lambda^2 + 1\right) v_1
\end{aligned}
$$

và $v_4 = \lambda v_5$, do đó $\lambda^5 - 3\lambda^3 + \lambda = \lambda^3 - 2\lambda$. Giải pt này ta được $\lambda = 0, \lambda = \pm 1, \lambda = \pm\sqrt{3}$ tương ứng ta có các vectơ riêng x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 là

$$(1, 0, -1, 0, 1), (1, 1, 0, -1, -1), (1, -1, 0, 1, -1), \left(1, \pm\sqrt{3}, 2, \pm\sqrt{3}, 1\right)$$

và

$$(1, 1, 1, 1, 1) = \frac{1}{3} x_1 \frac{2+\sqrt{3}}{6} x_4 + \frac{2-\sqrt{3}}{6} x_5$$

Vì vậy

$$
\begin{aligned}
&(a_{1000}, b_{1000}, c_{1000}, d_{1000}, e_{1000}) = \\
&\quad = 3^{\frac{999}{2}} \frac{2+\sqrt{3}}{6} \left(1, \sqrt{3}, 2, \sqrt{3}, 1\right) - \frac{2-\sqrt{3}}{6} \left(1, -\sqrt{3}, 2, -\sqrt{3}, 1\right) \\
&\quad = \left(3^{499}, 2.3^{499}, 2.3^{499}, 2.3^{499}, 3^{499}\right)
\end{aligned}
$$

Vì thế kết quả của bài toán là 8.3^{499}.

Chương 5

Đề thi olympic Italy

▷**5.23**. *Cho một dải giấy hình chữ nhật có chiều rộng 3 cm, chiều dài vô tận. Gấp dải giấy lại chỉ bằng một nếp gấp.Hỏi phần dải giấy bị phủ bởi việc gấp đó có thể có diện tích nhỏ nhất là bao nhiêu ?*

Lời giải: Phần dải giấy bị phủ là một tam giác.Kí hiệu ba đỉnh của tam giác là A, B, C trong đó AB là nếp gấp và góc BAC nhọn. Hạ các đường cao AA', BB', CC' của ΔABC. Chú ý $\widehat{BAB'} = \widehat{BAC}$. Đặt $\widehat{BAB'} = x$. Ta xét hai trường hợp :

Trường hợp 1 : Giả sử $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$, thế thì C nằm giữa A′ và B, $\widehat{ABA'} = x$ và $\widehat{ACA'} = 2x$. Ta có:

$$\begin{aligned} S_{\Delta ABC} &= S_{\Delta ABA'} - S_{\Delta ACA'} \\ &= \frac{1}{2}.3.(3\cot x) - \frac{1}{2}.3.(3\cot 2x) \\ &= \frac{9}{2}(\cot x - \cot 2x) \\ &= \frac{9}{2}\csc 2x \end{aligned}$$

Giá trị nhỏ nhất của $csc2x$ chỉ có thể là 1 khi $x = \frac{\pi}{4}$. Do đó diện tích nhỏ nhất là $\frac{9}{2}$

▷**5.24**. *Cho f là một hàm giá trị thực sao cho với mỗi số thực x ta có*
(a)$f(10 + x) = f(10 - x)$

(b)$f(20+x) = -f(20-x)$

Chứng minh rằng f là hàm lẻ ($f(-x) = -f(x)$) và tuần hoàn (tức là tồn tại $T > 0$ sao cho $f(x+T) = f(x)$).

Lời giải: Chọn $x = n - 10$, từ (a) ta có $f(n) = f(20-n)$

Chọn $x = n$ từ (b) ta có $f(20-n) = -f(20+n)$

Từ đó suy ra $\begin{cases} f(n) = -f(n+20) \\ f(n+20) = -f(n+40) \end{cases}$. Do đó $f(n+40) = f(n))$. Vì vậy f tuần hoàn và có chu kì là $T = 40$

Ta cũng có $-f(n) = f(20+n) = -f(20-n) = f(n)$. Vậy f là hàm lẻ.

▷**5.25**. *Góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng toạ độ được chia thành các hình vuông dơn vị bởi các đường ô lưới.Có thể tô màu các hình vuông đơn vị thoả mãn các điều kiện sau?*

(a)Với mỗi hình vuông lớn có một đỉnh dặt tại gốc, và các cạnh song song với với các trục toạ độ thì chứa nhiều hình vuông đơn vị được tô hơn các hình vuông dơn vị không được tô.

(b)Mỗi đường song song với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất chỉ đi qua các hình vuông được tô màu.

Lời giải: Có thể thực hiện như sau: Trên mỗi đường $y = x + D$, ta tô màu $|D| + 1$ hình vuông gần trục nhất.

Xét đường $y = x + D$ với $D \geq 0$. Dọc đường này hình vuông đầu tiên được tô nằm trên cột thứ 1 và dòng thứ $D + 1$. Hình vuông cuối cùng được tô màu nằm trên cột thứ $D + 1$ và dòng thứ $2D + 1$. Do các hình vuông nằm bên tay phải của hình vuông này (phía trên đường $y = x$) là phần mà các đường chéo có các hình vuông được tô ít hơn, thế thì không một hình vuông nào trong số đó được tô cả. Nếu ta kí hiệu (i, j) là hình vuông ở dòng thứ i và cột thứ j thì hình vuông (i, j) được tô khi và chỉ khi:

$$j \geq i, i \leq D + 1 \Rightarrow i \leq (j - i + 1) \Rightarrow i \leq \frac{j+1}{2}$$

hoặc $j \leq \frac{i+1}{2}$. Tổng các hình vuông được tô trong $n.n$ hình vuông là

$$C_n = 2(\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k+1}{2}\right]) - 1$$

Nếu n chẵn, ta có $C_n = \frac{1}{2}n^2 + n - 1$
Nếu n lẻ , thì $C_n = \frac{1}{2}n^2 + n - \frac{1}{2}$
Do đó $C_n \geq \frac{1}{2}n^2$ với mọi n sẽ thoả mãn điều kiện đề bài.

$\triangleright$**5.26**. *Cho tứ diện ABCD.Gọi a là độ dài của AB và S là diện tích hình chiếu của tứ diện lên mặt phẳng vuông góc với AB.Hãy xác định thể tích của tứ diện ABCD theo S và a.*

Lời giải: Ta kí hiệu các toạ độ $A = (0, 0, 0), B = (0, 0, n), C = (0, b, c), D = (i, j, k)$. Khi đó mặt phẳng z = 0 vuông góc với AB, và hình chiếu của tứ diện lên mặt phẳng này là một tam giác có đỉnh $A' = B' = (0, 0, 0), C' = (0, b, 0), D' = (i, j, 0)$. Tam giác này có đáy là b và chiều cao tương ứng là i. Vậy $S = b\frac{i}{2}$ và $a = AB = n$.
Để tìm thể tích , ta xét tứ diện như là hình chóp có đáy là tam giác ABC.Khi đó mặt phẳng đáy có phương trình $x = 0$ và chiều cao hạ từ d có độ dài là i. Diện tích của tam giác ABC là $b\frac{n}{2}$. Vậy thể tích của tứ diện là : $b\frac{in}{6} = S\frac{a}{3}$.

$\triangleright$**5.27**. *Cho X là tập hợp tất cả các sôs tự nhiên mà các chữ số của nó đôi một khác nhau. Với mỗi $n \in X$, đặt A_n là tập hợp tất cả các số mà các chữ số của nó là một hoán vị của các chữ số của n.*
Ví dụ $n = 47$ thì $A_n = \{47, 74\}$,$n = 125$ thì $A_n = \{125, 152, 251, 215, 521, 512\}$.
Gọi d_n là ƯCLN của tất cả các số trong A_n. Tìm giá trị lớn nhất có thể của d_n.

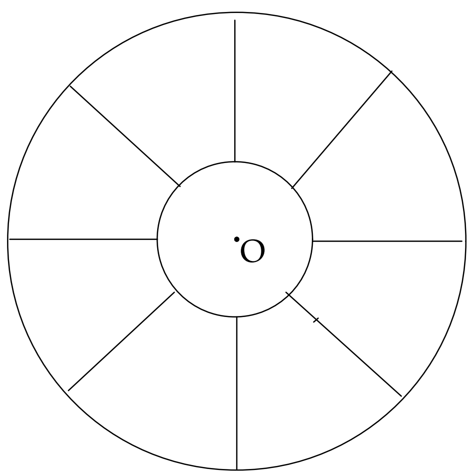
Lời giải: Giả sử n có nhiều hơn hoặc bằng 3 chữ số. Gọi AB là hai chữ số cuối thế thì số có hai chữ số cuối theo thứ tự là BA cũng thuộc A_n. Vậy hiệu của hai số trên là : $|BA - AB| = |10B - A - 10A + b| = 9|A - B| \leq 81$. Nếu d_n là ước của hai số trên thì d_n là ước của 81 vậy $d_n \leq 81$
Nếu n gồm hai chữ số , cả hai chữ số đều khác 0 thì lập luận như trên.
Nếu n gồm hai chữ số mà một trong hai chữ số là 0 thì A_n chỉ chứa n.
(Vdụ n = 90 thì $A_n = \{09, 90\} = \{90\}$) trong trường hợp này giá trị lớn nhất của $d_n = 90$;nếu $n = 10$ thì $A_n = \{10\}$. Suy ra $d_n = 90 > 81$
Vậy giá trị lớn nhất có thể của d_n là 90.

Chương 6

Đề thi olympic Japan

▷**6.28**. *Chứng minh rằng bất kỳ 9 điểm bất kỳ nằm trong một đường tròn đường kính 5, tồn tại hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn* 2.

Lời giải:



Chia hình tròn thành 9 phần: một phần là hình tròn bán kính 1 đồng tâm với đường tròn đã cho và 8 hình quạt bằng nhau là giao của phần còn lại với đường tròn. Sau đó kiểm tra được rằnng hai điểm trong mỗi phần có khoảng cách nhiều nhất là 2.

▷**6.29**. *Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh bất đẳng thức sau:*

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2}+\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2}\leq\frac{3}{5}$$

và xác định khi nào dấu bằng xảy ra.

Lời giải: Đầu tiên, rút gọn

$$\frac{2ab+2ac}{a^2+b^2+c^2+2bc}+\frac{2ba+2bc}{a^2+b^2+c^2+2ac}+\frac{2ca+2cb}{a^2+b^2+c^2+2ab}\le\frac{12}{5}$$

Đặt $s=a^2+b^2+c^2$. Sau đó quy đồng khử mẫu số ta có

$$5s^2(ab+bc+ca)+10s(a^2bc+ab^2c+abc^2)+20(a^3b^2c+ab^3c^2+a^2bc^3)$$

$$\le 6s^3+6s^2(ab+bc+ca)+12s(a^2bc+ab^2c+abc^2)+48a^2b^2c^2$$

Đơn giản hai vế

$$6s^3+s^2(ab+bc+ca)+2s(a^2bc+ab^2c+abc^2)+48a^2b^2c^2$$

$$\ge 10s(a^2bc+ab^2c+abc^2)+20(a^3b^2c+ab^3c^2+a^2bc^3).$$

Thay s và khai triển biểu thức của s

$$(3a^6+2a^5b-2a^4b^2+3a^4bc+2a^3b^3-12a^3b^2c+12a^2b^2c^2)+$$

$$+(3b^6+2b^5c-2b^4c^2+3b^4ca+2b^3c^3-12b^3c^2a+12b^2c^2a^2)+$$

$$+(3c^6+2c^5a-2c^4a^2+3c^4ab+2c^3a^3-12c^3a^2b+12b^2a^2b^2\ge 0.\quad(*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Schur, ta có:

$$(4a^4bc-8a^3b^2c+4a^2b^2c^2)+(4b^4ca-8b^3c^2a+4b^2c^2a^2)+(4c^4ab-8c^3a^2b+4c^2a^2b^2)\ge 0,$$

Để chứng minh bất đẳng thức (*), ta cần chứng minh:

$$(3a^6+2a^5b-2a^4b^2-a^4bc+2a^3b^3-4a^3b^2c)+$$

$$+(3b^6+2b^5c-2b^4c^2-b^4ca+2b^3c^3-4b^3c^2a)+$$

$$+(3c^6+2c^5a-2c^4a^2-c^4ab+2c^3a^3-4c^3a^2b)\ge 0.$$

Ta có thể chứng minh bất đẳng thức trên bằng bốn biểu thức không âm bởi bất đẳng thức AM-GM:

$$0 \le 2\sum_{a,b,c} \frac{2a^6+b^6}{3} - a^4b^2$$

$$0 \le 2\sum_{a,b,c} \frac{4a^6+b^6+c^6}{3} - a^4bc$$

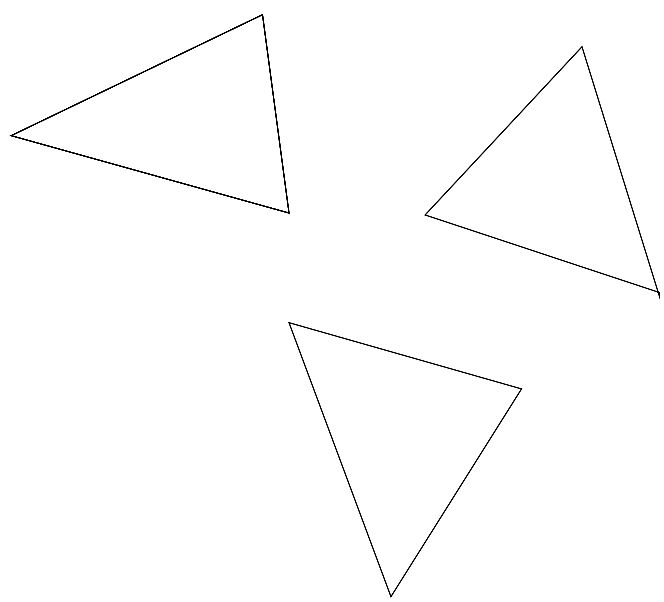
$$0 \le 2\sum_{a,b,c} \frac{2a^3b^3+c^3b^3}{3} - a^3b^2c$$

$$0 \le 2\sum_{a,b,c} \frac{2a^5b+a^5c+ab^5+ac^5}{6} - a^3b^2c.$$

Dấu bằng xảy ra khai và chỉ khi $a=b=c$.

▷**6.30**. *Cho G là đồ thị 9 đỉnh. Giả sử rằng với bất kỳ 5 đỉnh của G đều tồn tại ít nhất hai cạnh có điểm đầu và điểm cuối thuộc vào 5 điểm đó. Hỏi rằng số cạnh nhỏ nhất có thể có của G là bao nhiêu?*

Lời giải:

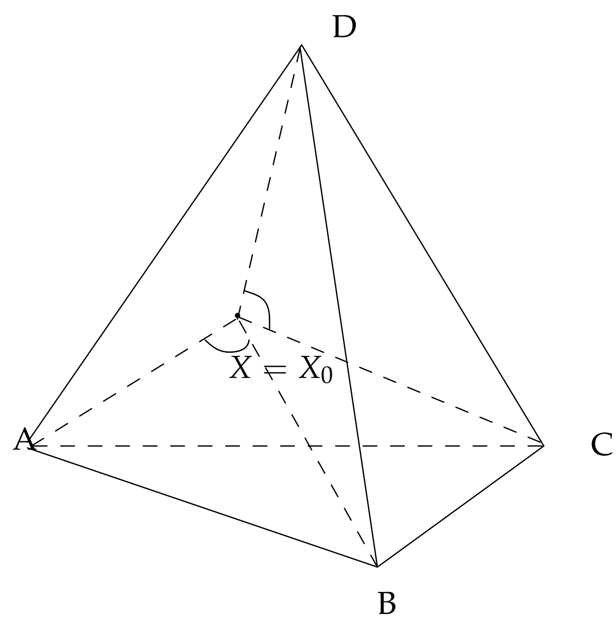


Số cạnh nhỏ nhất là 9, đạt được bởi 3 chu trình rời nhau.

Thật vậy, gọi a_n là số cạnh nhỏ nhất của đồ thị n đỉnh thỏa mãn điều kiện bài ra. Ta sẽ chứng minh rằng $a_{n+1} \geq \dfrac{n+1}{n-1}a_n$. Với mỗi đồ thị n đỉnh gọi l_i là số cạnh của đồ thị nhận được bằng cách bỏ đi đỉnh thứ i và tất cả các cạnh gắn với đỉnh thứ i. (Ta có $l_i \geq a_n$, mặt khác $l_1 + l_2 + ... + l_{n+1} = (n-1)a_{n+1}$. Vì mỗi cạnh được đếm cho mọi cạnh khác trừ hai điểm đầu cuối của nó). Từ đó, $a_5 = 2$, ta nhận được $a_6 \geq 3, a_7 \geq 5, a_8 \geq 7, a_9 \geq 9$.

▷**6.31**. *Cho A, B, C, D là bốn điểm không đồng phẳng. Giả sử rằng $AX + BX + CX + DX$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $X = X_0$ khác A, B, C, D. Chứng minh rằng $\widehat{AX_0B} = \widehat{CX_0D}$.*

Lời giải:



Giả sử A, B, C, D và P có các tọa độ (x_1, y_1, z_1), ..., (x_4, y_4, z_4) và (x, y, z). Ta có hàm số

$$f(P) = \sum_i \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$$

. Để đạt giá trị nhỏ nhất, ba đạo hàm riêng của nó phải bằng không, nhưng có ba hàm tọa độ của $u_a + u_b + u_c + u_d$, ở đây u_a là véctơ đơn vị $\dfrac{P-A}{||P-A||}$ và tương tự. Do tổng này bằng không, và $u_a.u_b = u_c.u_d$ tại điểm $P = X_0$, từ đó ta có điều phải chứng minh.

▷**6.32**. *Cho n là một số nguyên dương. CMR: có thể gán cho mỗi đỉnh của một đa giác* 2^n *đỉnh, một trong các chữ cái A hoặc B sao cho các dãy n chữ cái nhận được bằng cách đọc bắt đầu từ một đỉnh nào đó theo ngược chiều kim đồng hồ, là luôn khác nhau.*

Lời giải: Xét một đồ thị có hướng như sau: mỗi đỉnh của đồ thị là một dãy có độ dài $n-1$, hai đỉnh là kề nhau nếu $n-2$ chữ cái cuối của đỉnh này trùng với $n-2$ chữ cái đầu của đỉnh kia. (Chú ý là: đây là một đồ thị có hai vòng). Mỗi đỉnh của đồ thị có một cạnh đi vào và một cạnh đi ra, vì thế tồn tại một đường đi có hướng đi qua mỗi cạnh đúng một lần. Ta có thể có một chu trình cần thiết bằng cách bắt đầu từ một đỉnh bất kì, viết ra dãy chữ tương đương với nó, sau đó viết thêm vào chữ cuối cùng của mỗi dãy, ta sẽ gặp hết các dãy trên đường đi đó.

Chương 7

Đề thi olympic Korean

▷**7.33**. *Chứng minh rằng với bốn điểm bất kì trong một đường tròn đơn vị thì tồn tại hai điểm mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá* $\sqrt{2}$.

Lời giải: - Trường hợp 1:
Nếu một trong 4 điểm là tâm đường tròn thì ta có ngay điều phải chứng minh.
- Trường hợp 2:
Nếu không có điểm nào trong bốn điểm trùng tâm đường tròn thì ta ký hiệu các điểm đó lần lượt là P_1, P_2, P_3, P_4
Ta có tứ giác lồi $Q_1Q_2Q_3Q_4$, với $\{Q_i\}$ là giao điểm của $\{OP_i\}$ với đường tròn.
Khi đó: $\angle P_1OP_2 + \angle P_2OP_3 + \angle P_3OP_4 + \angle P_4OP_1 \leq 2\pi$
Ta có $\angle P_iOP_{i+1} \leq \frac{\pi}{2}$
Đoạn P_iP_{i+1} nằm trong tam giác OQ_iQ_{i+1} vì vậy ta có:
$P_iP_{i+1} \leq max(OQ_i, Q_iQ_{i+1}, Q_{i+1}O) = max(1, 2\sin\angle OQ_iQ_{i+1}) \leq \sqrt{2}$

▷**7.34**. *Cho hàm số: f : N → N thỏa mãn hai điều kiện:*
a. n ∈ N, f(n + f(n)) = f(n)
b. $n_0 \in N, f(n_0\ ) = 1$
Chứng minh rằng: f(n) = 1,∀ n ∈ N

Lời giải: Trước hết chú ý rằng nếu n ∈ N f(n) = 1, sau đó
f(n + 1) = f(n + f(n)) = f(n) = 1

Cho f(n_0) = 1,f(n) = 1, $\forall$ n $\geq n_0$
Đặt $S = \{n \in N \,|\, f(n) \neq 1\}$
Nếu $S \neq \emptyset$, gọi N = $maxS$. Ta có f(N + f(N)) = f(N) $\neq$ 1
$\Rightarrow$ N + f(N) $\in$ S, N + f(N) > N
Điều này mâu thuẫn với N = max S
Vậy $S = \emptyset$ và f(n) = 1,$\forall$ n $\in$ N

▷**7.35**. *Biểu thị tổng* $\sum\limits_{k=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$ *theo các số hạng của n và* $a = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

Lời giải: Ta sẽ chứng minh kết quả là:

$$(n+1) - \frac{a(a+1)(2a+1)}{6}$$

Thật vậy, ta quy ước việc sử dụng dấu [ ] như sau:
Gọi P là một mệnh đề, [P] có giá trị bằng 1 nếu P đúng, ngược lại P có giá trị 0 nếu P sai.
Chú ý rằng $\lfloor k \rfloor$ là số nguyên dương và bình phương của nó gần k nhất.
Vì vậy: $\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = \sum\limits_{j=1}^{a} \left[j^2 \leq k \right]$
Do đó: $\sum\limits_{k=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{a} \left[j^2 \leq k \right] = \sum\limits_{j=1}^{a} \sum\limits_{k=1}^{n} \left[j^2 \leq k \right]$
Bây giờ tổng: $\sum\limits_{k=1}^{n} \left[j^2 \leq k \right]$ đếm được
với $k \in \{1, ..., n\}$ mà $k \geq j^2, j \leq a, j^2 \leq n$ thì số đó là $n + 1 - j^2$
Vì vậy $\sum\limits_{k=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = \sum\limits_{j=1}^{a} (n + 1 - j^2) = (n+1) - \frac{a(a+1)(2a+1)}{6}$

▷**7.36**. *Cho C là một đường tròn tiếp xúc với các cạnh của góc xOy và C_1 cũng kà một đường tròn tiếp xúc với các cạnh góc đó và đi qua tâm của C. Gọi A là giao điểm thứ hai của đường kính của C_1 qua tâm của C với C_1 và gọi B là giao của đường kính đó với C. Chứng minh rằng đường tròn tâm A đi qua B tiếp xúc với các cạnh của góc xOy*

Lời giải: Gọi T và T_1 là tâm đường tròn C và C_1 ; r, r_1 lần lượt là các bán kính của hai đường tròn đó. Vẽ đường vuông góc TT′ , T_1 T_1' và AA′ tới Ox.

Ta có: TT′ = r, T_1T_1' = r_1. Vì T_1 là trung điểm của AT nên

$$T_1T_1' = \frac{\mathrm{AA}' + TT'}{2} \Rightarrow \mathrm{AA}' = 2T_1T_1' - TT' = 2r_1 - r$$

Vì vậy $AB = AT - BT = 2r_1 - r$. Suy ra đpcm.

▷**7.37**. *Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa mãn điều kiện* $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 - 2xyz = 0$

Lời giải: Ta chứng minh nghiệm duy nhất là x = y = z = 0.
- Trước hết ta có x, y, z không thể là các số lẻ vì khi đó tổng $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 - 2xyz$ là một số lẻ nên khác 0, do đó xyz $\vdots$2
Mặt khác: $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 = 2xyz$ chia hết cho 4 khi tất cả các bình phương chia hết cho 4 hoặc chia cho 4 dư 1, x, y, z phải là các số chẵn, do đó ta lại viết $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$
Ta có: $4x_1^2 + 4y_1^2 + 4z_1^2 = 16x_1y_1z_1$
Hay $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$
Vì vế phải chia hết cho 4 nên nên ta lại viết được

$$x_1 = 2x_2, y_1 = 2y_2, z_1 = 2z_2$$

Thay vào ta có: $4x_2^2 + 4y_2^2 + 4z_2^2 = 32x_2y_2z_2$
Hay $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 8x_2y_2z_2$
Tiếp tục quá trình đó ta được: $\forall n \geq 1, x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 2^{n+1}x_ny_nz_n$
Tương tự các số x_n ,y_n ,z_n là chẵn nên ta có thể viết
$x_n = 2x_{n+1}, y_n = 2y_{n+1}, z_n = 2z_{n+1}$ thỏa mãn: $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 + z_{n+1}^2 = 2^{n+2}x_{n+1}y_{n+1}z_{n+1}$
Lặp lại quá trình này ta có dãy các số nguyên $(x_1, x_2, ..., x_n)$ thỏa mãn $x_i = 2x_{i+1}$
Lại có $x = 2^nx_n \Rightarrow x \vdots 2^n, \forall n \geq 1 \Rightarrow x = 0$.
Chứng minh tương tự ta có y = z = 0.

Ghi chú: Nếu thế x = yz - w ta được bài toán USAMO 76/3

▷**7.38**. *Tìm số nguyên k nhỏ nhất để tồn tại hai dãy* $\{a_i\}, \{b_i\}$, *thỏa mãn:*
a.$a_i, b_i \in \{1, 1996, 1996^2, ...\}, i = 1...k$
b.$a_i \neq b_i, i = 1...k$

$c.a_i \le a_{i+1}, b_i \le b_{i+1}$

$d. \sum\limits_{i=1}^{k} a_i = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i$

Lời giải: Ta chứng tỏ số k phải tìm là số 1997.

Giả sử đã có hai dãy $\{a_i\}, \{b_i\}$ thỏa mãn các điều kiện của bài toán, với $k \le 1996$

Từ điều kiện b. cho ta $a_1 \ne b_1$

Vì vậy không mất tính tổng quát, giải sử $a_1 < b_1$

Từ điều kiện a. ta có $0 \le m < n : a_1 = 1996^m, b_1 = 1996^n$

Từ $b_i \ge b_1 \forall i = 1, 2, ...,$ (ĐK c.) và mỗi giá trị b_i một lũy thừa của 1996, $\sum\limits_{i=1}^{k} b_i$ chia hết cho 1996^n

Do đó từ điều kiện d, $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \vdots 1996^n$

Ta kí hiệu t là một số j_n mà $a_j = 1996^m$.

Ta có $t.1996^m = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0(\bmod 1996^{m+1})$

vì thế t $\ge$ 1996 và $t \le k \le 1996$

Vì vậy ta có t = k = 1996.

Do đó $1996^{m+1} = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i \ge \sum\limits_{i=1}^{k} b_1 = 1996.1996^n = 1996^{n+1}$

Điều này mâu thuẫn với m < n. Vì vậy $k \ge 1997$

Với k = 1997 ta có ví dụ:

$a_1 = a_2 = ... = a_{1996} = 1, a_{1997} = 1996^2$

$b_1 = b_2 = ... = b_{1997} = 1996$

$\triangleright$**7.39**. *Đặt A_n là tập tất cả các số thực được hình thành từ tổng:*

$1 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha_2}{(\sqrt{2})^2} + ... + \frac{\alpha_n}{(\sqrt{2})^n}$

Với $\alpha_j = \{-1, 1\}, \forall j$

Tìm số phần tử của $A_n$và tổng của tất cả các tích của hai phần tử phân biệt của A_n

Lời giải: Trước hết ta chứng minh bổ đề:

$\forall n \ge 1, \left\{\frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{4} + ... + \frac{\beta_n}{2^n} | \beta_i \in \{-1, 1\}\right\} = \left\{\frac{j}{2^n}, jl, |j| < 2^n\right\}$

Thật vậy

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Khi n = 1 thì cả hai tập hợp đều là $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, n \ge 1, \beta_j \in \{-1, 1\}$

Đặt $j = 2^{n-1}.\beta_1 + ... + 2^0.\beta_n$, với j lẻ và $\frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{4} + ... + \frac{\beta_n}{2^n} = \frac{j}{2^n}$
Từ $\left|\frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{4} + ... + \frac{\beta_n}{2^n}\right| \le \left|\frac{\beta_1}{2}\right| + \left|\frac{\beta_2}{4}\right| + ... + \left|\frac{\beta_n}{2^n}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^n} < 1$
ta có $|j| < 2^n$
Khi đó tập hợp vế trái chứa trong tập hợp vế phải.
Xét với j lẻ và $|j| < 2^n$. Khi đó hoặc $\frac{j-1}{2}$, hoặc$\frac{j+1}{2}$ là số lẻ vì chúng là hai số nguyên liên tiếp.
Đặtj_0 là một trong hai số lẻ đó, khi đó $|j_0| \le \frac{|j|+1}{2} \le 2^{n+1}$
Do $|j| \le 2^n$, vì j_0 là số lẻ, $|j_0| \le 2^{n-1}$
Vì vậy theo giả thiết quy nạp tồn tại β_1 ,...,β_{n-1} sao cho
$\frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{4} + ... + \frac{\beta_{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{j_0}{2^{n-1}}$
Đặt $\beta_n = j - 2j_0 \in \{-1, 1\}$
Khi đó $\frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{4} + ... + \frac{\beta_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{\beta_n}{2^n} = \frac{j_0}{2^{n-1}} + \frac{j-2j_0}{2^n} = \frac{j}{2^n}$
Vậy bổ đề được chứng minh.
Từ bổ đề ta có: $A_n = \left\{1 + \frac{j}{2^{\lceil n/2\rceil}} + \frac{k\sqrt{2}}{2^{\lceil n/2\rceil}}\middle| j, k, |j| \le 2^{\lfloor n/2\rfloor}, |k| \le 2^{\lceil n/2\rceil}\right\}$
j và k lẻ. Vì vậy A_n chứa phần tử $2^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil} = 2^n$
Để tính tổng tất cả các phần tử khác nhau của A_n ta sử dụng công thức:
$\sum\limits_{a,b\in A_n, a<b} ab = \frac{1}{2}\left(\left(\sum\limits_{a\in A_n} a\right)^2 - \sum\limits_{a\in A_n} a^2\right)$
Bây giờ ta có thể ghép đôi phần tử $1 + \frac{j}{2^{\lceil n/2\rceil}} + \frac{k\sqrt{2}}{2^{\lceil n/2\rceil}} v 1 - \frac{j}{2^{\lceil n/2\rceil}} - \frac{k\sqrt{2}}{2^{\lceil n/2\rceil}}$
Vì thế trung bình của các phần tử của A_n là 1; từ đó $\sum\limits_{a\in A_n} a = |A_n| = 2^n$
Bây giờ nếu X, Y là hai tập các số thực hữu hạn với $\sum\limits_{x\in X} x = \sum\limits_{y\in Y} y = 0$, ta có
$\sum\limits_{x\in X}\sum\limits_{y\in Y}(1 + x + y)^2 = |X|\,|Y| + |Y|\sum\limits_{x\in X} x^2 + |X|\sum\limits_{y\in Y} y^2$
Từ ba số hạng khác không theo giả thiết ta có tổng:
$\sum\limits_{jl?, |j|<2m} j^2 = \frac{1}{3}2m((2m)^2 - 1)$
dễ dàng chứng minh được bằng phép quy nạp theo m. Vì thế

$$\sum_{a\in A_n} a^2 = \sum_{\substack{jle\\|j|\le 2^{\lfloor n/2\rfloor}}} \sum_{\substack{kle\\|k|\le 2^{\lceil n/2\rceil}}} \left(1 + \frac{j}{2^{\lceil n/2\rceil}} + \frac{k\sqrt{2}}{2^{\lceil n/2\rceil}}\right)^2$$
$$\sum_{a\in A_n} a^2 = \sum_{\substack{jle\\|j|\le 2^{\lfloor n/2\rfloor}}} \sum_{\substack{\text{kle}\\|k|\le 2^{\lceil n/2\rceil}}} \left(1 + \frac{j}{2^{\lceil n/2\rceil}} + \frac{k\sqrt{2}}{2^{\lceil n/2\rceil}}\right)$$

$$\sum_{a\in A_n} a^2 = 2^n + \frac{1}{3}\left(2^{\lceil n/2\rceil}\frac{2^{\lfloor n/2\rfloor}(2^{2\lceil n/2\rceil}-1)}{2^{2\lfloor n/2\rfloor}} + 2^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{2^{\lceil n/2\rceil}(2^{2\lfloor n/2\rfloor}-1)}{2^{\lceil n/2\rceil-1}}\right)$$

$$\sum_{a\in A_n} a^2 = 2^{n+1} - 1$$

Chú ý n chẵn và n lẻ khác nhau ở bước cuối cùng, do đó:

$$\sum_{a,b\in A_n, a<b} ab = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{a\in A_n} a\right)^2 - \sum_{a\in A_n} a^2\right) = \frac{1}{2}(2^{2n} - 2^{n+1} + 1)$$

▷**7.40**. *Cho tam giác nhọn ABC với AB khác AC. Gọi V là giao điểm của đường phân giác góc A với BC và gọi d là chân đường cao hạ từ A tới BC. Gọi E và F là các giao điểm phân biệt của đường tròn ngoại tiếp tam giác AVD với CA và AB,chứng minh rằng 3 đường thẳng AD, BE, CF đồng quy.*

Lời giải: Từ $\angle ADV = \frac{\pi}{2}$ và A, D,V, E, F nằm trên đường tròn, $\angle BFV = \angle CEV = \frac{\pi}{2}$ ta có tam giác BFV và tam giác BDA đồng dạng; tam giác CEV và CDA cũng đồng dạng.
Vì vậy $\frac{BD}{BF} = \frac{AB}{VB}$; $\frac{CD}{CE} = \frac{AC}{VC}$
Nhưng $\frac{AB}{VB} = \frac{AC}{VC}$(theo định lý đường phân giác)
Vì thế $\frac{BD}{BF} = \frac{CD}{CE}$
Lại có $\angle FAV = \angle VAE, AE =$ AF, từ đó $\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}.\frac{\text{AF}}{FB} = \frac{\frac{BD}{BF}}{\frac{CD}{CE}} = 1$ và AD,BE,CF đồng quy theo định lý Ceva.

▷**7.41**. *Một từ là một dãy gồm chữ số 0 hoặc 1. Đặt x và y là 2 từ khác nhau ở đúng 3 vị trí. chứng minh rằng số từ khác nhau giữa x và y không quá 5 vị trí là 38.*

Lời giải: Không mất tính tổng quát giả sử x=00000000, y=00000111.
Gọi z là một từ khác giữa x và y mà có ít nhất 5 vị trí khác nhau nếu và chỉ nếu a + b $\geq$ 5 với a là chữ số 1 đầu trên trong 5 chữ số khác nhau của z và b là chữ số 1 cuối cùng trong 3 chữ số của z. Hơn nữa ta có bất đẳng thức 2a $\geq$ 7.
Điều phải chứng minh là (4,1),(4,2) và (5,b) với $\in \{0,1,2,3\}$
Hai điều đầu tiên cho

$$\binom{5}{4}\left(\binom{3}{1} + \binom{3}{2}\right) = 30$$

từ cho z và các trường hợp khác cho $2^3 = 8$.
Vì thế có 38 từ khác nhau giữa x và y mà có 5 vị trí khác nhau.

▷**7.42**. *Tìm tất cả các cặp hàm số f,g:R → R thỏa mãn*
a. Nếu x<y thì f(x) < f(y)
b. $\forall x, y \in R, f(xy) = g(y).f(x) + f(y)$

Lời giải: Xét cặp (f,g) cho bởi: $f(x = t(1 - g(t)))$ $g(x) = \begin{cases} x^m, x \geq 0 \\ -|x|^m, x < 0 \end{cases}$
với t < 0, m > 0 là nghiệm duy nhất.
Đặt $x = 0$, từ b ta có: $f(0) = f(0)g(y) + f(y), suyra f(y) = f(0)(1 - g(y))$.
Đặt $t = f(0)$, ta có$f(y)f(y) = t(1 - g(y))$. Do f là hàm đồng biến nên ta không có t = 0.
Thay công thức này cho f ở b cho ta $t(1 - g(xy)) = g(y)t(1 - g(x)) + t(1 - g(y))$. Từ đó ta có: $11 - g(xy) = g(y)(1 - g(x)) + 1 - g(y) = 1 - g(x)g(y)$
hoặc g(xy) = g(x)g(y) với mọi x, y thuộc R.
Từ $g = 1 - \frac{f}{t}$ là hàm đơn điệu ngặt, vì vậy $g(1) \neq 0$
Nhưng lại có $g(1) = g^2(1)$, vì thế g(1) = 1.
Ta có g là hàm tăng nên f cũng tăng, ta có $t < 0$..Vì $g(x) > 0, \forall x > 0$. Gọi h: R → R với h = log.g.exp.
Ta có$h(x + y) = \log(g(e^{x+y})) = \log(g(e^x)g(e^y)) = \log(g(e^x)).\log(g(e^y))$
$= h(x) + h(y)$
$h(0) = \log(g(e^0)) = 0$ và h đơn điệu ngặt.
Ta cũng có h(x+y) = h(x) + h(y) suy ra h(nx) = n.h(x) với n ∈ N và h(-x) = -h(x), do đó h($alpha$x) = α.h(x) với $\alpha \in$ Q.
Xét dãy hữu tỷ $\{y_i\}, \{y_i\}$
$x_i < x$
$y_i > x$
và sử dụng tính đơn điệu chứng tỏ rằng h(x) = x.h(1), ∀ x ∈ R
Đặt m = h(1), từ đó ta có m > 0 và h là hàm tăng vì $g(x) = x^m$,$\forall x > 0$
Ta có $g(-1) < 0$, mà $(g(-1))^2 = g(1) = 1$ nên g(-1) = 1.
Từ g(-x) = -g(x) nên $g(x) = \begin{cases} x^m, x \geq 0 \\ -|x|^m, x < 0 \end{cases}$
Ta cũng có f(x) = t(1-g(x)). Dễ dàng kiểm tra được rằng cặp (f,g) là nghiệm

$\forall m > 0 > t$.

▷**7.43**. *Cho* a_1, a_2, ...,a_n *là các số dương và kí hiệu:* $A = \frac{a_1+...+a_n}{n}$
$G = (a_1...a_n)^{\frac{1}{n}}$
$H = \frac{n}{a_1^{-1}+...+a_n^{-1}}$
a. Nếu n chẵn, chứng minh rằng $\frac{A}{H} \leq -1 + 2(\frac{A}{G})^n$
b. Nếu n lẻ, chứng minh rằng: $\frac{A}{H} \leq -\frac{n-2}{n} + \frac{2(n-1)}{n}(\frac{A}{G})^n$

Lời giải: Chú ý rằng theo bất đẳng thức Máclôranh ta có:

$$\frac{G}{H} = \frac{a_1...a_n(a_1^{-1}+...+a_n^{-1})}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_1...a_n}{a_j} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a_j\right)^{n-1} = A^{n-1}$$

Vì thế $\frac{A}{H} \leq (\frac{A}{G})^n$
Từ $A \geq G, (\frac{A}{G})^n \geq 1$ nên $\frac{A}{H} \leq (\frac{A}{G})^n \leq -1 + 2(\frac{A}{G})^n$
$\Rightarrow a$.
Với b, $\frac{A}{H} \leq (\frac{A}{G})^n \leq (\frac{A}{G})^n + \frac{n-2}{n}((\frac{A}{G})^n - 1)$
$\Rightarrow \frac{A}{H} \leq -\frac{n-2}{n} + \frac{2(n-1)}{n}(\frac{A}{G})^n$
Ta có đpcm.

Chương 8

Đề thi olympic Poland

▷**8.44**. *Cho các số nguyên* $x_1, x_2, ..., x_7$ *thỏa mãn điều kiện* $x_6 = 144$, $x_{n+3} = x_{n+2}(x_{n+1} + x_n)$; $\mathrm{n} = 1, 2, 3, 4$.
Tính x_7.

Lời giải: Nhân phương trình đã cho với $n = 1, 2, 3$ và khử nhân tử chung ta được
$144 = x_3(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_4)$.[1]
Mặt khác từ phương trình đã cho ta được bất đẳng thức:
$x_4 = x_3(x_2 + x_1) \geq 2\mathrm{x}_3$
$x_5 = x_4(x_3 + x_2) \geq 2\mathrm{x}_3^2$
$144 = x_6 \geq x_5(x_4 + x_3) \geq 2\mathrm{x}_3^2(3\mathrm{x}_3) \Rightarrow 144 \geq 6\mathrm{x}_3^3 \Rightarrow x_3 = 1, 2$.
+ Xét trường hợp 1: $x_3 = 1$
Từ [1], $144 = (x_1 + x_2)(x_2 + 1)(x_1 + x_2 + 1)$. Nhân cả 2 vế với 144 liên tiếp các cặp số nguyên $(1, 2), (2, 3), (3, 4), (8, 9)$. Từ $x_1 + x_2$ và $x_1 + x_2 + 1$ với hệ số 144 đó các số nguyên liên tiếp và khi đó $x_1 + x_2 \geq 2$. Ta có 3 trường hợp:
1a. $x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow 6(x_2 + 1) = 144$ từ đó suy ra $x_2 = 23, \mathrm{x}_1 = -21$. Tuy nhiên nó không thỏa mãn, vậy x_i là số nguyên xác định.
1b. $x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow 12(x_2 + 1) = 144$ từ đó suy ra $x_2 = 11, \mathrm{x}_1 = -8$. Không thỏa mãn.
1c. $x_1 + x_2 = 8 \Rightarrow 72(x_2 + 1) = 144$ từ đó suy ra $x_2 = 1, \mathrm{x}_1 = 7$. Thử nghiệm có thể xảy ra: $x_4 = 8, \mathrm{x}_5 = 16, \mathrm{x}_6 = 144$. Như vậy thử $(x_1, x_2, x_3) = (7, 1, 1)$

ta được $x_7 = 3456$

+ Xét trường hợp 2: $x_3 = 2$

$144 = 2(x_1 + x_2)(x_2 + 2)(2x_1 + 2x_2 + 2) \Rightarrow 36 = (x_1 + x_2)(x_2 + 2)(x_1 + x_2 + 1)$. Nhân cả 2 vế với hệ số liên tiếp các cặp số nguyên $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ ta có các trường hợp sau:

2a. $x_1 + x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 4, x_1 = -2$. (Không thỏa mãn)

2b. $x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 1, x_1 = 2$. Ta thử các nghiệm sau: $x_4 = 6, x_5 = 18, x_6 = 144$. Như vậy với $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 2)$ thì $x_7 = 3456$.

Vậy giá trị x_7 cần tìm là 3456.

▷**8.45**. *Giải hệ phương trình sau với x, y, z là các số thực:*

$$\begin{cases} 3(x^2 + y^2 + z^2) = 1 \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = xyz(x + y + z)^3 \end{cases}$$

Lời giải: Ta có x, y, z hoặc (x+y+z) không thể bằng 0 và $xyz(x + y + z) = \frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{(x+y+z)^2} \geq 0$

Với 3 số thực a, b, c ta có: $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geq 0$ hay $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$, dấu "=" xảy ra nếu và chỉ nếu a=b=c.

Vậy $1 = 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2 = \frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{xyz(x+y+z)} \geq \frac{xy^2z+x^2yz+xyz^2}{xyz(x+y+z)} = 1$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$, từ đó suy ra (x,y,z) là $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right); \left(\frac{-1}{3}; \frac{-1}{3}; \frac{-1}{3}\right)$.

Đó chính là nghiệm của hệ phương trình.

▷**8.46**. *Bài 3: Trong tứ diện ABCD, ở giữa các mặt ABD, ACD, BCD, từ đỉnh D nhìn các cạnh AB, AC, BC tạo thành các góc tương ứng bằng nhau. Chứng minh rằng mỗi một tam giác này có diện tích nhỏ hơn hoặc bằng tổng của diện tích của 2 mặt khác.*

Lời giải: Cho $\alpha \leq 90^0$ là 1 góc, đầu tiên ta chứng minh $\alpha \neq 90^0$. Nếu a, b, c tương ứng là độ dài 3 cạnh BC, CA, AB và m_a, m_b, m_c tương ứng là 3 đường trung tuyến ứng với 3 cạnh BC, CA, AB thì diện tích của tam giác DAB là $\frac{1}{2}m_c c \sin\alpha$. Chú ý rằng giá trị tuyệt đối của những tích giữa vectơ là $\left(D - \frac{A+B}{2}\right)$ và A-B là $m_c c\cos\alpha$= 2cotα $[DAB] = \left|DA^2 - DB^2\right|$. Chúng ta có 3 diện tích $[ABD], [ACD], [BCD]$ tương ứng tỉ lệ là $\left|DA^2 - DB^2\right|, \left|DA^2 - DC^2\right|, \left|DB^2 - DC^2\right|$

Ta chứng minh $\alpha = 90^0$. Đặt $x =$

$\widehat{ADB}$, y $=\widehat{BDC}$, z $=\widehat{ADC}$$(0 < x, y, z < 180)$. Chú ý rằng 3 góc x, y, z là 3 góc tam diện, chúng ta có: $x + y > z, x + z > y, y + z > x$ và $x + y + z \leq 360$.
Khi đó diện tích của tam giác ADB là $\frac{AD.BD.\sin x}{2}$ (tương tự đối với diện tích các tam giác BDC và ADC) và AD=BD=CD(khi đó $\alpha = 90^0$), chúng ta cần chứng minh rằng: $\sin x + \sin y > \sin z$
Ta có $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$, $\sin z = 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}$
Ta cần chứng minh: $\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} > \sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}$
Từ $x + y + z \leq 360 \Rightarrow \frac{x+y}{2} \leq 180 - \frac{z}{2}$. Để ý rằng $0 < \frac{z}{2} \leq \frac{x+y}{2} \leq 180 - \frac{z}{2} \Rightarrow \sin\frac{x+y}{2} > \sin\frac{z}{2}$. Như vậy từ $\frac{x-y}{2} < \frac{z}{2} \Rightarrow \cos\frac{x-y}{2} > \cos\frac{z}{2}$. Khi đó hàm cosin giảm trong $[0, 180]$
Từ đó suy ra $\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} > \sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}$.(đpcm)

▷**8.47**. *Cho dãy $a_1, a_2, ...$, xác định bởi :*
$a_1 = 0, a_n = a_{[n/2]} + (-1)^{n(n+1)/2}, n > 1$
Với mọi số nguyên $k \geq 0$. Tìm n thỏa mãn:

$$2^k \leq n \leq 2^{k+1} va_n = 0$$

Lời giải: Đặt B_n có nghĩa là cơ số 2 đại diện của n số. Ta chứng minh bằng quy nạp. Giả sử a_n là số hạng của 00 hay 11 đoạn trong B_n trừ đi số của 01 hay 11 trong B_n. Với k=1,2,3,...,n-1, a_k là số hạng của 00 hay 11 trong B_k trừ đi số 01 hay 10 trong B_k. Đầu tiên xét trường hợp khi $n \equiv 0, 3 (\mathrm{mod} 4)$ thì B_n giới hạn trong 00 hay 11. Như vậy a_n bằng một số dương của số 00 hay 11 trong tất cả các đoạn nhưng mà chữ số của B_n trừ đi các số 01 hay 10 trong tất cả các đoạn nhưng mà số cuối cùng của B_n cho bởi $a_{[\frac{n}{2}]}$. Như vây:

$$a_n = a_{[\frac{n}{2}]} + 1 = a_{[\frac{n}{2}]} + (-1)^{n(n+1)/2}$$

Tương tự với $n = 1, 2 (\mathrm{mod} 4)$ ta có:

$$a_{[\frac{n}{2}]} - 1 = a_{[\frac{n}{2}]} + (-1)^{n(n+1)/2}$$

Vậy ta đã chứng minh xong.
Như vậy với k số nguyên đã cho chúng ta cần tìm số của n số nguyên thỏa mãn $2^k \leq n \leq 2^{k+1}$ và số của 00 và 11 đoạn bằng số của 01 và 10 đoạn.

Chú ý rằng B_n có k+1 số. Với mỗi B_n chúng ta xây dựng dãy mới C_n của $0's$ và $1's$ giống như nhau.
Bắt đầu từ các số của B_n và chữ số gần cuối của B_n, ta cộng thêm vào dãy số C_n giá trị tuyệt đối của số ở khác giữa và chữ số ở bên trái. Ví dụ với $B_11 = 1011$ và $C_11 = 110$. Khi đó 00 hay 11 là đoạn trong B_n sinh ra 0 trong dãy C_n và 01 hay 10 trong B_n sinh ra 1 trong C_n. Chúng ta cần tìm thấy số của n số nguyên.
Như vậy có điều phải chứng minh.

▷**8.48**. *Cho ngũ giác lồi ABCDE với DC=DE và* $\widehat{BCD} = \widehat{DEA} = \frac{\pi}{2}$. *Cho F là trung điểm đoạn AB, khi đó* $\frac{AF}{BF} = \frac{AE}{BC}$. *Chứng minh rằng:*
$\widehat{FCE} = \widehat{FDE}, \widehat{FEC} = \widehat{BDC}$.

Lời giải: Gọi $P = EA \cap BC$ và xét điểm C, D, E, P. Gọi Q, R tương ứng là điểm thuộc DA, DB với chu vi của tứ giác CDEF.
Gọi $G = QC \cap RF$ ta có:

$$\frac{AG}{GB} = \frac{\sin\widehat{DCQ}}{\sin\widehat{ERD}}\frac{QC}{RG}\frac{\sin\widehat{RBG}}{\sin\widehat{GAQ}} = \frac{CD}{DE}\frac{\sin\widehat{QRG}}{\sin\widehat{GQR}}\frac{\sin\widehat{DBA}}{\sin\widehat{BAD}}$$

$$= \frac{\sin\widehat{ADE}}{\sin\widehat{CDB}}\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BC}$$

Suy ra $\Delta ADF = \Delta BDC$.

▷**8.49**. *Xét n điểm(n* ≥ 2*) trên đường tròn. Chứng minh rằng số lớn nhất* $\frac{n^2}{3}$ *của cung tròn với điểm cuối trong số n điểm có chiều dài lớn hơn hoặc bằng* $\sqrt{2}$.

Lời giải: Xây dựng đồ thị cho bởi các đỉnh bởi mọi cặp điểm có khoảng cách lớn hơn hoặc bằng $\sqrt{2}$
Chúng ta sẽ chứng minh rằng không tồn tại K_4.
Giả sử tồn tại K_4, gọi các đỉnh theo thứ tự là ABCD.
Cạnh có chiều dài lớn hơn $\sqrt{2}$ đối diện cung có độ dài lớn hơn $\frac{\pi}{2}$. Như vậy mỗi cung AB, BC, CD, DA nhỏ hơn $2pi$ và chúng cùng nhỏ hơn $2pi$, suy ra mâu thuẫn. (đpcm)