ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

CHUYÊN ĐỀ

TOÁN HỌC

SỐ 9

Ban biên tập:
TRẦN NAM DŨNG (chủ biên)
VÕ QUỐC BÁ CẨN
LÊ PHÚC LỮ
PHẠM HY HIẾU
TỪ NGUYỄN THÁI SƠN
LÊ VIỆT HẢI

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH - THÁNG 10/2010

TRẦN NAM DŨNG (chủ biên)
VÕ QUỐC BÁ CẨN - LÊ PHÚC LỮ - PHẠM HY HIẾU
TỪ NGUYỄN THÁI SƠN - LÊ VIỆT HẢI

Chuyên đề

TOÁN HỌC

Số 9

TP HỒ CHÍ MINH, THÁNG 10 NĂM 2010

LỜI NÓI ĐẦU

Chuyên đề Toán học số 9 của trường Phổ thông Năng khiếu mà các bạn đang cầm trên tay là một ấn phẩm có nhiều điều đặc biệt.

Thứ nhất, nó được thai nghén trong một khoảng thời gian dài kỷ lục: Ít nhất là 1 năm. Thứ hai, nó được ra đời cách chuyên đề trước đó 5 năm. Thứ ba, tham gia đóng góp cho Chuyên đề lần này không chỉ là các học sinh và thầy cô của trường Phổ thông Năng khiếu mà còn của nhiều bạn học sinh, sinh viên, các thầy cô ở các trường khác. Internet đã tạo ra một thế giới khác hẳn, và Toán học cũng không nằm ngoài sự thay đổi đó.

Làm Chuyên đề Toán học số 9 này, chúng tôi bỗng nhớ về các thế hệ học sinh của trường Phổ thông Năng khiếu, những tác giả của Chuyên đề Toán học số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Đó là những Lê Long Triều, Trần Quang Ánh, Võ Tâm Vân, Lê Quang Nẫm, Lưu Minh Đức, Nguyễn Lê Lực, Trịnh Lê Tuấn, Lê Minh Tuấn, Phạm Quốc Việt, Hoàng Thanh Lâm, Trần Đình Nguyên, Nguyễn Cẩm Thạch, Phạm Tuấn Anh, Lương Thế Nhân, Trần Vĩnh Hưng, Nguyễn Tiến Khải, Trần Quang, Trần Anh Hoàng, Nguyễn Đăng Khoa, Nguyễn Anh Cường, Trần Chiêu Minh, Kha Tuấn Minh, ... Chúng tôi đang có mong muốn thực hiện một cuốn tuyển chọn các bài viết từ các Chuyên đề này.

Hy vọng rằng Chuyên đề toán học số 9 với nội dung khá phong phú và hình thức đẹp sẽ là một món quà tặng ý nghĩa đối với các bạn trẻ yêu Toán. Trong biển cả mênh mông của kiến thức, những người thực hiện chuyên đề chỉ mong ấn phẩm của mình sẽ là một giọt nước trong có ích.

Chuyên đề Toán học số 9 được hoàn thành với sự hỗ trợ của Công ty cổ phần giáo dục Titan. Ban biên tập xin chân thành cảm ơn sự hỗ trợ này.

BAN BIÊN TẬP

VỀ NHÀ TÀI TRỢ

Công ty cổ phần giáo dục Ti tan (Titan Education) hoạt động trong lĩnh vực cung cấp dịch vụ giáo dục phổ thông, trong đó đặc biệt là các sản phẩm có nội dung Toán học. Sản phẩm chính của công ty là trang web đào tạo Toán học trực tuyến cho học sinh lớp 1 – 12, kho dữ liệu Toán học dành cho học sinh, sinh viên, giáo viên và các nhà nghiên cứu Toán học, các lớp học trực tiếp rèn luyện tư duy Toán học, bồi dưỡng và phát triển năng khiếu Toán học, các lớp học nghiệp vụ dành cho giáo viên Toán.

Ngoài ra, công ty còn tư vấn, cung cấp tài liệu, sách tham khảo về Toán cho học sinh và giáo viên các cấp ở mọi trình độ.

Titan Education mong muốn bằng nhiệt huyết và năng lực của mình góp phần nhỏ bé vào sự nghiệp giáo dục và đào tạo thế hệ trẻ cho đất nước Việt Nam.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

Công ty cổ phần giáo dục Ti tan

Địa chỉ: 18A Nam Quốc Cang, P. Phạm Ngũ Lão, Q. 1, TP. Hồ Chí Minh.

Điện thoại: 0854 542305 – 0839 260137.

MỤC LỤC

DUYÊN SỐ CỦA TOÁN HỌC VIỆT NAM VỚI GIẢI FIELDS

Ngô Việt Trung
Viện Toán học Việt Nam

Nói là cơ duyên là vì rất nhiều nước giàu hơn, có truyền thống Toán học hơn Việt Nam nhưng không có giải Fields. Nước Đức, một cường quốc về Toán học mới chỉ có mỗi một giải Fields. Ấn Độ và Trung Quốc là những cái nôi Toán học trong lịch sử và là những nước có nhiều nhà Toán học nổi tiếng, nhưng cũng chưa mon men được đến giải Fields. Cả châu Á cho đến nay mới có ba giải Fields, đều là của Nhật. Châu Mỹ Latin và châu Phi không có giải Fields.

Theo một nghĩa nào đó, đoạt giải Fields còn khó hơn giải Nobel vì giải Nobel được trao hàng năm, trong lúc giải Fields được trao 4 năm một lần. Nói một cách nôm na, người được giải Fields phải có kết quả xuất sắc nhất trong 4 năm chứ không phải trong một năm như giải Nobel. Ngoài ra giải Fields chỉ được trao cho người không quá 40 tuổi. Andrew Wiles, người giải quyết bài toán Fermat không được giải Fields khi còn đủ tuổi vì lời giải ban đầu có lỗ hổng. Đến khi khắc phục được lỗ hổng trong lời giải thì ông đã quá 40 tuổi. Nói như vậy để thấy giải Fields là một cơ duyên thực sự. Trong lịch sử hơn 70 năm của giải Fields mới có 48 người được giải. Thế mà Việt Nam lại có mối liên hệ chặt chẽ với nhiều người trong số họ.

Chúng ta hãy bắt đầu câu chuyện với GS Lê Văn Thiêm. Ông Thiêm là người Việt có học vị tiến sĩ Toán học đầu tiên và được coi như là cha đẻ của nền Toán học Việt Nam. Sau khi bảo vệ tiến sĩ ông Thiêm làm trợ lý cho GS Rolf Nevanlinna ở trường Đại học Zurich hai lần vào những năm 1946 và 1948. Sinh thời ông Thiêm thường coi mình là học trò của Nevanlinna, công trình nổi tiếng nhất của ông Thiêm là về bài toán ngược của Nevanlinna. Trong Toán học có một tạp chí tên là Tạp chí trung tâm về Toán học, chuyên đăng bài giới thiệu các công trình mới công bố. Người giới thiệu bài báo của ông Thiêm là ông Lars Ahlfors, một trong hai nhà Toán học được trao giải Fields lần đầu năm 1936. Ahlfors là học trò của ông Nevanlinna (theo nghĩa bảo vệ luận án tiến sĩ). Do ông Nevanlinna không phải là giáo sư hướng dẫn luận án của ông Thiêm nên ta có thể coi ông Thiêm là con nuôi của ông Nevanlinna về mặt Toán học. Vì vậy ta có thể coi Ahlfors là anh của ông Thiêm.

Giải Fields được trao lần thứ hai năm 1950. Một trong hai người được giải là nhà Toán học Pháp Laurent Schwartz. Ông Schwartz là một trong những người sáng lập ra Ủy ban quốc gia vì Việt Nam của Pháp năm 1966 và Tòa án quốc tế Russel xử tội diệt chủng của Mỹ ở Việt Nam năm 1967. Ông Schwartz sang thăm Việt Nam nhiều lần, lần đầu tiên vào năm 1968 trong chiến tranh chống Mỹ. Năm 1990 ông được Bộ Đại học mời sang tham quan và đánh giá nền giáo dục Việt Nam. Ông đã viết một bản báo cáo 40 trang, trong đó ông đã đưa ra một kết luận nổi tiếng "Việt Nam đã thắng trong chiến tranh và thua trong hòa bình". Thắng là vì trong chiến tranh Việt Nam đã gửi những học sinh tốt nhất đi học nước ngoài. Khi trở về nước những người này đã làm cho Việt Nam trở thành một cường quốc khoa học trong vùng sau chiến tranh. Nhưng trong hòa bình Việt Nam đã không coi trọng việc sử dụng và đãi ngộ đội ngũ khoa học với yếu điểm chính là chế độ lương bổng. Điều này đã làm xói mòn khoa học Việt Nam cả về lượng và chất, làm cho khoa học và giáo dục Việt Nam dần dần thua những nước trong vùng. Trong cuốn hồi ký của mình (được dịch ra rất nhiều thứ tiếng) ông Schwartz dành chương dài nhất viết về Việt Nam và kết thúc chương này với câu "Việt Nam đã đánh dấu cuộc đời của tôi". Có một điều thú vị là ông Lê Văn Thiêm và ông Schwartz có chung một thầy hướng dẫn luận án là GS Georg Valiron. Ông Valiron còn có một học trò Việt Nam nữa là GS Phạm Tĩnh Quát. Ta có thể coi ông Quát, ông Thiêm và ông Schwartz là anh em ruột về mặt Toán học.

Giải Fields được trao lần thứ ba vào năm 1954. Một trong hai người được giải là nhà Toán học Nhật Kunihiko Kodaira. Ông có người con rể là GS Mutsuo Oka, cũng là một nhà Toán học. Ông Oka là một người bạn lớn của Toán học Việt Nam. Ông đã thu xếp cho nhiều nhà Toán học Việt Nam sang Nhật làm việc và tham gia quyên góp tiền cho việc xây dựng nhà khách của Viện Toán học. Khi ông Kodaira mất năm 1997, gia đình đã quyết định tặng tủ sách chuyên môn của ông Kodaira cho thư viện Viện Toán học.

Năm 1966 giải Fields được trao lần đầu tiên cho 4 nhà Toán học, trong đó có nhà Toán học Pháp Alexander Grothendieck và nhà Toán học Mỹ Steffen Smale. Cả hai người đều nổi tiếng về hoạt động chống chiến tranh của Mỹ ở Việt Nam.

Ông Grothendieck được coi là nhà Toán học có ảnh hưởng nhất trong nửa sau của thế kỷ 20 và là học trò (bảo vệ luận án tiến sĩ) của ông Schwartz. Để tỏ thái độ chống chiến tranh ông Grothendieck sang thăm Việt Nam năm 1967 trong lúc Mỹ đang ném bom Hà Nội ác liệt nhất. Ông đã giảng một loạt các bài giảng về các hướng nghiên cứu Toán học hiện đại, chủ yếu về Đại số đồng điều. Trong bản báo cáo về chuyên đi Việt Nam ông viết rằng "có một nền Toán học Việt Nam thật sự đúng nghĩa ở nước Việt Nam Dân chủ Cộng hòa". Câu này được ông gạch thêm bên dưới để nhấn mạnh. Sau đấy ông viết là "tôi sẽ chứng minh "Định lý tồn tại" này và giới thiệu tương đối chi tiết Toán học Việt Nam thời bấy giờ". Ông đặc biệt ấn tượng với khả năng của các nhà Toán học trẻ Việt Nam và nêu tên đích danh ba người là Đoàn Quỳnh, Hoàng Xuân Sính và Trần Văn Hạo. Ông có kế hoạch đưa những người này sang đào tạo ở bên Pháp. Sau này chỉ có Hoàng Xuân Sính sang Paris làm luận án tiến sĩ dưới sự hướng dẫn của ông. Tham gia Hội đồng bảo vệ luận án có đến ba người được giải Fields là Grothendieck, Schwartz và Pierre Deligne. Có lẽ chưa bao giờ có một Hội đồng bảo vệ luận án nổi tiếng như vậy. Rất tiếc là GS Hoàng Xuân Sính không công bố các kết quả của luận án. Gần đây có một bài báo tổng quan về hướng nghiên cứu đó có nhắc đến các kết quả tiên phong của GS Hoàng Xuân Sính. Ông Grothendieck là thầy (hướng dẫn luận án tiến sĩ) của ông Luc Illusie, ông này lại là thầy của Gerard Laumon là thầy của Ngô Bảo Châu. Như vậy Grothendieck là cụ của Ngô Bảo Châu và Ngô Bảo Châu có họ hàng với GS Lê Văn Thiêm và GS Hoàng Xuân Sính về mặt Toán học.

Ông Smale được coi là một nhà bác học trong Toán học vì ông quan tâm ngiên cứu nhiều chuyên ngành Toán học khác nhau và ở chuyên ngành nào ông đều đạt được những kết quả xuất sắc. Những năm 60 ông là lãnh tụ phong trào trí thức chống chiến tranh Việt Nam ở Mỹ. Năm 1965 ông tổ chức cho sinh viên bãi khóa ở Đại học California và chặn tàu chở lính Mỹ ở Berkeley. Năm 1966 ông tổ chức họp báo chống chiến tranh Việt Nam bên thềm Đại hội Toán học thế giới khi nhận giải Fields. Vì những hoạt động chống chiến tranh mà ông bị Quỹ khoa học quốc gia Mỹ cắt tiền tài trợ nghiên cứu. Năm 2004 Viện Toán học mời GS Smale sang Việt Nam giảng bài với sự tài trợ của Quỹ giáo dục Việt Nam (VEF). Trong buổi nói chuyện với sinh viên tại Đại học bách khoa Hà Nội ông đã khóc và xin lỗi về chiến tranh Việt Nam. Ông Smale có một học trò người Việt là Hà Quang Minh, hiện đang làm việc ở Đại học Humboldt Berlin.

Đại hội Toán học thế giới tiếp theo năm 1970 có hai giải Fields liên quan đến Việt Nam. Người thứ nhất là nhà Toán học Nhật Heisuke Hironaka. Năm 1968 ông Hironaka dạy về Lý thuyết kỳ dị cho các nhà Toán học trẻ ở châu Âu. Trong lớp học đó có một sinh viên Việt Nam tên là Lê Dũng Tráng mới ở tuổi đôi mươi. Sau này Lê Dũng Tráng trở thành một trong những chuyên gia hàng đầu thế giới về Lý thuyết kỳ dị. GS Lê Dũng Tráng là người đưa Hội Toán học Việt Nam gia nhập Liên đoàn Toán học thế giới là tổ chức xét và trao giải Fields. GS Hironaka rất quan tâm đến việc giúp đỡ Toán học Việt Nam. Ông là người đã vận động Hội Toán học Nhật thành lập Chương trình trao đổi Toán học giữa Nhật và Việt Nam. Ông đã sang thăm Việt Nam một vài lần với tư cách cá nhân. Năm 1977 ông công bố một công trình Toán học nổi tiếng của mình trong Tạp chí Acta Mathematica Vietnamica của Viện Toán, được trích dẫn rất nhiều. Người thứ hai là nhà Toán học Nga Sergey Novikov. Ông Novikov là thầy của Lê Tự Quốc Thắng, huy chương vàng Olympic Toán quốc tế năm 1982. Hiện nay Lê Tự Quốc Thắng là một chuyên gia hàng đầu thế giới trong lĩnh vực Tô pô chiều thấp.

Còn hai giải Fields nữa đã sang làm việc ở Việt Nam. Người thứ nhất là nhà Toán học Mỹ David Mumford được giải Fields năm 1974. Ông này đã làm báo cáo mời tai Hội nghị Toán quốc tế do Viện Toán phối hợp với Đai học Quy Nhơn tổ chức năm 2005. Người thứ hai là nhà Toán học New Zealand Vaughan Jones, người được giải Fields năm 1990. Ông này đã làm báo cáo mời tại Hội nghị quốc tế về Tôpô lượng tử do Viện Toán tổ chức năm 2007 và công bố một công trình của mình trong tạp chí Acta Mathematica Vietnamica của Viện Toán.

Năm 1978 có nhà Toán học Pháp Pierre Deligne được giải Fields. Ông Deligne là học trò của ông Grothendieck và là thầy của GS Lê Dũng Tráng (đồng hướng dẫn). Ông từng là thành viên Hội đồng bảo vệ của GS Hoàng Xuân Sính. Do GS Hoàng Xuân Sính cũng là học trò của ông Grothendieck nên có thể coi GS Hoàng Xuân Sính là em và Ngô Bảo Châu là cháu họ của GS Deligne về mặt Toán học.

Đặc biêt hơn, bạn cùng thầy của Ngô Bảo Châu là Laurent Lafforgue cũng được giải Fields năm 2002. Học trò đầu tiên của Lafforgue là Ngô Đắc Tuấn, người đã từng đoạt huy chương vàng hai lần thi Olympic Toán quốc tế năm 1995 và 1996. Hiện nay Ngô

Đắc Tuấn đang làm việc tại Đại học Paris 13. Gần đây nhất có Terence Tao là nhà Toán học Úc được giải Fields năm 2006 cũng có liên quan đến VN. Tao có mối quan hệ cộng tác thân thiết với Vũ Hà Văn, hiện là một chuyên gia hàng đầu thế giới trong lĩnh vực Tổ hợp. Họ đã viết chung 15 công trình và một cuốn sách chuyên khảo. Ngoài ra, Tao có cùng thầy với Dương Hồng Phong, cũng là một nhà Toán học VN hàng đầu ở Mỹ. Hiện nay, Tao có một nghiên cứu sinh người Việt là Lê Thái Hoàng, huy chương vàng Olympic Toán quốc tế năm 1999. Với những người trẻ tuổi như Ngô Đắc Tuấn và Lê Thái Hoàng theo đuổi nghiệp Toán, biết đâu VN lại có cơ may được giải Fields lần nữa.

Grothendieck và GS Ngô Thúc Lanh (phía sau) và GS Hoàng Tụy (bên phải ảnh) tại nơi sơ tán của Đại học Tổng hợp ở Đại Từ, Thái Nguyên.

III. Après cet aperçu général du programme scientifique et l'organisation de mon séjour en R.D.V., il serait temps d'en venir au sujet proprement dit, et de parler de ce que j'ai pu voir et entendre sur la vie mathématique au Vietnam. Une première constatation, et même une constatation assez extraordinaire vu les circonstances, c'est qu'il y a effectivement une vie mathématique digne de ce nom en R.D.V. Pour apprécier à sa valeur ce "théorème d'existence", il faut se tenir présent à l'esprit, tout d'abord, qu'en 1954, à la fin de la guerre de libération de huit ans du Vietnam contre l'occupation coloniale française, c'est-à-dire il y a treize ans, l'enseignement supérieur était pratiquement inexistant en R.D.V. Au cours de la guerre extrêmement

Bản chụp trích đoạn báo cáo đánh máy của Grothendieck: "Có một nền Toán học thật sự đúng nghĩa ở nước Việt Nam Dân chủ Cộng hòa" (gạch dưới).

The Minister of Higher Education and Training asked me to come in October 1990 to evaluate higher education in Viet-Nam. It was a considerable task for such a short time. I wrote the evaluation report after visiting the universities and high schools of Ho Chi Minh City and Hanoi; it is about forty pages long and is still rather confidential. Fundamentally, at the end of the war in 1975, thanks to an excellent scientific policy, Viet-Nam was one of the best of the South Asian countries, but this is no longer the case. As in other domains, it seems that Viet-Nam won the war but lost the peace. After its victory against American imperialism following a pitiless war, it enjoyed considerable prestige in international left-wing circles and in Third World countries. It could have

Bản chụp đoạn Hồi ký của Schwartz về bản báo cáo về giáo dục đại học, trong đó có câu "Việt Nam đã thắng trong chiến tranh và thua trong hòa bình".

Vợ chồng ông Schwartz và GS Tạ Quang Bửu (bên trái ảnh) đi thăm Việt Bắc.

THÔNG TIN TOÁN HỌC

- Một mùa hè với nhiều hoạt động sôi nổi dành cho giáo viên và học sinh chuyên Toán đã kết thúc. Năm nay, lần đầu tiên Khóa bồi dưỡng chuyên môn nghiệp vụ hè dành cho giáo viên Toán (gọi tắt là *Trường hè bồi dưỡng giáo viên Toán*) đã được tổ chức tại ĐHQG TP Hồ Chí Minh từ 5 – 11/8 với sự tham gia của trên 150 giáo viên đến từ các trường THPT chuyên trên toàn quốc. GS TSKH Nguyễn Văn Mậu, thầy Nguyễn Khắc Minh, TS Nguyễn Chu Gia Vượng, TS Lê Bá Khánh Trình, TS Nguyễn Văn Minh Mẫn, TS Trần Nam Dũng, ThS Nguyễn Trọng Tuấn, thầy Nguyễn Đức Tấn đã đến giảng bài và chia sẻ nhiều kinh nghiệm quý báu cho đội ngũ các thầy cô giáo dạy Toán.

- Tiếp nối thành công của Trường hè dành cho giáo viên, từ ngày 16 – 22/8, chương trình Gặp gỡ Toán học lần 2 đã được Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh phối hợp với trường THCS – THPT Âu Lạc (quận Gò Vấp) tổ chức với sự tham gia của 50 học sinh đến từ các địa phương: thành phố Hồ Chí Minh, Cần Thơ, Đồng Nai, Ninh Thuận, Quảng Nam và Đà Nẵng. Bên cạnh bài giảng của các thầy cô giáo có nhiều kinh nghiệm, các bạn học sinh còn được sự hướng dẫn nhiệt tình của các anh chị sinh viên trưởng thành từ phong trào chuyên Toán. Chương trình hoạt động văn nghệ thể thao cũng hết sức sôi nổi với các buổi chiều luyện tập và thi đấu thể thao, một ngày đi dã ngoại tại thác Giang Điền, một đêm liên hoan văn nghệ hết mình. Đặc biệt các học sinh tham gia chương trình đã được GS Egorov và học trò của ông là TS Nguyễn Thành Nam, tổng giám đốc Tập đoàn FPT ghé thăm và trao đổi thân mật về Toán học.

- Ngày 19/9, khóa 3 của câu lạc bộ Toán học dành cho các học sinh lớp 10 đã được khai giảng tại trường THPT chuyên Lê Hồng Phong. Các học sinh sẽ sinh hoạt trong vòng 5 tháng với nhiều hình thức hoạt động phong phú: Nghe giảng chuyên đề, tham gia seminar giải toán, làm bài kiểm tra, tham gia các cuộc thi đồng đội, nghe nói chuyện về Toán học và Khoa học, đi dã ngoại, ... Có trên 60 học sinh đến từ các trường THPT trong thành phố đã tham gia câu lạc bộ, trong đó đông nhất là các trường Lê Hồng Phong, Phổ thông Năng khiếu, Trần Đại Nghĩa.

- Theo thông tin từ ban tổ chức của cuộc thi Giải thưởng Toán học Shing Tung Yau dành cho học sinh phổ thông thì cả hai đề án (project) của hai nhóm học sinh Phổ thông Năng khiếu (gồm 4 bạn Phạm Hy Hiếu, Nguyễn Mạnh Tiến, Từ Nguyễn Thái Sơn, Phạm Anh Tuấn) đã lọt vào vòng bán kết của cuộc thi và sẽ được trình bày trực tiếp trước ban giám khảo tại Singapore vào chiều 16/10/2010. Được biết mỗi project lọt vào bán kết sẽ được thưởng 1000 USD. Các project lọt vào chung kết được thưởng 2000 USD và các tác giả sẽ được đi bảo vệ tại Mỹ. Thông tin về cuộc thi có thể xem chi tiết tại: `http://www.yau-awards.org/overseas/index.html`.

- Theo thông báo từ Hội Toán học Việt Nam, ngày 22/4/2011, GS Frank Morgan, chuyên gia hàng đầu thế giới nhân chuyến đi thăm và làm việc tại Việt Nam sẽ ghé thành phố Hồ Chí Minh và đọc bài giảng public về *"Bong bóng xà phòng và Toán học"*. Được biết Frank Morgan không chỉ nổi tiếng với những công trình khoa học tầm cỡ của mình mà có rất nổi tiếng như một diễn giả xuất sắc, có thể làm cho học sinh phổ thông hiểu được những điều cao siêu. Thông tin chi tiết về Frank Morgan có thể đọc tại đây: `http://math.williams.edu/morgan/`.

- Phong trào tổ chức seminar Toán học và câu lạc bộ Toán học đang được lan rộng. Hiện nay ngoài seminar Giải tích và Toán sơ cấp tổ chức tại trường Đại học Khoa học Tự Nhiên – Đại học Quốc gia Hà Nội (do GS Nguyễn Văn Mậu chủ trì), seminar các phương pháp Toán sơ cấp tại trường Phổ thông Năng khiếu đã có thêm seminar toán sơ cấp tại Vĩnh Long, An Giang, Long An. Đặc biệt, kể từ tháng 10/2010, Viện Toán học Việt Nam sẽ tổ chức câu lạc bộ Toán học dành cho học sinh THPT tại Viện Toán (1 tháng 1 buổi). Được biết 3 bài giảng đầu tiên (vào các tháng 10, 11, 12/2010) sẽ do GS Hà Huy Khoái, TS Phan Thị Hà Dương, TS Nguyễn Chu Gia Vượng đảm trách.

KHÁM PHÁ MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA DÃY SỐ TRUY HỒI TUYẾN TÍNH CẤP HAI

Đào Hoàng Nhã
HS chuyên Toán khóa 2009 - 2012

Trước hết, để bước vào chuyên đề này, chúng ta cần biết thế nào là dãy số truy hồi tuyến tính cấp hai.

Định nghĩa 1. *Dãy số truy hồi tuyến tính cấp hai là dãy số có dạng như sau*

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

trong đó a, b *là các số thực khác* 0.

Dãy số này tuy khá đơn giản nhưng đằng sau nó là những bí ẩn thú vị đang chờ đợi chúng ta. Nào, chúng ta hãy bắt đầu cuộc hành trình.

Mở đầu cho cuộc khám phá các bí ẩn, chúng ta hãy cùng nhau tìm hiểu một tính chất thú vị sau.

Tính chất 1. *Cho dãy số* $\{u_n\}$ *thỏa mãn* $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$. *Khi đó ta có hằng đẳng thức sau*

$$u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (-b)^{n-1}(u_3u_1 - u_2^2), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

Chứng minh. Trước hết, ta sẽ chứng minh

$$u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = -b(u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2). \tag{2}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 + b(u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2) &= u_n(u_{n+2} - bu_n) - u_{n+1}(u_{n+1} - bu_{n-1}) \\ &= u_n \cdot au_{n+1} - u_{n+1} \cdot au_n = 0. \end{aligned}$$

Vậy (2) được chứng minh. Từ đây, bằng cách áp dụng liên tiếp (2), ta dễ dàng thu được hằng đẳng thức (1) như ở trên. □

Bây giờ, trong (1) cho $b = -1$, ta có

$$u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = u_3u_1 - u_2^2. \tag{3}$$

Giả sử $u_n \neq 0$ với mọi $n \geq 1$. Khi đó, đặt $c = u_3u_1 - u_2^2$, từ (3) ta suy ra

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2 + c}{u_n}.$$

Từ đó ta rút ra được tính chất như sau.

Tính chất 2. *Cho dãy* $\{u_n\}$ *được xác định bởi* $u_1 = m$, $u_2 = p$, $u_3 = q$ $(mpq \neq 0)$ *và*

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2 + c}{u_n}, \quad \forall n \geq 1,$$

trong đó $c = mq - p^2$. *Khi đó, ta có* $\{u_n\}$ *chính là dãy số truy hồi tuyến tính cấp 2 dạng*

$$u_{n+2} = au_{n+1} - u_n,$$

với $a = \dfrac{q+m}{p}$.

CHỨNG MINH. Từ giả thiết, ta suy ra

$$c = u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2. \tag{4}$$

Thay n bởi $n-1$, ta được

$$c = u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2. \tag{5}$$

Từ (4) và (5), ta có $u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2$, hay

$$u_n(u_{n+2} + u_n) = u_{n+1}(u_{n+1} + u_{n-1}),$$

$$\frac{u_{n+2} + u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_n}.$$

Thay n lần lượt bởi $n-1$, $n-2$, ..., 2, ta được

$$\frac{u_{n+2} + u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_n} = \cdots = \frac{u_3 + u_1}{u_2} = \frac{q+m}{p} = a.$$

Từ đó suy ra $u_{n+2} = au_{n+1} - u_n$. Tính chất 2 được chứng minh. □

Các tính chất 1, 2 thường được sử dụng cho các dạng toán mà dãy số được xác định như trên. Sau đây là một số ví dụ.

Ví dụ 1 (VMO 1999)**.** *Cho dãy số* $\{a_n\}$ *được xác định bởi*

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng

$$a_{n+2} + a_n \geq 2 + \frac{a_{n+1}^2}{a_n}, \quad \forall n \geq 1.$$

LỜI GIẢI. Ta dễ dàng chứng minh được dãy số trên là dãy tăng, suy ra $a_n > 0$ với mọi n. Sử dụng tính chất 1, ta có

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 1}{a_n}.$$

Từ đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương, ta được

$$a_{n+2} + a_n = \frac{a_{n+1}^2 + 1}{a_n} + a_n = \frac{a_{n+1}^2}{a_n} + \left(\frac{1}{a_n} + a_n\right) \geq \frac{a_{n+1}^2}{a_n} + 2.$$

Bài toán được chứng minh. □

Ví dụ 2 (Bulgaria 1978)**.** *Cho dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn đồng thời các tính chất sau*

1. $u_n \neq 0$, $\forall n = 1, 2, \ldots$
2. $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}$.
3. $\dfrac{u_1^2 + u_2^2 + a}{u_1 u_2} \in \mathbb{Z}$.
4. $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2 + a}{u_n}$, $\forall n = 1, 2, \ldots$.

Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ chỉ chứa toàn số nguyên.

Lời giải. Sử dụng tính chất 2, ta có

$$u_{n+2} = k u_{n+1} - u_n, \quad \forall n \geq 1, \tag{6}$$

với $k = \dfrac{u_3 + u_1}{u_2}$.

Do $u_3 = \dfrac{u_2^2 + a}{u_1}$ nên ta có $\dfrac{u_3 + u_1}{u_2} = \dfrac{u_1^2 + u_2^2 + a}{u_1 u_2} \in \mathbb{Z}$, suy ra $k \in \mathbb{Z}$. Mà theo giả thiết thì $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}$ nên từ (6), ta dễ dàng suy ra $u_n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \geq 1$. □

Nhận xét. Ví dụ trên cho ta một tiêu chuẩn để đánh giá dãy số các số hạng của dãy $\{u_n\}$ với $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2 + a}{u_n}$ có là các số nguyên hay không.

Bây giờ, chúng ta hãy tiếp tục xem xét dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn

$$u_1 = a, \quad u_2 = b, \quad u_{n+2} = d u_{n+1} - u_n.$$

Rõ ràng, nếu a, b đều là các số nguyên và d cũng là số nguyên thì hiển nhiên mọi số hạng của dãy $\{u_n\}$ luôn luôn là số nguyên. Vậy, nếu d không là số nguyên thì d phải thỏa mãn điều kiện gì để mọi số hạng của dãy đều là các số nguyên? Chính câu hỏi này đã đưa ta đến với bài toán sau.

Bài toán 1. *Cho dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn*

$$u_1 = a, \quad u_2 = b, \quad u_{n+2} = d u_{n+1} - u_n, \quad \forall n \geq 1,$$

trong đó a, b là các số nguyên khác 0 và d là một số thực khác 0. Tìm mọi giá trị của d để mọi số hạng của dãy đều là các số nguyên.

Bây giờ chúng ta sẽ cùng nhau tìm hiểu lời giải của bài toán này.

Lời giải. Nếu d là một số vô tỉ thì rõ ràng $u_3 = bd - a$ cũng là số vô tỉ vì a, b là các số nguyên. Do đó ta chỉ cần xét d trong tập số hữu tỉ.

Giả sử d là số hữu tỉ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vì d là số hữu tỉ nên ta có thể đặt $d = \frac{p}{q}$ với p, q là các số nguyên khác 0 và $(p,\, q) = 1$. Từ đó $u_{n+2} = \frac{p}{q} u_{n+1} - u_n$, hay

$$q(u_{n+2} + u_n) = pu_{n+1}. \tag{7}$$

Với $n = 1$ thì (7) trở thành $q(u_3 + u_1) = pu_2 \,\vdots\, q$, suy ra $u_2 \,\vdots\, q$ (do $(p,\, q) = 1$). Tương tự, bằng cách cho n nhận giá trị lần lượt bằng 3, 4, ta cũng có $u_4 \,\vdots\, q$ và $u_5 \,\vdots\, q$. Từ đó cho $n = 2$, ta suy ra

$$pu_3 = q(u_2 + u_4) \,\vdots\, q^2.$$

Mà $(p,\, q) = 1$ nên $(p,\, q^2) = 1$, do đó từ trên suy ra $u_3 \,\vdots\, q^2$. Do vậy

$$pu_4 = q(u_3 + u_5) \,\vdots\, q^2.$$

Vì $(p,\, q^2) = 1$ nên $u_4 \,\vdots\, q^2$. Cứ làm như vậy ta rút ra được nhận xét là

$$u_n \,\vdots\, q^{k-1}, \quad \forall n \geq k \geq 1. \tag{8}$$

Điều này ta có thể chứng minh bằng quy nạp theo k. Thật vậy, dễ thấy (8) đúng với $k = 1$. Giả sử nó đúng tới k, tức là

$$u_n \,\vdots\, q^{k-1}, \quad \forall n \geq k \geq 1.$$

Khi đó từ (7) ta suy ra $u_{n+1} \,\vdots\, q^k$, tức là $u_n \,\vdots\, q^k$, $\forall n \geq k+1$. Nhận xét được chứng minh.

Bây giờ, sử dụng tính chất 1, ta có

$$u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = c,$$

với $c = u_3u_1 - u_2^2$ là hằng số.

Từ đây kết hợp với (8), ta suy ra $c \,\vdots\, q^{2k}$ với k lớn tùy ý.

Do c là một hằng số nên nếu $c \neq 0$ thì q chỉ có thể bằng 1 (vì nếu q khác 1, ta sẽ có $q^{2k} > c$ khi k tăng đến một giá trị nào đó), khi đó d là một số nguyên (vì mẫu bằng 1).

Xét $c = 0$, khi đó ta có

$$u_{n+2}u_n = u_{n+1}^2. \tag{9}$$

Dễ thấy, vì a, b là các số nguyên khác 0 cho nên ta luôn chứng minh được $u_n \neq 0$ với mọi số nguyên dương n (có thể quy nạp từ (9)). Từ (9) suy ra

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Suy ra

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{u_{n-1}} = \cdots = \frac{u_2}{u_1} = \frac{b}{a} = r, \quad \forall n \geq 1.$$

Do đó $u_{n+1} = ru_n$, $\forall n \geq 1$. Rõ ràng, lúc này dãy số $\{u_n\}$ là cấp số nhân, cho nên

$$u_{n+1} = r^n a. \tag{10}$$

Đến đây, ta viết lại r dưới dạng phân số tối giản $r = \dfrac{u}{v}$ với u, $v \in \mathbb{Z}$ và $(u,\, v) = 1$. Do u_n là số nguyên với mọi n nên

$$u_{n+1} = \frac{u^n}{v^n} a \in \mathbb{Z}.$$

Từ đó suy ra $a \,\vdots\, v^n$ (do $(u^n,\, v^n) = 1$). Mà a lại là một hằng số nên v chỉ có thể nhận giá trị là 1, do đó $r \in \mathbb{Z}$ hay $b \,\vdots\, a$. Ta lại có

$$d = \frac{u_3 + u_1}{u_2} = \frac{ar^2 + a}{ar} = \frac{r^2 + 1}{r} = \frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

Thử lại giá trị của d, ta thấy mọi số hạng của dãy đều nguyên. Từ đó ta rút ra kết luận

- Nếu b không chia hết cho a thì d là số nguyên.
- Nếu b chia hết cho a thì d là một số nguyên hoặc $d = \dfrac{a^2 + b^2}{ab}$. □

Chính bài toán trên đã cho ta một tính chất tiếp theo.

Tính chất 3. *Cho dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn*

$$u_1 = a, \quad u_2 = b, \quad u_{n+2} = du_{n+1} - u_n, \quad \forall n \geq 1,$$

với a, b là các số nguyên và $ab \neq 0$. Khi đó, mọi số hạng của dãy đều là các số nguyên khi và chỉ khi ta có một trong các điều sau

- *d là một số nguyên nếu b không chia hết cho a;*
- *d là một số nguyên hoặc $d = \dfrac{a^2 + b^2}{ab}$ nếu b chia hết cho a.*

Không dừng lại tại đây, chúng ta hãy tiếp tục cùng nhau khám phá tiếp, vẫn còn nhiều bí ẩn đằng sau đang chờ đợi chúng ta.

Xét dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn $u_1 = m$, $u_2 = p$ và

$$u_{n+2} = au_{n+1} - u_n. \tag{11}$$

Theo tính chất 1 thì dãy số trên luôn có thể biến đổi về dạng

$$u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = u_3u_1 - u_2^2 = c. \tag{12}$$

Nào, bây giờ chúng ta hãy nhìn thật kĩ (11) và (12), giữa chúng liệu có mối liên hệ nào không? Các bạn đã nhận ra chưa nào? Chúng ta cùng xem nhé!

Từ (11) và (12), ta suy ra được

$$\begin{cases} u_{n+2} + u_n = au_{n+1} \\ u_{n+2}u_n = c + u_{n+1}^2 \end{cases}.$$

Do đó u_{n+2} và u_n chính là nghiệm của phương trình bậc hai

$$X^2 - au_{n+1}X + u_{n+1}^2 + c = 0,$$

với X là ẩn số, u_{n+1} chính là tham số.

Từ đó ta rút ra được tính chất tiếp theo.

Tính chất 4. *Cho dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn*

$$u_1 = m, \quad u_2 = p, \quad u_{n+2} = au_{n+1} - u_n.$$

Khi đó, u_{n+2} và u_n chính là nghiệm của phương trình bậc hai

$$X^2 - au_{n+1}X + u_{n+1}^2 + c = 0, \tag{13}$$

với X là ẩn số, u_{n+1} là tham số và $c = u_3u_1 - u_2^2$.

Có lẽ, đến bây giờ các bạn sẽ tự hỏi, tính chất 4 có thể suy ra được điều gì nữa?

Bây giờ, ta hãy xem, nếu mọi số hạng của dãy $\{u_n\}$ đều là các số nguyên và giả sử a cũng là số nguyên, thì rõ ràng phương trình (13) có hai nghiệm nguyên. Mà điều kiện cần để một phương trình bậc hai có các hệ số nguyên có nghiệm nguyên là biệt thức Δ của nó phải là số chính phương. Mà

$$\Delta = a^2u_{n+1}^2 - 4(u_{n+1}^2 + c) = (a^2 - 4)u_{n+1}^2 - 4c.$$

Do đó ta có $(a^2 - 4)u_{n+1}^2 - 4c$ là một số chính phương. Ta rút ra được tính chất sau.

Tính chất 5. *Cho dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn*

$$u_{n+2} = au_{n+1} - u_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Giả sử mọi số hạng của dãy đều là số nguyên và a cũng là một số nguyên. Khi đó ta có $(a^2 - 4)u_{n+1}^2 - 4c$ là một số chính phương ($c = u_3u_1 - u_2^2$).

Ví dụ 3. *Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau*

$$u_1 = 5, \quad u_2 = 16, \quad u_{n+2} = 1994u_{n+1} - u_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng $3976032u_{2508}^2 - 159239$ là một số chính phương.

LỜI GIẢI. Ta có $3976032 = 1994^2 - 4$, $u_3 = 1994 \cdot 16 - 5 = 31899$ và

$$159239 = 31899 \cdot 5 - 16^2.$$

Do đó theo tính chất 5 thì $3976032u_{2508}^2 - 159239$ là một số chính phương. $\square$

Ví dụ 4 (VMO 1997)**.** *Cho dãy số nguyên $\{a_n\}$ được xác định bởi $a_0 = 1$, $a_1 = 45$ và*

$$a_{n+2} = 45a_{n+1} - 7a_n,$$

với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$

(a) Tìm số ước dương của $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}$ theo n.

(b) Chứng minh rằng với mọi n thì $1997a_n^2 + 4 \cdot 7^{n+1}$ là số chính phương.

LỜI GIẢI. **(a)** Ta có $a_2 = 45^2 - 7 \cdot 1 = 2018$. Sử dụng tính chất 1, ta được

$$a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = 7^n(a_2a_0 - a_1^2),$$

suy ra

$$a_{n+1}^2 - a_{n+2}a_n = 7^{n+1}.$$

Do 7 là số nguyên tố nên số các ước nguyên dương của $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}$ là $n + 2$ số.

(b) Ta sẽ dùng tư tưởng của các tính chất trên để giải quyết câu hỏi này. Từ giả thiết $a_{n+2} = 45a_{n+1} - 7a_n$ và $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = 7^{n+1}$ (theo tính chất 1), ta suy ra

$$\begin{cases} a_{n+2} + 7a_n = 45a_{n+1} \\ (7a_n)a_{n+2} = 7a_{n+1}^2 - 7^{n+2} \end{cases}.$$

Do đó $7a_n$ và a_{n+2} là các nghiệm của phương trình bậc hai

$$X^2 - 45a_{n+1}X + 7a_{n+1}^2 - 7^{n+2} = 0.$$

Vì $7a_n$, a_{n+2} là các số nguyên nên phương trình trên có hai nghiệm nguyên, suy ra biệt thức Δ của nó là số chính phương. Mà

$$\Delta = (45a_{n+1})^2 - 4(7a_{n+1}^2 - 7^{n+2}) = 1997a_{n+1}^2 + 4 \cdot 7^{n+2},$$

nên ta có $1997a_{n+1}^2 + 4 \cdot 7^{n+2}$ là số chính phương. Hơn nữa, dễ thấy $1997a_0^2 + 4 \cdot 7^1 = 45^2$. Do vậy ta có $1997a_n^2 + 4 \cdot 7^{n+1}$ là số chính phương với mọi số tự nhiên n. □

NHẬN XÉT. Qua ví dụ trên, ta thấy tính chất 4 và 5 có thể tổng quát cho trường hợp

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + qu_n,$$

với u_1, u_2 là các số nguyên và p, q cũng là các số nguyên.

Khi đó $u_{n+2} - qu_n = pu_{n+1}$ và $u_{n+2}(-qu_n) = -qu_{n+1}^2 + (-q)^n c$ với $c = u_3u_1 - u_2^2$. Từ đó ta có u_{n+2} và $-qu_n$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai

$$X^2 - pu_{n+1}X - qu_{n+1}^2 + (-q)^n c = 0.$$

Và do đó $(p^2 + 4q)u_{n+1}^2 - 4(-q)^n c$ là một số chính phương.

Bây giờ, chúng ta sẽ tiếp tục khám phá tiếp, liệu từ tính chất 4, ta có thể khai thác được những điều thú vị nào nữa? Các bạn hãy cùng tôi thử giải phương trình (13). Theo công thức nghiệm của phương trình bậc hai, ta suy ra

$$X_{1,\,2} = \frac{au_{n+1} \pm \sqrt{(a^2-4)u_{n+1}^2 - 4c}}{2}.$$

Giả sử $u_{n+2} > u_n$, khi đó ta được một dãy số truy hồi có dạng

$$u_{n+2} = \frac{a}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4)u_{n+1}^2 - 4c}.$$

Như vậy, ta có thể rút ra được tính chất 6 như sau.

Tính chất 6. *Mọi dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn*

$$u_1 = m, \quad u_{n+2} = \frac{a}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2-4)u_{n+1}^2 + 4c}, \quad (ac \neq 0)$$

luôn có thể đưa về dãy số truy hồi tuyến tính cấp hai có dạng như sau

$$u_{n+2} = au_{n+1} - u_n.$$

LỜI GIẢI. Chuyển $\frac{a}{2}u_{n+1}$ sang vế trái và bình phương hai vế, ta được

$$u_{n+2}^2 - au_{n+2}u_{n+1} + \frac{a^2}{4}u_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left[(a^2-4)u_{n+1}^2 + 4c\right],$$

$$u_{n+2}^2 - au_{n+2}u_{n+1} + u_{n+1}^2 - c = 0.$$

Thay n bởi $n-1$, ta có

$$u_{n+1}^2 - au_{n+1}u_n + u_n^2 - c = 0.$$

Từ đây suy ra u_{n+2} và u_n là các nghiệm của phương trình bậc hai

$$X^2 - au_{n+1}X + u_{n+1}^2 - c = 0.$$

Áp dụng định lý Viette, ta có $u_{n+2} + u_n = au_{n+1}$, hay $u_{n+2} = au_{n+1} - u_n$. Tính chất 6 được chứng minh. □

Ví dụ 5. *Cho a, b, c là ba số nguyên thỏa mãn $a^2 = b + 1$ và dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau*

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = au_n + \sqrt{bu_n^2 + c^2}, \quad \forall n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy trên đều là số nguyên.

LỜI GIẢI. Ta có

$$u_{n+1} = au_n + \sqrt{bu_n + c^2} = au_n + \sqrt{(a^2-1)u_n^2 + c^2} = \frac{2a}{2}u_n + \frac{1}{2}\sqrt{(4a^2-4)u_n^2 + 4c^2}.$$

Theo tính chất 6, ta suy ra

$$u_{n+2} = 2au_{n+1} - u_n.$$

Vì $u_0 = 0$, $u_1 = |c| \in \mathbb{Z}$ nên từ trên ta có u_n là số nguyên với mọi số tự nhiên n. □

Từ tính chất 3 và tính chất 6, ta có thể suy ra một tính chất như sau.

Tính chất 7. *Xét dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn u_1, $u_2 \in \mathbb{Z}$ và*

$$u_{n+1} = au_n + \sqrt{bu_n^2 + c}.$$

Nếu c là một số nguyên và tồn tại một số d sao cho $a = \dfrac{d}{2}$ và $b = \dfrac{d^2-4}{4}$ với d là một số nguyên (nếu u_2 chia hết hoặc không chia hết cho u_1) hoặc $d = \dfrac{u_1^2+u_2^2}{u_1u_2}$ (nếu u_2 chia hết cho u_1) thì mọi số hạng của dãy đều là nguyên.

Đây có thể được xem như một tiêu chuẩn để đánh giá dãy số dạng trên là 1 dãy nguyên.

Trước khi kết thúc chuyên đề, chúng ta hãy cùng nhau xem xét một bài toán sau.

Bài toán 2 (Bulgaria 1987)**.** *Xét dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi $x_1 = x_2 = 1$ và*

$$x_{n+2} = 14x_{n+1} - x_n - 4, \quad \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$, ta có x_n là bình phương của một số nguyên.

LỜI GIẢI. Để giải thành công bài toán này, trước hết chúng ta cần phải nghiên cứu các giá trị của các số hạng đầu tiên của dãy và sau đó rút ra nhận xét về mối quan hệ của chúng. Thử vài giá trị đầu, ta có

$$x_1 = 1^2, \quad x_2 = 1^2, \quad x_3 = 3^2, \quad x_4 = 11^2, \quad x_5 = 41^2, \quad x_6 = 153^2, \quad \ldots$$

Hãy quan sát và để ý, các số trên hoàn toàn có quy luật. Ta nhận thấy

$$3 = 4\cdot 1 - 1, \quad 11 = 4\cdot 3 - 1, \quad 41 = 4\cdot 11 - 3, \quad 153 = 4\cdot 41 - 11, \quad \ldots$$

Từ các yếu tố trên, các số 1, 1, 3, 11, 41, 153, ... đều được hình thành dựa vào dãy sau

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 1, \quad y_{n+2} = 4u_{n+1} - y_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Bây giờ, việc của chúng ta là chứng minh rằng

$$x_n = y_n^2. \tag{14}$$

Cách chứng minh đơn giản nhất chính là sử dụng quy nạp: Dễ thấy (14) đúng với $n = 1$, 2. Giả sử nó đúng với $n = 1, 2, \ldots, k$, tức là

$$x_n = y_n^2, \quad \forall n = 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Ta cần chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$. Ta có

$$\begin{aligned} y_{k+1}^2 &= (4y_k - y_{k-1})^2 = 16y_k^2 - 8y_ky_{k-1} + y_{k-1}^2 \\ &= 14x_k - x_{k-1} - 4 + (2y_k^2 - 8y_ky_{k-1} + 2y_{k-1}^2 + 4) \\ &= x_{k+1} + 2y_k^2 - 2(4y_k - y_{k-1})y_{k-1} + 4 \\ &= x_{k+1} + 2y_k^2 - 2y_{k+1}y_{k-1} + 4. \end{aligned}$$

Sử dụng tính chất 1, ta có

$$y_{k-1}y_{k+1} - y_k^2 = 2.$$

Từ đó suy ra $y_{k+1}^2 = x_{k+1}$. Vậy ta có điều phải chứng minh. □

NHẬN XÉT. Ta hoàn toàn có thể tổng quát bài toán trên. Xét dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn $u_{n+2} = au_{n+1} - u_n$ và $c = u_1u_3 - u_2^2$, ta có

$$u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = c.$$

Xét tiếp dãy số $\{v_n\}$ sao cho $v_n = u_n^2$ với mọi n, ta sẽ có

$$\begin{aligned} v_{n+2} = u_{n+2}^2 &= a^2u_{n+1}^2 - 2au_{n+1}u_n + u_n^2 = a^2u_{n+1}^2 - 2u_n(au_{n+1} - u_n) - u_n^2 \\ &= a^2u_{n+1}^2 - u_n^2 - 2u_nu_{n+2} = (a^2-2)u_{n+1}^2 - 2(u_nu_{n+2} - u_{n+1}^2) - u_n^2 \\ &= (a^2-2)v_{n+1} - v_n - 2c. \end{aligned}$$

Suy ra $v_{n+2} = (a^2-2)v_{n+1} - v_n - 2c$.

Mặt khác, bằng cách sử dụng quy nạp, ta cũng dễ dàng chứng minh được điều ngược lại đúng, tức là: Nếu hai dãy $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ thỏa mãn $v_1 = u_1^2$, $v_2 = u_2^2$, $c = u_1u_3 - u_2^2$ và

$$u_{n+2} = au_{n+1} - u_n, \quad v_{n+2} = (a^2-2)v_{n+1} - v_n - 2c,$$

thì ta có $v_n = u_n^2$ với mọi n.

Và như vậy, ta có bài toán tổng quát như sau: *Cho hai dãy số $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ thỏa mãn $v_1 = u_1^2$, $v_2 = u^2$, $c = u_1u_3 - u_2^2$ và $u_{n+2} = au_{n+1} - u_n$. Khi đó*

$$v_{n+2} = (a^2-2)v_{n+1} - v_n - 2c$$

khi và chỉ khi $v_n = u_n^2$ với mọi số nguyên dương n.

Từ cách chứng minh như trên, ta có thể rút ra được phương pháp giải các bài toán về dãy số có liên quan đến số chính phương. Với tư tưởng như trên, ta có thể giải được các bài toán tương tự sau.

Bài toán 3. *Cho dãy số $\{y_n\}$ thỏa mãn $y_1 = y_2 = 1$ và*

$$y_{n+2} = (4k-5)y_{n+1} - y_n + 4 - 2k, \quad \forall n \geq 1.$$

Tìm $k \in \mathbb{Z}$ sao cho mọi số hạng của dãy đều là số chính phương.

(Ta có thể chứng minh được dãy số thỏa mãn bài toán trên có dạng như sau

$$y_{n+2} = 7y_{n+1} - y_n - 2.$$

Từ đó, áp dụng cách làm bài toán 2 thì được điều phải chứng minh.)

Bài toán 4 (Canada 1988). *Cho hai dãy số* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *xác định bởi* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$ *và* $y_0 = 1$, $y_1 = 2$, $y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$. *Chứng minh rằng*

$$y_n^2 = 3x_n^2 + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bài toán 5. *Cho dãy* $\{u_n\}$ *thỏa mãn* $u_1 = k$, $u_2 = k + 1$ *với* k *là số nguyên bất kỳ và*

$$u_{n+1} = u_n(u_n - 1) + 2, \quad \forall n = 2,\ 3,\ \ldots$$

Chứng minh rằng số $A = (u_1^2 + 1)(u_2^2 + 1)\cdots(u_{2005}^2 + 1) - 1$ *là một số chính phương.*

(Gợi ý, bằng quy nạp ta chứng minh được $A_n = (u_{n+1} - 1)^2$ với

$$A_n = (u_1^2 + 1)(u_2^2 + 1)\cdots(u_n^2 + 1) - 1.)$$

Sau đây là một số bài tập dành cho bạn đọc.

Bài tập 1. Cho dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ và

$$u_n = -u_{n-1} - 2u_{n-2}, \quad \forall n = 3,\ 4,\ \ldots$$

Xét dãy $\{v_n\}$ như sau

$$v_n = 2^{n+1} - 7u_{n-1}^2, \quad \forall n = 2,\ 3,\ \ldots$$

Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy $\{v_n\}$ đều là số chính phương.

Bài tập 2. Cho dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ và

$$u_n = nu_{n-1} - (n-2)u_{n-2} - 2n + 4$$

với mọi $n = 3,\ 4,\ \ldots$

(a) Tìm n để $|u_n - 2007|$ có giá trị nhỏ nhất.

(b) Tìm số dư khi chia u_{2007} cho 2006.

Bài tập 3 (VMO 1998). Cho dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi $a_0 = 20$, $a_1 = 100$ và

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n + 20, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tìm số nguyên dương h nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $a_{n+h} - a_n$ chia hết cho 1998 với mọi số tự nhiên n.

Bài tập 4 (TST Việt Nam 1993). Gọi $\varphi(n)$ là phi hàm Euler. Tìm tất cả các số nguyên dương $k > 1$ thỏa mãn điều kiện: với a là số nguyên > 1 bất kỳ, đặt $x_0 = a$, $x_{n+1} = k\varphi(x_n)$ với $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ thì $\{x_n\}$ luôn bị chặn.

Bài tập 5 (Ba Lan 2002). Cho $k \in \mathbb{N}^*$ và dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi

$$a_1 = k + 1, \quad a_{n+1} = a_n^2 - ka_n + k, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng với mọi $m,\ n \in \mathbb{N}^*$, $m \neq n$, ta có $(a_n,\ a_m) = 1$.

Bài tập 6. Cho số thực r và dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+2} = rx_{n+1} - x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng

$$x_1 + x_3 + \cdots + x_{2m-1} = x_m^2, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Tài liệu tham khảo

[1] Phan Huy Khải, *Số học và dãy số*, Nhà xuất bản Giáo Dục, 2009.

[2] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Chuyên đề chọn lọc dãy số và áp dụng*, Nhà xuất bản Giáo Dục, 2008.

[3] Các tài liệu sưu tầm từ internet.

ĐỊNH LÝ THẶNG DƯ TRUNG HOA

Phạm Hy Hiếu
HS chuyên Toán khóa 2007 - 2010

LƯỢC DẪN. *Xưa ở Trung Quốc, có một vị tướng không những có tài thao lược chiến trương mà còn có những hiểu biết sâu sắc về Toán học tên là Hàn Tín. Tương truyền rằng khi điểm quân, ông ra lệnh cho quân đội của mình xếp thành những hàng 5 người, 7 người rồi 11 người, sau đó dựa vào quân số dư còn lại sau mỗi lần xếp hàng cùng với việc ước lượng quân số của mình trong khoảng bao nhiêu, ông suy ra được quân số chính xác của mình. Những gì Hàn Tín làm đã được các nhà Toán học Trung Quốc và thế giới ghi nhận lại thành "định lý Thặng dư Trung Hoa". Đây thực sự là một kết quả đẹp và có nhiều ứng dụng trong việc giải quyết các bài toán về Lý thuyết số và cả những vấn đề cao cấp hơn của Toán học. Bài viết này hy vọng trao đổi với các bạn về định lý này.*

1 Nhìn lại định lý Thặng dư Trung Hoa

Định lý 1 (Định lý Thặng dư Trung Hoa)**.** *Cho k là một số nguyên dương, m_1, m_2, ..., m_k là các số nguyên đôi một nguyên tố cùng nhau và a_1, a_2, ..., a_k là các số nguyên bất kỳ. Khi đó hệ phương trình đồng dư*

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất modulo $m_1 m_2 \cdots m_k$.

CHỨNG MINH 1. Từ phát biểu của định lý, ta thấy việc chứng minh cần phải trải qua hai bước như sau:

(1) Chứng minh sự tồn tại của nghiệm x modulo $m_1 m_2 \cdots m_k$.

(2) Chứng minh tính duy nhất của nghiệm theo modulo $m_1 m_2 \cdots m_k$.

(1) Để chứng minh sự tồn tại nghiệm của hệ đồng dư, ta sẽ sử dụng nguyên lý quy nạp. Giả sử kết luận của định lý đã đúng với 1, 2, ..., k. Xét $k+1$ số nguyên m_1, m_2, ..., m_{k+1} đôi một nguyên tố cùng nhau. Đặt $m'_k = m_k m_{k+1}$. Vì $(m_k, m_{k+1}) = 1$ nên theo giả thiết quy nạp, hệ đồng dư

$$\begin{cases} x \equiv a_k \pmod{m_k} \\ x \equiv a_{k+1} \pmod{m_{k+1}} \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất $x \equiv a'_k \pmod{m'_k}$. Lại theo giả thiết quy nạp thì vì $m_1, m_2, \ldots, m'_k$ là k số nguyên đôi một nguyên tốt cùng nhau nên hệ đồng dư

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \ldots \\ x \equiv a'_k \pmod{m'_k} \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất theo modulo $m_1 m_2 \cdots m'_k$ nên định lý cũng đúng với $k+1$.

Cuối cùng ta chỉ cần chứng minh định lý trong trường hợp $k = 2$. Để làm được điều đó, ta cần đến bổ đề sau.

Bổ đề 1 (Bổ đề Bezóut)**.** *Nếu m, n là hai số nguyên thỏa mãn $(m, n) = 1$ thì tồn tại các số nguyên u, v thỏa mãn*

$$mu + nv = 1.$$

Chứng minh. Xét các số có dạng $\{1 - mu \mid u \in \mathbb{Z}\}$, vì $(m, n) = 1$ nên tồn tại u sao cho $n \mid 1 - mu$. Khi đó ta chỉ cần chọn $v = \dfrac{1 - mu}{n}$. Bổ đề được chứng minh. □

Vào bài. Theo bổ đề Bezóut suy ra rằng tồn tại các số nguyên u, v sao cho

$$m_2 v - m_1 u = 1.$$

Đặt $r = (a_1 - a_2)u$, $s = (a_1 - a_2)v$ thì

$$m_2 s - m_1 r = a_1 - a_2 \Leftrightarrow a_1 + m_1 r = a_2 + m_2 s.$$

Đặt $x = a_1 + m_1 r = a_2 + m_2 s$, ta có

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \end{cases}$$

Vậy x là nghiệm của hệ đồng dư với $k = 2$.

(2) Bây giờ ta chứng minh tính duy nhất của nghiệm. Thật vậy giả sử tồn tại x' sao cho

$$\begin{cases} x \equiv x' \pmod{m_1} \\ x \equiv x' \pmod{m_2} \\ \ldots \\ x \equiv x' \pmod{m_k} \end{cases}$$

Thế thì do giả thiết $m_1, m_2, \ldots, m_k$ đôi một nguyên tố cùng nhau nên ta có

$$x \equiv x' \pmod{m_1 m_2 \cdots m_k}.$$

Định lý được chứng minh hoàn toàn. □

Có rất nhiều cách chứng minh định lý Thặng dư Trung Hoa. Sau đây ta đến với một chứng minh khác cho phần tồn tại nghiệm (tức *phần (1)* ở trên) của định lý này theo hướng xây dựng và không cần sử dụng nguyên lý quy nạp.

Chứng minh 2. Do giả thiết $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_k$ đôi một nguyên tố cùng nhau nên $\gcd\left(\dfrac{m}{m_i},\ m_i\right) = 1$ $(m = m_1m_2\cdots m_k)$ với mọi $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Do vậy, tương tự với cách lý luận trong chứng minh của bổ đề Bezóut, ta suy ra rằng với mỗi i đều tồn tại b_i sao cho

$$\frac{m}{m_i}b_i \equiv 1 \pmod{m_i}, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k.$$

Từ đó

$$\frac{m}{m_i}b_ia_i \equiv a_i \pmod{m_i}, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k.$$

Xét số nguyên $x_0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{m}{m_i}b_ia_i$ với mọi $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$, ta có

$$\begin{aligned} x_0 &= \sum_{i=1}^{k} \frac{m}{m_i}b_ia_i \pmod{m_i} \\ &\equiv \frac{m}{m_i}b_ia_i \pmod{m_i} \\ &\equiv a_i \pmod{m_i} \,(\text{vì } \frac{m}{m_i}b_i \equiv 1 \pmod{a_i}). \end{aligned}$$

Vậy x_0 là nghiệm của hệ đồng dư trong bài. □

Nghiên cứu hai chứng minh trên, ta nhận thấy chúng đều dựa trên tư tưởng của bổ đề Bezóut. Thực tế, bổ đề này có một hệ quả quan trọng như sau.

Hệ quả 1.1. *Nếu m, n là các số nguyên và $(m,\ n) = d$ thì với mọi số nguyên h mà $d \mid h$ thì tồn tại các số nguyên u, v thỏa mãn*

$$h = mu + nv.$$

Từ hệ quả này ta suy ra mở rộng sau đây của định lý Thặng dư Trung Hoa.

Định lý 2 (Mở rộng định lý Thặng dư Trung Hoa)**.** *Cho k là một số nguyên dương, $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_k$ là các số nguyên bất kỳ và $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ là các số nguyên. Khi đó hệ phương trình đồng dư*

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \ldots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

có nghiệm modulo $\operatorname{lcm}(m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_k)$ *khi và chỉ khi*

$$a_i \equiv a_j \pmod{(m_i,\ m_j)}, \quad \forall 1 \le i < j \le k.$$

Mở rộng này hoàn toàn có thể được chứng minh bằng phương pháp tương tự hóa từ cả hai cách chứng minh của định lý lúc đầu, chỉ khác ở chỗ sử dụng hệ quả của bổ đề Bezóut thay vì chính bổ đề này.

Không chỉ trong Lý thuyết số mà định lý Thặng dư Trung Hoa còn có các mở rộng tương tự trong Lý thuyết nhóm, Lý thuyết vành, trường, ideal, ..., nhưng điều đó vượt quá tầm quan tâm của bài viết này.

2 Định lý Thặng dư Trung Hoa trong giải toán phổ thông

Trong mục này ta tìm hiểu các bài toán ứng dụng định lý Thặng dư Trung Hoa. Trước hết ta đến với ba bài toán cơ bản đầu tiên mang tính kinh điển cho kỹ thuật sử dụng định lý thặng dư Trung Hoa.

Bài toán 1. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k lớn tùy ý đều tồn tại k số nguyên dương liên tiếp gồm toàn hợp số.*

LỜI GIẢI. Gọi $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ là các số nguyên tố bất kỳ. Theo định lý Thặng dư Trung Hoa thì tồn tại số nguyên dương n lớn tùy ý sao cho

$$\begin{cases} n \equiv -1 \pmod{p_1} \\ n \equiv -2 \pmod{p_2} \\ \dots \\ n \equiv -k \pmod{p_k} \end{cases}$$

Vậy với mọi $i = 1, 2, \dots, k$ thì $p_i \mid n + i$, hơn nữa có thể chọn $n > p_k$, do đó $n + i$ đều là hợp số. □

Bài toán 2 (Problem E27, PEN, Hojoo Lee)**.** *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k lớn tùy ý đều tồn tại k số nguyên dương liên tiếp không là lũy thừa của một số nguyên dương nào khác.*

LỜI GIẢI. Gọi $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ là các số nguyên tố bất kỳ. Theo định lý Thặng dư Trung Hoa thì tồn tại số nguyên dương n lớn tùy ý sao cho

$$\begin{cases} n \equiv p_1 - 1 \pmod{p_1^2} \\ n \equiv p_2 - 2 \pmod{p_2^2} \\ \dots \\ n \equiv p_k - k \pmod{p_k^2} \end{cases}$$

Vậy với mọi $i = 1, 2, \dots, k$ thì $p_i \parallel n + i$, hơn nữa ta có thể chọn $n > p_k$, do đó $n + i$ đều là hợp số. Lại do lý luận trên, trong biểu diễn cơ sở của $n+i$ có thừa số p_i nên $n+i$ đều không phải là lũy thừa của một số nguyên nào. □

Bài toán 3 (VMO 2008)**.** *Cho $m = 2007^{2008}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên $n < m$ sao cho*

$$m \mid n(2n + 1)(5n + 2)?$$

LỜI GIẢI. Xét phân tích tiêu chuẩn

$$m = 2007^{2008} = 3^{4016} \cdot 223^{2008}.$$

Dễ dàng kiểm tra thấy $\gcd(i, j) < 3$ với mọi $i, j \in \{n, 2n + 1, 5n + 2\}$ nên ta có $m \mid n(2n + 1)(5n + 2)$ khi và chỉ khi xảy ra một trong các trường hợp sau:

1. $m \mid n$.

2. $m \mid 2n+1$.
3. $m \mid 5n+2$.
4. $3^{4016} \mid n$ và $223^{2008} \mid 2n+1$.
5. $3^{4016} \mid n$ và $223^{2008} \mid 5n+2$.
6. $3^{4016} \mid 2n+1$ và $223^{2008} \mid 5n+2$.
7. $3^{4016} \mid 2n+1$ và $223^{2008} \mid n$.
8. $3^{4016} \mid 5n+2$ và $223^{2008} \mid n$.
9. $3^{4016} \mid 5n+2$ và $223^{2008} \mid 2n+1$.

Trong mỗi trường hợp trên, theo định lý Thặng dư Trung Hoa, tồn tại duy nhất một giá trị n modulo m thỏa mãn trường hợp ấy. Do vậy có tất cả 9 số tự nhiên n thỏa mãn yêu cầu đề bài. $\square$

Thực chất bài toán VMO 2008 chỉ là trường hợp riêng của bài toán tổng quát sau.

Bài toán 4. *Cho số nguyên dương n có phân tích tiêu chuẩn*

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}.$$

Xét đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên. Nghiệm x_0 của phương trình đồng dư

$$P(x) \equiv 0 \pmod{n} \tag{1}$$

là lớp đồng dư $\overline{x_0} \in \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$ thỏa mãn $P(x_0) \equiv 0 \pmod{n}$. Khi đó, điều kiện cần và đủ để phương trình (1) có nghiệm là với mỗi $i = 1, 2, \ldots, s$, phương trình $P(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{a_i}}$ có nghiệm. Hơn nữa, nếu với mỗi $i = 1, 2, \ldots, s$, phương trình $P(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{a_i}}$ có r_i nghiệm modulo $p_i^{a_i}$ thì phương trình (1) có $r = r_1 r_2 \cdots r_s$ nghiệm modulo n.

LỜI GIẢI. Nếu một trong các phương trình $P(x) \equiv 0 \pmod{p_i^{a_i}}$ vô nghiệm thì hiển nhiên (1) vô nghiệm. Ngược lại, giả sử với mỗi $i = 1, 2, \ldots, s$, phương trình $P(x) \equiv 0$ $\pmod{p_i^{a_i}}$ có r_i nghiệm là $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{r_i}}$. Theo định lý Thặng dư Trung Hoa, với mỗi cách chọn bộ $(x_{1_{j_1}}, x_{2_{j_2}}, \ldots, x_{s_{j_s}})$, hệ đồng dư

$$\begin{cases} x \equiv x_{1_{j_1}} \pmod{p_1^{a_1}} \\ x \equiv x_{2_{j_2}} \pmod{p_2^{a_2}} \\ \ldots \\ x \equiv x_{s_{j_s}} \pmod{p_s^{a_s}} \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất $x_{(1_{j_1}, 2_{j_2}, \ldots, s_{j_s})}$ theo modulo n. Rõ ràng nghiệm này là nghiệm của phương trình (1). Vậy (1) có nghiệm.

Hơn nữa số nghiệm của (1) bằng số cách chọn các bộ $(j_1, j_2, \ldots, j_s)$ từ các tập có độ dài tương ứng là r_i với $i = 1, 2, \ldots, s$. Vậy nên $r = r_1 r_2 \cdots r_s$. $\square$

Bài toán trên không chỉ có ý nghĩa như một bài toán tổng quát. Thực tế, nó cho phép ta giới hạn số lượng modulo cần khảo sát trong việc giải các phương trình dạng như (1). Thật vậy, từ kết quả của bài toán này, ta chỉ cần xét trường hợp modulo n của phương trình đồng dư là lũy thừa của một số nguyên tố. Kết hợp với bổ đề Hensel, ta còn có thể giới hạn bài toán về trường hợp modulo n của bài toán là một số nguyên tố. Lúc này, các định lý của Lý thuyết đồng dư về số nguyên tố như định lý nhỏ Fermat, sự tồn tại của căn nguyên thủy, ... có thể áp dụng được. Nói chung, bài toán trên có ý nghĩa lớn trong việc nghiên cứu các phương trình đồng dư dạng (1).

Qua các bài toán trên, có lẽ các bạn đã nắm được tư tưởng cơ bản của các bài toán cần đến định lý Thặng dư Trung Hoa. Các bài toán được trình bày tiếp theo sẽ đòi hỏi sự khéo léo hơn trong việc sử dụng định lý Thặng dư Trung Hoa cũng như các kiến thức Số học khác.

Bài toán 5 (Taiwan TST 2002)**.** *Trong lưới điểm nguyên của mặt phẳng tọa độ Oxy, một điểm A với tọa độ $(x_0,\ y_0) \in \mathbb{Z}^2$ được gọi là nhìn thấy từ O nếu đoạn thẳng OA không chứa điểm nguyên nào khác ngoài O và A. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương lớn tùy ý, tồn tại hình vuông $n \times n$ có các đỉnh nguyên, hơn nữa tất cả các điểm nguyên nằm bên trong và trên biên của hình vuông đều không nhìn thấy được từ O.*

Lời giải. Dễ thấy rằngđiều kiện cần và đủ để $A(x_A,\ y_A)$ nhìn thấy được từ O là

$$\gcd(x_A,\ y_A) = 1.$$

Để giải quyết bài toán, ta sẽ xây dựng một hình vuông $n \times n$ với n nguyên dương tùy ý sao cho với mọi điểm nguyên $(x,\ y)$ nằm trong hoặc trên biên hình vuông đều không thể nhìn thấy được từ O. Thật vậy, chọn p_{i_j} là các số nguyên tố đôi một khác nhau với $0 \le i,\ j \le n$. Xét hai hệ đồng dư

$$\begin{cases} x \equiv 0 & \pmod{p_{0_1}p_{0_2}\cdots p_{0_n}} \\ x+1 \equiv 0 & \pmod{p_{1_1}p_{1_2}\cdots p_{1_n}} \\ x+2 \equiv 0 & \pmod{p_{2_1}p_{2_2}\cdots p_{2_n}} \\ \cdots & \\ x+n \equiv 0 & \pmod{p_{n_1}p_{n_2}\cdots p_{n_n}} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} y \equiv 0 & \pmod{p_{1_0}p_{2_0}\cdots p_{n_0}} \\ y+1 \equiv 0 & \pmod{p_{1_1}p_{2_1}\cdots p_{n_1}} \\ y+2 \equiv 0 & \pmod{p_{1_2}p_{2_2}\cdots p_{n_2}} \\ \cdots & \\ y+n \equiv 0 & \pmod{p_{1_n}p_{2_n}\cdots p_{n_n}} \end{cases}.$$

Theo định lý Thặng dư Trung Hoa thì tồn tại $(x_0,\ y_0)$ thỏa mãn hai hệ đồng dư trên. Khi đó, rõ ràng $\gcd(x_0+i,\ y_0+i) > 1$ với mọi $i,\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Điều đó có nghĩa là mọi điểm nằm trong hoặc trên biên hình vuông $n \times n$ xác định bởi điểm phía dưới bên trái là $(x_0,\ y_0)$ đều không thể nhìn thấy được từ O. Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét. Yêu cầu của bài toán trên khiến ta phải lựa chọn các bộ số dư và các modulo nguyên tố thích hợp trên một diện rộng hơn. Điều này khiến cho việc áp dụng định lý Thặng dư Trung Hoa trở nên không đơn giản như ba bài toán lúc đầu nữa.

Bài toán 6 (Problem E30, PEN, Hojoo Lee)**.** *Cho n là số nguyên dương lẻ và $n > 3$. Gọi k, t là các số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $kn+1$ và tn đều là số chính phương. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để n là số nguyên tố là $\min\{k,\ t\} > \dfrac{n}{4}$.*

LỜI GIẢI. Trước hết ta chứng minh điều kiện cần. Giả sử n là một số nguyên tố thì vì tn là số chính phương và $n \mid tn$ nên $n^2 \mid tn$, suy ra $n \mid t$, từ đó $t \geq n > \dfrac{n}{4}$. Hơn nữa, đặt $a^2 = kn+1$ thì $a^2 \equiv 1 \pmod{n}$, suy ra $a \equiv \pm 1 \pmod{n}$. Nhưng vì $a > 1$ nên $a \geq n-1$. Từ đó $kn + 1 \geq (n-1)^2 \Rightarrow k \geq n-2 \Rightarrow k > \dfrac{n}{4}$ (vì $n > 3$ nên $n - 2 > \dfrac{n}{4}$). Vậy điều kiện cần được chứng minh.

Ngược lại, giả sử $\min\{k,\, t\} > \dfrac{n}{4}$. Ta xét hai trường hợp.

- *Trường hợp 1.* n chỉ có một ước nguyên tố duy nhất. Do n lẻ nên $n = p^a$ với $p \geq 3$. Nếu a chẵn, ta lấy $t = 1 < \dfrac{n}{4}$, rõ ràng $tn = p^a$ là số chính phương, mâu thuẫn. Nếu a lẻ ≥ 3, ta lấy $t = p < \dfrac{p^a}{4}$, thì tn cũng là số chính phương và ta lại có mâu thuẫn. Vậy $a = 1$, suy ra $n = p$ là số nguyên tố.

- *Trường hợp 2.* n có ít nhất hai ước nguyên tố phân biệt. Khi đó ta có thể viết $n = p^a m$ trong đó p là số nguyên tố, m là số nguyên dương lẻ và $(m,\, p) = 1$. Theo định lý Thặng dư Trung Hoa, tồn tại số nguyên s sao cho

$$\begin{cases} s \equiv 1 & \pmod{p^a} \\ s \equiv -1 & \pmod{m} \end{cases}$$

  Từ đó $n \mid s^2 - 1$. Hơn nữa ta có thể chọn s sao cho $|s| \leq \dfrac{n}{2}$. Ta lại có $s \not\equiv 1 \pmod{m}$ nên $s \neq 1$ và $s \not\equiv -1 \pmod{p^a}$ nên $s \neq -1$, vậy tức là $s^2 \neq 1$. Do vậy nếu ta đặt $k = \dfrac{s^2-1}{n}$ thì k là số nguyên dương, hơn nữa $kn + 1 = s^2$ là số chính phương và

$$k = \frac{s^2-1}{n} < \frac{s^2}{n} \leq \frac{\frac{n^2}{4}}{n} = \frac{n}{4}.$$

  Mâu thuẫn với điều kịn $\min\{k,\, t\} > \dfrac{n}{4}$. Vậy trường hợp này không thể xảy ra. Tóm lại, n là số nguyên tố.

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

Bài toán 7 (Saint Petersburg City Mathematical Olympiad). *Cho $S = \{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n\} \subset \mathbb{N}^*$ và $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Biết rằng với mọi số nguyên dương k đều tồn tại một chỉ số $i \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ sao cho $a_i \mid P(k)$. Chứng minh rằng tồn tại một chỉ số i_0 nào đó sao cho $a_{i_0} \mid P(k)$ với mọi số nguyên dương k.*

LỜI GIẢI. Phản chứng. Giả sử với mỗi i đều tồn tại số nguyên dương b_i sao cho $a_i \nmid P(b_i)$. Gọi $\mathcal{P}(S) = \{p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_k\}$ là tập hợp tất cả các ước nguyên tố của các phần tử của S và m_i là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho tồn tại một số nguyên dương k_i thỏa mãn

$p_i^{m_i} \nmid P(k_i)$. Chú ý rằng các số m_i như thế luôn tồn tại. Theo định lý Thặng dư Trung Hoa thì tồn tại số nguyên dương K sao cho

$$\begin{cases} K \equiv k_1 \pmod{p_1^{m_1}} \\ K \equiv k_2 \pmod{p_2^{m_2}} \\ \dots \\ K \equiv k_s \pmod{p_s^{m_s}} \end{cases}$$

Ta có $p_i^{m_i} \nmid P(K)$ với mọi $i = 1, 2, \dots, s$. Hơn nữa, do giả thiết phản chứng, với mỗi i đều tồn tại b_i sao cho $a_i \nmid P(b_i)$ nên phải có một ước nguyên tố p_{i_j} nào đó của a_i sao cho $p_{i_j}^{r_{i_j}} \parallel a_i$ nhưng $p_{i_j}^{r_{i_j}} \nmid P(b_i)$. Do cách định nghĩa các m_i của ta ở trên, $m_{i_j} \le r_{i_j}$, mà $p_{i_j}^{m_{i_j}} \nmid P(K)$ nên $p_{i_j}^{r_{i_j}} \nmid P(K)$, dẫn đến $a_i \nmid P(K)$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Do đó điều giả sử là sai và bài toán được chứng minh. □

NHẬN XÉT. Nếu bài toán cho thêm giả thiết $a_1, a_2, \dots, a_n$ đôi một nguyên tố cùng nhau thì nó sẽ dễ đi rất nhiều vì ta có thể sử dụng trực tiếp định lý Thặng dư Trung Hoa. Lời giải trên dựa trên ý tưởng cơ sở là đặc biệt hóa bài toán về trường hợp $a_1, a_2, \dots, a_n$ đôi một nguyên tố cùng nhau bằng cách sử dụng phân tích tiêu chuẩn của một số tự nhiên, kết hợp với nguyên tắc cực hạn trong việc chọn các m_i. Bài toán còn có lời giải khác, không sử dụng đến định lý Thặng dư Trung Hoa mà vận dụng nhiều hơn các tính chất Số học của đa thức có hệ số nguyên. Các bạn hãy thử tìm cách giải ấy, vì với cách giải này, có một bài toán tổng quát khá thú vị.

Với định lý Fermat nhỏ và định lý Euler, từ Lý thuyết đồng dư của các số nguyên, ta có thể giải các bài toán liên quan đến lũy thừa. Tính chia hết của các lũy thừa có ảnh hưởng đến việc một số nguyên có là lũy thừa của một số nguyên nào khác hay không. Hai bài toán sau sẽ đưa ra các ví dụ về tình huống này cùng với việc giải quyết chúng bằng định lý Thặng dư Trung Hoa.

Bài toán 8 (IMO Shortlist). *Cho $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng tồn tại $b \in \mathbb{Z}$ sao cho tập $bS = \{ba_1, ba_2, \dots, ba_n\}$ chứa toàn những lũy thừa bậc lớn hơn 1 của một số nguyên nào đó.*

LỜI GIẢI. Trong bài toán này, ta quy ước nếu nói *"m là lũy thừa của một số nguyên dương"* thì lũy thừa ấy hiểu là lũy thừa thực sự, tức là lũy thừa bậc lớn hơn 1. Gọi $\mathcal{P}(S) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ là tập hợp tất cả các ước nguyên tố của các phần tử trong S. Thế thì mọi số $a_i \in S$ đều được viết dưới dạng

$$a_i = p_1^{r_{i_1}} p_2^{r_{i_2}} \cdots p_k^{r_{i_k}},$$

trong đó các số r_{i_j} có thể bằng 0. Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một số nguyên b có dạng $b = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$ sao cho ba_i là lũy thừa của một số nguyên. Thật vậy, điều kiện cần và đủ để ba_i là lũy thừa của một số nguyên là tồn tại một số nguyên tố q_i sao cho $q_i \mid s_j + r_{i_j}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, k$. Chọn $q_1, q_2, \dots, q_k$ là các số nguyên tố bất kỳ. Theo định lý Thặng dư Trung Hoa thì tồn tại s_1 thỏa mãn hệ đồng dư

$$\begin{cases} s_1 + r_{1_1} \equiv 0 \pmod{q_1} \\ s_1 + r_{2_1} \equiv 0 \pmod{q_2} \\ \dots \\ s_1 + r_{k_1} \equiv 0 \pmod{q_k} \end{cases}$$

Khi đó, rõ ràng $q_i \mid s_1 + r_{i_1}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, k$. Tương tự, tồn tại $s_2, s_3, \dots, s_k$ thỏa mãn các điều kiện giống như vậy. Lúc này, số $b = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. □

Bài toán 9 (Mathlinks)**.** *Cho m, n là hai số nguyên dương và $n \geq 2$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $\{1^n, 2^n, \dots, m^n\}$ lập thành hệ thặng dư đầy đủ modulo m là m là số square-free đồng thời* $\gcd(n, \varphi(m)) = 1$.

LỜI GIẢI. Điều kiện đủ là hiển nhiên. Ta sẽ chứng minh điều kiện cần. Trước hết ta chứng minh m phải là số square-free. Thật vậy, giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho $p^2 \mid m$, với $n \geq 2$, ta có

$$\left(\frac{m}{p}\right)^n \equiv m^n \equiv 0 \pmod{m},$$

nên $\{1^n, 2^n, \dots, m^n\}$ không lập thành hệ thặng dư đầy đủ modulo m, mâu thuẫn. Vậy m là số square-free.

Đặt $m = p_1 p_2 \cdots p_k$ thì $\varphi(m) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_k - 1)$. Theo định lý Thặng dư Trung Hoa, ta chỉ cần có $1^n, 2^n, \dots, (p_i - 1)^n$ lập thành hệ thặng dư đầy đủ modulo p_i với mọi $i = 1, 2, \dots, k$. Gọi g_i là căn nguyên thủy modulo p_i thì

$$\{1^n, 2^n, \dots, (p_i - 1)^n\} \equiv \{g_i^n, g_i^{2n}, \dots, g_i^{n(p_i-1)}\} \pmod{p_i}.$$

Nhưng $\{g_i^n, g_i^{2n}, \dots, g_i^{n(p_i-1)}\}$ lập thành hệ thặng dư đầy đủ modulo p_i khi và chỉ khi $(n, \varphi(p_i)) = 1$ hay $(n, p_i - 1) = 1$. Do đó $(n, \varphi(m)) = 1$.

Bài toán được chứng minh hoàn toàn. □

Bài toán 10 (Câu chuyện về số Carmichael)**.** *Ta đã biết định lý nhỏ Fermat: Nếu p là số nguyên tố và a là số nguyên dương sao cho $(a, p) = 1$ thì*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Tuy nhiên định lý đảo của định lý nhỏ Fermat này không đúng. Ví dụ như ta có thể kiểm tra được rằng với mọi số nguyên dương a mà $(a, 561) = 1$ thì

$$a^{560} \equiv 1 \pmod{561}.$$

Nhưng $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ không phải là số nguyên tố. Những số có tính chất đặc biệt như vậy gọi là số giả nguyên tố với mọi cơ sở, hoặc số Carmichael.

Ta có một định lý quan trọng về số Carmichael như sau: Nếu n là số giả nguyên tố với mọi cơ sở, tức là

$$\forall a \in \mathbb{N}^*,\ (a,\ n) = 1 \Rightarrow a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n},$$

thì $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ với p_i là các số nguyên tố sao cho $p_i - 1 \mid n$ với mọi i.

LỜI GIẢI. Xét phân tích tiêu chuẩn $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$. Gọi g_i là căn nguyên thủy modulo $p_i^{a_i}$. Theo định lý Thặng dư Trung Hoa thì với mỗi chỉ số i đều tồn tại số nguyên dương a sao cho

$$\begin{cases} a \equiv g_i \pmod{p_1^{a_1}} \\ a \equiv 1 \pmod{\dfrac{n}{p_1^{a_1}}} \end{cases}$$

Khi đó dễ thấy $(a, n) = 1$. Theo giả thiết trên thì $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, suy ra

$$g_i^{n-1} \equiv a^{n-1} \equiv 1 \pmod{p_i^{a_i}}.$$

Theo tính chất căn nguyên thủy thì

$$\varphi(p_i^{a_i}) = p_i^{a_i-1}(p_i - 1) \mid n - 1.$$

Nhưng $p_i^{a_i} \mid n$ nên $a_i = 1$ với mọi i. Vậy $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ và theo trên thì $p_i - 1 \mid n - 1$. Bài toán được chứng minh. $\square$

NHẬN XÉT. Bằng định lý Thặng dư Trung Hoa, ta đã xác định được dạng phân tích cơ sở của các số Carmichael. Tuy nhiên các số này rất hiếm. Hai số Carmichael đầu tiên là 561 và 41041.

3 Một số bài tập áp dụng

Bài tập 1 (Czech - Slovakia 1999)**.** Chứng minh rằng tồn tại dãy số nguyên dương $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ thỏa mãn điều kiện: Với mọi số nguyên dương k, $\{k + a_n\}_{n=0}^{\infty}$ chỉ chứa hữu hạn các số nguyên tố.

Bài tập 2 (France TST 2006)**.** Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $b^n + n \mid a^n + n$ với mọi số nguyên dương n. Chứng minh rằng $a = b$.

Bài tập 3 (MEMO 2009)**.** Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho với m, n là các số nguyên dương phân biệt và không lớn hơn k thì $k \nmid n^{n-1} - m^{m-1}$.

Bài tập 4.

(a) Chứng minh rằng tồn tại một cấp số cộng có độ dài hữu hạn lớn tùy ý sao cho mọi số hạng của cấp số cộng này đều là lũy thừa của một số nguyên nào đó.

(b) Chứng minh rằng không tồn tại một cấp số cộng vô hạn thỏa mãn điều kiện trên.

Bài tập 5 (Mathlinks)**.** Với mỗi số nguyên n, ký hiệu $\tau(n)$ là số các ước nguyên dương của n. Giả sử tồn tại hai đa thức f, g có hệ số nguyên thỏa mãn $\tau(f(n)) = \tau(g(n))$ với mọi số nguyên n. Chứng minh rằng $f(n) \equiv \pm g(n)$.

Bài tập 6. Với p là một số nguyên tố và n là một số nguyên dương, ta ký hiệu $f_p(n)$ là lũy thừa của p trong phân tích cơ sở của $n!$. Tìm tất cả các số nguyên tố p thỏa mãn điều kiện: Với mọi cặp số nguyên dương (m, a) đều tồn tại n sao cho $f_p(n) \equiv a \pmod{m}$.

4 Lời kết

Định lý Thặng dư Trung Hoa là một viên gạch quan trọng để xây nên tòa nhà Lý thuyết số và cả những lý thuyết cao cấp hơn của Toán học. Nó giúp ta giải quyết nhiều bài toán khó, làm cho nhiều bài toán vốn khó trở nên đơn giản hơn và đặc biệt, đôi khi cho ra những lời giải khá bất ngờ. Vượt ra ngoài biên giới Toán học, định lý Thặng dư Trung Hoa còn đóng vai trò quan trọng trong việc xây dựng Lý thuyết mật mã, trong đó tiêu biểu là Lý thuyết mật mã RSA. Hy vọng rằng qua bài viết này, các bạn đã nắm được một số vấn đề cơ bản liên quan đến định lý rồi từ đó, tìm hiểu, mở rộng thêm để định lý Thặng dư Trung Hoa trong tay chúng ta không chỉ đơn thuần là một công cụ giải toán mạnh mẽ mà còn là một nét đẹp Toán học.

Tài liệu tham khảo

[1] Hojoo Lee, Peter Vandendriessche, *Problems in Elementary Number Theory*, 2007.
[LINK: `http://www.problem-solving.be/pen/published/pen-20070711.pdf`]

[2] Titu Andreescu, Dorin Andrica, *Number Theory - Structures, Examples and Problems*, Birkhauser, 2009.

[3] Nguyễn Thọ Tùng, *Định lý Thặng dư Trung Hoa*, 2009.
[LINK: `http://tungtho.wordpress.com/2009/07/06/8/`]

[4] Từ điển mã nguồn mở Wikipedia.
[LINK: `http://en.wikipedia.org`]

[5] MathLinks Forum.
[LINK: `http://www.mathlinks.ro`]

RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

Lê Phúc Lữ
SV Đại học FPT thành phố Hồ Chí Minh

1 Suy nghĩ về việc học Toán Hình học phẳng hiện nay

Có khi nào chúng ta tự hỏi làm thế nào để giải một bài toán Hình học phẳng (HHP) chưa? Hay làm sao để có thể giỏi môn HHP, làm sao một bạn nào đó có thể giải nhanh gọn và ấn tượng một bài toán HHP, còn mình thì không? Đúng là những vấn đề này rất thường được đặt ra nhưng muốn trả lời một cách thỏa đáng và đầy đủ thì quả là điều không đơn giản!

Cũng giống như các dạng toán khác, để giải một bài toán HHP nào đó, chúng ta cũng cần phải đi từ giả thiết, thông qua các suy luận để tìm ra con đường đến kết luận hoặc một yêu cầu nào đó đặt ra của đề bài. Nhưng đặc biệt hơn, ở môn HHP, ngoài những tư duy logic thông thường, chúng ta còn cần phải có tư duy hình tượng, chúng ta cần phải tìm được quan hệ giữa các yếu tố hình học thông qua cái nhìn trực quan. Với đặc trưng đó, một mặt làm cho chúng ta có thể thấy được vấn đề đang cần giải quyết một cách rõ ràng hơn nhưng mặt khác cũng đòi hỏi ở chúng ta một khả năng tưởng tượng phong phú và sâu sắc nếu muốn học tốt dạng toán này.

Trên thực tế, trong những học sinh giỏi Toán, không có nhiều người giỏi HHP; khi tham gia các kỳ thi HSG, họ sẵn sàng bỏ đi một câu HHP nào đó để có thời gian dành cho những bài toán khác. Nhưng hầu như trong tất cả các kỳ thi, ta đều thấy sự góp mặt của một hoặc hai bài toán HHP với khoảng $15-25\%$ số điểm cả đề và như thế nó thực sự quan trọng!

Có một điều lạ là chúng ta học Hình học với thời gian dài hơn bất cứ dạng toán nào khác. Ngay từ lớp 6 chúng ta đã làm quen với các khái niệm điểm, đoạn thẳng, đường thẳng, góc, ... Đến lớp 7 chúng ta đã biết định lý là gì và học cách chứng minh chúng: chứng minh hai góc đối đỉnh thì bằng nhau, chứng minh tổng ba góc của tam giác là 180°, ... Và chúng ta đã học và rèn luyện chúng suốt cho đến bây giờ, thời gian ấy dài hơn việc học bất cứ một bài toán sử dụng đạo hàm, một bài giới hạn hay lượng giác nào đó. Thế nhưng, dường như Hình học luôn không là một lựa chọn hàng đầu khi bắt đầu cho lời giải của một đề thi HSG. Thậm chí nó còn là nỗi ám ảnh, lo sợ của nhiều bạn HSG Toán. Khi nhìn thấy một bài hình nào đó, họ cố đưa về Đại số càng nhanh càng tốt và sẵn sàng chấp nhận biến đổi, khai thác những biểu thức cồng kềnh trong khi bài toán đó có thể giải một cách nhẹ nhàng bằng hình học thuần túy.

Ta cũng không phủ nhận rằng học và giỏi ở HHP không phải là chuyện dễ, có thể cần năng khiếu và rèn luyện lâu dài, phải làm nhiều dạng bài tập để tích lũy cho mình những kinh nghiệm và sự nhạy bén cần thiết để khi đối mặt với một bài HHP nào đó mà không bị ngỡ ngàng, lúng túng. Chẳng hạn như có nhiều học sinh THCS có thể giỏi HHP hơn học sinh THPT là cũng bởi lí do năng khiếu này. Thế nhưng, chẳng may không có năng khiếu thì sao, chẳng lẽ lại bỏ cuộc? Tất nhiên là vẫn còn cách giải quyết, chúng ta hãy tham khảo một số hướng giải quyết và gợi ý rèn luyện sau đây để khắc phục và mong rằng những điều này có thể giúp các bạn rút ra được cho bản thân một ý tưởng mới nào đó cho việc học HHP trong thời gian tới.

Cũng phải nói thêm là đa số các bạn chưa giỏi HHP thường ghét phần này và tránh làm các bài toán về hình học; do đó, trước hết các bạn hãy làm quen và tiếp xúc nhiều với nó, và lâu dần các bạn có thể tìm thấy trong sự thú vị mà những bài toán HHP đem lại một sự tiến bộ nào đó cho mình.

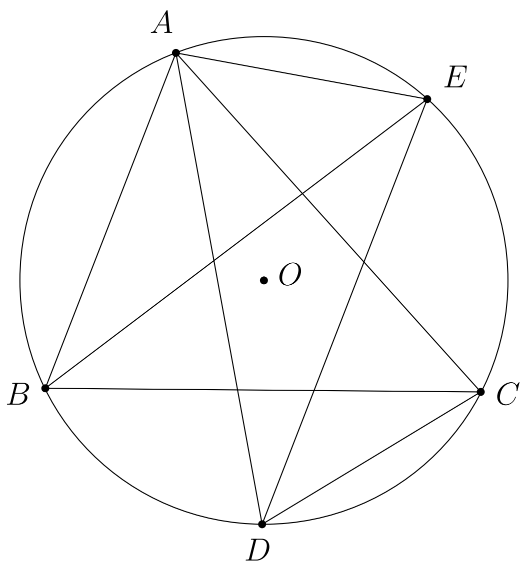
Chúng ta hãy suy nghĩ về các vấn đề sau.

- Làm sao để rút ngắn con đường đi từ giả thiết đến kết luận?
- Làm sao để tận dụng hết giả thiết đề bài cho?
- Làm sao đưa các kiến thức hình học sẵn có (như một phương pháp hoặc một định lý nào đó) cho việc giải một bài toán HHP?
- Làm cách nào để có thể kẻ đường phụ giải một bài toán?
- Làm sao để nâng cao hơn trình độ giải toán HHP nếu chúng ta đã có một năng lực nhất định?

Trước khi phân tích kĩ hơn các vấn đề trên, ta thử xem xét hai ví dụ nhỏ về các vấn đề thường gặp phải khi giải toán HHP.

Ví dụ 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có phân giác góc A cắt (O) ở D. Chứng minh rằng*

$$2AD > AB + AC.$$

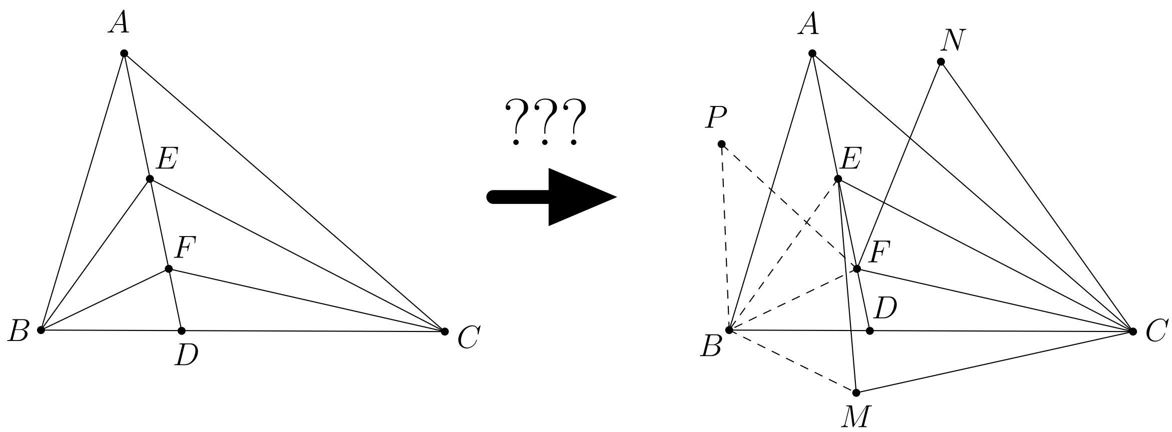


Khi đứng trước bài toán này, ta thường nghĩ đến các phương pháp sau.

- **Sử dụng phương pháp tọa độ:** Dựng hệ trục tọa độ với $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ và $A(a, b)$. Tính tọa độ điểm D rồi dùng bất đẳng thức.
- **Kẻ thêm các đường phụ:** Dựng $DE \parallel AB$ (như hình vẽ trên) rồi chứng minh rằng $AC = DE$, $BE = AD$ đưa về $AD + BE > AB + DE$.
- **Sử dụng định lý quen thuộc:** Dùng định lý Ptolemy có
$$AD \cdot BC = AB \cdot CD + AC \cdot BD,$$
mà $BC < BD + CD = 2BD$ nên $2AD > AB + AC$.
- **Sử dụng phương pháp lượng giác:** Tính toán trực tiếp ta có
$$2AD = 2R\sin\left(B + \frac{A}{2}\right) + 2R\sin\left(C + \frac{A}{2}\right) = 4R\cos\frac{B-C}{2},$$
suy ra $AB + AC = 2R(\sin B + \sin C) = 4R\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} < 2AD$.

Như vậy: *Với một đề bài ban đầu, ta đã có được nhiều ý tưởng riêng mà từ đó cho ta những hướng giải khác nhau; mỗi hướng đó đều có những điểm mạnh, điểm yếu nào đó nhưng chúng đều đưa ta đến điều phải chứng minh.*

Ví dụ 2. *Cho tam giác ABC có phân giác AD. Trên đoạn AD lấy hai điểm E, F sao cho $\angle ABE = \angle DBF$. Chứng minh rằng $\angle ACE = \angle DCF$.*



Ta có thể giải bài toán trên như sau: Gọi M là điểm đối xứng với F qua BC, N, P lần lượt là điểm đối xứng với E qua AC, AB. Chứng minh $\triangle BEM = \triangle BPF$ (c.g.c), suy ra $\triangle CEM = \triangle CNF$ (c.c.c). Từ đó dễ dàng suy ra $\angle ACE = \angle DCF$.

Cách giải là như vậy, tuy nhiên vấn đề đặt ra ở đây là:

- Tại sao lại biết lấy các điểm đối xứng?

- Tại sao lại biết xét các tam giác bằng nhau?
- Nếu không dựng đường phụ thì giải được không?

Trong phần sau chúng ta sẽ cùng tìm cách giải quyết các vấn đề trên. Lời giải của các ví dụ sẽ được trình bày chủ yếu là dựa trên hướng suy nghĩ chính, chú trọng phân tích các bước lập luận chứ không đi sâu vào xét các trường hợp của hình vẽ có thể xảy ra nhằm hạn chế sự phức tạp. Dù vậy trên thực tế, khi giải các bài toán HHP, chúng ta nên chú ý điều này, nên xét hết các trường hợp (vị trí các điểm, các tia; phân giác trong, ngoài; tam giác cân, không cân; đường tròn thực sự và suy biến, ...) để đảm bảo lời giải được đầy đủ và chính xác!

2 Một số phương pháp rèn luyện tư duy hình học và nâng cao kỹ năng giải toán HHP

2.1 Lựa chọn công cụ thích hợp để giải một bài toán HHP

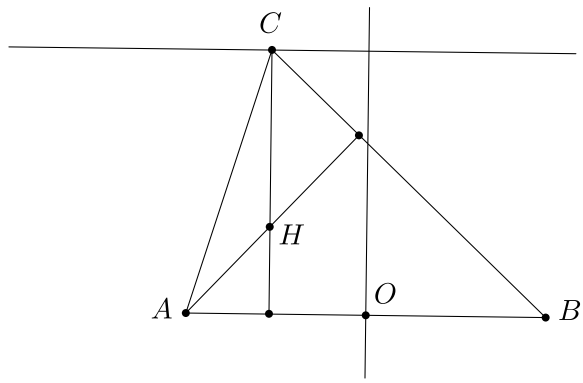
Chúng ta hãy thử ngẫm nghĩ lại, khi đang là học sinh THPT như hiện nay, chúng ta đã biết được hết thảy bao nhiêu phương pháp giải một bài toán HHP. Có thể chúng ta biết nhiều định lý, bổ đề nhưng đó cũng chưa thể gọi là một phương pháp theo nghĩa tổng quát. Ở đây, ta nói đến phương pháp là định hướng, là tư tưởng chính của lời giải; giải bằng cách nào chứ chưa đi sâu vào việc giải như thế nào. Xin nêu một số phương pháp cơ bản sau

- Phương pháp hình học thuần túy (quan hệ song song, vuông góc; tam giác đồng dạng, bằng nhau; tính chất của tam giác, đường tròn; các định lý hình học quen thuộc; các phép biến hình, ...).
- Phương pháp lượng giác (đưa yếu tố trong bài về lượng giác của các góc và biến đổi).
- Phương pháp vector (dùng vector trong chứng minh tính chất hình học hoặc dựng một hệ vector đơn vị để giải bài toán).
- Phương pháp đại số (đưa các yếu tố trong bài về độ dài cạnh và biến đổi).
- Phương pháp tọa độ (đưa giả thiết đã cho vào một hệ trục tọa độ và tìm tọa độ điểm, phương trình đường thẳng, đường tròn liên quan).

Trong đó, dễ thấy rằng mức độ tư duy hình học được thể hiện giảm dần qua thứ tự các phương pháp trên. Nếu chúng ta là một học sinh chưa giỏi HHP thì thường với các bài toán có giả thiết "thuận lợi" thì lập tức sử dụng tọa độ, điều đó tất nhiên có ích cho kỹ năng tính toán, biến đổi đại số của chúng ta nhưng nói chung không có lợi cho việc rèn luyện tư duy hình học. Và đa số các bài toán hình khó có thể sử dụng phương pháp này, chỉ cần một đường tròn hoặc một tâm đường tròn nội tiếp đã khiến cho việc dùng phương pháp tọa độ thật khó khăn rồi. Thế nhưng không phải nói vậy mà ta lại quên đi phương pháp đó được. Có vài bạn đã khá ở nội dung này thì lại không thích sử dụng tọa độ và cố đi tìm một cách giải thuần túy cho nó. Công việc này không phải lúc nào cũng đúng, nhất là đối với các kỳ thi HSG có thời gian "gấp rút" và số lượng bài toán cần giải được lại tương đối nhiều.

Chúng ta hãy thử nói về một bài toán đơn giản sau.

Ví dụ 3. *Cho đoạn thẳng AB cố định và đường thẳng d cố định song song với AB. Điểm C di động trên d. Tìm quỹ tích trực tâm tam giác ABC.*



Phân tích. Một số bạn thấy bài toán này có giả thiết thật đơn giản, chỉ có đoạn thẳng cố định, một điểm di động trên đường thẳng song song rồi tìm trực tâm; thêm nữa, bài toán này có vẻ quen thuộc nên họ chỉ vẽ hình ra và cố gắng kẻ đường phụ để giải. Thế nhưng, chắc chắn các bạn ấy sẽ khó mà tìm được một lời giải hình học thuần túy cho bài toán này khi mà trên thực tế quỹ tích của H là một đường parabol!

Nếu không cẩn thận vẽ hình trước nhiều lần để dự đoán quỹ tích để chắc chắn rằng đây không còn là một quỹ tích đường thẳng, đường cong thông thường mà mò mẫn đi tìm không đúng cách sẽ không đi đến kết quả muốn có. Bài toán này không khó nhưng nếu không lựa chọn đúng công cụ thì không thể nhanh chóng thành công trong việc giải nó được.

Lời giải. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ và đường thẳng d có phương trình $y = a$, $a \neq 0$, do C di động trên đó nên có tọa độ là $C(m, a)$, $m \in \mathbb{R}$. Ta sẽ tìm tọa độ trực tâm của tam giác ABC. Phương trình đường cao của tam giác ứng với đỉnh C là

$$x = m.$$

Phương trình đường cao ứng với đỉnh A là $(m-1)(x+1) + ay = 0$, hay

$$(m-1)x + ay + m - 1 = 0.$$

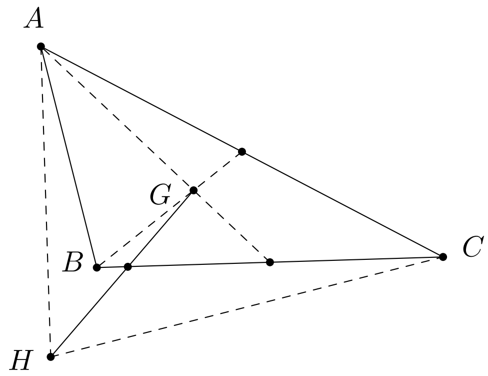
Từ đây suy ra tọa độ trực tâm của tam giác ABC là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (m-1)x + ay + m - 1 = 0 \\ x = m \end{cases}.$$

Giải hệ này ta tìm được $x_H = m$ và $y_H = \dfrac{1-m^2}{a}$. Suy ra $y_H = \dfrac{1-x_H^2}{a}$.

Vậy quỹ tích của H là parabol có phương trình $y = \dfrac{1-x^2}{a}$. □

Ví dụ 4. *Cho tam giác ABC có cạnh BC cố định, A di động trong mặt phẳng. Gọi G, H lần lượt là trọng tâm, trực tâm của tam giác. Biết rằng đoạn GH cắt BC tại trung điểm của GH, tìm quỹ tích của A.*



PHÂN TÍCH. Ta thấy giả thiết của bài toán không phức tạp nhưng điều kiện GH cắt BC tại trung điểm của GH quả thật hơi khó vận dụng; ta cũng có thể hiểu đơn giản hơn là trung điểm của GH thuộc BC nhưng vậy thì cũng không đem lại nhiều gợi ý cho lời giải bài toán. Và nếu đứng trước những bài toán có giả thiết đơn giản nhưng khó vận dụng như thế thì hãy thử nghĩ đến phương pháp tọa độ. Khi đó, dù các tính chất hình học chưa được thể hiện đầy đủ nhưng các điều kiện hình học thì sẽ được đảm bảo chặt chẽ hơn.

Cũng tiến hành lựa chọn một hệ trục tọa độ thích hợp tương tự như trên rồi tính tọa độ các điểm G, H và viết phương trình các đường thẳng cần thiết, đặt vào điều kiện của bài toán, ta sẽ tìm được quỹ tích của điểm A chính là một đường hypebol. Các bạn thử giải lại bài toán này với việc giữ nguyên các giả thiết ban đầu, chỉ thay trực tâm H bằng tâm đường tròn ngoại tiếp O, các công việc nói chung cũng được tiến hành tương tự nhưng dù vậy ta cũng có thêm một khám phá mới. Và nếu được, hãy giải lại hai bài toán vừa rồi bằng phương pháp hình học thuần túy dựa trên định nghĩa các đường conic, tìm tiêu điểm và đường chuẩn của chúng! Đây là một vấn đề khá thú vị nhưng cũng khá khó!

Ta hãy so sánh hai phương pháp giải bài toán sau để rút ra tầm quan trọng của việc lựa chọn phương pháp phù hợp giải các bài toán HHP.

Ví dụ 5. *Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác ABC dựng các điểm D, E, F sao cho các tam giác BCD, CAE, ABF là các tam giác đều. Chứng minh hai tam giác ABC và DEF có cùng trọng tâm.*

LỜI GIẢI 1. *Sử dụng phương pháp vector* (khá nhẹ nhàng và không cần tốn nhiều thời gian để nghĩ ra cách giải này).

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PF}\\ &= \left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}\right)+\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{PF}\right).\end{aligned}$$

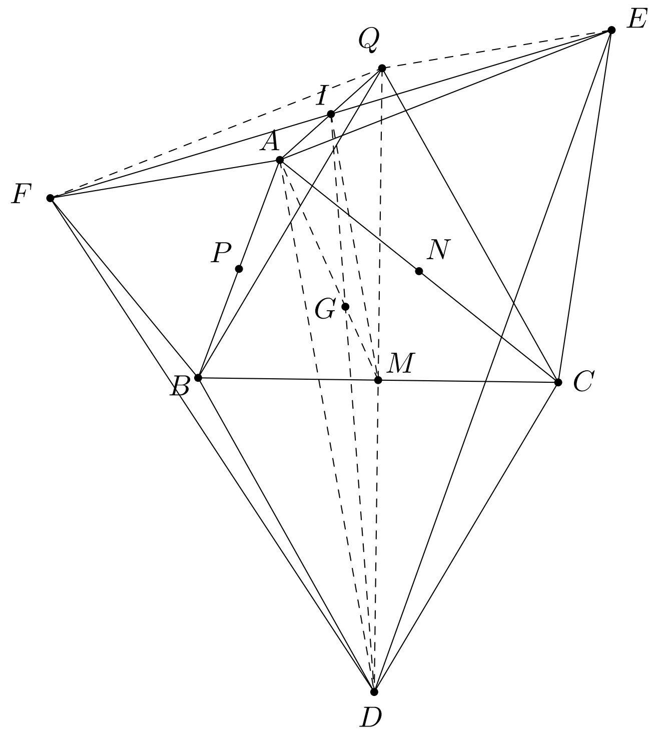
Dễ thấy

$$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{0}$$

và $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{0}$ theo định lý con nhím nên $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{0}$.

Vậy hai tam giác ABC và DEF có cùng trọng tâm. □

LỜI GIẢI 2. *Sử dụng hình học phẳng thuần túy* (dựng nhiều đường phụ, hướng suy nghĩ hơi thiếu tự nhiên và đòi hỏi có kinh nghiệm về các bài toán có giả thiết tương tự như thế này).



Gọi I là trung điểm EF và Q là điểm đối xứng với D qua BC, khi đó $\triangle BCQ$ cũng là tam giác đều. Ta thấy phép quay tâm B góc quay $60°$ biến C thành Q, biến A thành F nên $\triangle ABC = \triangle FBQ$. Tương tự $\triangle ABC = \triangle EQC$. Từ đây ta có

$$\triangle FBQ = \triangle EQC.$$

Suy ra $FQ = AC = AE$, $QE = AB = AF$ và tứ giác $AEQF$ là hình bình hành. Do đó I chính là trung điểm của AQ, mà M là trung điểm của QD nên IM chính là đường trung bình của tam giác QAD, suy ra $IM = \frac{1}{2}AD$ và $IM \parallel AD$.

Gọi G là giao điểm của AM và ID thì theo định lý Thalès

$$\frac{GM}{GA} = \frac{GI}{GD} = \frac{IM}{AD} = \frac{1}{2}.$$

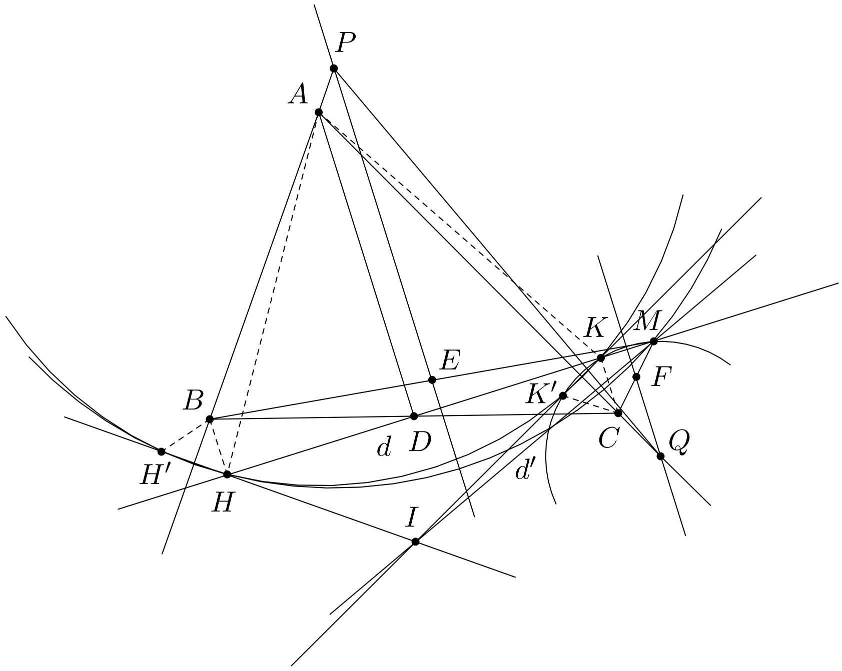
Hơn nữa G cùng thuộc hai trung tuyến của tam giác ABC và DEF nên nó chính là trọng tâm chung của hai tam giác ABC và DEF. Từ đây ta có điều phải chứng minh. □

Trong việc giải các bài toán bằng phương pháp tọa độ, ta cũng cần chú ý đến việc chọn các hệ trục tọa độ hợp lý: tọa độ các điểm, phương trình đường thẳng cần viết đơn giản; có nhiều liên hệ với các điểm đã cho trong giả thiết, tận dụng được các yếu tố đường song song, vuông góc, trung điểm do hình cần dựng đơn giản, ... Chẳng hạn chúng ta có bài toán sau.

Ví dụ 6. *Cho tam giác ABC có D là trung điểm của cạnh BC. Gọi d là đường thẳng qua D và vuông góc với đường thẳng AD. Trên đường thẳng d lấy một điểm M bất kỳ. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng MB, MC. Đường thẳng qua E vuông góc với d cắt đường thẳng AB tại P, đường thẳng qua F vuông góc với d cắt đường thẳng AC tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng qua M, vuông góc với đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên đường thẳng d.*

PHÂN TÍCH. Ta thấy trong đề bài này các giả thiết đưa ra chỉ xoay quanh các yếu tố như trung điểm, đường vuông góc, đoạn thẳng, ... nhưng vì có hơi nhiều yếu tố như vậy nên việc liên kết chúng lại và đảm bảo sử dụng được tất cả các giả thiết quả là điều không dễ dàng. Chúng ta có một lời giải bằng cách sử dụng phương pháp hình học thuần túy nhờ kiến thức trục đẳng phương như sau nhưng nó hơi phức tạp vì cần phải kẻ nhiều đường phụ.

LỜI GIẢI.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên đường thẳng d. Do D là trung điểm của BC nên $DH = DK$, suy ra AD là trung trực của HK, do đó $AH = AK$.

Gọi (ω) là đường tròn tâm A đi qua H và K. Gọi H', K' lần lượt là các điểm đối xứng với H, K qua các đường thẳng AB, AC. Khi đó dễ thấy H', K' thuộc (ω). Giả sử các đường thẳng HH', KK' cắt nhau tại I thì I là điểm cố định. $(*)$

Ta có $PE \parallel BH$ (cùng vuông góc với d) mà PE đi qua trung điểm của MB nên cũng qua trung điểm của MH, suy ra PE là trung trực của MH và vì thế $PH = PM$.

Gọi (ω_1) là đường tròn tâm P đi qua H và M, do tính đối xứng nên H' cũng thuộc (ω_1). Hoàn toàn tương tự, ta cũng có QF là trung trực của MK; nếu gọi (ω_2) là đường tròn tâm Q đi qua K và M thì K' thuộc (ω_2). Ta lại có

- (ω), (ω_1) cắt nhau tai H, H' nên HH' là trục đẳng phương của (ω), (ω_1).
- (ω), (ω_2) cắt nhau tai K, K' nên KK' là trục đẳng phương của (ω), (ω_2).

Mặt khác, M cùng thuộc (ω_1), (ω_2) và P, Q lần lượt là tâm của (ω_1), (ω_2) nên đường thẳng d' qua M, vuông góc với PQ chính là trục đẳng phương của (ω_1), (ω_2). Từ đó suy ra HH', KK', d' đồng quy tại tâm đẳng phương của ba đường tròn (ω), (ω_1), (ω_2). $(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra d' đi qua I là điểm cố định.

Vậy đường thẳng qua M, vuông góc với đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên đường thẳng d. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ta có thể sử dụng phương pháp tọa độ để giải nhẹ nhàng bài toán trên vì việc xác định tọa độ trung điểm và viết phương trình đường vuông góc cho các biểu thức đơn giản, đó cũng chính là đáp án chính thức của đề thi HSG quốc gia này. Thế nhưng, cũng không phải cách chọn trục tọa độ nào cũng cho ta một lời giải nhanh gọn. Nếu chọn hệ trục tọa độ gốc D và trục hoành trùng với BC theo suy nghĩ thông thường thì lời giải sẽ dài và phức tạp hơn so với chọn gốc tọa độ là D và trục hoành là đường thẳng d. Các bạn hãy thử với cách này sẽ thấy ngay sự khác biệt đó!

Qua các ví dụ vừa nêu, ta thấy rằng *việc lựa chọn công cụ thích hợp để giải các bài toán hình học cũng là một yếu tố quan trọng để có thể đi đến kết quả một cách đơn giản và ngắn gọn hơn, nhiều khi đó cũng là cách duy nhất có thể giải quyết được vấn đề.*

2.2 Về việc tận dụng giả thiết của đề bài

Trong một bài toán thông thường, các giả thiết đưa ra, dù ít hay nhiều, dù gián tiếp hay trực tiếp, thì ở trong bất cứ lời giải nào của bài toán đều được tận dụng. Một bài toán càng có ít giả thiết thì nói chung việc sử dụng chúng càng đơn giản bởi không phải dễ dàng gì cho việc đưa hàng loạt giả thiết, yếu tố, các quan hệ hình học vào lời giải của mình. Mỗi giả thiết đưa ra đều có mục đích và tầm quan trọng nhất định; nhiệm vụ của chúng ta là xác định xem cái nào là quan trọng nhất và làm sao để tận dụng và liên kết tất cả vào trong lời giải bài toán của mình!

Trước hết, ta hãy đặt câu hỏi: *"giả thiết đó nói lên điều gì?"*, chẳng hạn cho giả thiết: *tam giác ABC có M, N, P là trung điểm các cạnh*, điều đó gợi cho ta suy nghĩ rằng

- Các cạnh của $\triangle MNP$ song song và bằng nửa các cạnh của $\triangle ABC$ tương ứng;
- Tam giác MNP đồng dạng với tam giác ABC với tỉ số đồng dạng là $\frac{1}{2}$;
- Diện tích tam giác MNP bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC;
- Phép vị tự tâm G – trọng tâm tam giác ABC với tỉ số $-\frac{1}{2}$ biến tam giác ABC đã cho thành tam giác MNP;
- Hai tam giác này có cùng trọng tâm;
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP chính là đường tròn Euler nên nó cũng đi qua chân các đường cao và trung điểm các đoạn nối trực tâm và đỉnh của tam giác ABC;
- Trực tâm của tam giác MNP cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, ...

Có thật nhiều suy nghĩ từ một giả thiết và nếu ta bỏ sót một trong số chúng thì có thể không giải được bài toán vì đó chính là chìa khóa vấn đề (tất nhiên cũng không phải dùng hết các ý). Chúng ta càng có được nhiều liên tưởng khi kiến thức hình học của chúng ta càng nhiều và kinh nghiệm càng sâu sắc, điều đó đòi hỏi ta cần làm 1 số lượng nhất định các bài toán HHP.

Tiếp theo ta lại hỏi: *"vậy nếu chưa có nhiều kinh nghiệm thì sao?"*, tất nhiên cũng có một cách nhỏ này giúp ta có thể thấy trực quan hơn giả thiết đó. Chúng ta hãy thử đi tìm cách dựng các "giả thiết" đó bằng thước và compa, nhất là với các giả thiết có phần phức tạp, điều này nhiều lúc cũng rất có ích. Chúng ta thử tìm hiểu rõ điều đó qua bài toán sau.

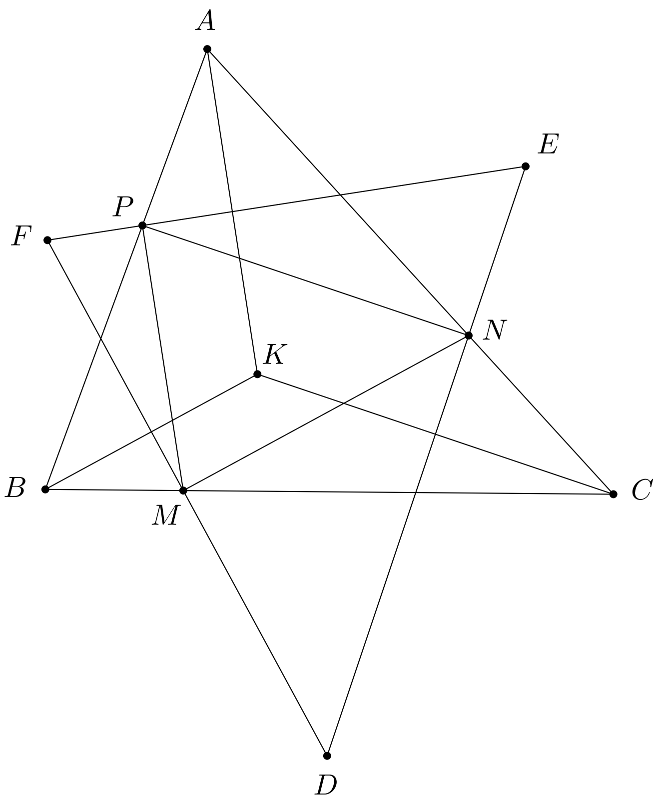
Ví dụ 7. *Cho tam giác ABC có K là điểm nằm trong tam giác và thỏa*

$$\angle KAB = \angle KBC = \angle KCA.$$

Gọi D, E, F lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác KBC, KCA, KAB. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của BC, FD; CA, DE; AB, EF. Chứng minh rằng các tam giác ABC, DEF, MNP đồng dạng với nhau.

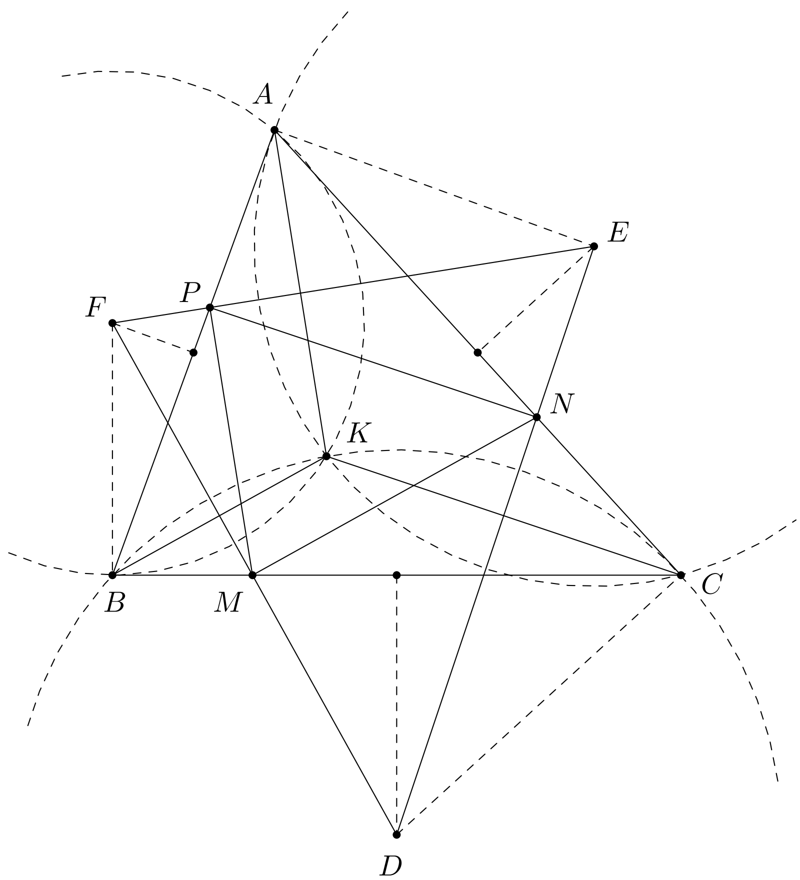
PHÂN TÍCH. Ta thấy điểm K cho như trên là một giả thiết quen thuộc (điểm Brocard) nhưng nói chung các tính chất ta đã biết về nó không phục vụ nhiều cho điều cần chứng minh ở đây. Nếu như ta vẽ 1 hình đơn điệu như bên dưới thì việc giải và định hướng cho bài toán sẽ không đơn giản. Ta sẽ thử dùng phép dựng hình xác định điểm K trong giả thiết bằng thước và compa để xem thử nó có tính chất gì đặc biệt không. Ta dễ dàng có được phép dựng hình sau.

- Dựng trung trực của đoạn AB và đường thẳng vuông góc với BC tại B, gọi F là giao điểm của hai đường thẳng trên.
- Dựng đường tròn tâm F bán kính FA.
- Tương tự, dựng điểm E là giao điểm của trung trực AC và đường thẳng vuông góc với AC tại A.
- Dựng đường tròn tâm E, bán kính EA.
- Giao điểm của hai đường tròn trên chính là điểm K cần tìm.



Từ việc tìm cách dựng cho điểm K, ta cũng đã có thêm trên hình một số đường phụ cần thiết, bài toán đã rõ ràng hơn nhiều. Với những gợi ý có được từ hình vẽ ta vừa dựng, có thể giải quyết được bài toán này theo cách như sau.

Hướng dẫn giải.



- Chứng minh $AK \perp EF$, $BK \perp DE$.
- Chứng minh $\angle AKB + \angle DFE = 180°$.
- Chứng minh $\angle AKB + \angle ABC = 180°$.
- Suy ra $\triangle ABC \sim \triangle EFD$ (g.g).
- Suy ra tứ giác $BMPF$ nội tiếp và $MP \perp EF$.
- Chứng minh $\angle MPN = \angle FED$.
- Chứng minh $\triangle MPN \sim \triangle FED$ (g.g).

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

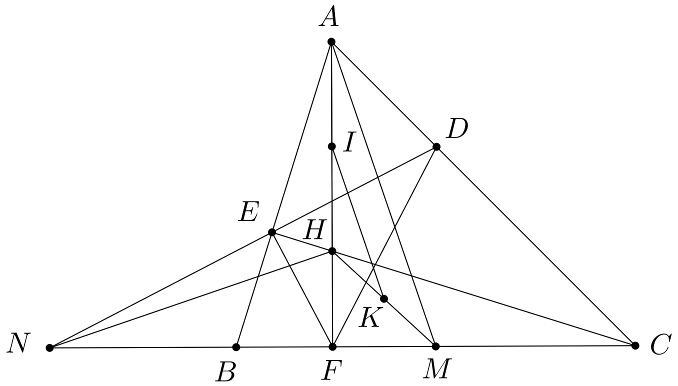
Còn đối với các bài toán mà hình vẽ không thể dựng được bằng thước và compa thì sao, chẳng hạn như định lý Morley: *"Cho tam giác ABC. Các đường chia ba các góc của tam giác cắt nhau tại các điểm M, N, P. Khi đó ta có MNP là tam giác đều."*

Ta biết rằng việc chia ba một góc không thể giải được bằng thước và compa nên cách tìm gợi ý từ việc dựng hình không thể thực hiện được. Và có lẽ vì vậy mà đến sau hơn 50 năm xuất hiện, bài toán nổi tiếng này mới có một lời giải HHP thuần túy rất đẹp và hoàn chỉnh. Nhưng đó là câu chuyện của những bài toán nổi tiếng thế giới; trên thực tế, nếu cần thiết, chúng ta luôn có thể dùng cách dựng hình này cho việc tìm gợi ý cho bài toán và tận dụng được giả thiết của đề bài.

2.3 Về việc rút ngắn con đường đi từ giả thiết đến kết luận

Cũng tương tự phần trên, ta cũng đặt các câu hỏi: *"kết luận đó từ đâu mà ra?"*, *"những điều đó có liên hệ gì đến giả thiết của chúng ta có?"*. Chúng ta cũng tiến hành đi ngược lên từ điều cần chứng minh, tìm ra các điều cần phải có để có được kết luận.

Ví dụ 8. *Cho tam giác ABC có đường cao BD và CE cắt nhau tại H. M là trung điểm của BC, N là giao điểm của DE và BC. Chứng minh rằng NH vuông góc với AM.*



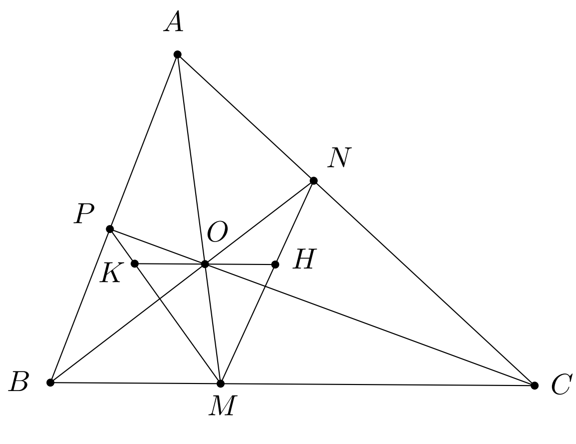
PHÂN TÍCH. Từ giả thiết ta dễ dàng thấy rằng tứ giác $DEFM$ nội tiếp trong đường tròn Euler của tam giác ABC nên

$$\overline{NE} \cdot \overline{ND} = \overline{NF} \cdot \overline{NM}.$$

Mặt khác D, E nằm trên đường tròn đường kính AH; còn F, M nằm trên đường tròn đường kính HM nên N nằm trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính MH và đường tròn đường kính AH. Đến đây ta chưa có ngay kết quả $NH \perp AM$ được.

Ta thấy thiếu một vài yếu tố trong hình, một yếu tố nào đó cần có để kết nối các điều ta vừa phân tích được từ giả thiết đến kết luận của bài, yếu tố đó vừa phải đảm bảo rằng có liên quan đến NH trong các phương tích trên, vừa đảm bảo rằng có liên hệ đến đoạn AM. Và việc chọn hai điểm phụ dựng thêm là trung điểm AH và HM (I là trung điểm AH, K là trung điểm HM) cũng là điều tự nhiên vì khi đó IK là đường trung bình của tam giác HAM, I và K cũng là tâm của các đường tròn vừa nêu ở trên nên trục đẳng phương NH vuông góc với đường nối hai tâm đó. □

Ví dụ 9. *Cho tam giác ABC có O nằm trong tam giác. Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh đối diện lần lượt tại M, N, P. Qua O kẻ đường thẳng song song với BC cắt MN, MP lần lượt tại H, K. Chứng minh rằng $OH = OK$.*



PHÂN TÍCH. Ta thấy các giả thiết trong bài cho rất "thoáng" nhưng kết luận có được cũng thật thú vị. Rõ ràng, O là điểm nằm bất kỳ trong tam giác thì không thể có một tính chất nào đặc biệt có thể khai thác; do đó, ta sẽ đi vào phân tích các tỉ số có được từ đường thẳng song song đã kẻ. Nếu chúng ta đã quen với các bài toán về tỉ số này thì ta thấy có một số công cụ hỗ trợ cho chúng ta như tỉ số diện tích, tỉ số đồng dạng, định lý Thalès, định lý Menelaus, định lý Céva, ... Trước tiên, đường thẳng song song trong đề bài gợi ý cho ta sử dụng định lý Thales để đưa các đoạn thẳng OH, OK về các đoạn thẳng "dễ giải quyết" hơn. Ta có

- $\dfrac{OH}{BM} = \dfrac{ON}{BN}$, suy ra $OH = \dfrac{ON}{BN} \cdot BM$.
- $\dfrac{OK}{CM} = \dfrac{OP}{CP}$, suy ra $OK = \dfrac{OP}{CP} \cdot CM$.

Do đó, muốn có $OH = OK$ thì $\dfrac{ON}{BN} \cdot BM = \dfrac{OP}{CP} \cdot CM$, hay

$$\frac{ON}{BN} \cdot \frac{CP}{OP} = \frac{CM}{BM}.$$

Nếu cứ biến đổi các tỉ số này tiếp tục thì dần dần, ta sẽ bị ngộ nhận với kết luận có sẵn; thay vào đó, ta sẽ đưa các tỉ số đoạn thẳng này về tỉ số diện tích các tam giác.

- Hai tam giác có cùng cạnh đáy thì tỉ số diện tích bằng tỉ số chiều cao.
- Hai tam giác có cùng chiều cao thì tỉ số diện tích bằng tỉ số cạnh đáy.

Ta có thể dễ dàng thay các tỉ số trên có liên quan ở trên như sau.

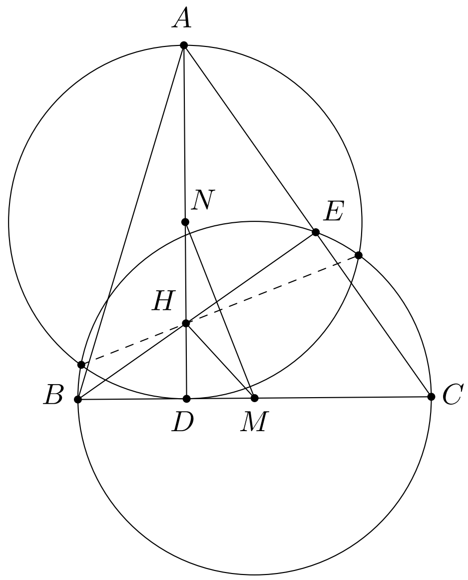
$$\frac{ON}{BN} = \frac{S_{AON}}{S_{ABN}} = \frac{S_{CON}}{S_{CBN}} = \frac{S_{AON} + S_{CON}}{S_{ABN} + S_{CBN}} = \frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}, \quad \frac{OP}{CP} = \frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}.$$

Do đó

$$\frac{ON}{BN} \cdot \frac{CP}{OP} = \frac{S_{AOC}}{S_{ABC}} \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{AOB}} = \frac{S_{AOC}}{S_{AOB}} = \frac{CM}{BM}.$$

Đến đây kết luận đã hoàn toàn rõ ràng. □

Ví dụ 10. *Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD thỏa $AD = BC$. Gọi H là trực tâm tam giác, M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Chứng minh rằng $HN = HM$.*



Phân tích. Ta thấy trong giả thiết của bài toán có hai điều đáng chú ý là: đường cao AD của tam giác ABC bằng BC và M, N lại chính là trung điểm của hai cạnh ấy. Ta có thể suy nghĩ rằng:

- Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AD \cdot BC = \dfrac{BC^2}{2}$.
- Sử dụng lượng giác, ta có $BC = BD + CD = AD\cot B + AD\cot C = AD(\cot B + \cot C)$, từ đó suy ra $\cot B + \cot C = 1$ và $\cot A + \cot B \cot C = 1$.
- Tứ giác $ANMC$ có hai cạnh đối AN và CM bằng nhau và đường thẳng qua hai cạnh đó vuông góc với nhau nên có thể có một số tính chất đặc biệt.
- Do M, N đều là trung điểm của BC, AD nên nếu ta vẽ các đường tròn đường kính BC, AD thì M, N chính là tâm của của các đường tròn này. Hơn nữa, $AD = BC$ nên hai đường tròn này bằng nhau và M, N đối xứng nhau qua dây chung ...

Và còn nhiều điều có thể suy luận ra từ giả thiết đó, nhưng mục đích của ta là tìm một cách giải hợp lý và đơn giản. Ta thấy suy luận thứ 4 ở trên có thể sử dụng được do có xuất hiện sự đối xứng giữa các yếu tố và giả thiết được sử dụng một cách triệt để hơn. Do đó, ta thử đi theo con đường đó bằng cách dựng thêm hai đường tròn. Đến đây, có vẻ như giả thiết trực tâm H chưa được dùng đến nhưng vẫn chưa có một con đường rõ ràng chỉ cho ta cách sử dụng nó. Ta hãy dừng việc phân tích giả thiết lại và xem đến kết luận: *"chứng minh $HM = HN$".*

Kết luận này cũng có thể có được từ nhiều hướng, chẳng hạn như từ tỉ số giữa các cạnh, từ hai tam giác bằng nhau, từ hai hệ thức lượng giác bằng nhau, hay từ 1 phép biến hình nào đó.

Tất nhiên, với các đòi hỏi cần thiết để đi đến kết luận đó, ta có thể hình thành nhiều ý tưởng cho lời giải nhưng do đã chọn cách dựng đường tròn nên ta thử bám theo tính đối xứng của hai đường tròn. Muốn có $HM = HN$ thì H phải nằm trên trung trực của MN, mà M, N đã đối xứng nhau qua dây chung nên H phải nằm trên dây chung đó! Đến đây, ta thấy có thể đã gần liên kết được các dữ kiện. Ta tiến thêm một chút nữa! Như vậy, muốn có dây chung thì phải gọi tên hai giao điểm của hai đường tròn, nhưng trên thực tế hai giao điểm đó nằm quá rời rạc, khó mà chứng minh chúng và H thẳng hàng. Ta sẽ không chọn cách này. Thử nhìn dây chung đó ở một phương diện khác, không phải là điểm chung của hai đường tròn thuần túy nữa mà là trục đẳng phương của hai đường tròn, như thế muốn H nằm trên đó thì H phải có cùng phương tích đến hai đường tròn. Nhưng phương tích đó có dễ dàng tính được không? Với đường tròn đường kính AD thì quá đơn giản, đó chính là $HA \cdot HD$; còn với đường tròn đường kính BC thì chưa có, ta có thể vẽ qua H một dây cung của đường tròn này gắn với một đầu mút là B hoặc C, ta thử vẽ dây BE và phương tích có được là $HB \cdot HE$, giờ chỉ cần chứng minh $HA \cdot HD = HB \cdot HE$ nữa là xong!

Hơn nữa, nếu ta vẽ như thế thì BE phải vuông góc với AC do H là trực tâm tam giác; mà E thuộc đường tròn đường kính BC nên BE vuông góc với EC. Do đó, hóa ra A, E, C thẳng hàng hay E chính là chân đường cao của tam giác ABC, cộng với H là trực tâm thì đẳng thức cần có là $HA \cdot HD = HB \cdot HE$ không có khó khăn gì nữa. Và các mắc xích trên đã được nối liền, bài toán đã được giải quyết. Việc phải làm còn lại chỉ là trình bày lời giải mà thôi. □

Rõ ràng bài toán này không quá khó và vẫn còn nhiều cách giải khác cho nó nữa mà chúng ta có thể thấy ngay rằng tọa độ cũng là một cách tốt. Thế nhưng, nếu có đủ thời gian, chúng ta hãy phân tích bài toán từ từ để tìm được một lời giải hình học thuần túy thật đẹp như trên!

Có thể nói trước những bài toán HHP khó, các công việc phân tích bài toán như ở trên là rất cần thiết. Đó là cách chúng ta mò mẫn, dò tìm cách giải bài toán, cách có được đpcm từ những yếu tố cho trước thông qua việc kết nối các "mắc xích" liên hệ giữa chúng.

Ta hiểu "mắc xích" ở đây có thể là "một bước xuống dòng", "một dấu suy ra ($\Rightarrow$), tương đương ($\Leftrightarrow$) ", "một phép biến đổi", ... nào đó; tất nhiên là không dễ dàng gì mà ta có được chúng. Chúng ta phân tích được càng nhiều điều từ giả thiết và kết luận càng tốt, bởi có như thế thì việc dùng những liên tưởng, những phán đoán, những kinh nghiệm cho việc viết tiếp những "mắc xích" quan trọng vào giữa bài nhằm hoàn chỉnh lời giải sẽ dễ dàng hơn. Đó chính là tầm quan trọng của việc *rút ngắn con đường đi từ giả thiết đến kết luận.*

2.4 Dựng thêm yếu tố phụ trong các bài toán hình học

Ta thấy đa số các ví dụ trên đều có đưa thêm các yếu tố phụ vào, đó có thể là một giao điểm, một trung điểm, chân đường vuông góc, đường thẳng song song hay thậm chí là cả một đường tròn. Yếu tố phụ chính là cầu nối giữa giả thiết và kết luận, nó liên kết các yếu tố rời rạc có sẵn lại và giúp tận dụng triệt để cũng như phát triển giả thiết đã cho thành nhiều kết quả, cuối cùng đi đến được kết luận. Nếu không có chúng, ta có thể giải bài toán rất khó khăn hoặc không thể giải được.

Có thể nói rằng nếu một học sinh đã biết cách kẻ đường phụ trong việc giải các bài HHP thì đó không thể nào là một học sinh kém ở phần này được. Muốn kẻ được đường phụ, đòi hỏi chúng ta phải có sự quan sát, đánh giá vấn đề tốt; có một kinh nghiệm sâu sắc và khả năng phân tích, sáng tạo ở mức độ nhất định.

Việc gọi tên cho một điểm chưa có tên trong hình vẽ trên thực tế cũng là một chuyện không đơn giản dù điểm đó đã có sẵn nói chi đến việc dựng thêm một hoặc nhiều yếu tố phụ, những cái không hề có trước đó.

Điều này cũng không khó hiểu vì khi làm các bài toán Đại số – Giải tích, chúng ta thường quen với các lập luận logic có sẵn, mọi thứ xuất hiện đều phải có một lí do rõ ràng. Còn HHP thì không phải như vậy, nếu cứ cứng nhắc cho rằng một đường phụ nào đó muốn kẻ được đều cần phải có một lập luận logic nào đó cho nó thì khó mà thực hiện được công việc này bởi trên thực tế, nhiều khi ta kẻ một đường phụ mà không có một lí do xác đáng!

Do đó trong phần này ta sẽ suy nghĩ thêm về việc kẻ đường phụ và vai trò quan trọng của kinh nghiệm qua một quá trình rèn luyện lâu dài để giải toán HHP bằng cách kẻ thêm đường phụ. Ta xét bài toán sau.

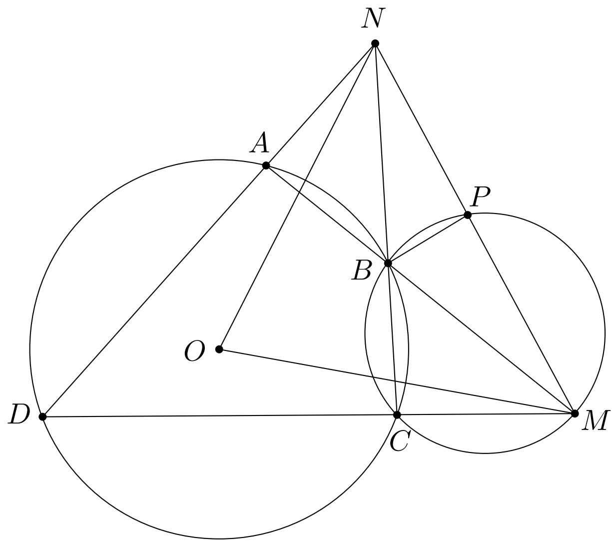
Ví dụ 11. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp $(O,\, R)$ có M, N lần lượt là giao điểm của các cặp cạnh đối. Chứng minh rằng*

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = R^2.$$

Phân tích. Khi giải bài toán này, chắc chắn các bạn cũng sẽ mò mẫn biến đổi tích vô hướng của hai vector ở vế trái để đi đến kết quả nhưng cuối cùng cũng sẽ bị ngộ nhận hoặc càng lúc càng phức tạp thêm. Do đó, việc dựng thêm một yếu tố phụ sẽ là điều tất yếu. Chúng ta đừng lầm tưởng bởi hình thức đơn giản của bài toán này!

Việc dựng đường phụ dưới đây có thể là khó với một số bạn nhưng nếu chúng ta đã quen với bài toán sau thì mọi chuyện sẽ trở nên đơn giản hơn rất nhiều: *"Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) có M, N lần lượt là giao điểm của AD, BC và AB, CD. Chứng minh rằng*

$$MA \cdot MB + NA \cdot ND = MN^2".$$



Ta sẽ giải bài toán này xem như một bổ đề và áp dụng nó vào bài toán đã cho: Gọi P là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM với MN. Ta thấy $BPMC$ rõ ràng là một tứ giác nội tiếp nên $\angle BPM = \angle BCD = \angle NAB$, suy ra tứ giác $ANBP$ cũng nội tiếp. Theo tính chất phương tích, ta có $MA \cdot MB = MP \cdot MN$, $NA \cdot ND = NP \cdot NM$. Từ đó suy ra

$$MA \cdot MB + NA \cdot ND = MN(MP + NP) = MN^2.$$

Ta sẽ quay trở lại bài toán đã cho, biến đổi biểu thức cần chứng minh một chút cho vấn đề được rõ ràng hơn (giả sử M là giao điểm của AB và CD, N là giao điểm của AD và BC)

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = R^2 \Leftrightarrow OM^2 + ON^2 - MN^2 = 2R^2.$$

Áp dụng bổ đề trên, thay $MA \cdot MB + NA \cdot ND = MN^2$ vào biểu thức trên

$$OM^2 + ON^2 - (MA \cdot MB + NA \cdot ND) = 2R^2.$$

Nhưng điều này là đúng do theo tính chất phương tích

$$MA \cdot MB = OM^2 - R^2, \quad NA \cdot ND = ON^2 - R^2.$$

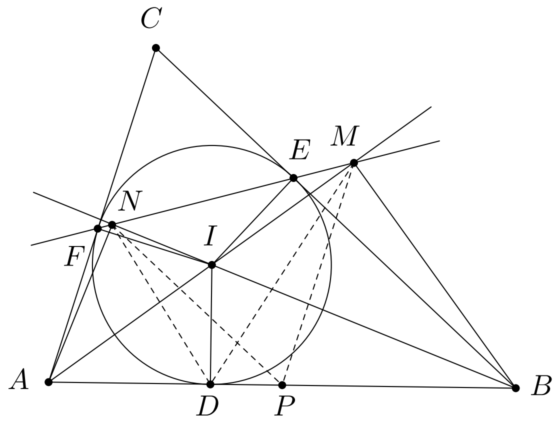
Từ đó, ta đã giải thành công bài toán. □

Thử nghĩ nếu không có sự hỗ trợ của bổ đề trên thì việc kẻ đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM rồi đi chứng minh tuần tự như trên quả là chuyện không đơn giản. Và phải công nhận rằng kinh nghiệm giải toán HHP thể hiện trong bài này không ít! Ta tiếp tục phân tích một ví dụ khác.

Ví dụ 12. *Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B cố định (A khác B). Một điểm C di động trong mặt phẳng sao cho góc $\angle ACB = \alpha$ không đổi ($0° < \alpha < 180°$). Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng AI, BI lần lượt cắt đường thẳng EF tại M, N. Chứng minh rằng*

(a) Đoạn MN có độ dài không đổi.

(b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua một điểm cố định.



Phân tích. Nếu ở bài này ta đọc kĩ giả thiết thì sẽ thấy rằng các điểm M và N xác định như trên đã xuất hiện trong nhiều bài toán quen thuộc trước đó mà yêu cầu của đề chỉ dừng lại ở việc chứng minh các tam giác MBC, NBC vuông. Nếu đã biết điều này, ta sẽ chứng minh lại kết quả đó và sử dụng vào việc giải bài toán đã cho như một bổ đề (trong bài này không xét các vị trí có thể có của M, N). Ta thấy $\angle MEB = \angle CEF = \dfrac{180^\circ - \angle C}{2}$ và

$$\angle MIB = \angle IAB + \angle IBA = \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} = \frac{180^\circ - \angle C}{2}.$$

Do đó $\angle MEB = \angle MIB$. Từ đây suy ra tứ giác $EMBI$ nội tiếp và $\angle IMB = \angle IEB = 90^\circ$, suy ra tam giác AMB vuông ở M. Tương tự, ta cũng có tam giác NAB vuông tại N.

Áp dụng điều này vào bài toán, ta được tứ giác $ANMB$ nội tiếp đường tròn đường kính AB. Suy ra $\Delta AIB \sim \Delta NIM$, từ đó ta được $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{IA}{NI}$, suy ra

$$\begin{aligned} MN &= AB \cdot \frac{IN}{IA} = AB \sin \angle NAI = AB \sin\left(90^\circ - \frac{\angle CAB + \angle CBA}{2}\right) \\ &= AB \sin\frac{\angle C}{2} = AB \sin\frac{\alpha}{2} = \text{const}. \end{aligned}$$

Hơn nữa, ta thấy

$$\angle MDN = \angle IDN + \angle IDM = 2\left(90^\circ - \frac{\angle CAB + \angle CBA}{2}\right) = \angle C.$$

Gọi P là trung điểm của AB thì P chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ANMB$, suy ra

$$\begin{aligned} \angle MPN &= \angle MPA - \angle NPA = 2(\angle MBA - \angle NBA) = 2(90^\circ - \angle MAB - \angle NBA) \\ &= 2\left(90^\circ - \frac{\angle CAB + \angle CBA}{2}\right) = \angle C. \end{aligned}$$

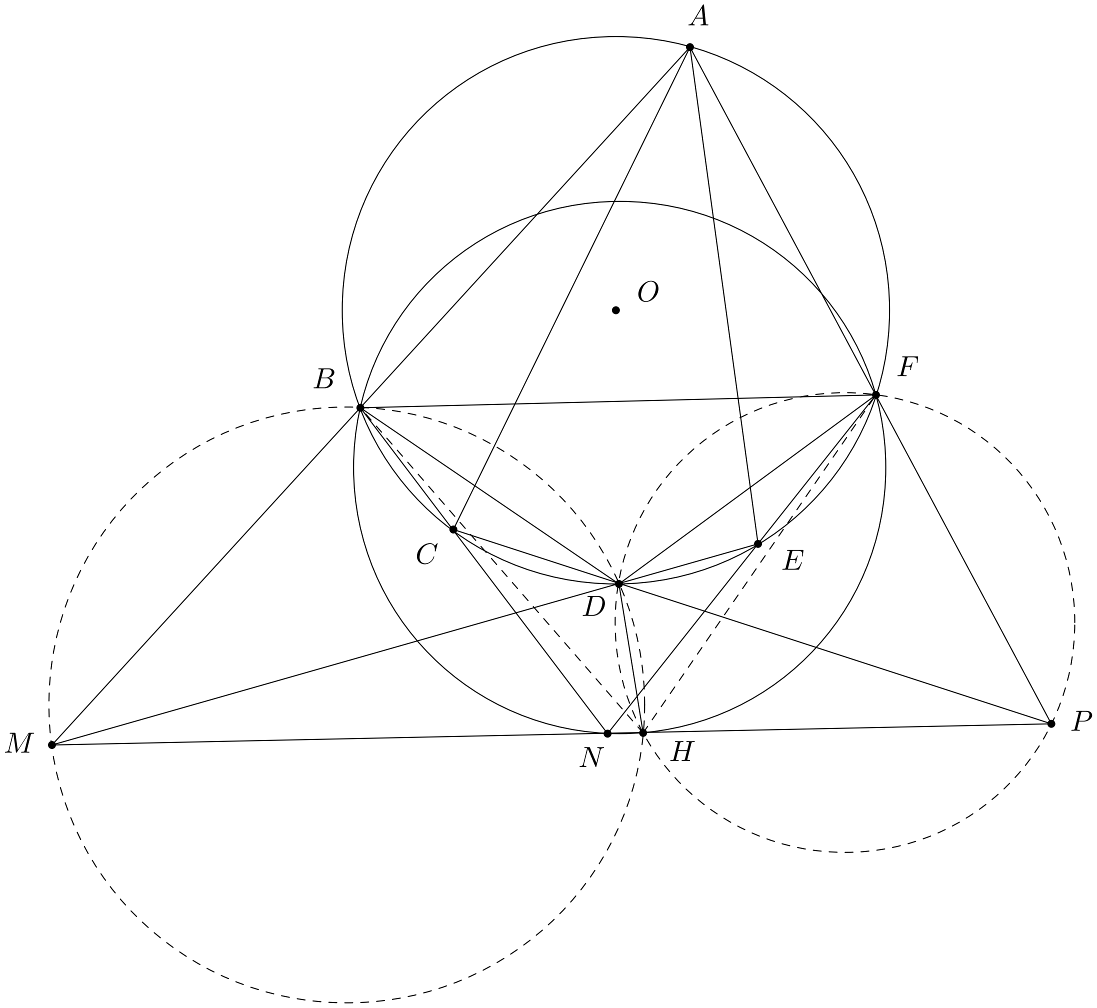
Do đó $\angle MPN = \angle MDN$, suy ra tứ giác $MNDP$ nội tiếp hay đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua P cố định. Đây chính là điều phải chứng minh. □

Bài toán này vẫn còn nhiều cách giải khác nhưng có lẽ cách này đơn giản, ngắn gọn hơn cả.

Một số bài toán cũng có thể giải được bằng nhiều cách dựng đường phụ và nếu chúng ta càng có nhiều công cụ hỗ trợ như những bổ đề, định lý quen thuộc thì việc dựng hình sẽ đơn giản và lời giải sẽ nhẹ nhàng hơn, chúng ta hãy xét việc chứng minh định lý Pascal sau đây.

Ví dụ 13. *Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn (O) có M, N, P lần lượt là giao điểm của AB, DE; BC, EF; CD, FA. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.*

Phân tích. Việc chứng minh định lý này đã quá quen thuộc bằng cách sử dụng định lý Menelaus thuận và đảo cho các tam giác. Cách đó tương đối ngắn gọn và không kẻ nhiều đường phụ. Nhưng nếu như ta không biết trước định lý Menelaus và sử dụng một cách chứng minh khác thì mời các bạn hãy theo dõi lời giải sau đây với việc kẻ thêm hai đường tròn phụ.



Gọi I là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM và FDQ. Ta sẽ chứng minh rằng cả bốn điểm M, N, P, I thẳng hàng bằng cách chứng minh từng bộ ba điểm thẳng hàng. (Việc nghĩ ra hai đường tròn phụ này có thể xuất phát từ một bài toán quen thuộc là: *"Cho ba đường tròn* (1), (2), (3) *cùng đi qua D.* (1) *cắt* (2) *tại A,* (2) *cắt* (3) *tại B,* (3) *cắt* (1) *tại C (A, B, C khác D). Với M bất kỳ nằm trên* (1), *gọi P, Q là giao điểm của MA với* (2), *MC với* (3). *Chứng minh rằng PQ đi qua B."*)

Thật vậy, từ các tứ giác nội tiếp $BDIM$, $FDIP$, ta có

$$\angle DIM + \angle DIP = \angle DBA + \angle DFA = 180^\circ,$$

suy ra M, I, P thẳng hàng. Tiếp theo ta sẽ chứng minh rằng M, N, I thẳng hàng. Ta có tứ giác $BDIM$ nội tiếp nên $\angle BIM = \angle BDM = 180^\circ - \angle BDE = 180^\circ - \dfrac{1}{2}\text{sđ}(BAE) = \dfrac{1}{2}\text{sđ}(BDE)$.

Mặt khác, lại có

$$\begin{aligned}\angle BIF &= \angle BID + \angle FID = \angle BMD + \angle FPD\\ &= \frac{1}{2}\left[(\text{sđ}(AFE) - \text{sđ}(BCD)) + (\text{sđ}(ABC) - \text{sđ}(DEF))\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[(\text{sđ}(AF) + \text{sđ}(AB)) - (\text{sđ}(DC) + \text{sđ}(DE))\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(\text{sđ}(BAF) - \text{sđ}(CDE)\right) = \angle BNF,\end{aligned}$$

nên tứ giác $BNIF$ nội tiếp. Do đó

$$\angle BIN = \angle BFN = \frac{1}{2}\text{sđ}(BDE) = \angle BIM,$$

suy ra M, N, I thẳng hàng. Tương tự N, I, P thẳng hàng.

Vậy ta có M, N, P thẳng hàng (đpcm). □

Qua các ví dụ trên, ta thấy rằng việc dựng đường phụ là công việc đòi hỏi phải có quá trình rèn luyện và tích lũy kinh nghiệm lâu dài. Có thể nói khi chúng ta đã kẻ thành công được đường phụ để giải một bài toán nào đó chính là lúc chúng ta có một bước tiến dài trong việc học tập HHP.

2.5 Về việc học tập và rèn luyện HHP ở mức độ nâng cao

Có khi nào chúng ta đặt câu hỏi: *"Tại sao người ta lại có thể nghĩ ra được một bài toán hay như vậy nhỉ?"*. Thông thường, chúng ta giải được một bài toán với lời giải thật hay và đẹp rồi gác nó lại mà không dành thời gian tìm hiểu thêm những điều lý thú đằng sau nó hay thậm chí là đưa ra được một bài toán mới từ bài toán cũ đó. Việc tìm tòi như thế sẽ giúp chúng ta chủ động hơn ở các bài toán và phát triển kỹ năng HHP tốt hơn.

Khi chúng ta tìm tòi sáng tác ra các bài toán mới chính là lúc chúng ta đi trên con đường mà những người ra đề đã đi và tìm hiểu xem họ đã làm thế nào để có được bài toán như vậy. Thông thường các bài toán HHP đặt ra dưới dạng che giấu các vấn đề và công việc của chúng ta là lần mò theo các giả thiết có sẵn để giải.

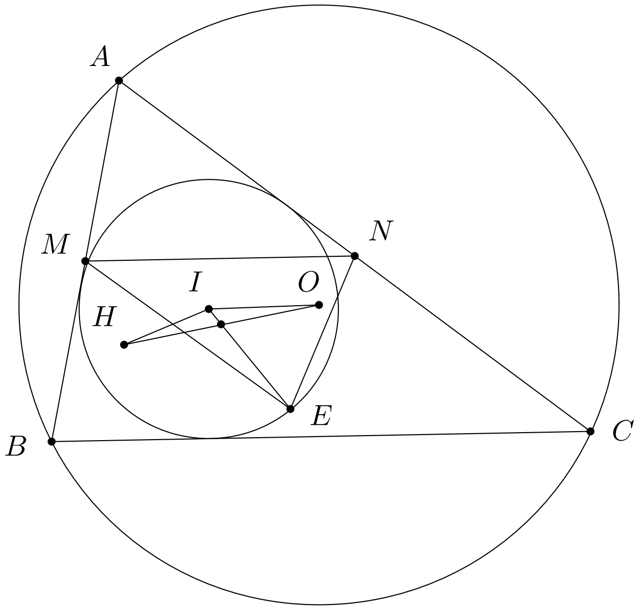
Việc che giấu càng hay khi mà một số điểm và đường trong hình bị xóa đi mà yêu cầu của bài toán lại không bị ảnh hưởng, người giải các bài như vậy phải khôi phục lại các điểm đó thông qua cách kẻ các yếu tố phụ; cũng có thể là việc biến đổi các yếu tố trong bài, thêm các đường mới để che giấu bản chất vấn đề.

Và việc tự nghĩ ra các bài toán HHP hoặc phát triển từ một bài toán cũ là một việc làm rất có ích cho chúng ta khi mà ta trở thành thí sinh trong kỳ thi nào đó, đối mặt với một bài toán HHP khó, không rơi vào hoàn cảnh bị động và lúng túng.

Ta thử xem các bài toán sau đây.

Ví dụ 14. *Cho tam giác ABC nhọn có A là góc lớn nhất, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I), H là trực tâm. Trung tuyến đỉnh I của tam giác IOH cắt (I) tại P. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Chứng minh rằng*

$$\angle BAC = \angle MPN.$$



Phân tích. Ta thấy giả thiết của bài toán không quá phức tạp nhưng các yếu tố rời rạc trong hình cũng như việc dựng hình phức tạp có thể khiến ta khó tìm ra lời giải. Thực ra, bài toán này phát triển từ định lý *"đường tròn Euler tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp"*. Các vấn đề bị che lấp là

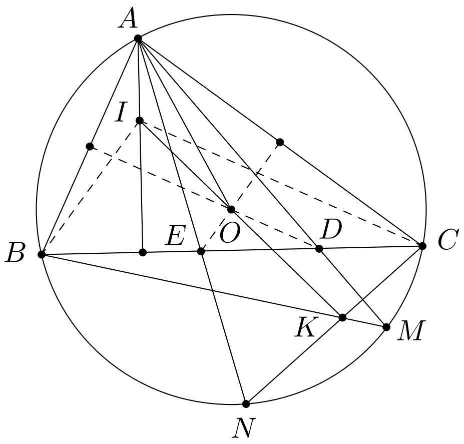
- Trung điểm của đoạn OH chính là tâm đường tròn Euler.
- Giao điểm P chính là tiếp điểm của đường tròn Euler với đường tròn nội tiếp nên tất nhiên nó sẽ thuộc đường tròn Euler.
- Đường tròn Euler đi qua trung điểm các cạnh nên nếu gọi Q là trung điểm BC thì $MNPQ$ nội tiếp và $\angle MPN = \angle MQN$.
- Do M, N, Q là trung điểm các cạnh nên $\angle BAC = \angle MQN$. Từ đó ta dễ dàng đi đến lời giải cho bài toán. □

Nếu chúng ta chưa quen lần mò theo con đường của người cho đề để tìm ra lời giải thì bài toán trên quả thật không đơn giản chút nào, bất kể là chúng ta có năng khiếu HHP hay không.

Chẳng hạn bạn là người cho đề, bạn có sẵn một bài toán *chứng minh các điểm M, N, P nào đó cùng nằm trên đường thẳng d*, bạn muốn bài toán này khó hơn và bạn sẽ rất dễ dàng nghĩ ra rằng *nếu A là một điểm nào đó nằm ngoài đường thẳng d thì trực tâm của ba tam giác AMN, ANP, APM cũng thẳng hàng (cùng nằm trên đường thẳng qua A vuông góc với d)* và như thế, bạn cũng đã tích lũy được thêm một kinh nghiệm cho việc chứng minh ba điểm thẳng hàng. Thử hỏi nếu là một người đi tìm lời giải bài toán thì việc nhìn ra cách chứng minh đó có dễ dàng không?

Ví dụ 15. *Cho tam giác ABC nội tiếp trong (O) có A là góc lớn nhất. Trung trực của AB, AC cắt cạnh BC lần lượt tại D, E. Đường thẳng AD, AE cắt (O) lần lượt tại M, N. Gọi K là giao điểm của BM và CN; d là đường thẳng đối xứng với phân giác góc DAE qua phân giác góc BAC. Đường thẳng OK cắt d tại I. Chứng minh rằng*

$$\angle BIC = \angle DOE.$$

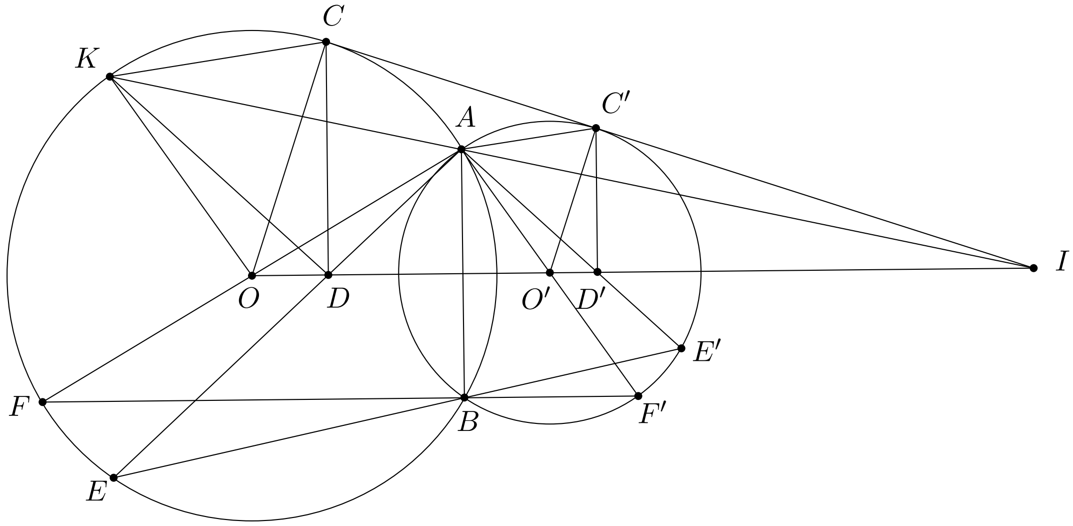


PHÂN TÍCH. Chắc hẳn chúng ta đã từng nghe đến bài toán sau: *"Cho tứ giác $ABCD$ thỏa mãn $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD$. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của $\triangle ABC$ đi qua D".*

Bài toán này là một bài toán khó nhưng nó hầu như đã khá quen thuộc với nhiều cách giải. Tưởng chừng bài toán này và ví dụ trên không có liên hệ gì nhưng thực ra ví dụ trên là một phát triển của bài toán vừa nêu với việc che lấp và bổ sung thêm hàng loạt vấn đề. Nếu chưa biết đến nó thì ví dụ này quả là một bài toán rất khó. Chúng ta thử chứng minh xem tứ giác $ABKC$ trong hình vẽ có tính chất ba góc bằng nhau không, rõ ràng điều đó là đúng. Khi đó đưa kết quả trên vào thì đường thẳng Euler của tam giác ABC đi qua K hay ngược lại OK sẽ đi qua trực tâm tam giác ABC. Đường thẳng d trong đề bài thực chất là đường cao của tam giác ABC và I chính là trực tâm. Đây là các yếu tố đã bị che lấp đi, nếu chúng ta không tiến hành từng bước để khai thác giả thiết thì khó có thể thấy được điều này. Đến đây thì rõ ràng $BI \parallel OE$, $CI \parallel OD$ nên $\angle BIC = \angle DOE$ là đúng. Vấn đề đã được giải quyết! □

Ta sẽ phân tích thêm một ví dụ nữa để thấy rõ vai trò của kinh nghiệm tích lũy được của bản thân trong việc giải các bài toán HHP.

Ví dụ 16. *Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau tại A và B. Gọi CC' là tiếp tuyến chung (gần A hơn) của hai đường tròn, $C \in (O)$, $C' \in (O')$. Gọi D, D' lần lượt là hình chiếu của C, C' trên đường thẳng OO'. Giả sử AD cắt (O) tại E, AD' cắt (O') tại E'. Chứng minh E, B, E' thẳng hàng.*



PHÂN TÍCH. Đây là một bài toán hình học của kỳ thi HSG quốc gia và các lời giải của nó nói chung đều mang nhiều tính chất của phép vị tự. Đáp án chính thức cũng là một lời ngắn gọn và đẹp. Dù vậy, nếu các bạn đã nhiều lần giải các bài toán về hai đường tròn cắt nhau cùng với tiếp tuyến của nó thì sẽ nhiều kinh nghiệm về dạng này và sẽ có thể dùng kinh nghiệm đó như những bổ đề để giải bài toán này một cách ấn tượng hơn. Hãy suy nghĩ về cách giải sau.

Gọi F, F' lần lượt là giao điểm khác A của các đường thẳng AO với (O), AO' với (O'). Do AF, AF' lần lượt là đường kính của các đường tròn (O), (O') tương ứng nên

$$\angle ABF = \angle ABF' = 90^\circ,$$

suy ra F, B, F' thẳng hàng. Gọi R, R' lần lượt là bán kính của hai đường tròn (O), (O'). Ta sẽ chứng minh rằng

$$\angle O'AD' = \angle OAD. \qquad (*)$$

Thật vậy, gọi I là giao điểm của CC' với OO' và K là giao điểm của IA với (O). Dễ dàng thấy rằng I chính là tâm vị tự của hai đường tròn. Do đó

$$\frac{IO'}{IO} = \frac{R'}{R} = \frac{O'A}{OK} = \frac{IA}{IK} = \frac{IC'}{IC} = \frac{ID'}{ID}.$$

Suy ra $AD' \parallel KD$ hay $\angle IAD' = \angle IKD$. Mặt khác, do $AC' \parallel KC$ nên

$$\angle IAC' = \angle IKC = \angle ICA,$$

suy ra $\triangle IAC' \sim \triangle ICA$ và $\dfrac{IA}{IC} = \dfrac{IC'}{IA}$. Từ đây ta có $IA^2 = IC \cdot IC'$.

Do tứ giác $CC'D'O$ nội tiếp nên $IC \cdot IC' = ID' \cdot IO$. Kết hợp với trên ta có $IA^2 = ID' \cdot IO$, hay $\dfrac{IA}{ID'} = \dfrac{IO}{IA}$, từ đó suy ra $\triangle IAD' \sim \triangle IOA$. Do đó $\angle IAD' = \angle IOA$, mà $\angle IAD' = \angle IKD$ nên $\angle IKD = \angle IOA$, suy ra tứ giác $ADOK$ nội tiếp. Từ đây ta có

$$\angle OAD = \angle OKD.$$

Hơn nữa do $OK \parallel O'A$, $DK \parallel D'A$ nên

$$\angle O'AD' = \angle OKD.$$

Suy ra $\angle O'AD' = \angle OAD$, $(*)$ được chứng minh.

Áp dụng vào bài toán, theo tính chất của góc nội tiếp ta có

$$\angle OAD = \angle FBE, \quad \angle O'AD' = \angle F'BE'.$$

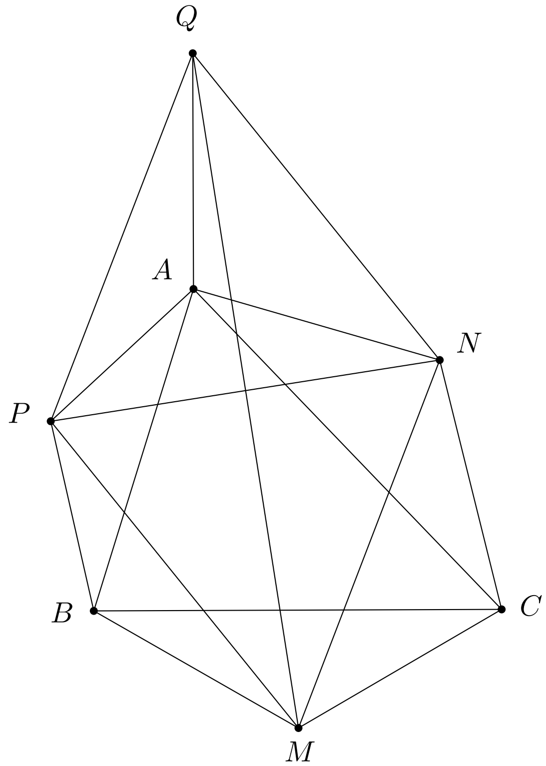
Do đó, kết hợp với $(*)$, ta được $\angle FBE = \angle F'BE'$. Mà F, B, F' thẳng hàng nên theo tính chất của góc đối đỉnh, ta cũng có E, B, E' thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Bên cạnh đó, ta cũng cần phải nhắc đến một số công cụ gọi là *"cao cấp"* để giải các bài toán HHP như: *góc định hướng, độ dài đại số, tích có hướng và diện tích đại số, phương tích và trục đẳng phương, hàng điểm điều hòa, cực và đối cực, phép nghịch đảo và đồng dạng, định lý Carno, Michael, ...* Cũng tương tự như những điều gọi là kinh nghiệm hay bổ đề ở trên, những công cụ này có thể giúp ta giải quyết nhanh gọn và dễ dàng nhiều bài toán khó mà nếu sử dụng công cụ thông thường thì lời giải sẽ dài dòng và phức tạp; có nhiều khi ta không đủ khả năng nhìn ra một lời giải kiểu như thế. Thế nhưng, muốn áp dụng định lý nào đó vào việc giải một bài toán quả là điều không đơn giản khi mà số lượng định lý có sẵn tương đối lớn và càng khó khăn hơn khi đặc trưng của định lý đó chưa thể hiện ở bất cứ mặt nào của bài toán, chúng ta phải lần mò theo giả thiết để đặt ra các yêu cầu cần có nhằm đi đến kết luận và có thể bất chợt một định lý nào đó sẽ xuất hiện hỗ trợ cho ta.

Ví dụ 17. *Cho tam giác ABC. Dựng phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều và gọi M, N, P là tâm của chúng. Chứng minh rằng tam giác MNP đều.*

Ta thấy đây là nội dung của định lý Napoléon với cách chứng minh quen thuộc là dựng thêm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác đều đã có rồi gọi tên giao điểm của chúng. Sau đây, ta sẽ cùng xem hai cách chứng minh khác nữa và đưa ra nhận xét so sánh.

Lời giải 1. *Sử dụng phương pháp thông thường.*



Dựng điểm Q khác phía M so với NP sao cho $\angle QPA = \angle MPB$ và $PQ = MQ$. Ta có $\triangle APQ = \triangle BPM$ (c.g.c), suy ra

$$\angle PAQ = \angle MBP = \angle ABC + 60^\circ, \quad AQ = BM = CM.$$

Do đó

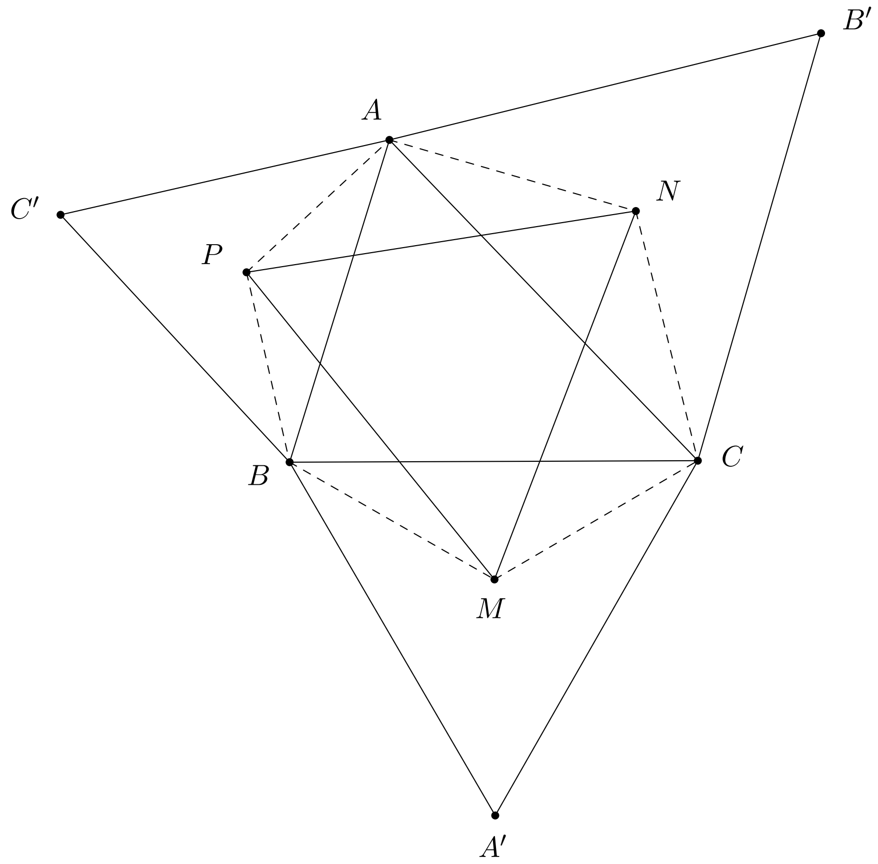
$$\begin{aligned}\angle NAQ &= 360^\circ - (\angle PAQ + \angle PAN) = 360^\circ - (\angle ABC + 60^\circ + \angle CAB + 60^\circ)\\ &= \angle ACB + 60^\circ = \angle MCN.\end{aligned}$$

Suy ra $\triangle AQN = \triangle CMN$ (c.g.c) và $NQ = NM$. Mà $PQ = PM$ do $\triangle APQ = \triangle BPM$ nên PN là trung trực của MQ, tức là M, Q đối xứng nhau qua PN hay

$$\angle QPN = \angle MPN, \quad \angle QNP = \angle MNP.$$

Mặt khác, ta có $\angle QPM = \angle APM + \angle QPA = \angle APM + \angle MPB = \angle APB = 120^\circ$ và tương tự $\angle QNM = 120^\circ$ nên $\angle MPN = \angle MNP = \dfrac{120^\circ}{2} = 60^\circ$, suy ra tam giác MNP đều. □

Lời giải 2. *Sử dụng phép quay vector.*



Gọi A', B', C' là đỉnh của các tam giác đều tương ứng dựng trên các đoạn BC, CA, AB. Vì các điểm M, N lần lượt là trọng tâm của $\triangle BA'C$, $\triangle ACB'$ nên $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CB'}\right)$. Tương tự, ta cũng có

$$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{CA}\right).$$

Xét phép quay vector góc quay là $\dfrac{\pi}{3}$, ta có

$$\begin{aligned} Q_{\frac{\pi}{3}}\left(\overrightarrow{MN}\right) &= \frac{1}{3}Q_{\frac{\pi}{3}}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CB'}\right) = \frac{1}{3}\left[Q_{\frac{\pi}{3}}\left(\overrightarrow{BA}\right) + Q_{\frac{\pi}{3}}\left(\overrightarrow{A'C}\right) + Q_{\frac{\pi}{3}}\left(\overrightarrow{CB'}\right)\right] \\ &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{MP}. \end{aligned}$$

Suy ra tam giác MNP đều. □

Ta thấy rằng phép quay vector sử dụng trong bài toán đã giúp hạn chế nhiều lập luận hình học phức tạp và cho ta một lời giải hết sức nhẹ nhàng, vấn đề là chúng ta phải biết căn cứ vào các đặc trưng của bài toán để vận dụng cho phù hợp và chính xác. Nói chung ba công cụ sau: *vector (tương ứng với đoạn thẳng), góc định hướng (tương ứng với góc), diện tích đại số và tích ngoài (tương ứng với diện tích)* là ba công cụ mạnh, phát triển từ các yếu tố hình học cơ bản. Chúng ta nên tìm hiểu thêm về chúng để có thêm được những sự trợ giúp rất tốt khi đứng trước một bài toán HHP nào đó mà các phương pháp hình học thuần túy khác dường như đã không còn tác dụng nữa.

Tiếp tục nói về việc nghiên cứu ra các bài toán HHP mới, chúng ta thấy một điều rằng: muốn tự nghĩ ra một bài HHP hoàn toàn độc lập với các bài đã có quả là chuyện không đơn giản; ta vẫn có thể sử dụng những sự tương tự giữa các yếu tố đường và điểm tạo ra các bài toán độc đáo.

Chẳng hạn như trong bài toán trên, các bạn có thể tự hỏi nếu như không dựng các tam giác đều phía ngoài tam giác mà dựng về phía ngược lại thì kết quả trên sẽ ra sao, định lý có còn đúng hay không. Vẫn còn nhiều ví dụ về những phát hiện này như:

- Tam giác có hai đường trung tuyến, đường cao bằng nhau là tam giác cân; vậy phân giác thì sao?
- Giao điểm các đường chia ba phía trong các góc của một tam giác là một tam giác là tam giác đều (định lý Morley); vậy thì chia ba phía ngoài thì sao?
- Ta có bài toán quen thuộc là: *"Cho tam giác ABC nội tiếp (O), có trọng tâm G. Giả sử các tia GA, GB, GC cắt (O) lần lượt tại A', B', C'. Chứng minh rằng*

  $$GA + GB + GC \leq GA' + GB' + GC'\text{''};$$

  vậy thì nếu thay G bởi trực tâm hay tâm đường tròn nội tiếp thì sao?
- Quỹ tích trực tâm H của tam giác ABC có BC cố định và $\angle BAC$ không đổi là đường tròn, của trọng tâm G cũng là đường tròn; vậy của tâm đường tròn nội tiếp là gì?
- Nếu biết được trung điểm các cạnh có thể dựng được các đỉnh tam giác, biết được chân đường cao có thể dựng được các đỉnh tam giác; vậy nếu biết chân các đường phân giác thì có dựng được không và dựng như thế nào?

Chẳng hạn từ vấn đề cuối vừa nêu ở trên, chúng ta có được một bài toán sau: *"Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O có các phân giác AD, BE, CF đồng quy ở I. Gọi x, y, z lần lượt là các tiếp tuyến của (O) song song với các đoạn thẳng EF, FD, DE. Giả sử x cắt y tại P, y cắt z tại M, z cắt x tại N. Gọi H, K, L là chân đường phân giác kẻ từ góc M, N, P của tam giác MNP. Chứng minh rằng*

(a) Các đoạn thẳng MD, NE, PF đồng quy. Gọi điểm đó là R.

(b) Các đoạn thẳng HD, KE, LF đồng quy. Gọi điểm đó là S.

(c) Ba điểm R, S, O thẳng hàng. Gọi đường thẳng qua các điểm này là d.

(d) Đường thẳng d đi qua tâm đường tròn nội tiếp của bốn tam giác ABC, DEF, MNP và HKL."

Còn rất nhiều điều rất gần gũi, quen thuộc mà chúng ta chưa tìm hiểu nhiều về chúng để có thể phát hiện thêm những sự thú vị cũng như rèn luyện cho mình kỹ năng giải toán HHP. Tại sao chúng ta không thử bắt đầu ngay với một bài HHP đơn giản nào đó để đi tìm đến những điều thú vị?

Tóm lại, *muốn học tốt ở môn HHP, chúng ta cần phải có một quá trình rèn luyện đầy đủ cùng với một cách học tập phù hợp. Chúng ta nên rèn luyện tư duy hình học của mình từ nhiều dạng toán và nên tập trung vào các công cụ chính; đừng đi quá sâu vào một phương pháp, một công cụ hỗ trợ đặc biệt nào đó. Ta học thật nhiều định lý, bổ đề nhưng khi cần chúng ta không thể nào nhớ hết chúng và không biết lựa chọn công cụ nào cho phù hợp để giải quyết. Chúng ta cũng nên biết rằng các bài toán HHP trong các kỳ thi thường không giải dựa trên một bổ đề, định lý khó nào đó để đánh giá kỹ năng nhớ, thuộc bài mà chỉ dùng các công cụ thông thường, quen thuộc để có thể đánh giá được khả năng tư duy, lập luận của học sinh. Hãy trang bị cho mình những thứ cần thiết để có thể đối đầu với các bài toán HHP khó khăn ở phía trước; tất nhiên, một hành trang tốt là một hành trang đầy đủ và gọn gàng, có thể sử dụng được trong nhiều tình huống chứ không phải một hành trang quá cồng kềnh, quá phức tạp để khi cần dùng một thứ nào đó không biết tìm kiếm ở đâu, ...*

Chúc các bạn có thể rèn luyện tốt và thành công ở bộ môn HHP thật thú vị và hấp dẫn này!

3 Các bài toán rèn luyện

Sau đây xin mời các bạn hãy tham khảo thử 16 bài toán trong kỳ thi chọn đội tuyển quốc gia của Việt Nam dự thi IMO dưới đây và hãy thử vận dụng các hướng vừa rồi để tìm cách giải quyết chúng. Đây đều là các bài toán rất hay và cũng rất khó! (Các bài toán được sắp xếp một cách tương đối từ dễ đến khó)

Bài tập 1 (Đề TST 2000)**.** Hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm P và Q. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn gần P hơn Q tiếp xúc với (C_1) tại A và tiếp xúc với (C_2) tại B. Các tiếp tuyến của (C_1), (C_2) kẻ từ P cắt đường tròn kia lần lượt tại E và F (E, F khác P). Gọi H, K lần lượt là các điểm nằm trên các đường thẳng AF, BE sao cho $AH = AP$ và $BK = BP$. Chứng minh rằng năm điểm A, H, Q, K, B cùng thuộc một đường tròn.

Bài tập 2 (Đề TST 2003)**.** Trên các cạnh của tam giác ABC lấy các điểm M_1, N_1, P_1 sao cho các đoạn MM_1, NN_1, PP_1 chia đôi chu vi tam giác, trong đó M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn BC, CA, AB. Chứng minh rằng

(a) Các đường thẳng MM_1, NN_1, PP_1 đồng quy tại một điểm. Gọi điểm đó là K.

(b) Trong các tỉ số $\dfrac{KA}{BC}$, $\dfrac{KB}{CA}$, $\dfrac{KC}{AB}$ có ít nhất một tỉ số không nhỏ hơn $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài tập 3 (Đề TST 2006)**.** Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Đường phân giác ngoài của góc BHC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D và E. Đường phân giác trong của góc BAC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE tại điểm K. Chứng minh rằng đường thẳng HK đi qua trung điểm của đoạn BC.

Bài tập 4 (Đề TST 2006)**.** Trong mặt phẳng cho góc xOy. Gọi M, N lần lượt là hai điểm lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy. Gọi d là đường phân giác góc ngoài của góc xOy và I là giao điểm của trung trực MN với đường thẳng d. Gọi P, Q là hai điểm phân biệt nằm trên đường thẳng d sao cho $IM = IN = IP = IQ$, giả sử K là giao điểm của MQ và NP.

(a) Chứng minh rằng K nằm trên một đường thẳng cố định.

(b) Gọi d_1 là đường thẳng vuông góc với IM tại M và d_2 là đường thẳng vuông góc với IN tại N. Giả sử các đường thẳng d_1, d_2 cắt đường thẳng d tại E, F. Chứng minh rằng các đường thẳng EN, FM và OK đồng quy.

Bài tập 5 (Đề TST 2009)**.** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi A_1, B_1, C_1 và A_2, B_2, C_2 lần lượt là các chân đường cao của tam giác ABC hạ từ các đỉnh A, B, C và các điểm đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Gọi A_3, B_3, C_3 lần lượt là các giao điểm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_2C_2, BC_2A_2, CA_2B_2 với đường tròn (O). Chứng minh rằng A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 đồng quy.

Bài tập 6 (Đề TST 2001)**.** Trong mặt phẳng cho hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm A, B. Gọi PT là một trong hai tiếp tuyến chung của hai đường tròn trong đó P, T là các tiếp điểm. Tiếp tuyến tại P và T của đường tròn ngoại tiếp tam giác APT cắt nhau tại S. Gọi H là điểm đối xứng với B qua đường thẳng PT. Chứng minh rằng các điểm A, S, H thẳng hàng.

Bài tập 7 (Đề TST 1999)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn Γ. Một đường tròn θ tiếp xúc với các cạnh AB, AC và tiếp xúc trong với đường tròn Γ lần lượt tại các điểm M_1, N_1, P_1. Các điểm M_2, N_2, P_2 và M_3, N_3, P_3 xác định một cách tương tự. Chứng minh rằng các đoạn thẳng M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Bài tập 8 (Đề TST 1995)**.** Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' lần lượt là ảnh của các điểm A, B, C qua phép đối xứng tâm M.

(a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một điểm điểm P trong mặt phẳng cách đều hai đầu mút của các đoạn thẳng AB', BC', CA'.

(b) Gọi D là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh rằng khi M thay đổi trong tam giác ABC và không trùng với D thì đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP, trong đó N là giao điểm của DM và AP, luôn đi qua một điểm cố định.

Bài tập 9 (Đề TST 2004)**.** Trong mặt phẳng cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại A và B. Các tiếp tuyến tại A, B của đường tròn (O_1) cắt nhau tại K. Xét một điểm M không trùng với A, B nằm trên đường tròn (O_1). Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng MA với đường tròn (O_2). Gọi C là giao điểm thứ hai của đường thẳng MK với đường tròn (O_1). Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường thẳng CA với đường tròn (O_2). Chứng minh rằng

(a) Trung điểm của đoạn thẳng PQ nằm trên đường thẳng MC.

(b) Đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên (O_1).

Bài tập 10 (Đề TST 2003)**.** Cho tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi H, K, L lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Gọi A_0, B_0, C_0 lần lượt là trung điểm của các đường cao AH, BK, CL. Đường tròn nội tiếp tâm I của tam giác ABC tiếp xúc với các đoạn BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng A_0D, B_0E, C_0F cùng đi qua một điểm và điểm đó nằm trên đường thẳng OI.

Bài tập 11 (Đề TST 2006)**.** Cho tam giác ABC là tam giác nhọn, không cân, nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Một đường thẳng d thay đổi sao cho d luôn vuông góc với OA và luôn cắt các tia AB, AC. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng d và các đoạn AB, AC. Giả sử các đường thẳng BN và CN cắt nhau tại K; giả sử đường thẳng AK cắt đường thẳng BC.

(a) Gọi P là giao của đường thẳng AK và đường thẳng BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định khi d thay đổi.

(b) Gọi H là trực tâm của tam giác AMN. Đặt $BC = a$ và l là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng HK. Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua trực tâm của tam giác ABC. Từ đó suy ra $l \leq \sqrt{4R^2 - a^2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

Bài tập 12 (Đề TST 2009)**.** Cho đường tròn (O) đường kính AB và M là một điểm bất kỳ nằm trong (O), M không nằm trên đoạn thẳng AB. Gọi N là giao điểm của phân giác trong góc M của tam giác AMB với đường tròn (O). Đường phân giác ngoài góc $\angle AMB$ cắt các đường thẳng NA, NB lần lượt tại P, Q. Đường thẳng MA cắt đường tròn đường kính NQ tại R, đường thẳng MB cắt đường tròn đường kính NP tại S và R, S khác M. Chứng minh rằng đường trung tuyến ứng với đỉnh N của tam giác NRS luôn đi qua một điểm cố định khi M di động phía trong đường tròn.

Bài tập 13 (Đề TST 2005)**.** Cho tam giác ABC có (I) và (O) lần lượt là các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) trên các cạnh BC, CA, AB. Gọi ω_A, ω_B, ω_C lần lượt là các đường tròn tiếp xúc với hai đường tròn (I) và (O) lần lượt tại các điểm D, K (với đường tròn ω_A); tại E, M (với đường tròn ω_B) và tại F, N (với đường tròn ω_C). Chứng minh rằng các đường thẳng DK, EM, FN đồng quy tại P và trực tâm của tam giác DEF nằm trên đoạn OP.

Bài tập 14 (Đề TST 2007)**.** Cho tam giác nhọn ABC với đường tròn tâm I nội tiếp. Gọi (K_a) là đường tròn đi qua A, AK_a vuông góc với BC và (K_a) tiếp xúc trong với (I) tại A_1. Các điểm B_1, C_1 xác định tương tự.

(a) Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại P.

(b) Gọi (J_a), (J_b), (J_c) tương ứng là các đường tròn đối xứng với các đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC qua trung điểm BC, AC, AB. Chứng minh rằng P là tâm đẳng phương của ba đường tròn (J_a), (J_b), (J_c).

Bài tập 15 (Đề TST 1995)**.** Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Lấy sáu điểm A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 phân biệt không trùng với A, B, C và các điểm A_1, A_2 thuộc đường thẳng BC, B_1, B_2 thuộc đường thẳng CA, các điểm C_1, C_2 thuộc đường thẳng AB. Gọi α, β, γ là các số thực xác định bởi $a \cdot \overrightarrow{A_1A_2} = \alpha \cdot \overrightarrow{BC}$, $b \cdot \overrightarrow{B_1B_2} = \beta \cdot \overrightarrow{CA}$, $c \cdot \overrightarrow{C_1C_2} = \gamma \cdot \overrightarrow{AB}$. Xét các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_1C_1, AB_2C_2, BC_1A_1, BC_2A_2, CA_1B_1, CA_2B_2 và gọi d_A, d_B, d_C lần lượt là các trục đẳng phương của cặp đường tròn đi qua A, B, C. Chứng minh rằng d_A, d_B, d_C đồng quy khi và chỉ khi $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$.

Bài tập 16 (Đề TST 2008)**.** Cho k là một số thực. Cho tam giác ABC nhọn, không cân có O là tâm đường tròn ngoại tiếp và AD, BE, CF là các đường phân giác trong của tam giác. Trên các đường thẳng AD, BE, CF lần lượt lấy các điểm L, M, N sao cho

$$\frac{AL}{AD} = \frac{BM}{BE} = \frac{CN}{CF} = k.$$

Gọi (O_1), (O_2), (O_3) lần lượt là các đường tròn đi qua L, tiếp xúc với OA tại A; đi qua M tiếp xúc với OB tại B và đi qua N tiếp xúc với OC tại C.

(a) Chứng minh rằng với $k = \dfrac{1}{2}$, ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có đúng 2 điểm chung.

(b) Tìm tất cả các giá trị của k sao cho 3 đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có đúng 2 điểm chung.

NHÌN HÌNH HỌC BẰNG CON MẮT ĐẠI SỐ

Từ Nguyễn Thái Sơn
HS chuyên Toán khóa 2008 - 2011

Hình học là một bộ phận rất hấp dẫn của Toán học sơ cấp. Chắc hẳn các bạn đều cảm thấy cái hay và thú vị nhất của các bài toán hình học chính là ở những lời giải vô cùng đẹp thuần túy hình học. Thế nhưng để tìm ra một cách giải như vậy không phải ai cũng làm được. Và hướng tự nhiên nhất trong hình học một khi ta không thể tìm được 1 lời giải như vậy chính là đại số. (Trong bài viết này chúng ta chỉ quan tâm các lời giải đại số, không trình bày các cách giải hình học thuần túy). Mục đích của bài viết này chính là góp phần tìm ra hướng đi một khi đã bế tắc trong con đường hình học thuần túy.

Để có thể ứng dụng tốt đại số trong hình học, nói chung có khá nhiều công thức cần phải nắm vững (đa số đều là cơ bản), ta có thể tóm gọn vài công thức cơ bản sau (các công thức quen thuộc khác các bạn có thể đọc trong rất nhiều tài tiệu).

1 Các công thức lượng giác

Cho tam giác ABC. Ta ký hiệu

- a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB của tam giác.
- $2p = a + b + c$ là chu vi của tam giác và $S = S_{ABC}$ là diện tích của tam giác.
- R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác.
- r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính các đường tròn bàng tiếp góc A, B, C.
- l_a, l_b, l_c lần lượt là độ dài các đường phân giác trong góc A, B, C.

Khi đó

- $\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$, $\tan\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$.
- $pr = (p-a)r_a = S$.
- $r_a - r = 4R\sin^2\dfrac{A}{2}$.
- Giả sử AH là đường cao của tam giác. Thế thì

$$BH = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}, \quad CH = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}.$$

- Nếu các góc α, β, α', $\beta' \in [0^\circ,\ 90^\circ]$ thỏa mãn $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ và $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\sin\alpha'}{\sin\beta'}$, thì ta có $\alpha = \alpha'$ và $\beta = \beta'$.

2 Định lý Stewart

Nếu đường $AD = d$ thuộc tam giác ABC chia cạnh BC thành những đoạn $BD = m$ và $CD = n$ thì $d^2a = b^2m + c^2n - amn$.

3 Định lý Van Aubel

Cho tam giác ABC, M là một điểm nằm trong tam giác. AM, BM, CM cắt BC, CA, AB tại A', B', C'. Khi đó ta có hệ thức

$$\frac{C'A}{C'B} + \frac{B'A}{B'C} = \frac{MA}{MA'}.$$

4 Các công thức khoảng cách

Nếu gọi G, H, I, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác ABC, thì ta có

- $9IG^2 = 9r^2 - 3p^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)$.
- $l_a = \dfrac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$.
- $9OG^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.
- $OH = 3OG$.
- $OI^2 = R^2 - \dfrac{abc}{a+b+c}$.
- $HI^2 = 4R^2 - \dfrac{a^3 + b^3 + c^3 + abc}{a+b+c}$.
- $a + b + c = 2p$, $ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr$, $abc = 4pRr$, ...

5 Các định lý: 4 điểm, Carno, Menelaus, Céva và Céva-sin

- **Định lý 4 điểm:** Cho 4 điểm A, B, C, D trong mặt phẳng. Khi đó AB vuông góc CD nếu và chỉ nếu $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$.
- **Định lý Carno:** Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Các đường thẳng qua M vuông góc BC, qua N vuông góc CA, qua P vuông góc AB đồng quy khi và chỉ khi

$$MB^2 - MC^2 + NC^2 - NA^2 + PA^2 - PB^2 = 0.$$

- **Định lý Menelaus:** Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Ta có M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$

- **Định lý Céva:** Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Ta có AM, BN, CP đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1.$$

  Hệ thức trên còn có thể viết dưới *dạng lượng giác* là

$$\frac{\sin\angle MAB}{\sin\angle MAC} \cdot \frac{\sin\angle NBC}{\sin\angle NBA} \cdot \frac{\sin\angle PCA}{\sin\angle PCB} = 1.$$

6 Hàng điểm điều hòa và các hệ thức liên quan

Cho $(ABCD) = -1$, I là trung điểm AB, K là trung điểm CD. Khi đó ta có các hệ thức cơ bản sau

- $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -1.$
- **Hệ thức Decartes:** $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}.$
- **Hệ thức Newton:** $\overline{IA}^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID}.$
- **Hệ thức Macloranh:** $\overline{AB} \cdot \overline{AK} = \overline{AC} \cdot \overline{AD}.$

Ngoài ra, ta có còn có một hệ thức đơn giản sau: Cho $(ABCD) = -1$ và K là trung điểm của CD. Khi đó

$$\frac{\overline{KC}}{\overline{KB}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}, \quad \frac{\overline{KA}}{\overline{KB}} = \left(\frac{KC}{KB}\right)^2.$$

CHỨNG MINH. Do $(ABCD) = -1$ và K là trung điểm CD nên theo hệ thức Newton, ta có $KC^2 = KD^2 = \overline{KC}^2 = \overline{KD}^2 = \overline{KA} \cdot \overline{KB}$. Từ đó suy ra

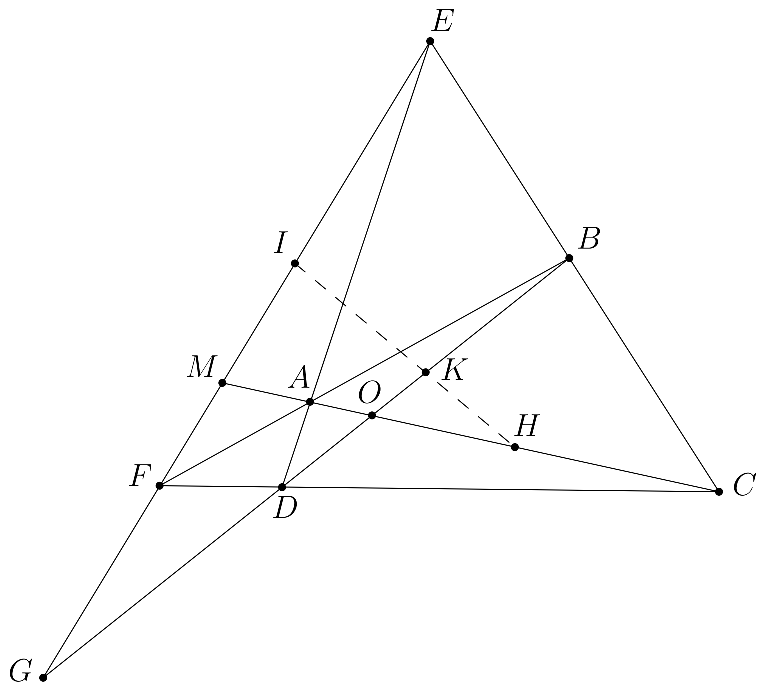
$$\frac{\overline{KC}}{\overline{KB}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \text{ và } \frac{\overline{KA}}{\overline{KB}} = \left(\frac{KC}{KB}\right)^2.$$

Các hệ thức được chứng minh. □

Sau đây là một ứng dụng nhỏ của hai hệ thức vừa được chứng minh.

Ví dụ 1 (Đường thẳng Gauss)**.** *Cho tứ giác toàn phần $ABCDEF$ có ba đường chéo EF, AC, BD. Gọi H, I, K là các trung điểm của EF, BD, AC. Chứng minh rằng các điểm H, I, K cùng nằm trên một đường thẳng.*

LỜI GIẢI.



Gọi G là giao điểm BD và EF, O là giao điểm của AC và BD. Hướng tự nhiên nhất để tiếp cận bài toán trên chính là sử dụng định lý Menelaus cho tam giác MGO để chứng minh I, H, K thẳng hàng. Chú ý rằng

$$(GMEF) = -1, \quad (MOAC) = -1, \quad (GODB) = -1.$$

Áp dụng các hệ thức trên, ta thu được

$$\frac{\overline{IM}}{\overline{IG}} = \left(\frac{FM}{FG}\right)^2, \quad \frac{\overline{HO}}{\overline{HM}} = \left(\frac{CO}{CM}\right)^2, \quad \frac{\overline{KG}}{\overline{KO}} = \left(\frac{DG}{DO}\right)^2.$$

Nhân lại theo vế, ta thu được

$$\frac{\overline{IM}}{\overline{IG}} \cdot \frac{\overline{HO}}{\overline{HM}} \cdot \frac{\overline{KG}}{\overline{KO}} = \left(\frac{FM}{FG} \cdot \frac{CO}{CM} \cdot \frac{DG}{DO}\right)^2.$$

Đến đây, áp dụng định lý Menelaus cho tam giác MGO với cát tuyến CDF, ta có ngay

$$\frac{FM}{FG} \cdot \frac{CO}{CM} \cdot \frac{DG}{DO} = 1.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán trên có nhiều cách giải khác rất độc đáo bằng cách dựng yếu tố phụ nhưng ta có thể thấy hướng trên là rất tự nhiên.

8 Một số hệ thức khác

Bổ đề 1. *Cho tứ giác $ABCD$. M, N là các điểm nằm trên hai đoạn AD, BC sao cho $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC} = \frac{m}{n}$. Khi đó*

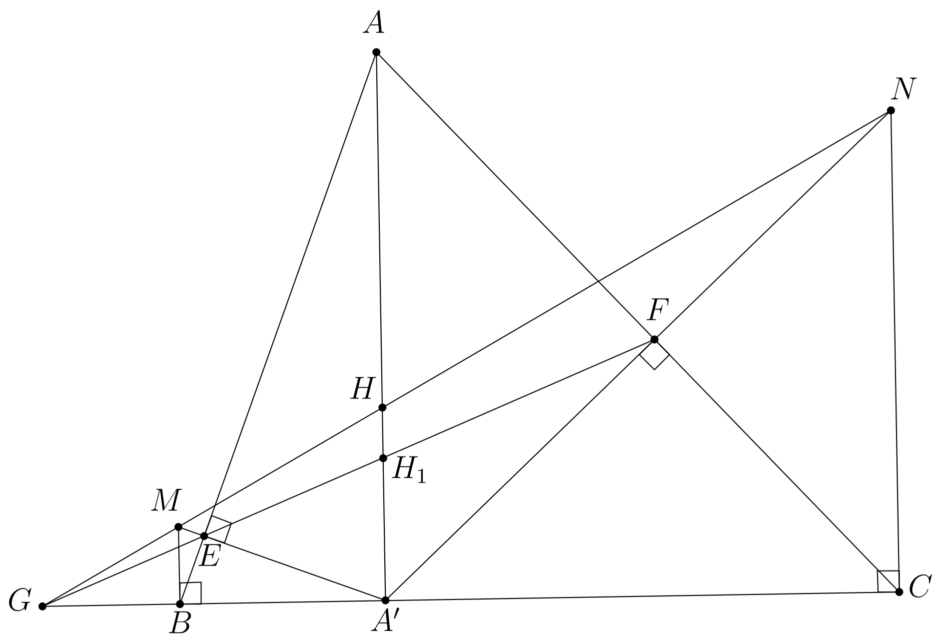
$$\overrightarrow{MN} = \frac{n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{DC}}{m+n}.$$

Đặc biệt khi $ABCD$ là hình thang thì $MN = \frac{nAB + mDC}{m+n}$.

Chứng minh bổ đề trên là rất đơn giản, ta thử xét ví dụ sau là một bài toán rất dễ để bước đầu thấy được ứng dụng của bổ đề 1.

Ví dụ 2. *Cho tam giác ABC, đường cao AA'. Hạ $A'E$, $A'F$ vuông góc với BC tại E, F. Từ B và C, lần lượt kẻ các đường vuông góc với BC cắt $A'E$, $A'F$ tại M, N. Chứng minh rằng MN đi qua trực tâm H của tam giác ABC.*

LỜI GIẢI.



Do MB, NC song song với AA' nên $\frac{MB}{AA'} = \frac{EB}{EA} = \frac{A'B^2}{AA'^2}$, suy ra $MB = \frac{A'B^2}{AA'}$. Tương tự ta cũng có $MC = \frac{A'C^2}{AA'}$.

Giả sử MN cắt AA' tại H'. Theo bổ đề 1 ta có

$$A'H = \frac{A'C \cdot BM + A'B \cdot CM}{BC} = \frac{A'B \cdot A'C}{BC}.$$

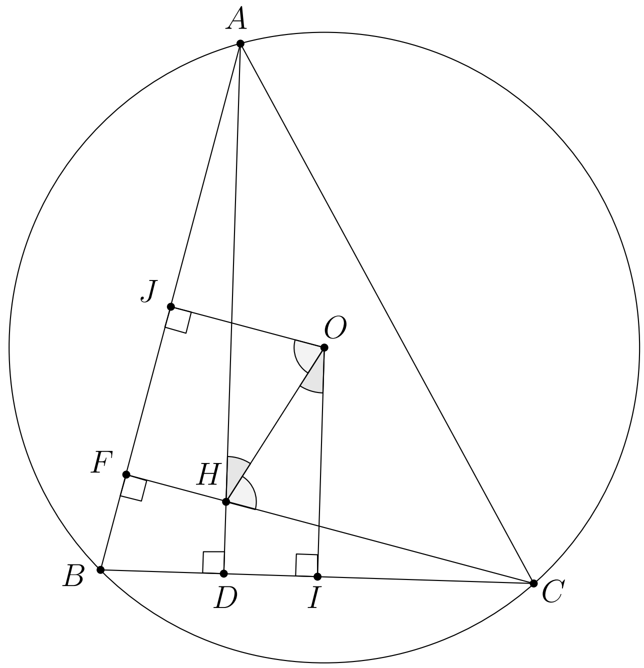
Suy ra $A'H \cdot AA' = A'B \cdot A'C$, hay tam giác $BA'H$ đồng dạng tam giác $AA'C$. Từ đây ta có BH' vuông góc với AC, hay $H' \equiv H$ (đpcm). $\square$

Kế đến, ta có một bổ đề liên quan đến đường thẳng Euler của tam giác.

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC. O, H, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm và trọng tâm của tam giác. Giả sử $AC > AB$, $AC > BC$. Khi đó ta có*

$$\frac{BC(AC^2 - BC^2)}{AB(AC^2 - AB^2)} = \frac{\sin(B-A)}{\sin(B-C)} = \frac{\sin \angle OHC}{\sin \angle OHA}.$$

CHỨNG MINH.



Ta có

$$\begin{aligned}\sin(B-A) &= \sin B \cos A - \sin A \cos B \\ &= \frac{AC}{2R} \cdot \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} - \frac{BC}{2R} \cdot \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} \\ &= \frac{1}{2R} \cdot \frac{AC^2 - BC^2}{AB}.\end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có $\sin(B-C) = \dfrac{1}{2R} \cdot \dfrac{AC^2 - AB^2}{BC}$. Do đó

$$\frac{\sin(B-A)}{\sin(B-C)} = \frac{BC(AC^2 - BC^2)}{AB(AC^2 - AB^2)}.$$

Ta còn phải chứng minh

$$\frac{BC(AC^2 - BC^2)}{AB(AC^2 - AB^2)} = \frac{\sin \angle OHC}{\sin \angle OHA}.$$

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, BA. Dễ thấy $\sin \angle OHC = \sin \angle HOJ$ và $\sin \angle OHA = \sin \angle HOI$, do đó

$$\frac{\sin \angle OHC}{\sin \angle OHA} = \frac{\sin \angle HOJ}{\sin \angle HOI} = \frac{FJ}{OH} \cdot \frac{OH}{DI} = \frac{FJ}{DI}.$$

Từ đây suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{FJ}{DI} = \frac{BC(AC^2 - BC^2)}{AB(AC^2 - AB^2)}. \quad (1)$$

Ta có $JF = JB - BF = \dfrac{AB}{2} - \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB} = \dfrac{AC^2 - BC^2}{2AB}$, và tương tự

$$ID = \frac{AC^2 - AB^2}{2BC}.$$

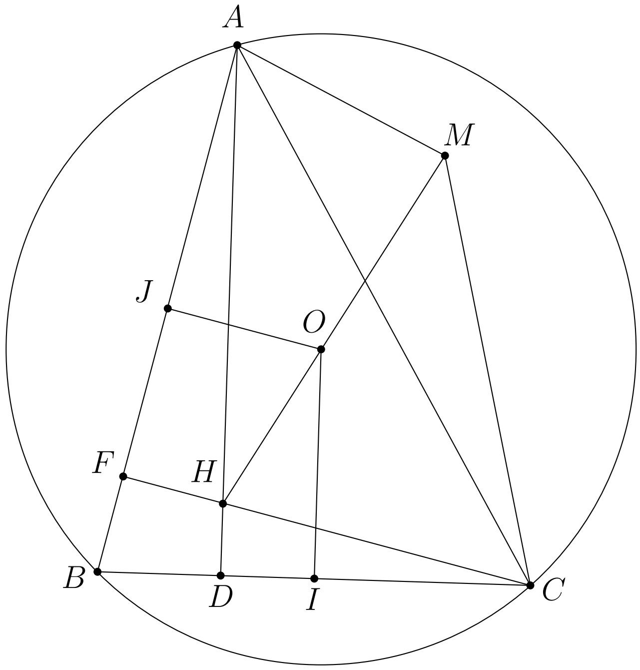
Do đó (1) hiển nhiên đúng. Bổ đề được chứng minh. □

Hệ thức trên cho ta cái nhìn đại số về đường thẳng Euler (HO chính là đường thẳng Euler). Việc dựng thêm các đường vuông góc như trên cũng là cách làm quen thuộc trong phương pháp dùng đại số để giải hình học.

Sau đây, ta xem xét vài ứng dụng nhỏ của hệ thức trên.

Ví dụ 3. *Cho tam giác ABC có $B > A$, $B > C$. Về cùng một nửa mặt phẳng bờ AC, dựng các tia Ax, Cy sao cho $\angle BAx = \angle ABC = \angle BCy$, Cy cắt Ax tại M. Chứng minh rằng M nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.*

Lời giải. Nhận xét rằng bài toán trên có cách phát biểu khá thuần túy hình học, nhưng có lẽ đại số là cách tiếp cận tự nhiên hơn cho bài toán này.



Một cách tiếp cận khá tự nhiên là tìm cách chứng minh $\angle AHM = \angle AHO$. Với góc $\angle AHM$ thì ta hoàn toàn xác định được khá đẹp mắt và gọn gàng với bổ đề trên, từ đó ta hoàn toàn có thể tin tưởng bài toán sẽ có lời giải ngắn gọn bằng đại số.

Để xử lý $\angle AHO$, ta dùng định lý Céva dạng sin cho tam giác AHM (ý tưởng hoàn toàn đơn giản và rất tự nhiên). Nối HM, khi đó các đường thẳng Ax, HM, Cy đồng quy tại M. Từ đó suy ra

$$\frac{\sin\angle MAH}{\sin\angle MAC}\cdot\frac{\sin\angle MCA}{\sin\angle MCH}\cdot\frac{\sin\angle MHC}{\sin\angle MHA}=1.$$

Do $\angle MCH=\angle MAH$ nên ta có $\dfrac{\sin\angle MCA}{\sin\angle MAC}\cdot\dfrac{\sin\angle MHC}{\sin\angle MHA}=1$, suy ra

$$\frac{\sin\angle MCA}{\sin\angle MAC}=\frac{\sin\angle MHA}{\sin\angle MHC}=\frac{\sin(B-C)}{\sin(B-A)}.$$

Theo bổ đề trên, ta thấy ngay M nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC. □

NHẬN XÉT. Một hướng giải quyết khác cũng rất tự nhiên cho bài toán trên là sử dụng phương pháp vector:

- Gọi E là giao điểm của CM và AB, F là giao điểm của AM và BC, G là trọng tam của tam giác ABC. Sau đó, sử dụng định lý Menelaus cho các tam giác cân, ta biểu diễn được các vector $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{CM}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$.
- Sử dụng hệ thức $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{GM}$ để biểu diễn $\overrightarrow{GM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$.
- Sau đó chú ý $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}=3\overrightarrow{GO}$, rồi từ đó chứng minh $\overrightarrow{GM}\uparrow\uparrow\overrightarrow{GO}$.

Đôi khi trong phương pháp này ta không cần tính tường minh các đại lượng mà nên khéo léo sử dụng cách gián tiếp, tức là vẫn để một số đại lượng như ẩn số và làm sao cho biểu thức cuối cùng, các đại lượng đó bị triệt tiêu.

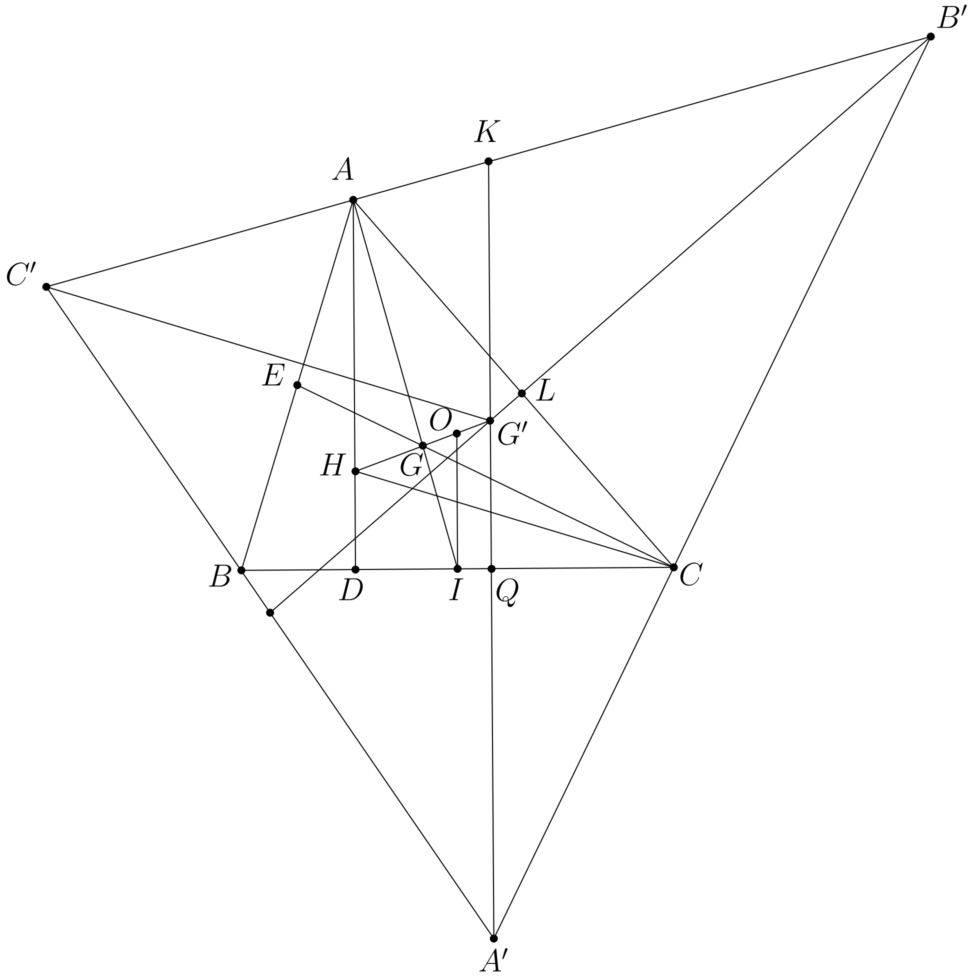
Sau đây là một ví dụ tương tự khác với kỹ thuật và hướng giải vẫn rất tự nhiên, dễ dàng.

Ví dụ 4. *Cho tam giác ABC nhọn, có H, G lần lượt là trực tâm và trọng tâm của tam giác. Qua A, B, C lần lượt kẻ các đường thẳng d_a, d_b, d_c vuông góc với GA, GB, GC. d_a cắt d_b tại C', tương tự ta có A' và B'. Gọi G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng G' nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.*

LỜI GIẢI. Để giải bài này, trước hết ta cần gọi thêm một số yếu tố phụ:

- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
- D, E, F lần lượt là chân các đường cao hạ từ A, B, C của tam giác ABC.
- $A'G'$, $B'G'$, $C'G'$ cắt $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ tại K, N, M.
- I, J, S lần lượt là trung điểm của BC, AB, CA.

Dễ dàng dự đoán rằng $A'G'\perp BC$ (tương tự các đoạn còn lại) và đây chính là sự thuận lợi cho ta trong việc dùng đại số. Để chứng minh điều này, ta có khá nhiều cách, bằng lượng giác hoặc vector, ở đây tôi trình bày lời giải theo hướng vector.



Ta có

$$2\overrightarrow{A'K}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}\right)\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}\right)=\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{A'C'}\cdot\overrightarrow{GC}.$$

Nhận xét rằng

$$\cos\left(\overrightarrow{A'B'},\ \overrightarrow{BG}\right)=-\cos\left(\overrightarrow{A'C'},\ \overrightarrow{GC}\right). \tag{1}$$

Thật vậy, do

$$\left(\overrightarrow{A'B'},\ \overrightarrow{BG}\right)=\left(\overrightarrow{A'B'},\ \overrightarrow{GC}\right)+\left(\overrightarrow{GC},\ \overrightarrow{BG}\right)=-\frac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{GC},\ \overrightarrow{BG}\right)\pmod{2\pi}$$

và

$$\left(\overrightarrow{A'C'},\ \overrightarrow{GC}\right)=\left(\overrightarrow{A'C'},\ \overrightarrow{BG}\right)+\left(\overrightarrow{BG},\ \overrightarrow{GC}\right)=-\frac{\pi}{2}-\left(\overrightarrow{GC},\ \overrightarrow{BG}\right)\pmod{2\pi},$$

nên $\left(\overrightarrow{A'B'},\ \overrightarrow{BG}\right)+\left(\overrightarrow{A'C'},\ \overrightarrow{GC}\right)=-\pi\pmod{2\pi}$. Từ đây ta có (1).

Từ (1) suy ra để chứng minh $2\overrightarrow{A'K}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, ta chỉ cần chứng minh được

$$A'B'\cdot GC=A'C'\cdot GB,\ \text{hay}\ \frac{A'B'}{A'C'}=\frac{CG}{BG}.$$

Dễ thấy
$$\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{\sin \angle A'C'B'}{\sin \angle A'B'C'} = \frac{\sin \angle AGB}{\sin \angle AGC} = \frac{\sin \angle IGB}{\sin \angle IGC}. \tag{2}$$
Mặt khác, trong tam giác GBC, $S_{GBI} = S_{GCI}$, suy ra $BG \sin \angle BGI = CG \sin \angle CGI$. Do đó
$$\frac{BG}{CG} = \frac{\sin \angle IGC}{\sin \angle IGB}. \tag{3}$$
Từ (2) và (3), suy ra $A'G' \perp BC$. Chứng minh tương tự, ta được
$$A'G' \perp BC, \quad B'G' \perp AC, \quad C'G' \perp AB. \tag{4}$$

Áp dụng kỹ thuật tương tự như trên, ta chứng minh G' nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC bằng cách sử dụng định lý Céva-sin trong tam giác AHC. Ta có
$$\frac{\sin \angle G'AH}{\sin \angle G'AC} \cdot \frac{\sin \angle G'CA}{\sin \angle G'CH} \cdot \frac{\sin \angle G'HC}{\sin \angle G'HA} = 1.$$
Mà dễ thấy do (4) nên ta áp dụng kỹ thuật gián tiếp
$$\frac{\sin \angle G'AH}{\sin \angle G'CH} \cdot \frac{\sin \angle G'CA}{\sin \angle G'AC} = \frac{\sin \angle G'AH}{\sin \angle G'CH} \cdot \frac{G'A}{G'C} = \left(\frac{DQ}{G'A} \cdot \frac{G'C}{JF}\right) \cdot \frac{G'A}{G'C} = \frac{DQ}{JF}.$$

Ta đã triệt tiêu được các đại lượng $G'A$ và $G'C$. Và như thế, công việc còn lại bây giờ chỉ là chứng minh
$$\frac{DQ}{JF} = \frac{AB(AC^2 - AB^2)}{BC(AC^2 - BC^2)}, \tag{5}$$
để từ đó suy ra $\dfrac{\sin \angle G'HA}{\sin \angle G'HC} = \dfrac{DQ}{JF} = \dfrac{AB(AC^2 - AB^2)}{BC(AC^2 - BC^2)}$. Áp dụng bổ đề, ta sẽ có ngay điều phải chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh (5). Để tính $\dfrac{DQ}{JF}$, ta vẫn có thể sử dụng phương pháp gián tiếp (dành cho các bạn), nhưng ở đây việc tính toán khá đơn giản và ta sẽ tính trực tiếp để thấy được một vài tính chất của điểm G'. Ý tưởng của ta là tính cụ thể các đoạn BQ và CQ. Ta có $\angle GBC = \angle BA'G'$ và $\angle GCB = \angle G'A'C$ nên
$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{\sin \angle BC'A}{\sin \angle CBA'} = \frac{\cos \angle GBC}{\cos \angle GCB}.$$

Đến đây bằng cách sử công thức trung tuyến cho tam giác ABC và định lý hàm số cosin cho tam giác BGC, ta có
$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{BG}{CG} \cdot \frac{AC^2 + 3BC^2 - AB^2}{AB^2 + 3BC^2 - AC^2} \text{ (chú ý rằng } \frac{BG}{CG} = \frac{\sin \angle GBC}{\sin \angle GCB}). \tag{6}$$

Lại có $A'B \sin \angle BA'G' = BQ$ và $A'C \sin \angle CA'G' = CQ$, nên
$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{\sin \angle BA'G'}{\sin \angle CA'G'} = \frac{BQ}{CQ} = \frac{CG}{BG} \cdot \frac{A'B}{A'C}.$$

Kết hợp với (6), ta được

$$\frac{BQ}{CQ} = \frac{AC^2 + 3BC^2 - AB^2}{AB^2 + 3BC^2 - AC^2}.$$

Mặt khác, do $BQ + CQ = BC$ nên từ đây ta dễ dàng tính được $BQ = \dfrac{AC^2 + 3BC^2 - AB^2}{6BC}$, suy ra

$$DQ = \frac{2(AC^2 - AB^2)}{3BC}.$$

Tương tự, ta cũng có $JF = \dfrac{2(AC^2 - BC^2)}{3AB}$. Từ đó rõ ràng

$$\frac{DQ}{JF} = \frac{AB(AC^2 - AB^2)}{BC(AC^2 - BC^2)},$$

và như vậy ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Từ việc tính DQ, CQ ta còn có thể chỉ ra vị trí hình học của điểm G'. Thật vậy, ta có $DQ = \dfrac{2(AC^2 - AB^2)}{3BC}$ mà $ID = \dfrac{AC^2 - AB^2}{BC}$ nên dễ thấy

$$DQ = \frac{4}{3}ID.$$

Từ đây sử dụng định lý Thalès, ta có $\dfrac{HG'}{HO} = \dfrac{DQ}{ID} = \dfrac{4}{3}$, suy ra

$$HG' = \frac{4}{3}HO = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}HG = 2HG.$$

Vậy G là trung điểm của HG' hay G' đối xứng H qua G.

Công cụ đại số còn thể hiện được sức mạnh trong những bài toán có yếu tố đường tròn. Ta xét ví dụ sau dể hiểu rõ điều này.

Ví dụ 5. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R), D là một điểm nằm trong đoạn BC. Gọi (O', r_1), (O'', r_2) lần lượt là đường tròn tiếp xúc với (O), BC và AD (hai đường tròn (O', r_1), (O'', r_2) được gọi là đường tròn Mixtilinear của các tam giác ABD và ACD). Chứng minh rằng*

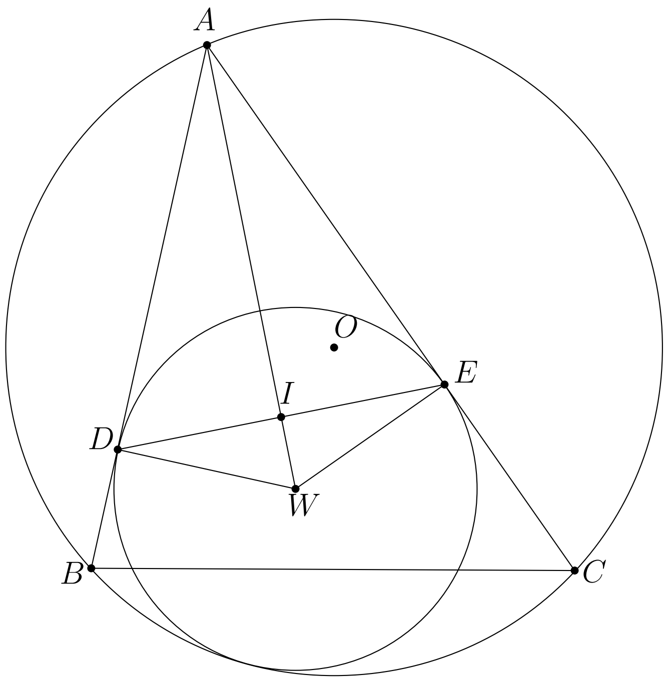
$$r = r_1 \cos^2 \frac{\angle ADB}{2} + r_2 \cos^2 \frac{\angle ADC}{2}.$$

Lời giải. Để có thể giải quyết thành công bài toán này, ta cần có định lý Lyness cho tứ giác và bổ đề Sawayama.

Định lý Lyness. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Gọi (w_a, p_a) là đường tròn vừa tiếp xúc (O) vừa tiếp xúc với hai cạnh AB và AC tại E, F. Khi đó ta có*

(1) $p_a = \dfrac{r}{\cos^2 \dfrac{\angle BAC}{2}}$;

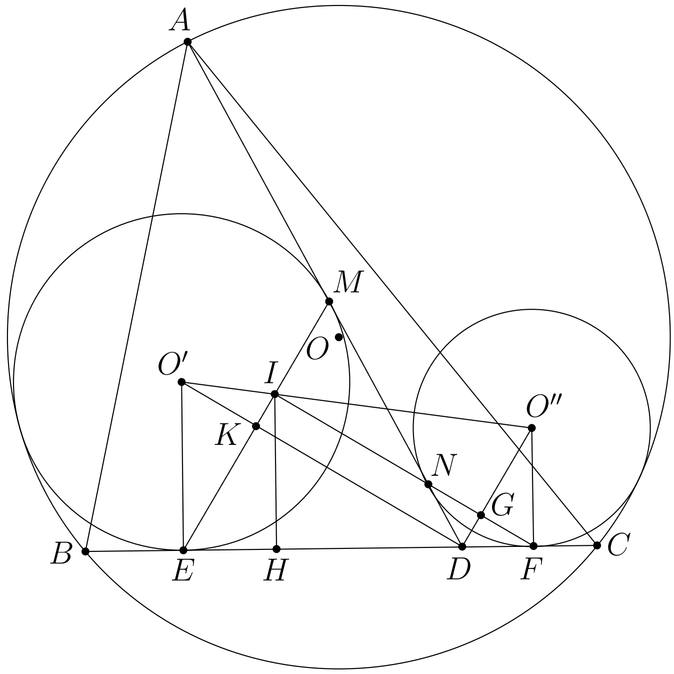
(2) Trung điểm của EF là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



Với (1) ta có thể chứng minh được (2) bằng phương pháp đại số.

Bổ đề Sawayama. *Cho (O) và một đường tròn (I) tiếp xúc trong với (O) tại M. Hai dây cung AC, BD của (O) tiếp xúc (I) tại E, F. Khi đó tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ABC và DBC nằm trên đường thẳng EF.*

Bây giờ, ta đi chứng minh bài toán đã cho. Để cho gọn, ta đặt $\alpha = \dfrac{\angle ADB}{2}$, $\beta = \dfrac{\angle ADC}{2}$, khi đó $\alpha + \beta = 90°$. Không mất tính tổng quát, giả sử $DB > DC$ và (O') tiếp xúc BC, AD tại E, M; (O'') tiếp xúc BC, AD tại F, N.



Dễ thấy $EM \perp NF$. Giả sử ME cắt $O'O''$ tại I', ME cắt $O'D$ tại K, NF cắt $O''D$ tại G, ta có

$$\frac{I'O'}{O'O''} = \frac{KO'}{O'D} = \left(\frac{O'E}{O'D}\right)^2 = \sin^2\alpha.$$

Bây giờ, gọi I'' là giao điểm của $O'O''$ và NF thì ta cũng có

$$\frac{I''O'}{O'O''} = \frac{DG}{DO''} = \left(\frac{DF}{DO''}\right)^2 = \cos^2\beta.$$

Mà $\sin^2\alpha = \cos^2\beta$ nên $\dfrac{I'O'}{O'O''} = \dfrac{I''O'}{O'O''}$, suy ra $I' \equiv I''$. Theo bổ đề Sawayama, ta có $I' \equiv I'' \equiv I$. Từ đó suy ra

$$\frac{IO'}{O'O''} = \sin^2\alpha = \cos^2\beta.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{IO''}{O'O''} = \sin^2\beta = \cos^2\alpha.$$

Áp dụng bổ đề 1, ta có

$$r = \frac{O'E \cdot O''I + OF \cdot O'I}{O'O''} = r_1 \cdot \frac{O''I}{O'O''} + r_2 \cdot \frac{O'I}{O'O''} = r_1 \cos^2\alpha + r_2 \cos^2\beta.$$

Phép chứng minh hoàn tất. □

Nhận xét. Bài toán chưa dừng lại ở đây, ta hoàn toàn có thể khai thác thêm nữa: Hạ $IH \perp BC$, ta có $EH = r\tan\alpha$ và $FH = r\tan\beta$. Bây giờ đặt $DH = x$, ta tính được

$$DE = r\tan\alpha + x \text{ và } DF = r\tan\beta - x.$$

Suy ra

$$r_1 = DE\tan\alpha = r\tan^2\alpha + x\tan\alpha, \quad r_2 = DF\tan\beta = r\tan^2\beta - x\tan\beta.$$

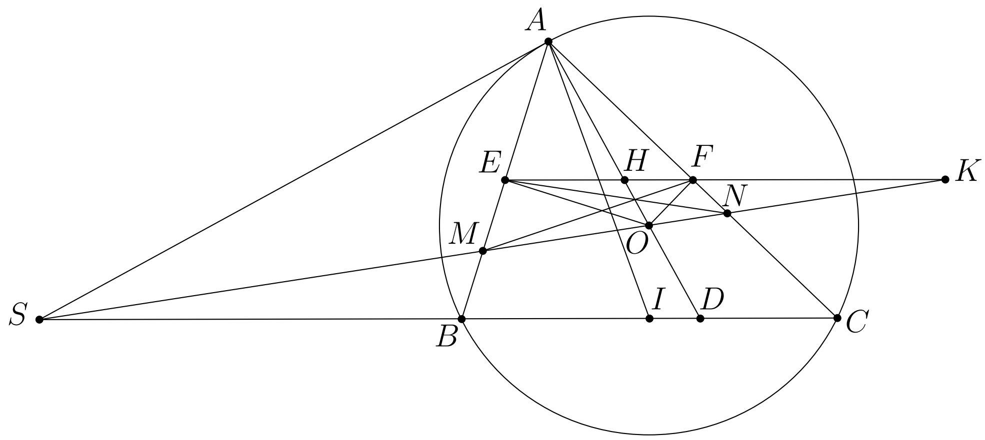
Từ đây với các vị trí đặc biệt của D ta hoàn toàn có thể xác định được r_1, r_2.

Hệ thức trên cho ta liên hệ đẹp giữa r_1, r_2, r và sẽ rất có lợi trong các bài toán về đường tròn Mixtilinear. Chẳng hạn ta có thể dùng nó để giải quyết bài toán: *Khi D là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc BAC với BC thì $r_1 = r_2 = r$.*

Để kết thúc bài viết, tôi xin nêu một ví dụ cuối cùng với hai lời giải đều "đại số".

Ví dụ 6. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O, R) có $\angle C < \angle B < 90°$. Tiếp tuyến của (O) tại A cắt BC tại S. SO cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC. Chứng minh rằng NE, MF, AO đồng quy.*

Lời giải. Bài toán trên giải bằng phương pháp hình học thuần túy khá ngắn gọn và dễ dàng. Ở đây ta xem xét nó dưới góc độ đại số.



Cách 1. Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Dễ thấy B nằm giữa S và C. Giả sử SO cắt EF tại K, AO cắt EF tại H. Hướng giải tự nhiên nhất của ta là sử dụng định lý Céva để chứng minh NE, MF, AO đồng quy, tức là cần chứng minh

$$\frac{OM}{ON} \cdot \frac{FN}{FA} \cdot \frac{EA}{EM} = 1.$$

Muốn vậy ta phải chứng minh được $(MNOK) = -1$ để suy ra $\dfrac{OM}{ON} = \dfrac{KM}{KN}$ và từ đó áp dụng định lý Menelaus (với chú ý F, E, K thẳng hàng), ta sẽ có

$$\frac{OM}{ON} \cdot \frac{FN}{FA} \cdot \frac{EA}{EM} = \frac{KM}{KN} \cdot \frac{FN}{FA} \cdot \frac{EA}{EM} = 1,$$

tức là bài toán được chứng minh.

Dễ thấy $(MNOK) = -1$ khi và chỉ khi $(EFHK) = -1$, hay

$$\frac{HE}{HF} = \frac{KE}{KF}. \tag{1}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh (1) là đủ. Hạ $OI \perp BC$, đặt $\angle IAO = \alpha$ và $\angle AIO = \beta$ (dễ thấy α, $\beta < 90^\circ$). Ta có

$$SA = \frac{abc}{b^2 - c^2}, \quad SB = \frac{ac^2}{b^2 - c^2}, \quad SC = \frac{ab^2}{b^2 - c^2}.$$

Đến đây đặt tiếp $OI = d = R\cos A$, ta được $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{SA\sin\alpha}{SB\sin\beta} = \dfrac{b\sin\alpha}{a\sin\beta} = \dfrac{bR}{cd}$, suy ra

$$\frac{ME}{MB} = \frac{bR - cd}{2cd}.$$

Tương tự ta cũng có

$$\frac{NE}{NB} = \frac{cR - bd}{2bd}.$$

Do KE song song với BC nên áp dụng định lý Thalès ta có

$$KE = \frac{ac(bR - cd)}{2d(b^2 - c^2)}, \quad KF = \frac{ba(cR - bd)}{2d(b^2 - c^2)},$$

suy ra

$$\frac{KE}{KF} = \frac{c(bR - cd)}{b(cR - bd)}. \tag{2}$$

Bây giờ, gọi D là giao điểm của AO và BC, ta tính được

$$\frac{HE}{HF} = \frac{DE}{DF} = \frac{c\cos C}{b\cos B}. \tag{3}$$

Kết hợp (2) và (3), ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{c(bR - cd)}{b(cR - bd)} = \frac{c\cos C}{b\cos B}.$$

Hệ thức này hiển nhiên đúng (có thể kiểm tra dễ dàng bằng biến đổi tương đương). Do đó bài toán được chứng minh xong. □

Cách 2. Cũng giống như cách 1, ý tưởng của ta là chứng minh $\frac{OM}{ON} \cdot \frac{FN}{FA} \cdot \frac{EA}{EM} = 1$ để từ đó áp dụng định lý Céva suy ra kết quả bài toán.

Hệ thức trên tương đương với

$$\frac{OM}{ON} \cdot \frac{FN}{EM} = \frac{FA}{EA} = \frac{AC}{AB}.$$

Do $FN = ON\cos\angle ANM$ và $EM = OM\cos\angle AMN$ nên ta có

$$\frac{OM}{ON} \cdot \frac{ON\cos\angle ANM}{OM\cos\angle AMN} = \frac{AC}{AB}, \text{ hay } \frac{\cos\angle AMN}{\cos\angle ANM} = \frac{AB}{AC}. \tag{4}$$

Chứng minh (4) rất đơn giản và có rất nhiều cách, ở đây chúng ta giải trên tinh thần đại số. Ta có

$$\begin{aligned}\cos\angle AMN = \cos(\alpha + C) &= \cos C\cos\alpha - \sin C\sin\alpha \\ &= \cos C\sin\angle AIB - \sin C\cos\angle AIB \\ &= \sin(\angle AIB - C) = \sin\angle IAC.\end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có $\cos\angle ANM = \sin\angle IAB$. Mà $AB\sin\angle IAB = AC\sin\angle IAC$ nên

$$\frac{\cos\angle AMN}{\cos\angle ANM} = \frac{\sin\angle IAC}{\sin\angle IAB} = \frac{AB}{AC}.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

NHẬN XÉT. Bài toán trên không cần tới các giả thiết tam giác nhọn và $\angle C < \angle B < 90°$.

9 Bài tập

Ý tưởng đại số trong hình học luôn tự nhiên và đẹp đẽ, hy vọng qua các ví dụ trên các bạn đã phần nào hình dung được cách ứng dụng linh hoạt của đại số trong hình học (ở đây đại số khác với tọa độ). Để kết thúc xin mời các bạn thử giải các bài toán sau bằng cách đại số.

Bài tập 1. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp tâm I; I_1, I_2, I_3 là tâm các đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C. Ký hiệu $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI}$, tương tự với $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$. Gọi (K_1), (K_2), (K_3) lần lượt là ảnh của (I_1), (I_2), (I_3) qua các phép tịnh tiến theo các vector $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$. Chứng minh rằng tâm đẳng phương của (K_1), (K_2), (K_3) nằm trên đường thẳng IG với G là trọng tâm tam giác ABC.

Bài tập 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Các đường trung trực của AB, AC cắt trung tuyến AM lần lượt tại D, E và cắt nhau tại F. Chứng minh rằng bốn điểm O, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

Bài tập 3. Cho tứ giác $ABCD$ có $\angle DAB = \angle DCB = \frac{\pi}{2}$. BD cắt AC tại E. Gọi O_1 và O_2 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và CDE. Chứng minh rằng trung điểm của O_1O_2 nằm trên BD.

Tài liệu tham khảo

[1] Đoàn Quỳnh, *Số phức với hình học phẳng*, Nhà xuất bản Giáo Dục, 1999.

[2] Christopher J. Bradley, *Challenges in Geometry: for Mathematical Olympians Past and Present*, Oxford University Press, 2005.

[3] Paul Yiu, *Introduction to the Geometry of the triangle*, 2001.
[LINK: `http://math.fau.edu/Yiu/GeometryNotes020402.ps`]

[4] Kiran S. Kedlaya, *Notes on Euclidean Geometry*, 1999.
[LINK: `http://math.mit.edu/~kedlaya/geometryunbound/geom-080399.pdf`]

[5] Kiran S. Kedlaya, *Geometry Unbound*, 2006.
[LINK: `http://math.mit.edu/~kedlaya/geometryunbound/gu-060118.pdf`]

[6] Roger A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Publications, 1960.

NGUỒN GỐC BÀI TOÁN HÌNH HỌC SỐ 5 TRONG ĐỀ THI VIỆT NAM TST 2009

Lê Bá Khánh Trình
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên thành phố Hồ Chí Minh

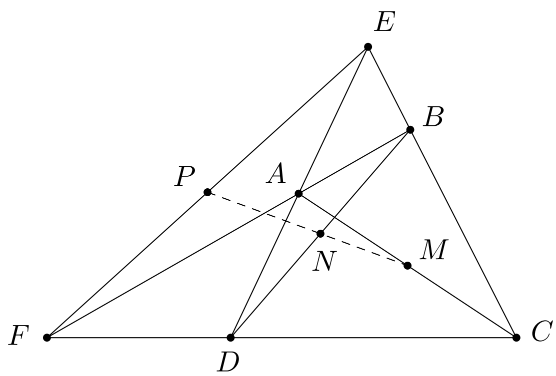
LỜI TỰA. *Seminar các phương pháp Toán sơ cấp được thành lập bởi một số giáo viên chuyên Toán tại thành phố Hồ Chí Minh và các tỉnh lân cận, sinh hoạt đều đặn cách tuần vào các sáng chủ nhật (trừ một số ngắt quãng bất đắc dĩ). Kể từ tháng 10/2007 đến nay, qua 3 năm hoạt động đã tổ chức được trên dưới 50 seminar với các chủ đề đa dạng của Toán học phổ thông: Giải tích, Đại số, Hình học, Tổ hợp, Số học, ứng dụng Toán học, giới thiệu về Toán cao cấp.*

Bài viết dưới đây được TS Lê Bá Khánh Trình trình bày tại seminar ngày 26/9, được ghi lại và bổ sung bởi bạn Lê Phúc Lữ. Qua bài viết nhỏ này, chúng ta có thể nhìn thấy quá trình hình thành và kiểm định của một bài toán như thế nào. Học con đường tư duy của người khác chính là bước mở đầu của những sáng tạo.

1 Một số định lý mở đầu

1.1 Đường thẳng Gauss

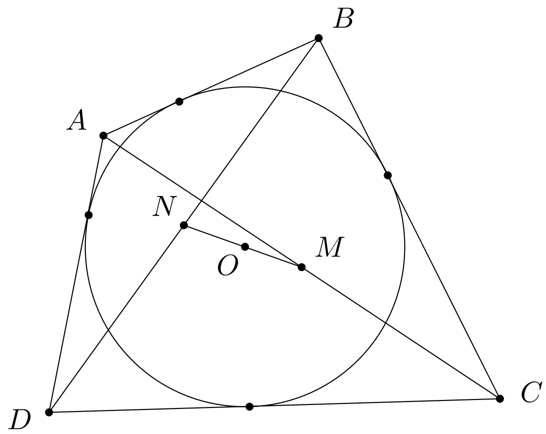
Cho tứ giác $ABCD$ có E, F lần lượt là giao điểm các đường thẳng chứa các cặp cạnh đối nhau là AB và CD; AD và BC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BD, EF. Khi đó ta có M, N, P thẳng hàng và đường thẳng đi qua chúng được gọi là *đường thẳng Gauss* của tứ giác $ABCD$.



Cách chứng minh quen thuộc của định lý này là dùng tỉ số diện tích. Đây cũng chính là một trong các tính chất quan trọng của tứ giác toàn phần.

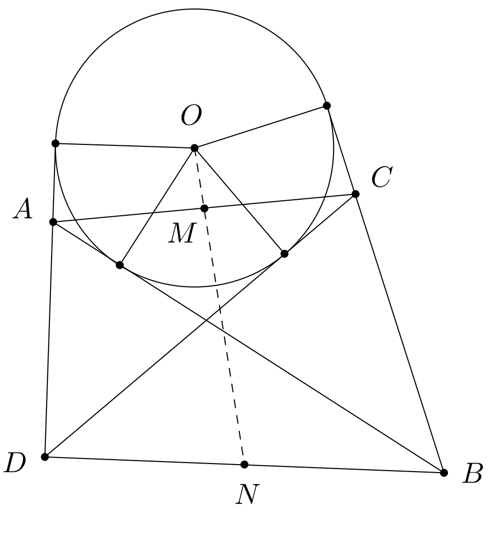
1.2 Đường thẳng Newton trong tứ giác ngoại tiếp

Cho tứ giác $ABCD$ lồi ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD. Khi đó ta có ba điểm M, O, N thẳng hàng và đường thẳng đi qua chúng được gọi là *đường thẳng Newton.*



Tính chất quan trọng về tứ giác ngoại tiếp này có liên quan đến bài toán tìm quỹ tích các điểm K nằm trong mặt phẳng sao cho tổng diện tích của hai tam giác KAB và KCD bằng tổng diện tích hai tam giác KBC và KDA, tập hợp đó chính là đường thẳng đi qua trung điểm hai đường chéo; ta dễ dàng thấy rằng tâm O đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$ có tính chất đó nên O cũng phải nằm trên đường thẳng MN hay M, O, N thẳng hàng. Ngoài ra, ta có thể dựng thêm đường phụ để dùng phương pháp diện tích hoặc sử dụng định lý con nhím để giải quyết vấn đề này.

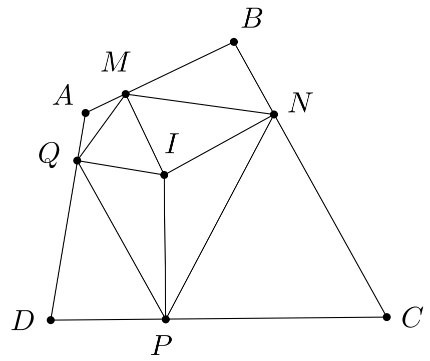
Đường thẳng Newton cũng đúng đối với tứ giác lõm ngoại tiếp đường tròn như sau (trong hình bên dưới, tứ giác lõm $ABCD$ "ngoại tiếp" đường tròn tâm O và M, N lần lượt là hai trung điểm của các đường chéo AC và BD)



Từ đó, ta thấy rằng nếu một tứ giác ngoại tiếp được thì đường thẳng Gauss, đường thẳng Newton của nó là trùng nhau và trên đó có chứa 4 điểm đặc biệt. Vận dụng nhận xét này, ta có được nhiều bài toán hay và khó liên quan đến sự thẳng hàng của các điểm, đồng quy của các đường thẳng trong tứ giác ngoại tiếp.

1.3 Tứ giác Pedal

Cho tứ giác $ABCD$ có I là điểm bất kỳ nằm trong tứ giác. Gọi M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu của I lên các cạnh AB, BC, CD, DA. Khi đó, tứ giác $MNPQ$ là *tứ giác Pedal* đối với điểm I của tứ giác đã cho.

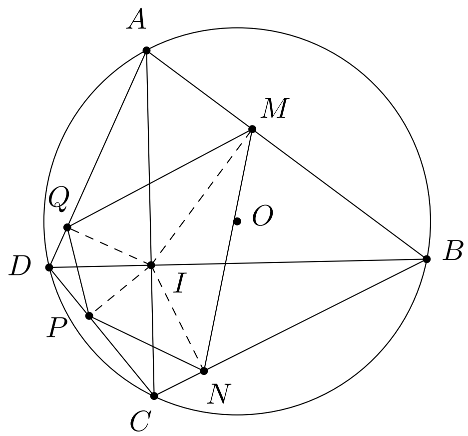


Cũng giống như tam giác Pedal, tứ giác loại này cũng có nhiều tính chất thú vị. Trong phần này, chúng ta quan tâm đến tính chất nội tiếp được hay ngoại tiếp được của nó với một số vị trí đặc biệt của điểm I và của tứ giác $ABCD$ đã cho.

2 Các bài toán liên quan

Bài toán 1. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I. Gọi $MNPQ$ là tứ giác Pedal của điểm I đối với tứ giác $ABCD$ (M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu của I lên các cạnh AB, BC, CD, DA). Chứng minh rằng $MNPQ$ là tứ giác ngoại tiếp.*

Lời giải.



Ta có $\angle IMB + \angle INB = 180^\circ$ nên tứ giác $IMBN$ nội tiếp, suy ra

$$\angle IMN = \angle IBN.$$

Tương tự, $\angle IMQ = \angle IAQ$. Mặt khác, do $ABCD$ nội tiếp nên $\angle IAQ = \angle IBN$, do đó

$$\angle IMN = \angle IMQ,$$

hay MI là phân giác của $\angle NMQ$. Tương tự, IN, IP, IQ cũng là phân giác của các góc tương ứng trong tứ giác $MNPQ$. Từ đó suy ra I cách đều các cạnh của tứ giác $MNPQ$ hay $MNPQ$ là tứ giác ngoại tiếp đường tròn tâm I. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét 1. Nếu thêm vào đề bài điều kiện AC và BD vuông góc với nhau tại P thì ta có thêm kết quả sau: *"Tứ giác $MNPQ$ vừa ngoại tiếp vừa nội tiếp đường tròn."*

Ta chỉ cần chứng minh thêm rằng tứ giác $MNPQ$ nội tiếp. Ta có

$$\angle AMQ = \angle AIQ = \angle ADI = \angle QPI.$$

Tương tự, $\angle BMN = \angle NPI$. Do đó

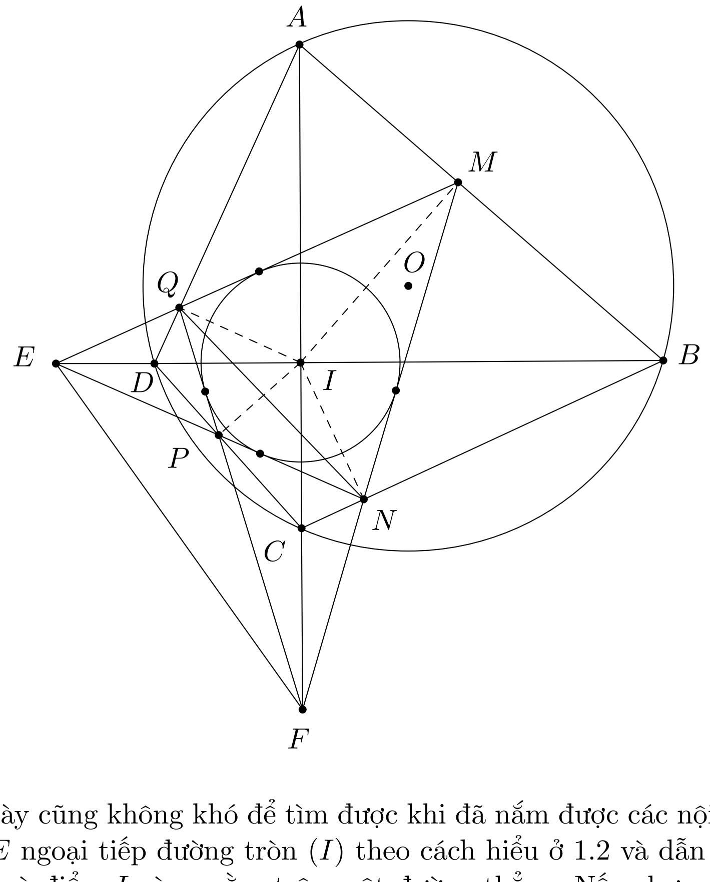
$$\angle NMQ + \angle NPQ = \angle NMQ + \angle IPN + \angle IPQ = \angle NMQ + \angle AMQ + \angle BMN = 180^\circ,$$

hay tứ giác $MNPQ$ nội tiếp. Vậy tứ giác $MNPQ$ vừa nội tiếp vừa ngoại tiếp.

NHẬN XÉT 2. Ta thay đổi giả thiết một chút và vẫn quan tâm đến các tính chất đã nêu: *"Trong đường tròn (O) cho điểm I cố định. Hai dây cung AC và BD của đường tròn (O) thay đổi và cắt nhau ở I. Gọi M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu của I lên các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của MP, NQ. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua EF luôn đi qua một điểm cố định."*

Vì là một sự kết hợp trực tiếp của những định lý đã nêu ở trên nên nói chung kết quả thu được còn thô, chưa có điểm mới lạ hay đặc biệt gì.

Bài toán 2. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp có hai đường chéo vuông góc với nhau tại I. Gọi M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu của I lên các cạnh AB, BC, CD, DA. Giả sử E là giao điểm của hai đường thẳng MN, PQ; F là giao điểm của hai đường thẳng PN, QM. Chứng minh rằng trung điểm của EF, MP, NQ thẳng hàng và đường thẳng đó đi qua I.*



Kết quả bài toán này cũng không khó để tìm được khi đã nắm được các nội dung trên. Khi đó tứ giác lõm $NFQE$ ngoại tiếp đường tròn (I) theo cách hiểu ở 1.2 và dẫn đến ba trung điểm của EF, MP, NQ và điểm I cùng nằm trên một đường thẳng. Nếu chưa nắm được hướng đi đã xác định như ban đầu thì đây quả thật không phải là một bài toán đơn giản.

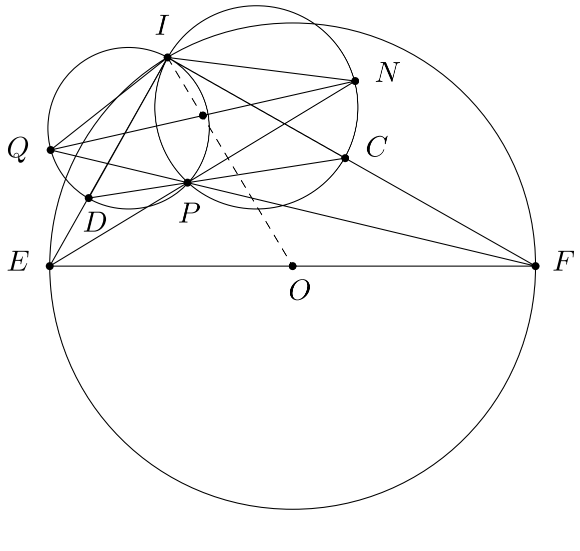
Dễ dàng thấy rằng bằng cách dùng định lý Menelaus, ta có thể chứng minh được MN, AC, PQ đồng quy và MQ, BD, PN đồng quy. Từ điều này, ta cũng có thể phát triển thêm nhiều kết quả liên quan đến tính chất nội tiếp này của tứ giác $MNPQ$.

Dựa vào cấu trúc trên, ta sẽ giữ lại một số điểm, đoạn thẳng cần thiết và bỏ đi các điểm còn lại nhằm che giấu đi bản chất "tứ giác ngoại tiếp" của đề. Rõ ràng trong bài toán vừa phát biểu, tứ giác quan trọng cần xét là $NFQE$, nhưng để có thể đặt các vấn đề liên quan đến nó thì phải thông qua các tứ giác $ABCD$, $MNPQ$ đã xuất hiện trước, điều này sẽ khiến cho bài toán không còn nhiều giá trị nữa. Ta sẽ dựng lại tứ giác $NFQE$ nhưng thay vì thông qua các điểm A, B, C, D có sẵn, ta sẽ dựng thông qua đoạn thẳng EF và điểm P.

Thực hiện điều này cũng không quá khó, ta có thể làm như sau

- Giả sử ta đã có đoạn thẳng EF và điểm P trên mặt phẳng (P không thuộc EF).
- Dựng đường tròn (O) đường kính EF và gọi I là giao điểm của phân giác góc EPF với (O) (I và P nằm cùng phía với P so với EF).
- Gọi C, D lần lượt là các giao điểm của đường phân giác ngoài của góc EPF với các đường thẳng IE, IF.
- Tia FP cắt đường tròn đường kính ID ở Q (khác P), tia EP cắt đường tròn đường kính IC ở N (khác P).

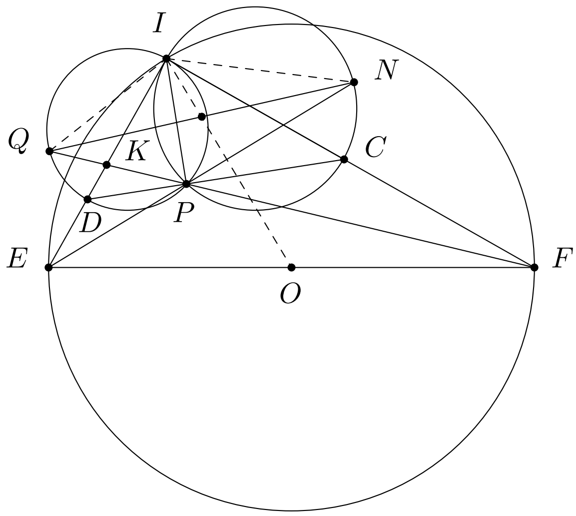
Đến đây rõ ràng là yêu cầu nêu ở trên đã được thực hiện. Không có các tứ giác $ABCD$, $MNPQ$ giúp định hướng, bài toán trở nên xa lạ hơn và ta vẫn có thể đặt ra các vấn đề cũ trước đó: *chứng minh rằng trung điểm của* EF, QN *và điểm* P *thẳng hàng.*



Từ cách dựng đó, ta phát biểu bài toán mới như sau

Bài toán 3. *Cho đoạn thẳng EF và điểm P không nằm trên EF. Gọi I là giao điểm của phân giác góc EPF với đường tròn đường kính EF (I nằm cùng phía với P so với EF). Gọi D, C lần lượt là giao điểm các đường phân giác ngoài của góc EPF với các đoạn IE, IF. Gọi N là giao điểm của tia EP với đường tròn đường kính IC và Q là giao điểm của tia FP với đường tròn đường kính ID. Chứng minh rằng trung điểm của EF, QN và I là ba điểm thẳng hàng.*

LỜI GIẢI.



Để giải bài toán này, ta chỉ cần chứng minh được tứ giác lõm $NEQF$ ngoại tiếp được đường tròn tâm I để áp dụng đường thẳng Newton vào suy ra trung điểm của hai đường chéo NQ, EF và I là thẳng hàng. Điều này có thể thực hiện trực tiếp mà không cần phải khôi phục lại tất cả các điểm như đề bài nêu. Thật vậy, gọi K là giao điểm của PQ và DI. Do PI, PD lần lượt là các phân giác ngoài và phân giác trong của tam giác KPE nên

$$\frac{DE}{DK} = \frac{IE}{IK} = k,$$

suy ra đường tròn đường kính DI chính là đường tròn Appollonius của hai điểm D, I ứng với tỉ số k xác định như trên. Do Q cũng thuộc đường tròn này nên

$$\frac{QK}{QE} = k = \frac{DK}{DE},$$

suy ra QD là phân giác trong của $\angle EQK$ và QI là phân giác ngoài của góc $\angle EQK$. Hoàn toàn tương tự, ta thấy NI là phân giác ngoài của góc $\angle PNF$. Do đó, I cách đều các cạnh EN, FQ, QE, NF của tứ giác lõm $QEQF$ hay I là tâm đường tròn nội tiếp của tứ giác này. Từ đó ta có kết quả cần chứng minh. □

Tiếp theo, để cho hình vẽ thoáng hơn, ta thay đổi đề bài một chút, ta định nghĩa lại điểm I nằm khác phía với P so với EF và đặt tên các điểm trong bài cho phù hợp. Ta xét bài toán 4 như sau

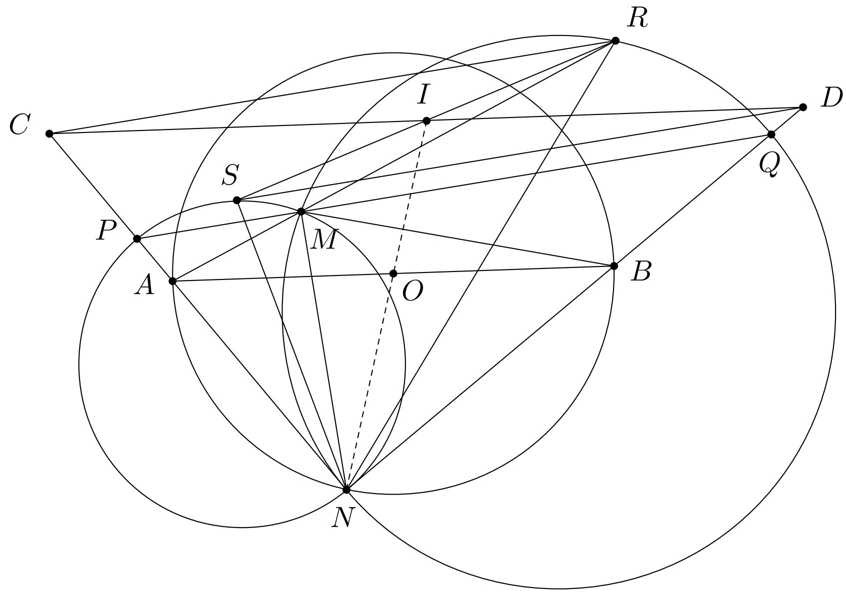
Bài toán 4. *Cho đường tròn (O) đường kính AB và M là một điểm bất kỳ nằm trong (O), M không nằm trên đoạn AB. Gọi N là giao điểm của tia phân giác trong góc M của tam giác AMB với đường tròn (O). Đường phân giác ngoài góc AMB cắt các đường thẳng NA, NB lần lượt tại P, Q. Đường thẳng MA cắt đường tròn đường kính NQ tại R, đường thẳng MB cắt đường tròn đường kính NP tại S và R, S khác M. Chứng minh rằng đường trung tuyến ứng với đỉnh N của tam giác NRS luôn đi qua một điểm cố định khi M di động phía trong đường tròn.*

Đây chính là bài số 5 quen thuộc trong đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi quốc gia dự thi IMO năm 2009. Việc xây dựng các điểm theo thứ tự ngược lại cũng như dùng tính chất ngoại tiếp của một tứ giác lõm đã biến một bài toán kết hợp thô từ các kết quả quen thuộc thành một bài toán không đơn giản. Trên thực tế, chỉ có 4 thí sinh trong kỳ thi đó giải được trọn vẹn bài này, có một thí sinh đã tiếp cận được bản chất của bài toán. Đặc biệt, có một thí sinh khác đã giải được bài này bằng phương pháp tọa độ và chứng minh được rằng bài toán vẫn đúng (tức là trung tuyến đỉnh N của tam giác NRS luôn đi qua O) nếu thay N bởi một điểm bất kỳ thuộc phân giác góc $\angle AMB$ chứ không nhất thiết là N phải thuộc đường tròn (O).

3 Các lời giải khác cho bài số 5 trong đề Việt Nam TST 2009

Ngoài hướng giải bằng cách dùng tứ giác lõm ngoại tiếp và đường thẳng Newton, dưới đây có nêu thêm ba lời khác nữa và điều này cũng cho ta thấy rằng nếu hướng tiếp cận, đánh giá khác nhau sẽ cho ra nhiều lời giải khác nhau có nội dung khá thú vị.

Lời giải 1.



Qua R kẻ đường thẳng song song với PQ cắt NA tại C, qua S kẻ đường thẳng song song với PQ cắt NB tại D. Gọi I là trung điểm của CD. Ta sẽ chứng minh rằng $CD \parallel AB$.

Thật vậy, do N nằm trên đường tròn đường kính AB nên $\angle ANB = 90°$, suy ra $AN \perp BN$. Từ đây ta có BN là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PN. Do đó $\triangle BMN \sim \triangle BNS$ (g.g). Vì PQ là đường phân giác góc ngoài của AMN nên

$$\angle SMP = \angle AMP = \angle QMR = \angle BMQ.$$

Mặt khác, lại có $\angle SMP = \angle SNP$ (góc nội tiếp cùng chắn cung PS của đường tròn đường kính PN) và $\angle QMR = \angle QNR$ (góc nội tiếp cùng chắn cung QR của đường tròn đường kính QN). Do đó $\angle SNP = \angle QNR$, suy ra $\angle SNP + \angle SNR = \angle QNR + \angle SNR$ và

$$\angle CNR = \angle SNB.$$

Bây giờ, xét hai tam giác $\triangle BNS$ và $\triangle RNC$, ta có $\angle RCN = \angle MPN = \angle NSM = \angle NSB$ và $\angle CNR = \angle SNB$ nên $\triangle BNS \sim \triangle RNC$ (g.g). Suy ra

$$\triangle BMN \sim \triangle BNS \sim \triangle RNC.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\triangle DSN \sim \triangle RAN \sim \triangle NAM.$$

Ta thấy

- Do $\triangle BNS \sim RNC$ nên $\dfrac{NB}{NR} = \dfrac{NS}{NC}$, suy ra $NB \cdot NC = NR \cdot NS$.
- Do $\triangle DSN \sim \triangle RAN$ nên $\dfrac{NS}{NA} = \dfrac{ND}{NR}$, suy ra $NA \cdot ND = NR \cdot NS$.

Từ 2 kết quả này ta có $NB \cdot NC = NA \cdot ND$, suy ra $\dfrac{NA}{NB} = \dfrac{NC}{ND}$ và $AB \parallel CD$. Do vậy, trung điểm của AB, trung điểm của CD và N là 3 điểm thẳng hàng, tức là N, O, I thẳng hàng. (1)

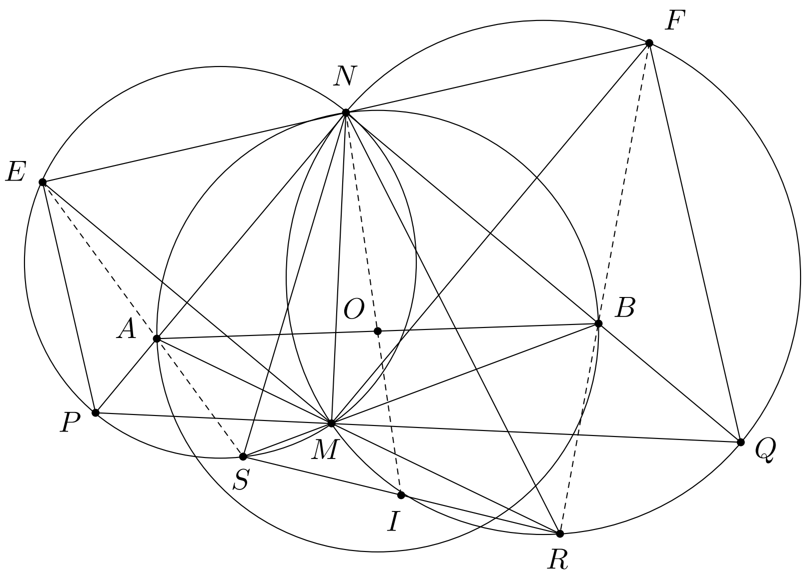
Hơn nữa,

- Do $\triangle BMN \sim \triangle RNC$ nên $\dfrac{MN}{NC} = \dfrac{BN}{RC}$, suy ra $RC = \dfrac{NB \cdot NC}{MN}$.
- Do $\triangle DSN \sim \triangle NAM$ nên $\dfrac{DN}{MN} = \dfrac{DS}{NA}$, suy ra $DS = \dfrac{NA \cdot ND}{MN}$.

Kết hợp các điều trên, ta được $RC = DS$, mà $RC \parallel DS$ (cùng song song với PQ) nên tứ giác $RCSD$ là hình bình hành. Do đó, hai đường chéo CD và RS của tứ giác cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Suy ra I là trung điểm của CD cũng là trung điểm của RS. Khi đó NI chính là đường trung tuyến của tam giác NRS. (2)

Từ (1) và (2), suy ra trung tuyến NI của tam giác NRS luôn đi qua O. Vậy trung tuyến ứng với đỉnh N của tam giác NRS luôn đi qua I là điểm cố định khi M di động khắp phía trong đường tròn (O). Đây chính là điều phải chứng minh. □

Lời giải 2.



Dễ thấy điểm cố định cần tìm chính là trung điểm O của đoạn AB. Gọi điểm đối xứng của M qua NQ là E, điểm đối xứng của M qua NP là F. Vì N thuộc đường tròn đường kính nên $\angle PNQ = \angle ANB = 90^\circ$, theo tính đối xứng qua đường thẳng nên ta được

$$\angle ENM + \angle FNM = 2(\angle PNM + \angle QNM) = 2\angle PNQ = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ.$$

Suy ra E, N, F thẳng hàng. Hơn nữa $NE = NM = NF$ nên N là trung điểm của EF.

Do N là trung điểm cung AB nên SN là phân giác $\angle ASB$, do đó

$$\angle MSA = 2\angle MSN = 2\angle MPN = \angle MPE.$$

Tứ giác $MSPE$ nội tiếp nên $\angle MPE = \angle MSE$, suy ra $\angle MSA = \angle MSE$; do đó S, A, E thẳng hàng. Tương tự, R, B, F cũng thẳng hàng. Ta có

$$\frac{AS}{AE} = \frac{S_{NSA}}{S_{ESA}} = \frac{S_{NPA}}{S_{EPA}} = \frac{S_{NSA}+S_{NPA}}{S_{ESA}+S_{EPA}} = \frac{S_{NSA}+S_{NPA}}{S_{ESA}+S_{EPA}} = \frac{S_{NSP}}{S_{NEP}}.$$

Tương tự, $\dfrac{BR}{BF} = \dfrac{S_{NRQ}}{S_{NFQ}}$. Nhân tương ứng hai đẳng thức này lại, ta có

$$\frac{S_{NSP}}{S_{NEP}} \cdot \frac{S_{NFQ}}{S_{NRQ}} = \frac{AS}{AE} \cdot \frac{BF}{BR}. \tag{1}$$

Hai tam giác $\triangle NSP$, $\triangle NRQ$ đều là tam giác vuông, đồng thời

$$\angle PNS = \angle PMS = \frac{1}{2}\angle AMS = \frac{1}{2}\angle BMR = \angle QMR = \angle QNR,$$

nên chúng đồng dạng, suy ra

$$\frac{S_{NSP}}{S_{NRQ}} = \left(\frac{NP}{NQ}\right)^2.$$

Mặt khác, hai tam giác $\triangle NQF$, $\triangle NPE$ đều vuông nên

$$\frac{S_{NQF}}{S_{NPE}} = \frac{FN \cdot FQ}{EN \cdot EP} = \frac{FQ}{EP} = \frac{MQ}{MP}.$$

Nhân tương ứng hai đẳng thức này lại, ta có

$$\frac{S_{NSP}}{S_{NRQ}} \cdot \frac{S_{NFQ}}{S_{NPE}} = \left(\frac{NP}{NQ}\right)^2 \cdot \frac{FQ}{EP} \text{ hay } \frac{S_{NSP}}{S_{NPE}} \cdot \frac{S_{NFQ}}{S_{NRQ}} = \left(\frac{NP}{NQ}\right)^2 \cdot \frac{FQ}{EP}. \tag{2}$$

So sánh (1) và (2), ta có

$$\frac{AS}{AE} \cdot \frac{BF}{BR} = \left(\frac{NP}{NQ}\right)^2 \cdot \frac{MQ}{MP}.$$

Ta thấy tam giác NPQ vuông tại N có đường cao NM nên $\triangle NMP \sim \triangle QMN$, suy ra

$$\left(\frac{NP}{NQ}\right)^2 = \frac{S_{NMP}}{S_{QMN}} = \frac{MN \cdot MP}{MN \cdot MQ} = \frac{MP}{MQ}.$$

Từ đây kết hợp với trên, ta được

$$\frac{AS}{AE} \cdot \frac{BF}{BR} = \left(\frac{NP}{NQ}\right)^2 \cdot \frac{MQ}{MP} = \frac{MP}{MQ} \cdot \frac{MQ}{MP} = 1,$$

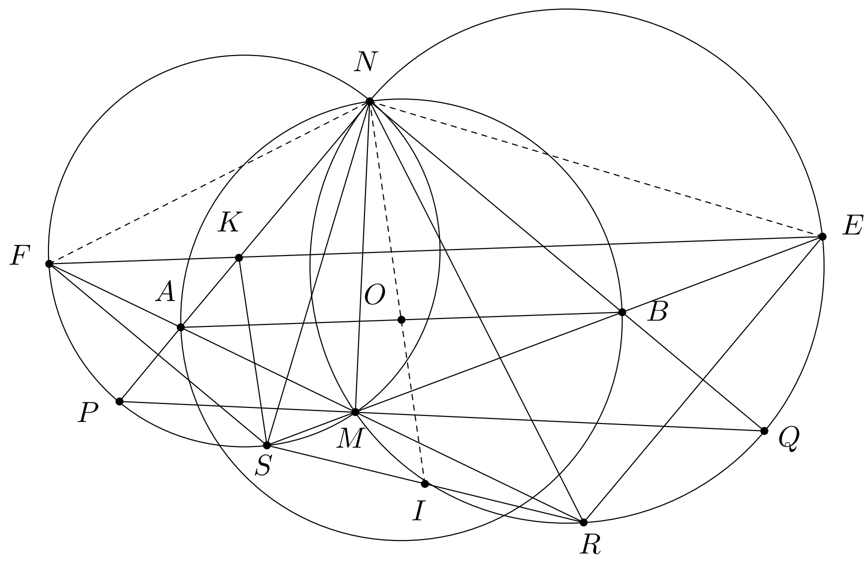
suy ra $\dfrac{AS}{AE} = \dfrac{BR}{BF}$. Suy ra tồn tại số thực k sao cho $\overrightarrow{AS} = k\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BR} = k\overrightarrow{BF}$. Do đó

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BR}\right) = \frac{k}{2}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF}\right) = k\overrightarrow{ON},$$

hay O, N, I thẳng hàng. Vậy trung tuyến NI của tam giác NRS đi qua O là điểm cố định.

Ta có điều phải chứng minh. $\square$

LỜI GIẢI 3.



Gọi I là trung điểm của RS, F là giao điểm của đường thẳng MA với (PMN), E là giao điểm của đường thẳng MB với (QMN). Ta sẽ chứng minh rằng $AB \parallel EF$. Điều này tương đương với việc chứng minh

$$\frac{MA}{AF} = \frac{MB}{BE} \text{ hay } \frac{S_{PMN}}{S_{PFN}} = \frac{S_{PMN}}{S_{PSN}} = \frac{S_{QMN}}{S_{QEN}} = \frac{S_{PMN}}{S_{NRQ}} \text{ hay } \frac{S_{PMN}}{S_{QMN}} = \frac{S_{PSN}}{S_{QRN}}. \quad (1)$$

Xét hai tam giác vuông PNS và QNR có $\angle PNS = \angle PMS = \angle QMR = \angle QNR$ nên chúng đồng dạng, suy ra $\dfrac{S_{PNS}}{S_{QNR}} = \left(\dfrac{PN}{QN}\right)^2$; đồng thời, do hai tam giác PMN và QMN có chung đường cao NM nên $\dfrac{S_{PMN}}{S_{QMN}} = \dfrac{MP}{MQ}$. Từ đó suy ra (1) tương đương với

$$\frac{MP}{MQ} = \left(\frac{PN}{QN}\right)^2 \text{ hay } \frac{PM \cdot PQ}{QM \cdot QP} = \frac{PN^2}{QN^2}.$$

Điều này đúng do tính chất phương tích của các điểm, từ đó suy ra $AB \parallel EF$.

Gọi K là giao điểm của EF với AN thì $\angle KFN = \angle KSN$. Ta có

$$\angle AKF = \angle NKE = \angle NAO = \angle ANO,$$

mà $\angle AKF = \angle AKS$ nên $\angle AKS = \angle ANO$, suy ra $KS \parallel ON$. Do đó

$$\angle ONS = \angle KSN = \angle NFK = \angle NFE.$$

Tương tự $\angle ONR = \angle OEF$. Từ đó, ta được

$$\frac{\sin\angle INR}{\sin\angle INS} = \frac{NS}{NR} = \frac{NF}{NE} = \frac{\sin\angle NEF}{\sin\angle NFE} = \frac{\sin\angle ONR}{\sin\angle ONS}.$$

Dễ thấy các tia NR, NS nằm giữa các tia NP, NQ nên $\angle RNS < \angle PNQ = 90^\circ$, suy ra góc $\angle RNS$ cũng như các góc $\angle SNI$, $\angle RNI$ đều nhọn và tỉ số $\dfrac{\sin\angle TNR}{\sin\angle TNS}$ xác định một cách duy nhất với tia NT nào đó nằm giữa NR, NS. Suy ra hai tia NO, NI trùng nhau hay N, O, I thẳng hàng. Vậy trung tuyến NI của tam giác NRS luôn đi qua điểm O cố định. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Như đã nêu ở trên, bằng phương pháp tọa độ, chúng ta có thể chứng minh được rằng bài toán vẫn đúng với N là điểm bất kỳ trên phân giác của góc AMB. Các bạn thử giải bài toán sau bằng cả phương pháp tọa độ lẫn phương pháp hình học phẳng thuần túy: *"Trên mặt phẳng cho đoạn thẳng AB cố định và M là một điểm không nằm trên đường thẳng AB. Gọi N là một điểm bất kỳ trên phân giác của góc AMB. Đường phân giác ngoài góc AMB cắt các đường thẳng NA, NB lần lượt tại P, Q. Đường thẳng MA cắt đường tròn đường kính NQ tại R, đường thẳng MB cắt đường tròn đường kính NP tại S và R, S khác M. Chứng minh rằng đường trung tuyến ứng với đỉnh N của tam giác NRS luôn đi qua một điểm cố định với mọi vị trí của M và N."*

Ta thấy rằng xuất phát từ những bài toán quen thuộc, đơn giản, bằng việc chọn hướng khác trong quá trình xây dựng các điểm, ta có thể phát hiện ra thêm nhiều bài toán thú vị và hấp dẫn. Học hỏi được các cách khác nhau, ý tưởng mới mẻ trong việc giải các bài toán đó là một điều vô cùng bổ ích. Các bạn hãy thử thực hiện điều này để thu được cho mình nhiều kinh nghiệm nữa nhằm củng cố, rèn luyện thêm bộ môn hình học phẳng này.

NHỎ MÀ KHÔNG NHỎ

Võ Quốc Bá Cẩn
SV Đại học Y Dược Cần Thơ

TÓM TẮT. *Trong bài này chúng ta sẽ cùng bàn về một bổ đề "nhỏ", nhưng ứng dụng của nó thì lại không hề "nhỏ" chút nào. Đó là 1 công cụ hỗ trợ đắc lực giúp làm tăng thêm tính hiệu quả của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz trong giải toán.*

1 Giới thiệu

Toán học luôn ẩn chứa nhiều điều thú vị và bất ngờ đằng sau nó. Một bài toán cũ, mặc dù ta đã giải đi giải lại nhiều lần, thế nhưng mỗi lần xem lại, nó lại gợi cho ta nhiều ý tưởng mới lạ. Những kết quả thú vị đó đã khiến cho một sinh viên ngành Y như tôi vẫn không thể nào xao lãng với đam mê của mình, quay lưng lại với Toán. Và tôi tin rằng có rất nhiều bạn cũng đang nghĩ như vậy.

Trở lại với bài viết này, một trong những bài toán cũ mà tôi muốn đề cập là bài toán số 12 mà M. Lascu đã đề nghị trong [3]:

Bài toán 1. *Cho n là một số nguyên không nhỏ hơn 2, a là một số thực dương. Chứng minh rằng, nếu các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a, \quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \le \frac{a^2}{n-1},$$

thì ta có

$$x_i \in \left[0,\ \frac{2a}{n}\right], \quad \forall i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Một bài toán đơn giản và khá dễ giải. Như vậy nó có điểm gì đặc biệt gì ở đây? Thật ra, thời gian đầu, khi mới tiếp cận bài toán này tôi cũng chẳng có được ý tưởng thú vị nào từ nó cả. Sau này, trong quá trình viết về kỹ thuật "thêm – bớt" của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz trong cuốn sách [8], tôi mới chợt nhớ về nó.

Ý tưởng của kỹ thuật thêm – bớt là *thêm vào các phân thức (có mẫu số dương) hoặc bớt đi những lượng thích hợp sao cho tử số của phân thức mới nhận được là số không âm nhưng càng nhỏ càng tốt, rồi áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.* Như thế thì khả năng thành công sẽ cao hơn.

Để nắm rõ hơn tư tưởng của kỹ thuật này, ta lấy ví dụ một bài toán thi thử Đại học

Bài toán 2. *Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \ge 3.$$

Nếu sử dụng Cauchy-Schwarz trực tiếp như thông thường, ta sẽ không thu được kết quả mong muốn. Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì

$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\geq\frac{(1+1+1)^2}{(2-a)+(2-b)+(2-c)}=\frac{9}{6-(a+b+c)}.$$

Thế nhưng

$$\frac{9}{6-(a+b+c)}\leq\frac{9}{6-\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}=3.$$

Do đó không thể sử dụng đánh giá như trên để giải bài này được.

Bây giờ, ta quan sát và để ý rằng $\frac{1}{2-a}>\frac{1}{2}$, $\forall a>0$. Như vậy, nếu lấy mỗi phân thức ở vế trái của bất đẳng thức đã cho trừ cho $\frac{1}{2}$ thì ta vẫn được các phân thức dương, và lúc đó bất đẳng thức có thể viết lại thành

$$\frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c}\geq 3.$$

Một điều đặc biệt là ở đây nếu sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz theo những "bản năng" thông thường, ta lại đi đến kết quả

$$\begin{aligned}\frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c}&=\frac{a^2}{2a-a^2}+\frac{b^2}{2b-b^2}+\frac{c^2}{2c-c^2}\\&\geq\frac{(a+b+c)^2}{(2a-a^2)+(2b-b^2)+(2c-c^2)}\\&=\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-3}=3+\frac{(a+b+c-3)^2}{2(a+b+c)-3}\geq 3.\end{aligned}$$

Đó chính là tư tưởng của kỹ thuật thêm – bớt. Một tư tưởng đơn giản mà hiệu quả.

Giống như những đứa trẻ con vui mừng hớn hở khi được người lớn cho quà bánh, tôi cũng vô cùng hứng khởi khi bắt gặp được kỹ thuật thú vị này. Tôi bắt đầu thử giải lại các bài toán mà tôi đã từng giải trước đây bằng ý tưởng mới này để kiểm tra xem nó "mạnh" cỡ nào. Và rồi … tôi đã thất bại trước một bài toán, đó là bài toán (xem [4], bài số 30, trang 154)

Bài toán 3. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$8\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+9\geq 10(a^2+b^2+c^2).$$

Oái oăm ở chỗ, bất đẳng thức này có dấu bằng khi $(a,\ b,\ c)=\left(2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, và kỹ thuật trên không hiệu quả với loại đẳng thức "kỳ lạ" này.

Trong lúc "bí", chẳng biết tình cờ hay vô ý, tôi lại lật lại ngay bài toán 1 ngày nào. Tôi nhìn nó ngẫm nghĩ một hồi và phát hiện ra một ý tưởng mới. Trước hết là tôi nhận ra nguyên nhân *vì sao mình làm không ra*, việc trừ từng phân thức cho những số cụ thể làm ta khó điều chỉnh khi gặp phải những bài toán có nhiều dấu đẳng thức hoặc chỉ có một nhưng thuộc loại lạ (giống như bài này). *"Tại sao không thử thêm và bớt cho những biểu thức chứa biến nhỉ? Như thế sẽ dễ điều chỉnh hơn!"* – Tôi nghĩ. *"Nếu vậy thì ta cần tiến hành đánh giá cho từng biến."*

Bài toán 1 cũng đánh giá cho từng biến, do đó tôi nghĩ: *Tại sao lại không thử đánh giá tương tự?* Sau 1 thời gian nghiền ngẫm, tôi tìm ra bổ đề sau với cách đánh giá tương tự

Bổ đề 1. *Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực thỏa mãn $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$. Đặt*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = n + n(n-1)t^2,$$

với $t \geq 0$.[1] *Khi đó, với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$, ta có*

$$1 - (n-1)t \leq x_i \leq 1 + (n-1)t.$$

CHỨNG MINH. Ta sẽ chứng minh khẳng định đúng cho $i = 1$. Các trường hợp khác được chứng minh tương tự. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 \geq \frac{(x_2 + x_3 + \cdots + x_n)^2}{n-1} = \frac{(n-x_1)^2}{n-1}.$$

Do vậy

$$x_1^2 + \frac{(n-x_1)^2}{n-1} \leq n + n(n-1)t^2.$$

Giải bất phương trình bậc hai với biến x_1, ta có ngay

$$1 - (n-1)t \leq x_1 \leq 1 + (n-1)t.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Với kết quả vừa tìm ra này, tôi đã giải được thành công bài toán 3 chỉ bằng một công cụ đơn giản là bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

LỜI GIẢI BÀI TOÁN 3. Do $a, b, c > 0$ và $a+b+c = 3$ nên có thể đặt $a^2+b^2+c^2 = 3+6t^2$ với $0 \leq t < 1$. Khi đó theo bổ đề 1, ta có

$$1 - 2t \leq a,\ b,\ c \leq 1 + 2t.$$

Từ đây suy ra $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{1+2t}$, và ta nghĩ đến việc biến đổi bất đẳng thức lại như sau

$$8\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{1+2t}\right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{1+2t}\right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{1+2t}\right) + \frac{3}{1+2t}\right] + 9 \geq 30(1+2t^2),$$

[1]Ta có thể đặt được như vậy là vì $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq n$. Ngoài ra, có thể thấy $0 \leq t \leq 1$ khi x_i là các số không âm bởi vì trong trường hợp này ta sẽ có $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 = n^2$.

$$\frac{8}{1+2t}\left(\frac{1+2t-a}{a}+\frac{1+2t-b}{b}+\frac{1+2t-c}{c}+3\right)+9\geq 30(1+2t^2).$$

Nếu $t=0$ thì $a^2+b^2+c^2=3$, suy ra $a=b=c=1$ và bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Vì vậy ta chỉ cần xét $0<t<1$ là đủ (bạn đọc sẽ hiểu rõ vì sao lại phải xét $t=0$ ngay dưới đây). Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\begin{aligned}\frac{1+2t-a}{a}&+\frac{1+2t-b}{b}+\frac{1+2t-c}{c}\geq\\ &\geq\frac{[(1+2t-a)+(1+2t-b)+(1+2t-c)]^2}{a(1+2t-a)+b(1+2t-b)+c(1+2t-c)}\qquad(*)\\ &=\frac{36t^2}{3(1+2t)-(3+6t^2)}=\frac{36t^2}{6t-6t^2}=\frac{6t}{1-t}.\end{aligned}$$

Và như thế, ta đưa được bài toán về chứng minh một bất đẳng thức một biến

$$\frac{8}{1+2t}\left(\frac{6t}{1-t}+3\right)+9\geq 30(1+2t^2).$$

Thực hiện biến đổi tương đương, ta được

$$\frac{8(1+t)}{(1+2t)(1-t)}+3\geq 10(1+2t^2),$$

$$\frac{8(1+t)}{(1+2t)(1-t)}\geq 20t^2+7,$$

$$8+8t\geq(7+20t^2)(1+t-2t^2),$$

$$8+8t\geq 7+7t+6t^2+20t^3-40t^4,$$

$$40t^4-20t^3-6t^2+t+1\geq 0,$$

$$(10t^2+5t+1)(2t-1)^2\geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Có thể thấy đánh giá ở bổ đề 1 là một đánh giá rất chặt bởi vì ta chỉ cần có $n-1$ biến bằng nhau thì đẳng thức xảy ra. Điều này phù hợp với đặc điểm của phần lớn các bất đẳng thức đối xứng, đó là *đẳng thức xảy ra khi có $n-1$ biến bằng nhau.* Như vậy, nếu biết sử dụng bổ đề này một cách thích hợp, chúng ta sẽ có thể giải được nhiều bài toán khó.

Và kỹ thuật thêm – bớt của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz là một công cụ phối hợp hiệu quả với bổ đề 1. Ta lấy đánh giá $(*)$ để giải thích nguyên nhân vì sao. Chúng ta đã biết bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

có dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n},$$

ở đây hiểu theo nghĩa nếu mẫu bằng 0 thì tử cũng bằng 0.

Như vậy, trong ($*$), chúng ta sẽ có đẳng thức khi

$$\frac{(1+2t-a)^2}{a(1+2t-a)} = \frac{(1+2t-b)^2}{b(1+2t-b)} = \frac{(1+2t-c)^2}{c(1+2t-c)}.$$

Ta biết rằng, một trong những mấu chốt quan trọng để biết việc sử dụng một đánh giá để giải một bài toán bất đẳng thức có đạt được hiệu suất cao hay không là ở chỗ: *Liệu đánh giá đó có đảm bảo được dấu đẳng thức của bất đẳng thức ban đầu hay không?* Do vậy ta sẽ thử kiểm tra xem điểm đẳng thức của bất đẳng thức ban đầu có thỏa mãn điều kiện trên hay không.

Bất đẳng thức ban đầu có đẳng thức khi $a = 2$, $b = c = \frac{1}{2}$. Với những giá trị này ta có $t = \frac{1}{2}$ và $1 + 2t - a = 0$, suy ra mẫu và tử của phân thức thứ nhất đều bằng 0 nên ta loại nó đi, và điều kiện để ($*$) xảy ra đẳng thức sẽ là

$$\frac{(1+2t-b)^2}{b(1+2t-b)} = \frac{(1+2t-c)^2}{c(1+2t-c)}.$$

Nhưng điều này là hiển nhiên, bởi vì $b = c$.

Tóm lại, có thể thấy việc sử dụng bổ đề 1 kết hợp với kỹ thuật thêm – bớt của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz đã giữ nguyên được điểm đẳng thức của bất đẳng thức ban đầu. Chính điều này đã làm tăng thêm tính hiệu quả của kỹ thuật.

2 Các bài toán ứng dụng

Phần trên tôi đã giới thiệu cùng các bạn về kỹ thuật thêm – bớt của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và bổ đề 1, cùng với sự phối hợp hiệu quả của chúng. Dưới đây chúng ta sẽ cùng sử dụng kỹ thuật phối hợp này để giải lại một số bài toán khó.

Bài toán 4. *Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $ab + bc + ca > 0$. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} + \frac{1}{2}.$$

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức có tính thuần nhất đối với ba biến a, b, c, vì vậy không giảm tính tổng quát, ta có thể giả sử $a + b + c = 3$. Đặt $a^2 + b^2 + c^2 = 3 + 6t^2$ với $0 \leq t < 1$. Ta cần chứng minh

$$\frac{a}{3-a} + \frac{b}{3-b} + \frac{c}{3-c} \geq \frac{3(3+6t^2)}{3^2} + \frac{1}{2}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\left(\frac{a}{3-a}+1\right)+\left(\frac{b}{3-b}+1\right)+\left(\frac{c}{3-c}+1\right) \geq \frac{9}{2}+2t^2,$$

$$\frac{3}{3-a}+\frac{3}{3-b}+\frac{3}{3-c} \geq \frac{9}{2}+2t^2,$$

$$\frac{2}{3-a}+\frac{2}{3-b}+\frac{2}{3-c} \geq 3+\frac{4}{3}t^2.$$

Nếu $t=0$ thì $a=b=c=1$, bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Vì vậy ta chỉ cần xét $0<t\leq 1$. Theo bổ đề 1, ta có $1-2t\leq a,\ b,\ c\leq 1+2t$, suy ra

$$\frac{1}{3-a} \geq \frac{1}{3-(1-2t)} = \frac{1}{2(1+t)},$$

và ta nghĩ đến việc biến đổi bất đẳng thức như sau

$$\left(\frac{2}{3-a}-\frac{1}{1+t}\right)+\left(\frac{2}{3-b}-\frac{1}{1+t}\right)+\left(\frac{2}{3-c}-\frac{1}{1+t}\right)+\frac{3}{1+t} \geq 3+\frac{4}{3}t^2,$$

$$\frac{1}{1+t}\left(\frac{a+2t-1}{3-a}+\frac{b+2t-1}{3-b}+\frac{c+2t-1}{3-c}\right) \geq \frac{3t}{1+t}+\frac{4}{3}t^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{a+2t-1}{3-a}+\frac{b+2t-1}{3-b}+\frac{c+2t-1}{3-c} \geq \\
&\geq \frac{[(a+2t-1)+(b+2t-1)+(c+2t-1)]^2}{(3-a)(a+2t-1)+(3-b)(b+2t-1)+(3-c)(c+2t-1)} \\
&= \frac{36t^2}{9(2t-1)+(4-2t)(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)} \\
&= \frac{36t^2}{9(2t-1)+3(4-2t)-(3+6t^2)} = \frac{6t}{2-t}.
\end{aligned}$$

Và như thế bài toán được đưa về chứng minh

$$\frac{6t}{(1+t)(2-t)} \geq \frac{3t}{1+t}+\frac{4}{3}t^2.$$

Thực hiện biến đổi và rút gọn, ta được

$$\frac{3t}{1+t}\left(\frac{2}{2-t}-1\right) \geq \frac{4}{3}t^2,$$

$$\frac{3t^2}{(1+t)(2-t)} \geq \frac{4}{3}t^2,$$

$$9 \geq 4(1+t)(2-t).$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì theo AM-GM, ta có
$$4(1+t)(2-t) \leq [(1+t)+(2-t)]^2 = 9.$$
Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hoặc $a = b$, $c = 0$ (và các hoán vị tương ứng). □

Bài toán 5. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta đều có*
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$$

Lời giải. Trong trường hợp $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 0$, ta có đẳng thức xảy ra. Vì vậy chỉ cần xét $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 > 0$ là đủ. Không mất tính tổng quát, giả sử $a+b+c = 3$. Đặt $a^2+b^2+c^2 = 3+6t^2$, với $0 < t < 1$. Khi đó
$$ab+bc+ca = \frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2} = \frac{9-(3+6t^2)}{2} = 3(1-t^2).$$
Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành
$$\frac{3+6t^2}{3(1-t^2)} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2,$$
$$\frac{1+2t^2}{1-t^2} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2,$$
$$\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{1-4t^2}{1-t^2}.$$
Nếu $t \geq \frac{1}{2}$ thì $\frac{1-4t^2}{1-t^2} \leq 0$ nên bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Xét trường hợp $0 < t < \frac{1}{2}$. Ta sẽ tìm cách đánh giá biểu thức $A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Theo bổ đề 1, ta có
$$0 < 1-2t \leq a,\ b,\ c \leq 1+2t,$$
suy ra $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{1-2t}$, và ta nghĩ đến việc biến đổi biểu thức A như sau
$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{1-2t}\right) + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{1-2t}\right) + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{1-2t}\right) + \frac{3}{1-2t} \\ &= -\frac{1}{1-2t}\left(\frac{a+2t-1}{a} + \frac{b+2t-1}{b} + \frac{c+2t-1}{c}\right) + \frac{3}{1-2t}. \end{aligned}$$
Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có
$$\begin{aligned} \frac{a+2t-1}{a} &+ \frac{b+2t-1}{b} + \frac{c+2t-1}{c} \geq \\ &\geq \frac{[(a+2t-1)+(b+2t-1)+(c+2t-1)]^2}{a(a+2t-1)+b(b+2t-1)+c(c+2t-1)} \\ &= \frac{36t^2}{(a^2+b^2+c^2)+(2t-1)(a+b+c)} \\ &= \frac{36t^2}{(3+6t^2)+3(2t-1)} = \frac{6t}{t+1}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$A \leq -\frac{6t}{(1-2t)(1+t)} + \frac{3}{1-2t} = \frac{3(1-t)}{(1-2t)(1+t)}.$$

Sử dụng đánh giá này, ta được

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} &= \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc}{abc}\\ &= (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-1\\ &\leq 3\cdot\frac{3(1-t)}{(1-2t)(1+t)} - 1 = \frac{2(2-t)^2}{(1-2t)(1+t)},\end{aligned}$$

suy ra

$$\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{4(1-2t)(1+t)}{(2-t)^2}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{4(1-2t)(1+t)}{(2-t)^2} \geq \frac{1-4t^2}{1-t^2}.$$

Do $1-2t>0$ nên bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{4(1+t)}{(2-t)^2} \geq \frac{1+2t}{1-t^2},$$

$$\frac{4(1+t)^2}{(2-t)^2} - 1 \geq \frac{1+2t}{1-t} - 1,$$

$$\frac{3t(4+t)}{(2-t)^2} \geq \frac{3t}{1-t},$$

$$(4+t)(1-t) \geq (2-t)^2,$$

$$4-3t-t^2 \geq 4-4t+t^2,$$

$$t(1-2t) \geq 0.$$

Vì $0<t<\frac{1}{2}$ nên bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Bài toán 6. *Cho a, b, c, d, e là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d+e=5$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{20}{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2} \geq 9.$$

Lời giải. Đặt $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=5+20t^2$, với $0\le t<1$. Ta cần chứng minh

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{20}{5+20t^2}\ge 9,$$

hay

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{4}{1+4t^2}\ge 9.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng với $t=0$ (vì khi đó $a=b=c=d=e=1$, bất đẳng thức trở thành đẳng thức) nên ta chỉ cần xét $0<t<1$. Theo bổ đề 1 thì

$$1-4t\le a,\ b,\ c,\ d,\ e\le 1+4t,$$

suy ra $\frac{1}{a}\ge\frac{1}{1+4t}$, và ta nghĩ đến việc biến đổi bất đẳng thức như sau

$$\sum\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{1+4t}\right)+\frac{5}{1+4t}+\frac{4}{1+4t^2}\ge 9,$$
$$\frac{1}{1+4t}\sum\frac{1+4t-a}{a}+\frac{5}{1+4t}+\frac{4}{1+4t^2}\ge 9.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\sum\frac{1+4t-a}{a}\ge\frac{\left[\sum(1+4t-a)\right]^2}{\sum a(1+4t-a)}=\frac{20^2t^2}{(1+4t)\sum a-\sum a^2}$$
$$=\frac{20^2t^2}{5(1+4t)-(5+20t^2)}=\frac{20t}{1-t}.$$

Do đó chỉ cần chứng minh

$$\frac{20t}{(1-t)(1+4t)}+\frac{5}{1+4t}+\frac{4}{1+4t^2}\ge 9.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{20t}{(1-t)(1+4t)}+\left(\frac{5}{1+4t}-5\right)\ge 4-\frac{4}{1+4t^2},$$
$$\frac{20t}{(1-t)(1+4t)}-\frac{20t}{1+4t}\ge\frac{16t^2}{1+4t^2},$$
$$\frac{20t^2}{(1-t)(1+4t)}\ge\frac{16t^2}{1+4t^2},$$
$$5(1+4t^2)\ge 4(1-t)(1+4t).$$

Ta có

$$5(1+4t^2)-4(1-t)(1+4t)=5+20t^2-4(1+3t-4t^2)=36t^2-12t+1$$
$$=(6t-1)^2\ge 0,$$

nên bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = e = 1$, hoặc $a = b = c = d = \frac{5}{6}$, $e = \frac{5}{3}$ (và các hoán vị tương ứng). $\square$

Bài toán 7. *Cho* x_1, x_2, $\ldots$, x_n *là các số thực không âm thỏa* $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$. *Chứng minh rằng*

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 + n^2 \le (n+1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

LỜI GIẢI. Đặt $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = n + n(n-1)t^2$ với $0 \le t \le 1$. Ta phải chứng minh

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 + n^2 \le (n+1)\left[n + n(n-1)t^2\right],$$

hay

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 \le n + n(n^2-1)t^2.$$

Nếu $t = 0$ thì $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = n$, suy ra $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$, bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Vì vậy chỉ cần xét $0 < t \le 1$. Theo bổ đề 1, ta có

$$1 - (n-1)t \le x_i \le 1 + (n-1)t, \quad \forall i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

suy ra $x_i^3 \le [1 + (n-1)t]\, x_i^2$, và ta nghĩ đến việc biến đổi bất đẳng thức như sau

$$\sum_{i=1}^n x_i^3 - [1+(n-1)t]\sum_{i=1}^n x_i^2 + [1+(n-1)t]\sum_{i=1}^n x_i^2 \le n + n(n^2-1)t^2,$$

$$-\sum_{i=1}^n x_i^2\,[1+(n-1)t - x_i] + [1+(n-1)t]\left[n + n(n-1)t^2\right] \le n + n(n^2-1)t^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n x_i^2\,[1+(n-1)t-x_i] &\ge \frac{\left\{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\,[1+(n-1)t-x_i]\right\}^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^n [1+(n-1)t-x_i]} \\
&= \frac{\left\{[1+(n-1)t]\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i^2\right\}^2}{n(n-1)t} \\
&= \frac{\{n\,[1+(n-1)t] - [n+n(n-1)t^2]\}^2}{n(n-1)t} \\
&= n(n-1)t(1-t)^2.
\end{aligned}$$

Do đó bài toán được đưa về chứng minh

$$-n(n-1)t(1-t)^2 + [1+(n-1)t]\left[n+n(n-1)t^2\right] \le n + n(n^2-1)t^2.$$

Thực hiện biến đổi và rút gọn, ta được

$$-n(n-1)t(1-t)^2+n+n(n-1)t+n(n-1)t^2\left[1+(n-1)t\right]\le n+n(n^2-1)t^2,$$
$$-n(n-1)t(1-t)^2+n(n-1)t+n(n-1)t^2\left[1+(n-1)t\right]\le n(n^2-1)t^2,$$
$$-(1-t)^2+1+t\left[1+(n-1)t\right]\le (n+1)t,$$
$$2t-t^2+t+(n-1)t^2\le (n+1)t,$$
$$(n-2)t(1-t)\ge 0.$$

Do $0<t\le 1$ và $n\ge 2$ nên bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Bài toán được chứng minh xong. Ta có đẳng thức xảy ra khi $n=2$, hoặc $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ hoặc $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=0$, $x_n=n$ (và các hoán vị tương ứng) khi $n>2$. □

Bài toán 8. *Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực không âm thỏa $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$. Chứng minh rằng*

$$n^2\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\ge n(n-2)^2+4(n-1)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2).$$

Lời giải. Đặt $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=n+n(n-1)t^2$ với $0\le t\le 1$. Ta phải chứng minh

$$n^2\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\ge n(n-2)^2+4(n-1)\left[n+n(n-1)t^2\right],$$

hay

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\ge\frac{(n-2)^2+4(n-1)}{n}+\frac{4(n-1)^2}{n}t^2=n+\frac{4(n-1)^2}{n}t^2.$$

Nếu $t=0$ thì $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=n$, suy ra $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$, bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Vì vậy chỉ cần xét $0<t\le 1$. Theo bổ đề 1, ta có

$$1-(n-1)t\le x_i\le 1+(n-1)t,\quad \forall i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

suy ra $\dfrac{1}{x_i}\ge\dfrac{1}{1+(n-1)t}$, và ta nghĩ đến việc biến đổi bài toán như sau

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{x_i}-\frac{1}{1+(n-1)t}\right]+\frac{n}{1+(n-1)t}\ge n+\frac{4(n-1)^2}{n}t^2,$$
$$\frac{1}{1+(n-1)t}\sum_{i=1}^{n}\frac{1+(n-1)t-x_i}{x_i}+\frac{n}{1+(n-1)t}\ge n+\frac{4(n-1)^2}{n}t^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1+(n-1)t-x_i}{x_i}\ge\frac{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[1+(n-1)t-x_i\right]\right\}^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\left[1+(n-1)t-x_i\right]}=\frac{n^2(n-1)^2t^2}{\left[1+(n-1)t\right]\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$$
$$=\frac{n^2(n-1)^2t^2}{n\left[1+(n-1)t\right]-\left[n+n(n-1)t^2\right]}=\frac{n(n-1)t}{1-t}.$$

Từ đó bài toán được đưa về chứng minh

$$\frac{n(n-1)t}{(1-t)\left[1+(n-1)t\right]}+\frac{n}{1+(n-1)t}\geq n+\frac{4(n-1)^2}{n}t^2.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{n(n-1)t}{(1-t)\left[1+(n-1)t\right]}\geq\left[n-\frac{n}{1+(n-1)t}\right]+\frac{4(n-1)^2}{n}t^2,$$

$$\frac{n(n-1)t}{(1-t)\left[1+(n-1)t\right]}\geq\frac{n(n-1)t}{1+(n-1)t}+\frac{4(n-1)^2}{n}t^2,$$

$$\frac{n(n-1)t^2}{(1-t)\left[1+(n-1)t\right]}\geq\frac{4(n-1)^2}{n}t^2,$$

$$n^2\geq 4(n-1)(1-t)\left[1+(n-1)t\right].$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$4(n-1)(1-t)\left[1+(n-1)t\right]\leq\left\{(n-1)(1-t)+\left[1+(n-1)t\right]\right\}^2=n^2,$$

nên bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$, hoặc $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=\dfrac{n}{2(n-1)}$, $x_n=\dfrac{n}{2}$ (và các hoán vị tương ứng). □

Bài toán 9. *Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực không âm thỏa $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$. Chứng minh rằng*

$$(n-1)(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3)+n^2\geq(2n-1)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2).$$

Lời giải. Đặt $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=n+n(n-1)t^2$ với $0\leq t\leq 1$. Ta phải chứng minh

$$(n-1)(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3)+n^2\geq(2n-1)\left[n+n(n-1)t^2\right],$$

hay

$$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3\geq\frac{n(2n-1)-n^2}{n-1}+\frac{(2n-1)n(n-1)}{n-1}t^2=n+n(2n-1)t^2.$$

Nếu $t=0$ thì $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ nên bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Vì vậy chỉ cần xét $0<t\leq 1$. Lúc này, ta có hai trường hợp xảy ra.

- *Trường hợp $t\geq\dfrac{1}{n-1}$.* Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3\geq\frac{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}=n\left[1+(n-1)t^2\right]^2.$$

Suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$n\left[1+(n-1)t^2\right]^2 \ge n+n(2n-1)t^2.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\begin{gathered}\left[1+(n-1)t^2\right]^2 \ge 1+(2n-1)t^2,\\ 2(n-1)t^2+(n-1)^2t^4 \ge (2n-1)t^2,\\ t^2\left[(n-1)^2t^2-1\right] \ge 0,\end{gathered}$$

hiển nhiên đúng do $t \ge \dfrac{1}{n-1}$.

- *Trường hợp* $0 < t < \dfrac{1}{n-1}$. Sử dụng bổ đề 1, ta có

$$0 < 1-(n-1)t \le x_i \le 1+(n-1)t, \quad \forall i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

suy ra $x_i^3 \ge [1-(n-1)t]\, x_i^2$, và ta nghĩ đến việc biến đổi bất đẳng thức như sau

$$\sum_{i=1}^n x_i^3 - [1-(n-1)t]\sum_{i=1}^n x_i^2 + [1-(n-1)t]\sum_{i=1}^n x_i^2 \ge n+n(2n-1)t^2,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2\,[x_i+(n-1)t-1] + [1-(n-1)t]\left[n+n(n-1)t^2\right] \ge n+n(2n-1)t^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n x_i^2\,[x_i+(n-1)t-1] &\ge \frac{\left\{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\,[x_i+(n-1)t-1]\right\}^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^n [x_i+(n-1)t-1]}\\ &\frac{\left\{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2 + [(n-1)t-1]\sum_{i=1}^n \right\}^2}{n(n-1)t}\\ &= \frac{\{[n+n(n-1)t^2]+n\,[(n-1)t-1]\}^2}{n(n-1)t}\\ &= n(n-1)t(1+t)^2.\end{aligned}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$n(n-1)t(1+t)^2 + [1-(n-1)t]\left[n+n(n-1)t^2\right] \ge n+n(2n-1)t^2.$$

Thực hiện khai triển và rút gọn, ta được

$$n(n-1)t(1+t)^2 + n - n(n-1)t + n(n-1)t^2\,[1-(n-1)t] \ge n+n(2n-1)t^2,$$

$$n(n-1)t(1+t)^2 - n(n-1)t + n(n-1)t^2\left[1-(n-1)t\right] \ge n(2n-1)t^2,$$
$$(n-1)(1+2t+t^2) - (n-1) + (n-1)t - (n-1)^2t^2 \ge (2n-1)t,$$
$$3(n-1)t + \left[(n-1)-(n-1)^2\right]t^2 \ge (2n-1)t,$$
$$n-2 \ge (n-1)(n-2)t.$$

Do $t \le \dfrac{1}{n-1}$ và $n \ge 2$ nên bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$, hoặc $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \dfrac{n}{n-1}$, $x_n = 0$ (và các hoán vị tương ứng). □

3 Lời bàn

Qua các ví dụ ứng dụng trên, ta có thể thấy kỹ thuật phối hợp giữa bổ đề 1 và kỹ thuật thêm – bớt của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz là một kỹ thuật mạnh và hiệu quả. Tuy vậy, kỹ thuật này vẫn còn nhiều điểm hạn chế cần khắc phục. Nó rất khó áp dụng cho các bất đẳng thức với điều kiện dạng tích, các bất đẳng thức chứa căn hay những dạng phân thức phức tạp, ... Ví dụ như bài toán sau

Bài toán 10. *Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2a^2+7} + \frac{1}{2b^2+7} + \frac{1}{2c^2+7} \le \frac{1}{3}.$$

Tôi vẫn đang cố gắng cải tiến kỹ thuật này để nó trở nên hiệu quả hơn nữa. Rất mong sẽ nhận được sự trao đổi từ bạn bè yêu Toán gần xa. Mọi góp ý xin gửi về: Võ Quốc Bá Cẩn, C65 khu dân cư Phú An, phường Phú Thứ, quận Cái Răng, thành phố Cần Thơ, hoặc qua hòm thư điện tử `babylearnmath@yahoo.com`.

4 Bài tập tự luyện

Bài tập 1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a+2} + \frac{b^2}{b+2} + \frac{c^2}{c+2} \le \frac{3}{ab+bc+ca}.$$

Bài tập 2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$12\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 4(a^3+b^3+c^3)+21.$$

Bài tập 3. Cho a, b, c là ba số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \ge 5.$$

Bài tập 4. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$ và $a^2+b^2+c^2=3+6t^2$ với $t \geq 0$. Chứng minh rằng

$$(1-2t)(1+t)^2 \leq abc \leq (1+2t)(1-t)^2.$$

Bài tập 5. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm tập hợp tất cả các số thực k sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)} + \frac{k(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geq \frac{3}{8} + \frac{k}{3}.$$

Bài tập 6. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b^2+bc+c^2} + \frac{1}{c^2+ca+a^2} + \frac{1}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{9}{(a+b+c)^2}.$$

Bài tập 7. Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $ab+bc+ca>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2+bc+c^2} + \frac{b}{c^2+ca+a^2} + \frac{c}{a^2+ab+b^2} + \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{6}{a+b+c}.$$

Bài tập 8. Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $ab+bc+ca>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{(a^2+bc)(b+c)}{b^2+bc+c^2} + \frac{(b^2+ca)(c+a)}{c^2+ca+a^2} + \frac{(c^2+ab)(a+b)}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{4}{3}(a+b+c).$$

Bài tập 9. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $(a+b+c)(ab+bc+ca) \neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{bc}{b^2+bc+c^2} + \frac{ca}{c^2+ca+a^2} + \frac{ab}{a^2+ab+b^2} + \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} \geq \frac{7}{3}.$$

Bài tập 10. Cho các số thực không âm a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3+d^3+ab+ac+ad+bc+bd+cd \leq a+b+c+d.$$

Bài tập 11. Cho a, b, c, d, e là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=5$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{7-2a} + \frac{1}{7-2b} + \frac{1}{7-2c} + \frac{1}{7-2d} + \frac{1}{7-2e} \leq 1.$$

Bài tập 12. Cho x_1, x_2, $\ldots$, x_{10} là các số thực dương thỏa $x_1+x_2+\cdots+x_{10}=10$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_{10}^2} \geq x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2.$$

Bài tập 13. Cho x_1, x_2, ..., x_n là các số thực không âm thỏa $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$. Chứng minh rằng

$$2(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3) + n^2 \leq (2n+1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

Bài tập 14. Chứng minh rằng, nếu a_1, a_2, ..., a_n là các số thực dương thỏa mãn $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$, thì

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{2n\sqrt{n-1}}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \geq n + 2\sqrt{n-1}.$$

Tài liệu tham khảo

[1] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1967.

[2] J. Michael Steele, *The Cauchy-Schwarz Master Class*, Cambridge University Press, 2004.

[3] T. Andreescu, V. Cîrtoaje, G. Dospinescu, M. Lascu, *Old and New Inequalities*, Volume 1, GIL Publishing House, 2004.

[4] V. Cîrtoaje, *Algebraic Inequalities: Old and New Methods*, GIL Publishing House, 2006.

[5] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo Bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Tri Thức, 2006.

[6] V. Q. B. Can, C. Pohoaţă, *Old and New Inequalities*, Volume 2, GIL Publishing House, 2008.

[7] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Bất đẳng thức và những lời giải hay*, Nhà xuất bản Hà Nội, 2009.

[8] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Sử dụng phương pháp Cauchy-Schwarz để giải toán Bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm Hà Nội, 2010.

[9] Một số tạp chí Toán học:

- *Crux Mathematicorum*
- *American Mathematical Monthly*
- *Mathematical Reflections*

[10] Các diễn đàn thảo luận Toán:

- `http://math.vn`
- `http://mathlinks.ro`
- `http://mathoverflow.net`
- `http://mathscope.org`

BẤT ĐẲNG THỨC BERNOULLI

Trương Tấn Sang
HS chuyên Toán khóa 2009 - 2012

1 Tóm tắt lý thuyết

Bất đẳng thức Bernoulli được phát biểu như sau:

Định lý 1 (Bất đẳng thức Bernoulli)**.** *Với mọi số thực $x > -1$ và mọi số thực $r > 1$, ta có bất đẳng thức*

$$(1+x)^r \geq 1 + rx.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Trong trường hợp $0 < r < 1$, ta có bất đẳng thức với chiều ngược lại, tức là

$$(1+x)^r \leq 1 + rx.$$

Nếu lấy $x + 1 \to x$ thì ta có

Định lý 2. *Với mọi $x > 0$ và mọi $r > 1$, ta có*

$$x^r \geq rx + 1 - r.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Bất đẳng thức này thường sử dụng hơn bất đẳng thức gốc.

Nếu đặt $r = \dfrac{a}{b}$ với $a > b > 0$ và cho $x \to x^b$, ta có bất đẳng thức

Định lý 3. *Cho $a > b$ là hai số thực dương. Khi đó với mọi $x > 0$, ta có*

$$x^a \geq \frac{a}{b}x^b + 1 - \frac{a}{b}.$$

Bất đẳng thức này được sử dụng phổ biến hơn vì đánh giá được sự chênh lệch số mũ. Điểm mạnh ở bất đẳng thức Bernoulli là đánh giá được các bất đẳng thức với số mũ vô tỉ và những bất đẳng thức không đồng nhất.

2 Các dạng toán đặc trưng

2.1 Kỹ thuật đánh giá qua chênh lệch lũy thừa

Các dạng toán đặc trựng của bất đẳng thức Bernoulli rất dễ nhận ra, vì đó là bất đẳng thức với những số mũ vô tỉ dương hay sự chuyển đổi số mũ vô tỉ. Để mở đầu chuyên đề, ta chứng minh bất đẳng thức sau.

Ví dụ 1. *Cho x_1, x_2, ..., x_k là các số thực dương. Chứng minh rằng với mọi $m > n > 0$, ta có bất đẳng thức*

$$\left(\frac{x_1^m + x_2^m + \cdots + x_k^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}} \geq \left(\frac{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

LỜI GIẢI. Ý tưởng chính của việc sử dụng bất đẳng thức Bernoulli là thể hiện được sự chênh lệch số mũ bé với số mũ lớn. Để thực hiện điều này, ta chuẩn hóa $x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n = n$. Khi đó, ta cần chứng minh rằng

$$x_1^m + x_2^m + \cdots + x_k^m \geq n.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$x_i^m = [1 + (x_i^n - 1)]^{\frac{m}{n}} \geq 1 + \frac{m}{n}(x_i^n - 1), \quad \forall i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k.$$

Do đó

$$x_1^m + x_2^m + \cdots + x_k^m \geq n + \frac{m}{n}(x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n - n).$$

Với điều kiện chuẩn hóa $x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n = n$, ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_k$. □

Để nắm rõ hơn về kỹ thuật này, ta lấy ví dụ với bất đẳng thức Nesbitt.

Ví dụ 2. *Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c ta có bất đẳng thức*

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{b}{c+a}\right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{c}{a+b}\right)^{\sqrt{3}} \geq \frac{3}{2^{\sqrt{3}}}.$$

LỜI GIẢI. Ta sẽ đánh giá số mũ $\sqrt{3}$ thông qua số mũ 1 bằng bất đẳng thức Bernoulli, chú ý sử dụng các lượng đánh giá thích hợp để đẳng thức xảy ra.

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\sqrt{3}} \geq \sqrt{3}\left(\frac{2a}{b+c}\right) + 1 - \sqrt{3},$$

$$\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\sqrt{3}} \geq \sqrt{3}\left(\frac{2b}{c+a}\right) + 1 - \sqrt{3},$$

$$\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\sqrt{3}} \geq \sqrt{3}\left(\frac{2c}{a+b}\right) + 1 - \sqrt{3}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại và áp dụng bất đẳng thức Nesbitt, ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Ví dụ 3. *Cho tam giác ABC có độ dài các đường trung tuyến là m_a, m_b, m_c và các phân giác l_a, l_b, l_c. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{m_a}{l_a}\right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{m_b}{l_b}\right)^{\sqrt{3}} + \left(\frac{m_c}{l_c}\right)^{\sqrt{3}} \geq 3.$$

LỜI GIẢI. Ta biết rằng: *Trong một tam giác, độ dài của đường trung tuyến luôn không nhỏ hơn độ dài phân giác.* Do đó $m_a \geq l_a$, $m_b \geq l_b$, $m_c \geq l_c$, suy ra

$$\frac{m_a}{l_a} + \frac{m_b}{l_b} + \frac{m_c}{l_c} \geq 3.$$

Từ đây, thực hiện đánh giá số mũ $\sqrt{3}$ thông qua số mũ 1 bằng bất đẳng thức Bernoulli, ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. □

Ví dụ 4. *Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh rằng với mọi $0 < k < 1$, ta có*

$$\cos^k\frac{A}{2} + \cos^k\frac{B}{2} + \cos^k\frac{C}{2} \leq 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k.$$

LỜI GIẢI. Để ý đẳng thức xảy ra khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$ và với $k = 1$ là bất đẳng thức cơ sở. Do đó, ta sẽ đánh giá thông qua số mũ 1.

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{A}{2}\right)^k \leq \frac{2k}{\sqrt{3}}\cos\frac{A}{2} + 1 - k,$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{B}{2}\right)^k \leq \frac{2k}{\sqrt{3}}\cos\frac{B}{2} + 1 - k,$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{C}{2}\right)^k \leq \frac{2k}{\sqrt{3}}\cos\frac{C}{2} + 1 - k.$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại theo vế và áp dụng bất đẳng thức cơ sở

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. □

Ta có bài toán tương tự.

Ví dụ 5. *Nếu A, B, C là ba góc của một tam giác, thì*

$$\sin^{\sqrt{2}}A + \sin^{\sqrt{2}}B + \sin^{\sqrt{2}}C \leq 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\sqrt{2}}.$$

LỜI GIẢI. Dạng phát biểu của bài toán gợi cho ta nhớ đến kết quả quen thuộc:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}, \quad \forall \triangle ABC. \tag{1}$$

Như vậy, ý tưởng của ta là đánh giá thông qua số mũ 2.

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin A\right)^2 \geq \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin A\right)^{\sqrt{2}} + 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin A\right)^{\sqrt{2}} + 1 - \sqrt{2},$$

suy ra

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin A\right)^{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin A\right)^2 + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sin^2 A + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Cộng bất đẳng thức này với hai bất đẳng thức tương tự và sử dụng (1), ta thu được ngay kết quả cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. □

2.2 Kỹ thuật chọn điểm rơi

Cũng như các bất đẳng thức AM-GM, Cauchy-Schwarz, đôi khi đẳng thức xảy ra ở bất đẳng thức Bernoulli khá chênh lệch nhau giữa các biến. Nhưng chỉ cần chỉ cần một kỹ thuật nhỏ, ta có thể giải quyết vấn đề này.

Ví dụ 6. *Cho a, b, c, k, r là các hằng số dương, $r > 1$ và x, y, z là các số dương thay đổi sao cho $ax + by + cz = k$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = x^r + y^r + z^r.$$

LỜI GIẢI. Giả sử đẳng thức xảy ra khi $x =_x 0$, $y = y_,$ $z = z_0$. Chú ý đẳng thức xảy ra ở bất đẳng thức Bernoulli khi biến số bằng 1, nên ta sẽ đánh giá như sau

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^r \ge r\left(\frac{x}{x_0}\right) + 1 - r.$$

Nhân hai vế cho x_0^r, ta thu được

$$x^r \ge rxx_0^{r-1} + (1-r)x_0^{r-1}.$$

Xây dựng bất đẳng thức tương tự với hai biến còn lại rồi cộng cả ba bất đẳng thức lại, suy ra

$$P \ge r(xx_0^{r-1} + yy_0^{r-1} + zz_0^{r-1}) + (1-r)(x_0^r + y_0^r + z_0^r).$$

Do đó, ta sẽ chọn x_0, y_0, $z_0 > 0$ sao cho

$$\begin{cases} \dfrac{x_0^{r-1}}{a} = \dfrac{y_0^{r-1}}{b} = \dfrac{z_0^{r-1}}{c} = \lambda \\ ax_0 + by_0 + cz_0 = k \end{cases}.$$

Giải hệ trên ta tìm được

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{ka^{\frac{1}{r-1}}}{a^{\frac{r}{r-1}} + b^{\frac{r}{r-1}} + c^{\frac{r}{r-1}}} \\ y_0 = \dfrac{kb^{\frac{1}{r-1}}}{a^{\frac{r}{r-1}} + b^{\frac{r}{r-1}} + c^{\frac{r}{r-1}}} \\ z_0 = \dfrac{kc^{\frac{1}{r-1}}}{a^{\frac{r}{r-1}} + b^{\frac{r}{r-1}} + c^{\frac{r}{r-1}}} \end{cases}.$$

Thay x_0, y_0, z_0 vào bất đẳng thức trên, ta tìm được giá trị nhỏ nhất của P. □

Ví dụ 7. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + 2b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = 2a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{3}} + 2c^{\sqrt{3}}.$$

LỜI GIẢI. Bằng phép đổi biến $x^{\sqrt{3}} = 2a^{\sqrt{3}}$, $y^{\sqrt{3}} = b^{\sqrt{3}}$, $z^{\sqrt{3}} = 2c^{\sqrt{3}}$, ta chuyển được bài toán về dạng: *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện*

$$\frac{x}{2^{\frac{1}{\sqrt{3}}}} + 2y^{\sqrt{3}} + \frac{z}{2^{\frac{1}{\sqrt{3}}}} = 3.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^{\sqrt{3}} + y^{\sqrt{3}} + z^{\sqrt{3}}.$$

Đây chính là một trường hợp riêng của *ví dụ 6* ở trên. □

3 Bất đẳng thức Bernoulli trong khảo sát tính tăng giảm của hàm số

Bất đẳng thức Bernoulli còn được sử dụng để khảo sát tính tăng giảm của những hàm số có chất bất đẳng thức.

Ví dụ 8. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, hàm số sau tăng trên* $(0, +\infty)$

$$f(x) = \left(\frac{a^2}{bc}\right)^x + \left(\frac{b^2}{ca}\right)^x + \left(\frac{c^2}{ab}\right)^x.$$

LỜI GIẢI. Để khảo sát những hàm số như thế bằng bất đẳng thức Bernoulli rất đơn giản, chỉ cần xét bất đẳng thức dạng chênh lệch số mũ. Lấy $x_1 > x_2 > 0$, ta sẽ chứng minh rằng

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, dễ thấy

$$\left(\frac{a^2}{bc}\right)^{x_1} \geq \frac{x_1}{x_2}\left(\frac{a^2}{bc}\right)^{x_2} + 1 - \frac{x_1}{x_2},$$

$$\left(\frac{b^2}{ca}\right)^{x_1} \geq \frac{x_1}{x_2}\left(\frac{b^2}{ca}\right)^{x_2} + 1 - \frac{x_1}{x_2},$$

$$\left(\frac{c^2}{ab}\right)^{x_1} \geq \frac{x_1}{x_2}\left(\frac{c^2}{ab}\right)^{x_2} + 1 - \frac{x_1}{x_2}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta có

$$f(x_1) \geq \frac{x_1}{x_2} f(x_2) + 3\left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right).$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{x_1}{x_2} f(x_2) + 3\left(1 - \frac{x_1}{x_2}\right) \geq f(x_2) \text{ hay } f(x_2) \geq 3.$$

Bất đẳng thức này đúng vì theo AM-GM ta có $f(x_2) \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc}\right)^{x_2}\left(\frac{b^2}{ca}\right)^{x_2}\left(\frac{c^2}{ab}\right)^{x_2}} = 3.$ □

NHẬN XÉT. Tổng quát hơn, ta có thể chứng minh được kết quả sau: *Cho a, b, c là các số thực dương. Xét $f(x) = a^x + b^x + c^x$. Nếu $f(x) \geq 3$, $\forall x \geq x_0 > 0$ thì ta có $f(x)$ tăng trên* $(0, +\infty)$.

Bài toán tổng quát cho n biến phát biểu tương tự. Bạn đọc có thể tự kiểm tra lại kết quả này. Sử dụng kết quả này, ta chứng minh được các hàm số sau tăng trên $(0, +\infty)$:

$$f(x) = \left(\frac{bc}{a^2}\right)^x + \left(\frac{ca}{b^2}\right)^x + \left(\frac{ab}{b^2}\right)^x, \quad g(x) = \left(\frac{b+c}{2a}\right)^x + \left(\frac{c+a}{2b}\right)^x + \left(\frac{a+b}{2c}\right)^x,$$

và hàm số $k(x) = \left(\frac{2a}{b+c}\right)^x + \left(\frac{2b}{c+a}\right)^x + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^x$ cũng tăng nhưng tăng trên $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

4 Bất đẳng thức Weierstrass

Bất đẳng thức Weierstrass là một dạng tương tự của bất đẳng thức Bernoulli, nó được phát biểu như sau.

Định lý 4 (Bất đẳng thức Weierstrass)**.** *Với mọi số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cùng dấu và lớn hơn -1, ta có bất đẳng thức*

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Đây là một bất đẳng thức có nhiều ứng dụng. Nó có thể giúp ta đưa một bất đẳng thức gồm tích nhiều thành phần phức tạp trở thành một bất đẳng thức đơn giản hơn và thuận tiện hơn cho việc chứng minh. Để rõ hơn về ứng dụng của nó, ta xét một số ví dụ.

Ví dụ 9. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3(a+b+c)^2.$$

LỜI GIẢI. Để ý rằng trong ba số a^2-1, b^2-1, c^2-1 luôn có ít nhất hai số cùng dấu. Giả sử hai số đó là a^2-1 và b^2-1. Khi đó, theo bất đẳng thức Weierstrass, ta có

$$\begin{aligned}(a^2+2)(b^2+2) &= \left[3+(a^2-1)\right]\left[3+(b^2-1)\right] = 9\left(1+\frac{a^2-1}{3}\right)\left(1+\frac{b^2-1}{3}\right)\\ &\geq 9\left(1+\frac{a^2-1}{3}+\frac{b^2-1}{3}\right) = 3(a^2+b^2+1).\end{aligned}$$

Vậy ta chỉ còn phải chứng minh

$$(a^2+b^2+1)(c^2+2) \geq (a+b+c)^2.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$(a^2+b^2+1)(1+1+c^2) \geq (a+b+c)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Ví dụ 10. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$(a^2+3)(b^2+3)(c^2+3) \geq 4(a+b+c+1)^2.$$

LỜI GIẢI. Tương tự như ví dụ trên, ta giả sử a và b là hai số sao cho a^2-1, b^2-1 có cùng dấu. Khi đó, áp dụng bất đẳng thức Weierstrass, ta được

$$(a^2+3)(b^2+3) = \left[4+(a^2-1)\right]\left[4+(b^2-1)\right] = 16\left(1+\frac{a^2-1}{4}\right)\left(1+\frac{b^2-1}{4}\right)$$
$$\geq 16\left(1+\frac{a^2-1}{4}+\frac{b^2-1}{4}\right) = 4(a^2+b^2+2).$$

Bài toán được quy về chứng minh

$$(a^2+b^2+2)(c^2+3) \geq (a+b+c+1)^2.$$

Và cũng giống như bất đẳng thức trên, ta thấy bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$(a^2+b^2+1+1)(1+1+c^2+1) \geq (a+b+c+1)^2.$$

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Ví dụ 11. *Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1) \geq \frac{16}{27}(a+b+c+d)^2.$$

LỜI GIẢI. Đặt $a=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $b=\frac{y}{\sqrt{3}}$, $c=\frac{z}{\sqrt{3}}$, $d=\frac{t}{\sqrt{3}}$. Khi đó bất đẳng thức có thể viết lại thành

$$(x^2+3)(y^2+3)(z^2+3)(t^2+3) \geq 16(x+y+z+t)^2.$$

Bây giờ, ta có để ý rằng trong bốn số x^2-1, y^2-1, z^2-1, t^2-1 luôn có hai số cùng dấu. Giả sử hai số đó là x^2-1 và y^2-1, thế thì theo ví dụ trên, ta dễ thấy

$$(x^2+3)(y^2+3) \geq 4(x^2+y^2+2).$$

Sử dụng đánh giá này, ta đưa được bài toán về chứng minh

$$(x^2+y^2+2)(z^2+3)(t^2+3) \geq 4(x+y+z+t)^2.$$

Đến đây, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$(x+y+z+t)^2 \leq (x^2+y^2+2)\left[1+1+\frac{(z+t)^2}{2}\right],$$

ta đi đến việc chứng minh bất đẳng thức sau

$$(z^2+3)(t^2+3) \geq 4\left[2+\frac{(z+t)^2}{2}\right] = 8+2(z+t)^2.$$

Bất đẳng thức này tương đương với $z^2t^2+z^2+t^2+1 \geq 4zt$, hiển nhiên đúng theo AM-GM

$$z^2t^2+z^2+t^2+1 \geq 4\sqrt[4]{z^2t^2\cdot z^2\cdot t^2\cdot 1} = 4zt.$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=\frac{1}{\sqrt{3}}$. □

5 Các phương pháp sử dụng bất đẳng thức Bernoulli

5.1 Các bài toán minh họa

Để chuẩn bị bước sang hai kỹ thuật đánh giá chênh lệch số mũ và Bernoulli ngược, ta sẽ làm quen dần với các dạng toán sử dụng bất đẳng thức Bernoulli, cũng là sự mở đầu cho hai kỹ thuật nói trên.

Ví dụ 12 (Olympic 30-4)**.** *Cho hai số dương a, b thỏa mãn $a+b=1$. Tìm nghiệm trong khoảng $(0,\,1)$ của bất phương trình*

$$x^a > \frac{x(1+b)}{1+bx}.$$

LỜI GIẢI. Thực chất đây là một bài bất đẳng thức thông thường vì với mọi x thuộc $(0,\,1)$, bất phương trình trên luôn đúng. Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$x^b = [1-(1-x)]^b \le 1 - b(1-x) = 1 - b + bx.$$

Từ đây suy ra

$$(1+b)x^b \le (1+b)(1-b+bx) < 1 + bx.$$

Mà $b = 1-a$ nên ta có $(1+b)x^{1-a} < 1+bx$, hay

$$x^a > \frac{(1+b)x}{1+bx}.$$

Vậy bất phương trình được thỏa mãn với mọi $x \in (0,\,1)$. □

Ví dụ 13 (Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ)**.** *Giải phương trình*

$$3x^4 - 4x^3 = 1 - \sqrt{(1+x^2)^3}.$$

LỜI GIẢI. Ta sẽ chứng minh rằng

$$3x^4 - 4x^3 + \sqrt{(1+x^2)^3} \ge 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\sqrt{(1+x^2)^3} = (1+x^2)^{\frac{3}{2}} \ge 1 + \frac{3}{2}x^2.$$

Từ đó suy ra

$$3x^4 - 4x^3 + \sqrt{(1+x^2)^3} \ge 3x^4 - 4x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 = \frac{1}{2}x^2(6x^2 - 8x + 3) + 1 \ge 1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$. □

Ví dụ 14. *Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 2$, ta có bất đẳng thức*

$$\sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \cdots + \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}} \le \frac{n(n+2)}{n+1}.$$

Lời giải. Để khử các căn bậc $k+1$, ta sẽ áp dụng bất đẳng thức Bernoulli như sau

$$\frac{k+1}{k} = 1 + (k+1)\cdot\frac{1}{k(k+1)} \le \left[1+\frac{1}{k(k+1)}\right]^{k+1}, \quad \forall k \ge 1.$$

Từ đó lấy căn bậc $k+1$ từng vế, ta được

$$\sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}} \le 1 + \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \quad \forall k \ge 1.$$

Cho $k = 1, 2, \ldots, n$, rồi cộng các bất đẳng thức lại theo vế, ta được

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + \cdots + \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n}} &\le \left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= n+1-\frac{1}{n+1} = \frac{n(n+2)}{n+1}.\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh. □

Nhận xét. Nếu đặt $f(n)$ là vế trái của bất đẳng thức đã cho thì dễ thấy $f(n) > n$ (do từng hạng tử của nó > 1). Mà theo kết quả bài toán trên thì $f(n) \le \dfrac{n(n+2)}{n+1} = n + \dfrac{n}{n+1}$. Do vậy

$$n < f(n) \le n + \frac{n}{n+1}.$$

Từ đây, ta có thể thấy $[f(n)] = 2$ với mọi $n \ge 2$.

Tác giả đã đọc được một hệ quả của bất đẳng thức Hölder nhưng được chứng minh bằng bất đẳng thức Bernoulli rất độc đáo.

Ví dụ 15. *Cho a_i, b_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) là các số thực dương. Chứng minh rằng với mọi $k > 1$, ta có bất đẳng thức*

$$\frac{b_1^k}{a_1^{k-1}} + \frac{b_2^k}{a_2^{k-1}} + \cdots + \frac{b_n^k}{a_n^{k-1}} \ge \frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n)^k}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^{k-1}}.$$

Lời giải. Đây là một bất đẳng thức thuần nhất với $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và với $b_1, b_2, \ldots, b_n$ nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = n$. Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{b_1^k}{a_1^{k-1}} + \frac{b_2^k}{a_2^{k-1}} + \cdots + \frac{b_n^k}{a_n^{k-1}} \ge n.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\left(\frac{b_i}{a_i}\right)^k \ge k\left(\frac{b_i}{a_i}\right) + 1 - k, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{b_i^k}{a_i^{k-1}} = a_i\left(\frac{b_i}{a_i}\right)^k \ge a_i\left(k\frac{b_i}{a_i} + 1 - k\right) = kb_i + (1-k)a_i, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Cho $i = 1, 2, \ldots, n$ rồi cộng các bất đẳng thức lại với nhau, ta thu được

$$\begin{aligned}\frac{b_1^k}{a_1^{k-1}} + \frac{b_2^k}{a_2^{k-1}} + \cdots + \frac{b_n^k}{a_n^{k-1}} &\geq k(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + (1-k)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\\ &= kn + (1-k)n = n.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. □

Ví dụ 16. *Chứng minh rằng hàm số* $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ *tăng trên* $(0, +\infty)$, *trong khi đó hàm số* $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ *thì lại giảm trên khoảng này.*

Lời giải. **(a)** *Chứng minh $f(x)$ tăng.* Lấy $x_1 > x_2 > 0$, ta cần chứng minh $f(x_1) \geq f(x_2)$, hay

$$\left(1 + \frac{1}{x_1}\right)^{x_1} \geq \left(1 + \frac{1}{x_2}\right)^{x_2}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\left(1 + \frac{1}{x_1}\right)^{\frac{x_1}{x_2}} \geq 1 + \frac{1}{x_2},$$

hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức Bernoulli

$$\left(1 + \frac{1}{x_1}\right)^{\frac{x_1}{x_2}} \geq 1 + \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{x_2}.$$

Vậy $f(x)$ tăng trên $(0, +\infty)$.

(b) *Chứng minh $g(x)$ giảm.* Lấy $x_1 > x_2 > 0$, ta cần chứng minh $g(x_1) \leq g(x_2)$, hay

$$\left(1 + \frac{1}{x_1}\right)^{x_1+1} \leq \left(1 + \frac{1}{x_2}\right)^{x_2+1}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{x_1+1}{x_1} \leq \left(\frac{x_2+1}{x_2}\right)^{\frac{1+x_2}{1+x_1}},$$

$$\left(\frac{x_2}{x_2+1}\right)^{\frac{1+x_2}{1+x_1}} \leq \frac{x_1}{x_1+1}.$$

Do $0 < \frac{1+x_2}{1+x_1} < 1$ nên theo bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\left(\frac{x_2}{x_2+1}\right)^{\frac{1+x_2}{1+x_1}} = \left(1 - \frac{1}{x_2+1}\right)^{\frac{1+x_2}{1+x_1}} \leq 1 - \frac{1+x_2}{1+x_1} \cdot \frac{1}{x_2+1} = 1 - \frac{1}{x_1+1} = \frac{x_1}{x_1+1}.$$

Vậy $g(x)$ là hàm giảm trên $(0, +\infty)$. □

Nhận xét. Có thể dễ dàng chứng minh $f(x) < 3 < g(x)$ với mọi $x > 0$. Tuy nhiên, 3 chưa phải là chặn trên nhỏ nhất của $f(x)$, cũng không phải là chặn dưới lớn nhất của $g(x)$. Với sự trợ giúp của máy tính điện tử, người ta đã chứng minh được

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = e \approx 2.718281828459\ldots$$

Từ đây ta có thể thấy chặn trên nhỏ nhất của $f(x)$ và chặn dưới lớn nhất của $g(x)$ phải là e, tức ta có

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le e \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Cho $x \to \frac{1}{x}$, ta được $(1+x)^{\frac{1}{x}} \le e \le (1+x)^{\frac{1}{x}+1}$, hay

$$(1+x)^r \le e^{rx} \le (1+x)^{r(1+x)}, \quad \forall x > 0,\ r > 0.$$

Ví dụ 17. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^a(b+c)} + \frac{1}{b^b(c+a)} + \frac{1}{c^c(a+b)} \le \frac{3}{2}.$$

Lời giải. Đây là một bất đẳng thức đẹp. Các số mũ thực a, b, c gợi ý cho chúng ta sử dụng bất đẳng thức Bernoulli. Tuy nhiên a, b, c lại không có đánh giá thích hợp với 1 nên ta sẽ giả sử rằng $c = \min\{a, b, c\}$. Khi đó $c \le 1$. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\frac{1}{c^c} \le \frac{1}{c}\cdot c + 1 - c = 2 - c.$$

Mặt khác, ta lại có $a^a \ge a$, $b^b \ge b$.[1] Do vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{a(b+c)} + \frac{1}{b(c+a)} + \frac{2-c}{a+b} \le \frac{3}{2}.$$

Vì $abc = 1$ nên ta có $\frac{1}{a(b+c)} + \frac{1}{b(c+a)} = 2c - c^2\left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}\right)$. Mà

$$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} - \frac{2}{\sqrt{ab}+c} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{ab}-c\right)}{(a+c)(b+c)\left(\sqrt{ab}+c\right)} \ge 0.$$

Do đó $\frac{1}{a(b+c)} + \frac{1}{b(c+a)} \le 2c - \frac{2c^2}{\sqrt{ab}+c}$. Hơn nữa, do $2 - c > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{2-c}{a+b} \le \frac{2-c}{2\sqrt{ab}}.$$

[1]Có thể chứng minh bất đẳng thức $x^x \ge x$, $\forall x > 0$ như sau: Bất đẳng thức này tương đương với

$$x^{x-1} \ge 1.$$

Nếu $x \ge 1$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Còn nếu $0 < x < 1$, ta viết lại nó thành

$$x^{1-x} \le 1,$$

và áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, $x^{1-x} = [1 + (x-1)]^{1-x} \le 1 + (1-x)(x-1) = 1 - (x-1)^2 \le 1.$

Kết hợp các đánh giá này lại, ta đưa được bài toán về chứng minh

$$2c - \frac{2c^2}{\sqrt{ab}+c} + \frac{2-c}{2\sqrt{ab}} \le \frac{3}{2}.$$

Đặt $t = \sqrt{c} \le 1$ và thay $\sqrt{ab} = \frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{t}$, bất đẳng thức trên trở thành

$$2t^2 - \frac{2t^4}{\frac{1}{t}+t^2} + \frac{1}{2}t(2-t^2) \le \frac{3}{2}.$$

Sau khi khai triển và rút gọn, ta được bất đẳng thức hiển nhiên đúng

$$(t^4+2t^3+t^2+4t+3)(t-1)^2 \ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

5.2 Kỹ thuật đánh giá chênh lệch số mũ

Kỹ thuật đánh giá chênh lệch số mũ là một kỹ thuật rất hay sử dụng. Tuy không quá mạnh nhưng bất đẳng thức Bernoulli cho phép ta thay đổi các số mũ mà không cần thuần nhất, thậm chí có thể chuyển từ số mũ nhỏ sang số mũ lớn với dấu $\ge$ (xem phần 5.3 bên dưới).

Ví dụ 18. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a}{4a+b+c}} + \sqrt{\frac{b}{4b+c+a}} + \sqrt{\frac{c}{4c+a+b}} \le \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

LỜI GIẢI. Đây là bất đẳng thức dạng chênh lệch số mũ.

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli (với chú ý ở điều kiện xảy ra đẳng thức), ta có

$$\sqrt{\frac{6a}{4a+b+c}} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{6a}{4a+b+c} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3a}{4a+b+c} + \frac{1}{2}.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta lại có

$$\frac{1}{4a+b+c} = \frac{1}{3a+(a+b+c)} \le \frac{1}{(1+1)^2}\left(\frac{1}{3a} + \frac{1}{a+b+c}\right) = \frac{1}{12a} + \frac{1}{4(a+b+c)}.$$

Kết hợp với trên, ta được

$$\sqrt{\frac{6a}{4a+b+c}} \le \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{a}{a+b+c}.$$

Cộng bất dẳng thức này với hai bất đẳng thức tương tự, ta được

$$\sqrt{6}\left(\sqrt{\frac{a}{4a+b+c}} + \sqrt{\frac{b}{4b+c+a}} + \sqrt{\frac{c}{4c+a+b}}\right) \le \frac{9}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{a+b+c}{a+b+c} = 3.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Trong bài toán trên, ta đã chuyển từ số mũ $\frac{1}{2}$ sang số mũ 1.

Ví dụ 19. *Cho x, y là hai số dương thỏa mãn $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$. Tìm giá trị lớn nhất của*

$$P = x^3 + y^3.$$

Lời giải. Bài toán trên đã được giải quyết theo nhiều cách, nhưng chủ yếu là chia trường hợp, xét vị trí giữa x, y so với số 1. Nhưng với kỹ thuật chênh lệch số mũ, lời giải sau đây thật sự ấn tượng: Để tìm giá trị lớn nhất của $x^3 + y^3$, ta chuyển các số mũ khác thành mũ 3. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli

$$x^2 \leq \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}, \quad y^4 \geq \frac{4}{3}y^3 - \frac{1}{3}.$$

Do đó

$$\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3} + y^3 \geq x^3 + \frac{4}{3}y^3 - \frac{1}{3}.$$

Từ đây ta suy ra $P = x^3 + y^3 \leq 2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$. □

Ví dụ 20. *Chứng minh rằng với mọi x, $y > 0$, ta có*

$$\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

Lời giải. Bài toán trên thể hiện rất rõ ý tưởng của kỹ thuật đánh giá chênh lệch số mũ. Ta sẽ chuyển hết về số mũ 1. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\frac{x^4}{y^4} \geq \frac{4}{2} \cdot \frac{x^2}{y^2} + 1 - \frac{4}{2} = 2 \cdot \frac{x^2}{y^2} - 1, \quad \frac{x^4}{y^4} \geq \frac{4}{1} \cdot \frac{x}{y} + 1 - \frac{4}{1} = 4 \cdot \frac{x}{y} - 3.$$

Từ hai bất đẳng thức này suy ra

$$\frac{x^4}{y^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{y^4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{y^4} \geq \frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{x^2}{y^2} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(4 \cdot \frac{x}{y} - 3\right) = \frac{x^2}{y^2} + 2 \cdot \frac{x}{y} - 2.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$\frac{y^4}{x^4} \geq \frac{y^2}{x^2} + 2 \cdot \frac{y}{x} - 2.$$

Do đó

$$\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) - 4 \geq 3 \cdot 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} - 4 = 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$. □

Ví dụ 21. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$(a+b)^c(b+c)^a(c+a)^b \leq 2^{a+b+c}a^ab^bc^c.$$

Lời giải. Ở đây, ta không biết a, b, c lớn hơn hay bé hơn so với 1 nên không thể áp dụng trực tiếp bất đẳng thức Bernoulli được. Tuy nhiên, ta có thể "mượn" số mũ khác chắc chắn sẽ đánh giá được với 1. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\left(\frac{b+c}{2a}\right)^{\frac{a}{a+b+c}} \leq \frac{b+c}{2a} \cdot \frac{a}{a+b+c} + 1 - \frac{a}{a+b+c} = \frac{3(b+c)}{2(a+b+c)}.$$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự rồi nhân vế theo vế, ta được

$$\left(\frac{b+c}{2a}\right)^{\frac{a}{a+b+c}}\left(\frac{c+a}{2b}\right)^{\frac{b}{a+b+c}}\left(\frac{a+b}{2c}\right)^{\frac{c}{a+b+c}} \le \frac{27(a+b)(b+c)(c+a)}{8(a+b+c)^3} \le 1.$$

Từ đó suy ra

$$(b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c \le 2^{a+b+c}a^ab^bc^c.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Nhận xét. Cũng bằng cách sử dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta còn có thể chứng minh được bất đẳng thức mạnh hơn là

$$(a+b)^c(b+c)^a(c+a)^b \le \left[\frac{2}{3}(a+b+c)\right]^{a+b+c} \le 2^{a+b+c}a^ab^bc^c.$$

Sau đây là một bài toán thú vị.

Ví dụ 22. *Chứng minh rằng với mọi $a \ge b > 0$, ta có*

$$\left(3^a+\frac{1}{3^a}\right)^b \le \left(3^b+\frac{1}{3^b}\right)^a.$$

Lời giải. Tại sao đây là bất đẳng thức thú vị? Ta thử làm bài toán một cách tự nhiên. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(3^{2a}+1)^b \le (3^{2b}+1)^a.$$

Bất đẳng thức trên cùng chiều, quả thật may mắn. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli

$$(3^{2a}+1)^{\frac{b}{a}} \le 1+\frac{b}{a}\cdot 3^{2a}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$1+\frac{b}{a}\cdot 3^{2a} \le 3^{2b}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{b}{a} \le 9^{b-a}.$$

Thử một vài giá trị, ta thấy bất đẳng thức trên không đúng. Vậy kế hoạch của chúng ta đã phá sản? Không thật sự thế, nếu nhìn kỹ bất đẳng thức cuối cùng. Vế trái nhỏ hơn hoặc bằng 1, vế phải cũng nhỏ hơn hoặc bằng 1. Nếu vế phải lớn hơn hoặc bằng 1 thì thật tốt. Nhưng thật bất ngờ, điều đó lại có thể. Chỉ cần ta thấy được sự bình đẳng giữa 3 và $\frac{1}{3}$ trong bất đẳng thức cần chứng minh thì ta có thể chuyển đổi bất đẳng thức cuối về $\frac{b}{a} \le 9^{a-b}$, bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. □

Để làm rõ hơn ý tưởng của lời giải trên, ta hãy cùng xét bài toán tổng quát.

Ví dụ 23. *Cho $a \geq b$ là hai số dương và k là một số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng*

$$\left(k^a + \frac{1}{k^a}\right)^b \leq \left(k^b + \frac{1}{k^b}\right)^a.$$

Lời giải. Sau khi thực hiện các đánh giá tương tự trên, ta cần chứng minh

$$\frac{b}{a} \leq k^{2(b-a)}.$$

Đây là chỗ đau đầu của ta. Nhưng với số k tổng quát, ta có thể thấy được cách xử lý dễ dàng, cho $0 < k \leq 1$ thì vế phải hiển nhiên lớn hơn hoặc bằng 1. Lí do tại sao có thể đặt được như thế là do sự bình đẳng giữa k và $\frac{1}{k}$. $\square$

Ví dụ 24 (IMO Shortlist 2004)**.** *Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab+bc+ca = 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}.$$

Lời giải. Bài toán này không quá khó, chỉ cần đánh giá chênh lệch lũy thừa. Ta có

$$\left(\frac{\frac{1}{a} + 6b}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{9\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a} + 6b\right) + \frac{2}{3},$$

$$\left(\frac{\frac{1}{b} + 6c}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{9\sqrt{3}}\left(\frac{1}{b} + 6c\right) + \frac{2}{3},$$

$$\left(\frac{\frac{1}{c} + 6a}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{9\sqrt{3}}\left(\frac{1}{c} + 6a\right) + \frac{2}{3}.$$

Cộng ba bất đẳng thức này lại theo vế, ta được

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a}\right) &\leq \frac{1}{9\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{2}{3\sqrt{3}}(a+b+c) + 2 \\ &= \frac{1}{9\sqrt{3}abc} + \frac{2}{3\sqrt{3}}(a+b+c) + 2.\end{aligned}$$

Mặt khác, sử dụng các đánh giá cơ bản

$$ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}, \quad (ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c),$$

ta có

$$1 \leq \frac{1}{3\sqrt{3}abc}, \quad a+b+c \leq \frac{1}{3abc}.$$

Kết hợp với trên, ta được

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \sqrt{3}\left(\frac{1}{9\sqrt{3}abc} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3abc} + 2 \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}abc}\right) = \frac{1}{abc}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $\square$

Ví dụ 25 (Japan 2005)**.** *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\le 1.$$

LỜI GIẢI. Dễ thấy các biểu thức trong dấu căn đều dương. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli

$$(1+b-c)^{\frac{1}{3}}\le \frac{1}{3}(1+b-c)+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}(b-c)+1,$$

từ đó suy ra

$$a\sqrt[3]{1+b-c}\le \frac{1}{3}(ab-ca)+a.$$

Cộng bất đẳng thức này với hai bất đẳng thức tương tự, ta có ngay điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$. □

5.3 Kỹ thuật "Bernoulli ngược"

Như ta đã biết, bất đẳng thức Bernoulli cho phép đánh giá số mũ lớn dương trội hơn số mũ bé dương, nhưng trong đa số bất đẳng thức, nhất là những bất đẳng thức mạnh, ta cần những đánh giá ngược lại. Khi đó, một kỹ thuật nhỏ nhưng nếu không chú ý sẽ không thể đánh giá các bất đẳng thức ngược chiều. Tác giả đặt tên là *kỹ thuật Bernoulli ngược*, đây cũng là kỹ thuật mà tác giả tâm đắc nhất.

Ví dụ 26. *Chứng minh rằng với mọi a, $b\in(0,\,1)$, ta có*

$$a^b+b^a>1.$$

LỜI GIẢI. Đây là bài toán khá nổi tiếng, đặc trưng cho bất đẳng thức Bernoulli. Tuy nhiên nếu một lần nhìn qua, thật tiếc là số mũ a, b đều nhỏ hơn 1 nên bất đẳng thức sẽ ngược chiều. Nhưng chỉ cần một kỹ thuật nhỏ, ta có thể giải quyết vấn đề này.

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$a^b=\frac{1}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^b}\ge \frac{1}{1+b\left(\dfrac{1}{a}-1\right)}=\frac{a}{a+b-ab}>\frac{a}{a+b}.$$

Tương tự, ta cũng có $b^a>\dfrac{b}{a+b}$. Do đó $a^b+b^a>\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a+b}=1.$ □

Như thế nếu trường hợp số mũ cho ra bất đẳng thức ngược chiều thì ta sẽ xét nghịch đảo của biểu thức cần đánh giá. Để rõ hơn về kỹ thuật này, ta xét tiếp ví dụ sau đây, mà theo tác giả việc sử dụng Bernoulli ngược rất trong sáng.

Ví dụ 27 (MOP 2002)**.** *Chứng minh rằng bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c dương*

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}}\ge 3.$$

LỜI GIẢI. Với số mũ 1, bài toán là bất đẳng thức Nesbitt quen thuộc. Tuy nhiên, đây là số mũ $\frac{2}{3}$ và công việc của chúng ta là chuyển về số mũ 1, khi đó bất đẳng thức sẽ trái dấu. Vì thế ta sẽ áp dụng kỹ thuật Bernoulli ngược. Ta có

$$\left(\frac{b+c}{2a}\right)^{\frac{2}{3}} \le \frac{2}{3}\left(\frac{b+c}{2a}\right)+\frac{1}{3}=\frac{a+b+c}{3a}.$$

Từ đây suy ra

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}} \ge \frac{3a}{a+b+c}.$$

Cộng bất đẳng thức này với hai bất đẳng thức tương tự, ta được

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}} \ge \frac{3a+3b+3c}{a+b+c}=3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Trong trường hợp tổng quát, ta có bài toán sau.

Ví dụ 28. *Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca>0$. Chứng minh rằng với mọi $n\ge 2$, ta có*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[n]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[n]{\frac{c}{a+b}} \ge 2.$$

LỜI GIẢI. Vế trái có dạng mũ $\frac{1}{n}$ rất nhỏ so với bậc 0 ở vế phải khi n càng lớn. Do đó, theo tác giả, bài toán này là sự áp dụng tinh tế của kỹ thuật Bernoulli ngược kết hợp với kỹ thuật đánh giá chênh lệch lũy thừa.

Nếu trong ba số a, b, c có một số bằng 0, giả sử $a=0$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\sqrt[n]{\frac{b}{c}}+\sqrt[n]{\frac{c}{b}} \ge 2,$$

hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM.

Xét trường hợp a, b, $c>0$. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}}=\frac{1}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} \ge \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^{\frac{2}{n}}+\frac{1}{2}} \text{ (đánh giá số mũ } \frac{1}{n} \text{ sang số mũ } \frac{2}{n}\text{).}$$

Ngoài ra, ta cũng chứng minh được $(b+c)^{\frac{2}{n}} \le b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}$ (cũng bằng bất đẳng thức Bernoulli). Do đó, kết hợp với trên, ta được

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}} \ge \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}}}+\frac{1}{2}}=\frac{2a^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}.$$

Cộng bất đẳng thức này với hai bất đẳng thức tương tự, ta thu được ngay kết quả cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a, b, c có một số bằng 0, và hai số còn lại bằng nhau. □

Sau đây là một bài toán có dạng tương tự.

Ví dụ 29. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\sqrt[3]{\left(\frac{3a}{3b+3c-a}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{3b}{3c+3a-b}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{3c}{3a+3b-c}\right)^2}\geq\frac{3}{5}\sqrt[3]{45}.$$

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức đã cho có thể viết lại thành

$$\left(\frac{5a}{3b+3c-a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{5b}{3c+3a-b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{5c}{3a+3b-c}\right)^{\frac{2}{3}}\geq 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\left(\frac{3b+3c-a}{5a}\right)^{\frac{2}{3}}\leq\frac{2}{3}\cdot\frac{3b+3c-a}{5a}+1-\frac{2}{3}=\frac{a+2b+2c}{5a}.$$

Do đó

$$\left(\frac{5a}{3b+3c-a}\right)^{\frac{2}{3}}\geq\frac{5a}{a+2b+2c}.$$

Từ bất đẳng thức này và hai bất đẳng thức tương tự, ta đưa được bài toán về chứng minh

$$\frac{a}{a+2b+2c}+\frac{b}{b+2c+2a}+\frac{c}{c+2a+2b}\geq\frac{3}{5}.$$

Bất đẳng thức này đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\frac{a}{a+2b+2c}+\frac{b}{b+2c+2a}+\frac{c}{c+2a+2b}&\geq\frac{(a+b+c)^2}{a(a+2b+2c)+b(b+2c+2a)+c(c+2a+2b)}\\&=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+2(ab+bc+ca)}\\&\geq\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+\frac{2}{3}(a+b+c)^2}=\frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Kỹ thuật Bernoulli ngược thường được áp dụng với bất đẳng thức Cauchy-Schwarz rất hiệu quả. Và đây cũng là con đường để sáng tạo bất đẳng thức.

Ví dụ 30. *Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1 và a_1, a_2, ..., a_n là các số thực dương. Chứng minh*

$$\sqrt[n]{\frac{\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}}{n}}\geq\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1+(n-1)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}.$$

LỜI GIẢI. Rõ ràng đây là một bất đẳng thức có dạng khá lạ đối với việc giải quyết bằng các bất đẳng thức thông thường nhưng đây là một dạng rất cơ bản cho kỹ thuật Bernoulli ngược.

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn

$$\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}}+\sqrt[n]{\frac{a_2}{a_3}}+\cdots+\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_1}}\geq\frac{n(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1+(n-1)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, dễ thấy

$$\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}} = \frac{1}{\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{1}{\dfrac{a_2}{na_1} + 1 - \dfrac{1}{n}} = \frac{na_1}{a_2 + (n-1)a_1} = \frac{na_1^2}{a_1a_2 + (n-1)a_1^2}.$$

Xây dựng các bất đẳng thức tương tự, cộng lại và áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có ngay điều phải chứng minh. □

Ví dụ 31. *Cho* $0 < a \leq b \leq 4$ *và* $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq 1$. *Chứng minh rằng*

$$a^b \leq b^a.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{b}{a}} \geq \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a} + 1 - \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b - ab}{a^2}.$$

Mà $a^2 + b - ab = b\left(\dfrac{a^2}{b} + 1 - a\right) \geq b\left(\dfrac{a^2}{4} + 1 - a\right) = \dfrac{b}{4}(a-2)^2 \geq 0$, nên từ trên ta có

$$a^{\frac{b}{a}} \leq \frac{a^2}{a^2 + b - ab}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a^2}{b + a^2 - ab} \leq b.$$

Bất đẳng thức này tương đương với $(b + a - ab)(a - b) \leq 0$, hay

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1\right)(a - b) \leq 0 \text{ (đúng theo giả thiết).}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. □

Nhận xét. Nếu thay điều kiện chặn là $0 < a \leq 1 \leq b$ thì bài toán vẫn đúng.

Ví dụ 32. *Cho các số dương* x, y *thỏa mãn* $x + y = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}} \geq \sqrt{2}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{2(1-x)}} \geq \frac{1}{(1-x) + \dfrac{1}{2}} = \frac{1}{y + \dfrac{1}{2}}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{x}{\sqrt{1-x}} \geq \frac{\sqrt{2}x}{y + \dfrac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}x^2}{xy + \dfrac{1}{2}x}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{y}{\sqrt{1-y}} \geq \frac{\sqrt{2}y^2}{xy+\frac{1}{2}y}.$$

Sử dụng hai đánh giá này kết hợp với các bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và AM-GM, ta được

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{y}{\sqrt{1-y}} &\geq \sqrt{2}\left(\frac{x^2}{xy+\frac{1}{2}x}+\frac{y^2}{xy+\frac{1}{2}y}\right) \geq \sqrt{2}\cdot\frac{(x+y)^2}{2xy+\frac{1}{2}(x+y)}\\ &= \frac{2\sqrt{2}}{4xy+1} \geq \frac{2\sqrt{2}}{(x+y)^2+1} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\frac{1}{2}$. □

Ví dụ 33. *Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$, ta có*

$$\sqrt[n]{\frac{b+c}{2a}}+\sqrt[n]{\frac{c+a}{2b}}+\sqrt[n]{\frac{a+b}{2c}} \geq \frac{6n\sqrt[3]{9(a^2+b^2+c^2)}}{3(n+1)+(n-1)(a^2+b^2+c^2)}.$$

LỜI GIẢI. Đây là một bất đẳng thức sử dụng phương pháp Bernoulli-Cauchy-Schwarz rất rõ vì căn bậc n chuyển thành số hạng khiến chúng ta dự đoán sử dụng Bernoulli ngược và dạng của biểu thức vế phải rất quen thuộc với bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\frac{b+c}{2a}} &= \frac{1}{\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{1}{\frac{2a}{n(b+c)}+1-\frac{1}{n}} = \frac{n(b+c)}{2a+(n-1)(b+c)}\\ &= \frac{n(b+c)^2}{2a(b+c)+(n-1)(b+c)^2}.\end{aligned}$$

Tương tự, ta có các bất đẳng thức

$$\sqrt[n]{\frac{c+a}{2b}} \geq \frac{n(c+a)^2}{2b(c+a)+(n-1)(c+a)^2}, \quad \sqrt[n]{\frac{a+b}{2c}} \geq \frac{n(a+b)^2}{2c(a+b)+(n-1)(a+b)^2}.$$

Cộng ba bất đẳng thức lại và áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, suy ra

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\frac{b+c}{2a}}+\sqrt[n]{\frac{c+a}{2b}}+\sqrt[n]{\frac{a+b}{2c}} &\geq \frac{4n(a+b+c)^2}{2(n-1)(a^2+b^2+c^2)+2(n+1)(ab+bc+ca)}\\ &= \frac{2n(a+b+c)^2}{(n-1)(a^2+b^2+c^2)+3(n+1)}.\end{aligned}$$

Bài toán được quy về chứng minh

$$(a+b+c)^2 \geq 3\sqrt[3]{9(a^2+b^2+c^2)}.$$

Bất đẳng thức này đúng theo AM-GM

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)+(ab+bc+ca)\\ &\geq 3\sqrt[3]{(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2} = 3\sqrt[3]{9(a^2+b^2+c^2)}.\end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Ví dụ 34. *Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = x^x + y^y.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$(2x)^x = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{2x}\right)^x} \geq \frac{1}{\dfrac{1}{2x}\cdot x + 1 - x} = \frac{1}{\dfrac{3}{2}-x},$$

$$(2y)^y = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{2y}\right)^y} \geq \frac{1}{\dfrac{1}{2y}\cdot y + 1 - y} = \frac{1}{\dfrac{3}{2}-y}.$$

Nhận xét rằng nếu đến đây ta cộng vế theo vế hai bất đẳng thức trên lại thì vế trái vẫn còn 2^x và 2^y ở trước các số hạng. Nhưng đặc biệt, tích hai "phần thừa" này lại bằng 2. Do đó, ta nhân vế theo vế hai bất đẳng thức trên, suy ra

$$2x^xy^y \geq \frac{1}{\left(\dfrac{3}{2}-x\right)\left(\dfrac{3}{2}-y\right)} \geq \frac{4}{\left[\left(\dfrac{3}{2}-x\right)+\left(\dfrac{3}{2}-y\right)\right]^2} = 1.$$

Từ đây ta có

$$P = x^x + y^y \geq 2\sqrt{x^xy^y} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2x^xy^y} \geq \sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$. □

Ví dụ 35. *Cho $n \geq 1$ và a, b, c là các số dương thỏa mãn*

$$\sqrt[6]{\frac{6}{a+3(n-1)}} + \sqrt[6]{\frac{6}{b+3(n-1)}} + \sqrt[6]{\frac{6}{c+3(n-1)}} \geq 3.$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{\frac{3}{a}} + \sqrt[n]{\frac{3}{b}} + \sqrt[n]{\frac{3}{c}} \geq \frac{3n}{2}.$$

Lời giải. Ta có nhận xét: Với n càng lớn thì số mũ của vế trái bất đẳng thức cần chứng minh sẽ càng nhỏ, ta không thể đánh giá chênh lệch với $\dfrac{1}{6}$, ta sẽ đánh giá chênh lệch với số mũ 1.

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\sqrt[n]{\frac{3}{a}} = \frac{1}{\left(\dfrac{a}{3}\right)^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{1}{\dfrac{a}{3n}+1-\dfrac{1}{n}} = \frac{3n}{a+3(n-1)}.$$

Cộng bất đẳng thức này với hai bất đẳng thức tương tự, ta suy ra

$$\sqrt[n]{\frac{3}{a}}+\sqrt[n]{\frac{3}{b}}+\sqrt[n]{\frac{3}{c}} \geq 3n\left[\frac{1}{a+3(n-1)}+\frac{1}{b+3(n-1)}+\frac{1}{c+3(n-1)}\right].$$

Đến đây, ta sẽ sử dụng bất đẳng thức Bernoulli đánh giá với số mũ $\frac{1}{6}$.

$$\sqrt[6]{\frac{6}{a+3(n-1)}} \leq \frac{1}{a+3(n-1)}+\frac{5}{6},$$

$$\sqrt[6]{\frac{6}{b+3(n-1)}} \leq \frac{1}{b+3(n-1)}+\frac{5}{6},$$

$$\sqrt[6]{\frac{6}{c+3(n-1)}} \leq \frac{1}{c+3(n-1)}+\frac{5}{6}.$$

Cộng ba bất đẳng thức này lại và sử dụng giả thiết, ta được

$$\frac{1}{a+3(n-1)}+\frac{1}{b+3(n-1)}+\frac{1}{c+3(n-1)} \geq \frac{1}{2}.$$

Từ đó, kết hợp với đánh giá ở trên, ta có ngay điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$ và $n=2$. □

Ví dụ 36. *Chứng minh rằng với mọi x, y, $z \in (0,\, 1)$, ta có*

$$x^{2y}+y^{2z}+z^{2x} > \frac{3}{4}.$$

LỜI GIẢI. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$x^y = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^y} \geq \frac{1}{\frac{y}{x}+1-y} = \frac{x}{x+y-xy} > \frac{x}{x+y}.$$

Do đó

$$x^{2y} \geq \left(\frac{x}{x+y}\right)^2.$$

Đánh giá tương tự với y, z, ta suy ra

$$x^{2y}+y^{2z}+z^{2x} > \left(\frac{x}{x+y}\right)^2+\left(\frac{y}{y+z}\right)^2+\left(\frac{z}{z+x}\right)^2.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^2+\left(\frac{y}{y+z}\right)^2+\left(\frac{z}{z+x}\right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Đây là một bất đẳng thức quen thuộc và có nhiều cách chứng minh cho nó. Xin nêu ra ở đây một cách chứng minh phổ biến: Đặt $a = \dfrac{y}{x}$, $b = \dfrac{z}{y}$, $c = \dfrac{x}{z}$, ta có $abc = 1$ và bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} &\geq \frac{1}{\left(1+\frac{x}{y}\right)(1+xy)} + \frac{1}{\left(1+\frac{y}{x}\right)(1+xy)}\\ &= \frac{y}{(x+y)(1+xy)} + \frac{x}{(x+y)(1+xy)} = \frac{1}{1+xy} = \frac{z}{z+1}.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{z}{z+1} + \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{z^2+z+1}{(z+1)^2} = \frac{3}{4} + \frac{(z-1)^2}{4(z+1)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Nhận xét. Từ cách chứng minh trên, ta có thể mở rộng bài toán cho n biến: Với mọi x_1, x_2, $\ldots$, $x_n \in (0,\, 1)$, ta có

$$x_1^{2x_2} + x_2^{2x_3} + \cdots + x_n^{2x_1} > \min\left\{1,\ \frac{n}{4}\right\}.$$

Thực hiện cách làm tương tự như trên, dễ thấy rằng ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{(1+a_1)^2} + \frac{1}{(1+a_2)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+a_n)^2} \geq \min\left\{1,\ \frac{n}{4}\right\}.$$

Phần chứng minh dành cho bạn đọc.

Ví dụ 37. *Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}} + \frac{b}{\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}} + \frac{c}{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}} \geq \sqrt{3}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho có thể viết lại thành

$$\left(\frac{3a^2}{2b^2+2c^2-a^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{3b^2}{2c^2+2a^2-b^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{3c^2}{2a^2+2b^2-c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \geq 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\left(\frac{2b^2+2c^2-a^2}{3a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{2b^2+2c^2-a^2}{3a^2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{3a^2}.$$

Từ đó suy ra

$$\left(\frac{3a^2}{2b^2+2c^2-a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{3a^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Cộng bất đẳng thức này với hai bất đẳng thức tương tự, ta có ngay kết quả cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

Ví dụ 38. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta đều có*

$$\frac{2a^2+bc}{a^2+2bc}+\frac{2b^2+ca}{b^2+2ca}+\frac{2c^2+ab}{c^2+2ab}\le\sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{abc}}.$$

LỜI GIẢI. Bài toán trên không giải quyết đơn giản như các bài toán trước vì trước dấu bé hơn hoặc bằng là một tổng hàm. Lời giải như sau:

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\left(\frac{2a^2+bc}{3bc}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\left(\dfrac{3bc}{2a^2+bc}\right)^{\frac{1}{2}}}\ge\frac{1}{\dfrac{3}{2}\dfrac{bc}{2a^2+bc}+\dfrac{1}{2}}=\frac{2a^2+bc}{a^2+2bc}.$$

Cộng bất đẳng thức này với hai bất đẳng thức tương tự, ta được

$$\frac{2a^2+bc}{a^2+2bc}+\frac{2b^2+ca}{b^2+2ca}+\frac{2c^2+ab}{c^2+2ab}\le\left(\frac{2a^2+bc}{3bc}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{2b^2+ca}{3ca}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{2c^2+ab}{3ab}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta lại có

$$\begin{aligned}\sum\left(\frac{2a^2+bc}{3bc}\right)^{\frac{1}{2}}&\le\left[\sum(2a^2+bc)\right]^{\frac{1}{2}}\left(\sum\frac{1}{3bc}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(2\sum a^2+\sum bc\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\frac{1}{3bc}\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le\left(3\sum a^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\frac{1}{3bc}\right)^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{abc}\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2)\end{aligned}$$

Từ (1) và (2), ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

NHẬN XÉT. Có thể chứng minh được

$$\frac{2a^2+bc}{a^2+2bc}+\frac{2b^2+ca}{b^2+2ca}+\frac{2c^2+ab}{c^2+2ab}\ge 3.$$

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}\sum\frac{2a^2+bc}{a^2+2bc}&=\sum\left(\frac{2a^2+bc}{a^2+2bc}-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\sum\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{3}{2}\\&\ge\frac{3}{2}\sum\frac{a^2}{a^2+(b^2+c^2)}+\frac{3}{2}=3.\end{aligned}$$

Như vậy, có thể thấy bài toán trên cho ta một đánh giá chặt hơn cho bất đẳng thức quen thuộc

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{abc}\ge 9.$$

Ví dụ 39. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\left[\frac{4a^2+(b-c)^2}{a^2+b^2+c^2+bc}\right]^{\frac{2}{3}}+\left[\frac{4b^2+(c-a)^2}{a^2+b^2+c^2+ca}\right]^{\frac{2}{3}}+\left[\frac{4c^2+(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2+ab}\right]^{\frac{2}{3}}\ge 3.$$

LỜI GIẢI. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\left[\frac{4a^2+(b-c)^2}{a^2+b^2+c^2+bc}\right]^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left[\dfrac{a^2+b^2+c^2+bc}{4a^2+(b-c)^2}\right]^{\frac{2}{3}}} \ge \frac{4a^2+(b-c)^2}{b^2+c^2+2a^2}.$$

Đánh giá tương tự với hai biểu thức còn lại, ta suy ra

$$\sum\left[\frac{4a^2+(b-c)^2}{a^2+b^2+c^2+bc}\right]^{\frac{2}{3}} \ge \sum\frac{4a^2+(b-c)^2}{b^2+c^2+2a^2}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{4a^2+(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{4b^2+(c-a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{4c^2+(a-b)^2}{2c^2+a^2+b^2} \ge 3.$$

Do $\dfrac{4a^2+(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2} = 2-\dfrac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}$ nên bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{(c+a)^2}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{(a+b)^2}{2c^2+a^2+b^2} \le 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2} = \frac{(b+c)^2}{(a^2+b^2)+(c^2+a^2)} \le \frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}.$$

Từ đó suy ra

$$\sum\frac{(b+c)^2}{2a^2+b^2+c^2} \le \sum\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}\right) = 3.$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

NHẬN XÉT. Có thể chứng minh được kết quả chặt hơn

$$\left(\frac{4a^2}{a^2+b^2+c^2+bc}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{4b^2}{a^2+b^2+c^2+ca}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{4c^2}{a^2+b^2+c^2+ab}\right)^{\frac{2}{3}} \ge 3.$$

Ví dụ 40. *Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng*

$$\sqrt[4]{\left(\frac{20a}{2a+9b+9c}\right)^3}+\sqrt[4]{\left(\frac{20b}{2b+9c+9a}\right)^3}+\sqrt[4]{\left(\frac{20c}{2c+9a+9b}\right)^3} \ge 3.$$

LỜI GIẢI. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$\left(\frac{20a}{2a+9b+9c}\right)^{\frac{20}{27}}+\left(\frac{20b}{2b+9c+9a}\right)^{\frac{20}{27}}+\left(\frac{20c}{2c+9a+9b}\right)^{\frac{20}{27}} \ge 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\left(\frac{2a+9b+9c}{20a}\right)^{\frac{20}{27}} \le \frac{20}{27}\cdot\frac{2a+9b+9c}{20a}+1-\frac{20}{27} = \frac{a+b+c}{3a},$$

từ đó suy ra

$$\left(\frac{20a}{2a+9b+9c}\right)^{\frac{20}{27}} \geq \frac{3a}{a+b+c}.$$

Cộng bất đẳng thức này với hai bất đẳng thức tương tự, ta thu được kết quả như trên.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. □

NHẬN XÉT. Ngoài cách giải như trên, ta cũng có thể chứng minh trực tiếp bất đẳng thức gốc bằng kỹ thuật Bernoulli ngược và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

6 Bài tập đề nghị

Bài tập 1. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$, ta có

$$\sqrt[n+1]{n^n} \geq \frac{n+1}{2}.$$

Bài tập 2. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, ta có bất đẳng thức

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Bài tập 3. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c-a}} + \sqrt{\frac{b}{c+a-b}} + \sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq 2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right).$$

Bài tập 4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{2a}{b+c}} + \sqrt{\frac{2b}{c+a}} + \sqrt{\frac{2c}{a+b}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Bài tập 5. Cho a và b là các số thực không âm thỏa mãn $a + b = 2$. Chứng minh rằng

$$a^{2b} + b^{2a} + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \leq 2.$$

Bài tập 6. Cho hai số dương a, b thỏa mãn $a + b = 2$. Chứng minh rằng

$$a^a + b^b \geq 2 + \frac{3}{8}(a-b)^2.$$

Bài tập 7. Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(x_1^2+1)(x_2^2+1)\cdots(x_n^2+1)}{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2} \geq \frac{n^{n-2}}{(n-1)^{n-1}}.$$

Bài tập 8. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $2a + 3b + 4c = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2a^{\sqrt{2}} + 3b^{\sqrt{2}} + 4c^{\sqrt{2}}$.

Bài tập 9. Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta đều có

$$a^{b+c} + b^{c+a} + c^{a+b} \geq 1.$$

Tài liệu tham khảo

[1] Trần Phương, *Những viên kim cương trong bất đẳng thức toán học*, Nhà xuất bản Tri Thức, 2009.

[2] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Tri Thức, 2006.

[3] Trần Nam Dũng, *Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi.*

[4] Nguyễn Văn Nho, Lê Hoành Phò, *Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất*, Nhà xuất bản ...

[5] *Tuyển tập các đề thi truyền thống 30-4.*

[6] *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.*

[7] Wikipedia, *Bernoulli's inequality.*
[LINK: `http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli's_inequality`]

[8] Các diễn đàn Toán học:

- `http://diendantoanhoc.net`
- `http://mathlinks.ro`
- `http://mathscope.org`
- `http://math.vn`

ENLIGHTENING TRIGONOMETRICAL SUBSTITUTIONS

Vardan Verdiyan - Daniel Campos Salas

Trigonometry has always been an indivisible part of algebra. There are certain algebraic inequalities deemed to be highly complex; yet the use of substitutions as a key unquestionably makes them look more straightforward. Moreover, trigonometrical substitutions create such amazing results along the process of reducing the problem that immediately leads to a direct solution. Besides, trigonometrical functions have some well-known properties that are highly useful while solving inequalities. As a result, many algebraic problems can be solved easily using a trigonometrical substitution. The article aims to present some of such sustitutions.

Initially, we start this paper introducing the readers to these substitutions. After that we will present some well-known trigonometrical identities and inequalities that are highly constructive while solving algebraic inequalities with the help of trigonometrical substitutions. Last but not least, we will discuss and introduce some Olympiad problems to the readers.

1 Lemmas on identities

Lemma 1. *Let α, β, γ be angles in $(0,\, \pi)$. Then, we have α, β, γ are the angles of a triangle if and only if*

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}=1.$$

Proof. Since $0<\alpha+\beta<2\pi$, it follows that there exists an angle in $(-\pi,\, \pi)$, say γ', such that $\alpha+\beta+\gamma'=\pi$. Using the addition formulas and the fact that $\tan x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, we have

$$\tan\frac{\gamma'}{2}=\cot\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}.$$

From this it results that

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma'}{2}+\tan\frac{\gamma'}{2}\tan\frac{\alpha}{2}=1. \tag{1}$$

Now suppose that

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}=1, \tag{2}$$

for some α, β, γ in $(0,\, \pi)$.

We will prove that $\gamma = \gamma'$, and this would imply that α, β, γ are the angles of a triangle. From (1) and (2) it follows that $\tan\dfrac{\gamma}{2} = \tan\dfrac{\gamma'}{2}$. This implies that $\left|\dfrac{\gamma-\gamma'}{2}\right| = k\pi$ for some nonnegative integer k. But

$$\left|\frac{\gamma-\gamma'}{2}\right| \le \left|\frac{\gamma}{2}\right| + \left|\frac{\gamma'}{2}\right| < \pi,$$

so it follows that $k = 0$, this is $\gamma = \gamma'$, as desired. $\square$

Lemma 2. *Let α, β, γ be angles in $(0,\,\pi)$. Then, we have α, β, γ are the angles of a triangle if and only if*

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 1.$$

PROOF. Since $0 < \alpha+\beta < 2\pi$, it follows that there exists an angle in $(-\pi,\,\pi)$, say γ', such that $\alpha+\beta+\gamma' = \pi$. Using the product-to-sum and the double angle formulas, it results that

$$\begin{aligned}
\sin^2\frac{\gamma'}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma'}{2} &= \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\\
&= \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]\\
&= \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}\\
&= \frac{\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) + \left(1-2\sin^2\frac{\beta}{2}\right)}{2}\\
&= 1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2},
\end{aligned}$$

and this proves that

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma'}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma'}{2} = 1. \tag{1}$$

Now suppose that

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 1, \tag{2}$$

for some α, β, γ in $(0,\,\pi)$.

We will prove that $\gamma = \gamma'$, and this would imply that α, β, γ are the angles of a triangle. From (1) and (2), it follows that

$$\sin^2\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\gamma'}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma'}{2}\right) = 0,$$

this is,

$$\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\gamma'}{2}\right)\left(\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma'}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)=0.$$

The second factor equals

$$\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma'}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

which is evidently greater than 0. It results that $\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\gamma'}{2}$, and this implies that $\gamma=\gamma'$ and the proof is completed. □

Lemma 3 (Half-angle or Briggs formulas)**.** *Let ABC be a triangle, then,*

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\ \textit{and}\ \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Proof. From the cosine law and the double-angle formulas, we have

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{A}{2}&=\frac{1-\cos A}{2}=\frac{2bc-(b^2+c^2-a^2)}{4bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}\\&=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc},\end{aligned}$$

from where we conclude $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$. Analogously it can be proven that

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

and this completes the proof. □

2 Substitutions and Transformations

T1. Let α, β, γ be angles of a triangle. Let $A=\frac{\pi-\alpha}{2}$, $B=\frac{\pi-\alpha}{2}$, $C=\frac{\pi-\alpha}{2}$, this implies that $A+B+C=\pi$, and $0<A,\ B,\ C<\frac{\pi}{2}$. This shows that A, B, C are angles of an acute angled triangle. Note that

$$\begin{aligned}&cyc\left(\sin\frac{\alpha}{2}=\cos A\right),\quad cyc\left(\cos\frac{\alpha}{2}=\sin A\right),\\&cyc\left(\tan\frac{\alpha}{2}=\cot A\right),\quad cyc\left(\cot\frac{\alpha}{2}=\tan A\right),\end{aligned}$$

where by *cyc* we denote a cyclic permutation of angles.

T2. Let x, y, z be positive real numbers. Then, $x+y$, $y+z$, $z+x$ are the sidelengths of a triangle. This is $x+y+z=s$ and $(x,\ y,\ z)=(s-a,\ s-b,\ s-c)$ for some triangle ABC with sidelengths a, b, c and semiperimeter s.

S1. Let a, b, c be arbitrary positive real numbers, such that $ab+bc+ca=1$. The fact that for $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan x$ takes all values from $\mathbb{R}^+$, and Lemma 1 allows us to substitute

$$a = \tan\frac{A}{2}, \quad b = \tan\frac{B}{2}, \quad c = \tan\frac{C}{2},$$

where A, B, C are the angles of an arbitrary triangle ABC.

S2. Applying T1 to S1 we have that if a, b, c are arbitrary positive real numbers, such that $ab+bc+ca=1$, then we can perform the substitution

$$a = \cot A, \quad b = \cot B, \quad c = \cot C,$$

where A, B, C are the angles of an acuted angled triangle ABC.

S3. Let a, b, c be arbitrary positive real numbers such that $a+b+c=abc$. Dividing by abc it follows that $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=1$. Due to S1 we can make the substitution

$$\frac{1}{a} = \tan\frac{A}{2}, \quad \frac{1}{b} = \tan\frac{B}{2}, \quad \frac{1}{c} = \tan\frac{C}{2},$$

this is

$$a = \cot\frac{A}{2}, \quad b = \cot\frac{B}{2}, \quad c = \cot\frac{C}{2},$$

where A, B, C are the angles of a triangle ABC.

S4. Applying T1 to S3 we have that if a, b, c are arbitrary positive real numbers such that $a+b+c=abc$, then we can perform the substitution

$$a = \tan A, \quad b = \tan B, \quad c = \tan C,$$

where A, B, C are the angles of an acuted angled triangle ABC.

S5. Let a, b, c be arbitrary positive real numbers such that $a^2+b^2+c^2+2abc=1$. Note that since all the numbers are positive, it follows that a, b, $c<1$. The fact that for $x \in (0,\ \pi)$, $\sin\frac{x}{2}$ takes all values from $(0,\ 1)$, and Lemma 2 allows us to substitute

$$a = \sin\frac{A}{2}, \quad b = \sin\frac{B}{2}, \quad c = \sin\frac{C}{2},$$

where A, B, C are the angles of an arbitrary triangle ABC.

S6. Applying T1 to S5 we have that if a, b, c are arbitrary positive real numbers such that $a^2+b^2+c^2+2abc=1$, then we can perform the substitution

$$a = \cos A, \quad b = \cos B, \quad c = \cos C,$$

where A, B, C are the angles of an acuted angled triangle ABC.

S7. Let x, y, z be positive real numbers. Applying T2 to the expressions

$$\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}},\quad \sqrt{\frac{zx}{(y+z)(y+x)}},\quad \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}},$$

this can be substituted by

$$\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\quad \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},\quad \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$

where a, b, c are the sidelengths of a triangle. According to Lemma 3, these expressions equal

$$\sin\frac{A}{2},\quad \sin\frac{B}{2},\quad \sin\frac{C}{2},$$

where A, B, C are the angles of a triangle ABC.

S8. Analogously to S7, the expressions

$$\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}},\quad \sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)}},\quad \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)}},$$

can be substituted by

$$\cos\frac{A}{2},\quad \cos\frac{B}{2},\quad \cos\frac{C}{2},$$

where A, B, C are the angles of a triangle ABC.

3 Some well-known inequalities

For any triangle ABC, we have that

- $\cos A + \cos B + \cos C \le \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$;
- $\sin A + \sin B + \sin C \le \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$;
- $\cos A \cos B \cos C \le \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$;
- $\sin A \sin B \sin C \le \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$;
- $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} \ge 3\sqrt{3}$;
- $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \ge \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} \ge \frac{3}{4}$;
- $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \le \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} \le \frac{9}{4}$;

- $\cot A + \cot B + \cot C \geq \tan\dfrac{A}{2} + \tan\dfrac{B}{2} + \tan\dfrac{C}{2} \geq \sqrt{3}$.

For acute-angled triangles, we have that

- $\sec A + \sec B + \sec C \geq \csc\dfrac{A}{2} + \csc\dfrac{B}{2} + \csc\dfrac{C}{2} \geq 6$;
- $\sin A + \sin B + \sin C > 2$;
- $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C < 1$;
- $\tan A + \tan B + \tan C \geq \cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$.

4 Some well-known identities

For arbitrary angles α, β, γ, we have that

- $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma) = 4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\sin\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$;
- $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma) = 4\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$;
- $\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$.

For any triangle ABC, we have that

- $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$;
- $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$;
- $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$;
- $-(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) = 1 + 4\cos A\cos B\cos C$;
- $3 - 2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) = -(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)$;
- $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$.

5 Applications

Problem 1 (Poland 1999)**.** *Let a, b, c be positive real numbers such that $a+b+c=1$. Prove the following inequality*

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leq 1.$$

SOLUTION. Let us denote $cyc\left(x=\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)$. This implies that $cyc(a=yz)$. The problem turns to prove the inequality

$$(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2+2\sqrt{3}xyz\le 1,$$

given that $xy+yz+zx=1$, where x, y, z are arbitrary positive real numbers.
Note that the inequality is equivalent to

$$(xy+yz+zx)^2+2\sqrt{3}xyz\le 1+2xyz(x+y+z),$$
$$\sqrt{3}\le x+y+z.$$

Perform the substitution S1: $cyc\left(x=\tan\frac{A}{2}\right)$, where A, B, C are the angles of a triangle. So the last inequality is equivalent to

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge\sqrt{3}.$$

Since the function $\tan\frac{x}{2}$ is convex on $(0,\pi)$, it follows from Jensen's inequality that

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\ge 3\tan\frac{A+B+C}{6}=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3},$$

and this completes the proof. □

Problem 2 (Crux Mathematicorum). *Let x, y, z be positive real numbers. Prove that*

$$\frac{x}{x+\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\frac{y}{y+\sqrt{(y+z)(y+x)}}+\frac{z}{x+\sqrt{(z+x)(z+y)}}\le 1.$$

SOLUTION. The inequality is equivalent to

$$\frac{1}{1+\sqrt{\frac{(x+y)(x+z)}{x^2}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\frac{(y+z)(y+x)}{y^2}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\frac{(z+x)(z+y)}{z^2}}}\le 1.$$

Since the inequality is homogenous we can assume that $xy+yz+zx=1$. Perform the substitution S1: $cyc\left(x=\tan\frac{A}{2}\right)$, where A, B, C are angles of a triangle. Note that

$$\frac{(x+y)(x+z)}{x^2}=\frac{\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)}{\tan^2\frac{A}{2}}=\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}},$$

and similar forms for the other terms. Then, the inequality is equivalent to

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}}{1+\sin\frac{B}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{1+\sin\frac{C}{2}}\le 1,$$

that is

$$2 \le \frac{1}{1+\sin\dfrac{A}{2}} + \frac{1}{1+\sin\dfrac{B}{2}} + \frac{1}{1+\sin\dfrac{C}{2}}.$$

On the other hand, using the well-known inequality $\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2} \le \dfrac{3}{2}$, it follows from Cauchy-Schwarz that

$$2 \le \frac{9}{\left(1+\sin\dfrac{A}{2}\right)+\left(1+\sin\dfrac{B}{2}\right)+\left(1+\sin\dfrac{C}{2}\right)} \le \frac{1}{1+\sin\dfrac{A}{2}} + \frac{1}{1+\sin\dfrac{B}{2}} + \frac{1}{1+\sin\dfrac{C}{2}},$$

and the proof is completed. □

Problem 3 (Nesbitt's Inequality)**.** *For any positive real numbers x, y, z prove the following inequality*

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \ge \frac{3}{2}.$$

Solution. Perform the substitution S7: *cyc* $\left(\sqrt{\dfrac{yz}{(x+y)(x+z)}} = \sin\dfrac{A}{2}\right)$, where A, B, C are angles of a triangle. Note that

$$\frac{z}{x+y} = \frac{\sqrt{\dfrac{yz}{(x+y)(x+z)}}\sqrt{\dfrac{zx}{(y+z)(y+x)}}}{\sqrt{\dfrac{xy}{(z+y)(z+x)}}} = \frac{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}},$$

and similar forms for the other terms. So, we have to show that

$$\frac{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}} + \frac{\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}} + \frac{\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}} \ge \frac{3}{2}.$$

Using the known inequalities

$$(u+v+w)^2 \ge 3(uv+vw+wu), \quad \sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2} \ge \frac{3}{4},$$

it follows that

$$\left(\frac{\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}} + \frac{\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}} + \frac{\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{B}{2}}\right)^2 \ge 3\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)^2 \ge \frac{9}{4}.$$

Taking square root of each side the conclusion follows, and the proof is completed. □

Problem 4 (Iran 1997). *Let x, y, $z > 1$ such that $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 2$. Prove that*

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \le \sqrt{x+y+z}.$$

Solution. Let $(x, y, z) = (a+1, b+1, c+1)$, with a, b, c positive real numbers. Note that the hypothesis is equivalent to $ab+bc+ca+2abc = 1$. Then, we have to prove that

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \le \sqrt{a+b+c+3}.$$

Squaring the inequality and cancelling some terms yields

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \le \frac{3}{2}.$$

The hypothesis and S5 allow us to take $(ab, bc, ca) = \left(\sin^2 \dfrac{A}{2}, \sin^2 \dfrac{B}{2}, \sin^2 \dfrac{C}{2}\right)$, where ABC is an arbitrary triangle. Then, we have to show that

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \le \frac{3}{2},$$

which is well-known, and the proof is completed. □

Problem 5 (Open Olympiad of FML No-239, Russia). *Let a, b, c be positive real numbers such that $a+b+c = 1$. Prove the following inequality*

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \le \frac{3}{2}.$$

Solution. The inequality is equivalent to

$$\sqrt{\frac{ab}{c(a+b+c)+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a(a+b+c)+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b(a+b+c)+ca}} \le \frac{3}{2},$$

or

$$\sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}} + \sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}} + \sqrt{\frac{ca}{(b+c)(b+a)}} \le \frac{3}{2}.$$

Using S7 we can substitute the three terms for the expressions $\sin \dfrac{A}{2}$, $\sin \dfrac{B}{2}$, $\sin \dfrac{C}{2}$. So, we have to prove that

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \le \frac{3}{2},$$

which is well-known, and the conclusion follows. □

Problem 6 (Romania 2005). *Let a, b, c be positive real numbers such that*

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 1.$$

Prove that

$$ab + bc + ca \le \frac{3}{4}.$$

SOLUTION. Let us notice that our inequality is equivalent to

$$(ab+bc+ca)^3 \le \left(\frac{3}{4}\right)^3 [(a+b)(b+c)(c+a)]^2 .$$

Since the last inequality is homogenous, we can assume without loss of generality that $ab+bc+ca=1$. Perform the substitution S1: $cyc\left(a=\tan\dfrac{A}{2}\right)$, where A, B, C are the angles of a triangle. Then the inequality is equivalent to show that

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 \le [(a+b)(b+c)(c+a)]^2 .$$

On the other hand,

$$\begin{aligned}(a+b)(b+c)(c+a) &= \left(\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\right)\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\right)\left(\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}\right)\\ &= \frac{1}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.\end{aligned}$$

It suffices to prove that

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 \le \left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\right)^2,$$

or

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8},$$

which is well-known, and the conclusion follows. □

Problem 7. *Let x, y, z be positive real numbers such that $xy+yz+zx=1$. Prove that*

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2} \ge \frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}+\frac{2y(1-y^2)}{(1+y^2)^2}+\frac{2z(1-z^2)}{(1+z^2)^2}.$$

SOLUTION. Perform the substitution S1: $cyc\left(x=\tan\dfrac{A}{2}\right)$, where A, B, C are angles of a triangle. Note that

$$\frac{x}{1+x^2}=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}, \quad \frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\sin A\cos A,$$

and analogous forms for the terms y, z. Then the inequality is equivalent to show that

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \ge \sin A\cos A+\sin B\cos C+\sin C\cos C,$$

or

$$\sin A + \sin B + \sin C \geq \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C.$$

From the well-known identities $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ and

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C,$$

it follows that the inequality is equivalent to prove that

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \geq \sin A\sin B\sin C,$$

or

$$\frac{1}{8} \geq \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

The last inequality is well-known and the conclusion follows. □

Problem 8. *Let x, y, z be positive real numbers. Prove the following inequality*

$$\left[\sqrt{x(y+z)} + \sqrt{y(z+x)} + \sqrt{z(x+y)}\right]\sqrt{x+y+z} \geq 2\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Solution. Rewrite the inequality as

$$\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)}} + \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)}} \geq 2.$$

Applying S8 to the inequality, it follows that we have to prove that

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} \geq 2,$$

where α, β, γ are angles of a triangle. Perform the transformation T1: $cyc\left(A = \frac{\pi-\alpha}{2}\right)$, where A, B, C are angles of an acute-angled triangle. So, the inequality is equivalent to prove that

$$\sin A + \sin B + \sin C \geq 2.$$

On the other hand, using the fact that A, B, C are angles of an acute-angled triangle and the well-known identity

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C,$$

we have that

$$\sin A + \sin B + \sin C \geq \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C > 2,$$

which completes our proof. □

Remark. The inequality $\sin A + \sin B + \sin C \geq 2$ has other different proofs. For example, suppose without loss of generality that $A \geq B \geq C$. From the fact that

$$\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2},\ 0\right) \succeq (A,\ B,\ C)$$

and that the function $\sin x$ is concave on $(0,\,\pi)$, we can apply Karamata's inequality to obtain that
$$\sin A+\sin B+\sin C\ge \sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}+\sin 0=2.$$
Another approach is to use Jordan's inequality for acute angles, this is
$$\sin\alpha\ge\frac{2\alpha}{\pi},\quad \forall\alpha\in\left(0,\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Problem 9 (Turkey TST 2006)**.** *Let $x,\,y,\,z>0$ and $xy+yz+zx=1$. Prove that*
$$\frac{27}{4}(x+y)(y+z)(z+x)\ge\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\right)^2\ge 6\sqrt{3}.$$

Solution. Perform the substitution S1: $(x,\,y,\,z)=\left(\tan\frac{A}{2},\,\tan\frac{B}{2},\,\tan\frac{C}{2}\right)$, where A, B, C are angles of a triangle. Note that
$$x+y=\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}},$$
and analogous forms for the terms $y+z$, $z+x$. Then, the inequality is equivalent to
$$\frac{27}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\ge\left(\sqrt{\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}}+\sqrt{\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}}+\sqrt{\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}}\right)^2\ge 6\sqrt{3}.$$
We will prove first the left hand side inequality. From Cauchy-Schwarz we have that
$$3(a^2+b^2+c^2)\ge(a+b+c)^2,$$
then it suffices to prove that
$$\frac{27}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\ge 3\left(\frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}+\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}+\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}\right).$$
This inequality is equivalent to $\frac{9}{4}\ge\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}$, which is well-known.

Now we will prove the right hand side inequality. From the inequality
$$(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca),$$
it suffices to prove that
$$3\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right)\ge 6\sqrt{3}.$$

From Cauchy-Schwarz and Jensen's inequalities, we have that

$$\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\geq\frac{9}{\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}}\geq\frac{9}{3\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3},$$

as desired. □

Problem 10 (Crux Mathematicorum)**.** *Let a, b, c be positive real numbers such that $a+b+c=abc$. Prove that*

$$a^5(bc-1)+b^5(ca-1)+c^5(ab-1)\geq 54\sqrt{3}.$$

Solution. The hypothesis and S3 allows us to perform the substitution

$$(a,\ b,\ c)=\left(\cot\frac{A}{2},\ \cot\frac{B}{2},\ \cot\frac{C}{2}\right).$$

We will prove more, namely, that for any nonnegative real number k the following inequality holds

$$a^k(bc-1)+b^k(ca-1)+c^k(ab-1)\geq 2\cdot 3^{\frac{k}{2}+1}.$$

Note that

$$a^k(bc-1)=\cot^k\frac{A}{2}\left(\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}-1\right)=\cot^k\frac{A}{2}\cdot\frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{\cos^k\frac{A}{2}}{\sin^{k-1}\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}.$$

Then, from AM-GM it follows that

$$\sum a^k(bc-1)\geq 3\sqrt[3]{\frac{\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^k}{\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^{k+1}}}=3\sqrt[3]{\frac{\left(\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)^k}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}.$$

From the inequalities $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\geq 3\sqrt{3}$, $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}$ it follows that

$$3\sqrt[3]{\frac{\left(\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}\right)^k}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}}\geq 3\sqrt[3]{3^{\frac{3k}{2}}\cdot 8}=2\cdot 3^{\frac{k}{2}+1},$$

as we wanted to prove. □

Problem 11 (Mathematical Reflections)**.** *Let a, b, c be positive real numbers, such that $a+b+c+1=4abc$. Prove that*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\geq \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}.$$

Solution. Rewrite the condition as

$$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{abc}=4.$$

This and S5 implies that we can take

$$\left(\frac{1}{bc},\ \frac{1}{ca},\ \frac{1}{ab}\right)=\left(2\sin^2\frac{A}{2},\ 2\sin^2\frac{B}{2},\ 2\sin^2\frac{C}{2}\right),$$

for an arbitrary triangle ABC. Note that this implies that

$$\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)=\left(\frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}},\ \frac{2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}},\ \frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\right).$$

Then, we have to prove that

$$\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\geq\frac{3}{2}\geq\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}.$$

The right hand side inequality is well-known. The left hand side inequality has already been proved in Problem 3, and we are done. □

Problem 12 (Iran 1996)**.** *Let x, y, z be positive real numbers. Prove that*

$$(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right]\geq\frac{9}{4}.$$

Solution. Since this inequality is homogenous we can assume without loss of generality that $xy+yz+zx=1$. Perform the substitution S1: $(x,\,y,\,z)=\left(\tan\frac{\alpha}{2},\ \tan\frac{\beta}{2},\ \tan\frac{\gamma}{2}\right)$, where α, β, γ are angles of an acute angled triangle. So the inequality is equivalent to

$$\frac{1}{\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\tan\frac{\gamma}{2}+\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2}\geq\frac{9}{4},$$

or

$$\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}+\frac{\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}\geq\frac{9}{4}. \qquad (1)$$

Perform the tranformation T1: $cyc\left(A=\dfrac{\pi-\alpha}{2}\right)$, where A, B, C are angles of an acute angled triangle. Thus the inequality is equivalent to

$$\left(\frac{\sin A\sin B}{\sin C}\right)^2+\left(\frac{\sin B\sin C}{\sin A}\right)^2+\left(\frac{\sin C\sin A}{\sin B}\right)^2\geq\frac{9}{4}.$$

Suppose without loss of generality that $\dfrac{\pi}{2}>A\geq\dfrac{\pi}{3}$. Rewrite the inequality in the form

$$f^2(A,\ B,\ C)\geq\frac{9}{4}+2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C),$$

where

$$f(A,\ B,\ C)=\frac{\sin A\sin B}{\sin C}+\frac{\sin B\sin C}{\sin A}+\frac{\sin C\sin A}{\sin B}.$$

From Jensen's inequality we have that

$$\sin^2 B+\sin^2 C\leq 2\sin^2\frac{B+C}{2}=2\cos^2\frac{A}{2}. \tag{2}$$

From AM-GM and (2) we have that

$$\sin B\sin C\leq\cos^2\frac{A}{2}. \tag{3}$$

Consider the difference

$$d=f(A,\ B,\ C)-f\left(A,\ \frac{B+C}{2},\ \frac{B+C}{2}\right)=\frac{\sin^2\dfrac{B-C}{2}}{\sin A}\left(\frac{4\sin^2 A\sin^2\dfrac{A}{2}}{\sin B\sin C}-\frac{1}{2}\right).$$

Since $\dfrac{\pi}{2}>A\geq\dfrac{\pi}{3}$, note that (3) is equivalent to

$$\frac{4\sin^2 A\sin^2\dfrac{A}{2}}{\sin B\sin C}\geq 16\sin^4\frac{A}{2}\geq 1.$$

Hence $d\geq 0$, so we only need to prove that

$$f^2\left(A,\ \frac{B+C}{2},\ \frac{B+C}{2}\right)\geq\frac{9}{4}+2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C).$$

By (2) we have that

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\leq\sin^2 A+2\cos^2\frac{A}{2},$$

so it is enough to prove that

$$f^2\left(A,\ \frac{B+C}{2},\ \frac{B+C}{2}\right)\geq\frac{9}{4}+2\left(\sin^2 A+2\cos^2\frac{A}{2}\right).$$

This inequality is equivalent to

$$\left(2\sin A + \frac{\cos^4 \frac{A}{2}}{\sin A}\right)^2 \geq \frac{9}{4} + 2\left(\sin^2 A + 2\cos^2 \frac{A}{2}\right),$$

or

$$\cos A(\cos A + 1)(2\cos A - 1)^2 \geq 0,$$

which is true, because A is an acute angle, and this completes our proof. $\square$

Problem 13 (MOSP)**.** *Let x, y, z be nonnegative real numbers such that $xy+yz+zx = 1$, and no two of them are equal to zero. Prove the following inequality*

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq \frac{5}{2}.$$

SOLUTION. Since this inequality is symmetric, we can assume without loss of generality that $x \geq y \geq z$. If $z = 0$ it results $xy = 1$ and our inequality is equivalent to

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{5}{2},$$

or

$$(x+y)^2 + 1 \geq \frac{5}{2}(x+y),$$

or

$$\left(x + y - \frac{1}{2}\right)(x + y - 2) \geq 0,$$

which is true because we have $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2$ from AM-GM.

Let assume that x, y, z are positive real numbers. Perform the substitution S1:

$$cyc\left(x = \tan\frac{A}{2}\right),$$

where A, B, C are the angles of triangle ABC. Note that

$$\frac{1}{x+y} = \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} = \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},$$

and similar expressions for the other terms. Rewrite the inequality as

$$\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} + \frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}} \geq \frac{5}{2}.$$

Squaring both sides we get

$$\sum \frac{\cos^2 \dfrac{A}{2} \cos^2 \dfrac{B}{2}}{\cos^2 \dfrac{C}{2}} + 2\sum \cos^2 \frac{A}{2} \geq \frac{25}{4}.$$

Using the inequality (1) from Problem 12 it is enough to prove that

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \geq 2,$$

which is true because

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = 2 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \geq 2.$$

The proof is completed. $\square$

Problem 14. *Let a, b, c be positive real numbers, with a, b, $c \in (0,\ 1)$ such that $ab + bc + ca = 1$. Prove that*

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3}{4}\left(\frac{1-a^2}{a} + \frac{1-b^2}{b} + \frac{1-c^2}{c}\right).$$

Solution. Perform the substitution S1: $cyc\left(a = \tan\dfrac{A}{2}\right)$, where A, B, C are angles of a triangle. Since a, b, $c \in (0,\ 1)$ it follows that $\tan\dfrac{A}{2}$, $\tan\dfrac{B}{2}$, $\tan\dfrac{C}{2} \in (0,\ 1)$, this is A, B, C are angles of an acute angled triangle. Note that

$$cyc\left(\frac{a}{1-a^2} = \frac{\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}}{\cos A} = \frac{\tan A}{2}\right).$$

So the inequality is equivalent to show that

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq \frac{3}{\tan A} + \frac{3}{\tan B} + \frac{3}{\tan C},$$

or

$$\tan A \tan B \tan C(\tan A + \tan B \tan C) \geq 3(\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A).$$

Applying T1 to Lemma 1, since A, B, C are angles of an acute-angled triangle we have

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

So, it is sufficient to show that

$$(\tan A + \tan B \tan C)^2 \geq 3(\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A).$$

This inequality reduces to

$$(\tan A - \tan B)^2 + (\tan B - \tan C)^2 + (\tan C - \tan A)^2 \geq 0.$$

The proof is completed. $\square$

Problem 15 (Mathematical Reflections). *Let a, b, c be positive real numbers. Prove that the following inequality holds*

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}} \geq \sqrt{\frac{16(a+b+c)^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Solution. Note that the inequality is equivalent to

$$(b+c)\sqrt{\frac{(a+b)(c+a)}{a(a+b+c)}}+(c+a)\sqrt{\frac{(b+c)(b+a)}{b(a+b+c)}}+(a+b)\sqrt{\frac{(c+a)(c+b)}{c(a+b+c)}} \geq$$

$$\geq \frac{4(a+b+c)\sqrt{3}}{3}.$$

From T2 and S8 it follows that we can perform the substitutions

$$(b+c)\sqrt{\frac{(a+b)(c+a)}{a(a+b+c)}}=\frac{x}{\cos\dfrac{X}{2}}$$

and

$$\frac{4(a+b+c)\sqrt{3}}{3}=\frac{4s\sqrt{3}}{3},$$

where XYZ is a triangle with sidelengths x, y, z and semiperimeter s.

Analogously, equivalent expressions are obtained for the other terms. Using the sine law and the formulas for the double-angle it yields that we have to prove that

$$\frac{\sin X}{\cos\dfrac{X}{2}}+\frac{\sin Y}{\cos\dfrac{Y}{2}}+\frac{\sin Z}{\cos\dfrac{Z}{2}}=2\left(\sin\frac{X}{2}+\sin\frac{Y}{2}+\sin\frac{Z}{2}\right)\geq\frac{2\sqrt{3}}{3}(\sin X+\sin Y+\sin Z),$$

or equivalently,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin\frac{X}{2}+\sin\frac{Y}{2}+\sin\frac{Z}{2}\right)\geq \sin\frac{X}{2}\cos\frac{X}{2}+\sin\frac{Y}{2}\cos\frac{Y}{2}+\sin\frac{Z}{2}\cos\frac{Z}{2}. \qquad (1)$$

Given that the function $\sin\dfrac{X}{2}$ is increasing on $[0, \pi]$ and $\cos\dfrac{X}{2}$ is decreasing on $[0, \pi]$, from Chebyschev's inequality we have that

$$\frac{\left(\sin\dfrac{X}{2}+\sin\dfrac{Y}{2}+\sin\dfrac{Z}{2}\right)\left(\cos\dfrac{X}{2}+\cos\dfrac{Y}{2}+\cos\dfrac{Z}{2}\right)}{3}\geq\sum\sin\frac{X}{2}\cos\frac{X}{2}. \qquad (2)$$

Since the function $\cos\dfrac{X}{2}$ is concave on $[0, \pi]$, from Jensen's inequality it follows that

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\geq\frac{\cos\dfrac{X}{2}+\cos\dfrac{Y}{2}+\cos\dfrac{Z}{2}}{3}. \qquad (3)$$

From (1), (2) and (3), the conclusion follows. □

6 Exercises

Exercise 1. Let a, b, c be positive real numbers. Prove the following inequality

$$\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)} \geq \sqrt{4abc+(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Exercise 2. Let a, b, c be positive real numbers such that $ab+bc+ca=1$. Prove that

$$\frac{1+a^2b^2}{(a+b)^2}+\frac{1+b^2c^2}{(b+c)^2}+\frac{1+c^2a^2}{(c+a)^2} \geq \frac{5}{2}.$$

Exercise 3. Prove that if x, y, $z>0$ satisfy the condition $x+y+z=xyz$, then

$$xy+yz+zx \geq 3+\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}.$$

Exercise 4. Let x, y, z be positive real numbers such that $x+y+z=xyz$. Prove that

$$(x-1)(y-1)(z-1) \leq 6\sqrt{3}-10.$$

Exercise 5. Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \geq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).$$

Exercise 6. Let x, y, z be positive real numbers. Prove that

$$\frac{\sqrt{y+z}}{x}+\frac{\sqrt{z+x}}{y}+\frac{\sqrt{x+y}}{z} \geq \frac{4(x+y+z)}{\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}}.$$

Exercise 7. Let a, b, c be nonnegative real numbers such that $ab+bc+ca=1$. Prove that the following inequality holds

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{c+a}} \geq 2+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Exercise 8 (Crux Mathematicorum)**.** Let x, y, z be positive real numbers such that $xy+yz+zx=1$. Prove that

$$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2) \leq \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

Exercise 9 (APMO 2002)**.** Let x, y, z be positive real numbers such that $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Prove that

$$\sqrt{x+yz}+\sqrt{x+yz}+\sqrt{x+yz} \geq \sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

Exercise 10 (APMO 2004)**.** Prove that for all positive real numbers a, b, c, we have

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca).$$

Exercise 11 (Belarus 1996)**.** Let x, y, z be positive real numbers such that

$$x+y+z=\sqrt{xyz}.$$

Prove that

$$xy+yz+zx \ge 9(x+y+z).$$

Exercise 12 (Iran 2005)**.** If a, b, c are nonnegative real numbers such that

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}=2,$$

then prove that

$$ab+bc+ca \le \frac{3}{2}.$$

Exercise 13 (Romania 2005, Unused)**.** Let a, b, c be positive real numbers such that $a+b+c=1$. Show that

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}} \ge \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Exercise 14 (Ukraine 2005)**.** Let a, b, c be positive real numbers such that $a+b+c=1$. Prove that

$$\sqrt{\frac{1}{a}-1}\sqrt{\frac{1}{b}-1}+\sqrt{\frac{1}{b}-1}\sqrt{\frac{1}{c}-1}+\sqrt{\frac{1}{c}-1}\sqrt{\frac{1}{a}-1} \ge 6.$$

Exercise 15 (USAMO 2001)**.** Let a, b, c be nonnegative real numbers numbers such that $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Prove that

$$0 \le ab+bc+ca-abc \le 2.$$

References

[1] CMS, *Crux Mathematicorum and Mathematical Mayhem.*

[2] T. Andreescu, V. Cirtoaje, G. Dospinescu, M. Lascu, *Old and New Inequalities*, GIL Publishing House, 2004.

[3] Tran Phuong, *Diamonds in Mathematical Inequalities*, Ha Noi Publishing House, 2007.

[4] N. M. Sedrakyan, *Geometricheskie Neravenstva*, Yerevan, 2004.

[5] E. Specht, *Collected Inequalities.*
[LINK: `http://www.imo.org.yu/othercomp/Journ/ineq.pdf`]

[6] H. Lee, *Topics in Inequalities – Theorems and Techniques*, 2006.
[LINK: `http://ultrametric.googlepages.com/ineq_hl.pdf`]

[7] H. Lee, *Inequalities through problems*, 2006.
[LINK: `http://www.scribd.com/doc/13889461`]

VỀ MỘT BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC

Nguyễn Văn Huyện
SV Đại học Giao thông Vận tải thành phố Hồ Chí Minh

Trước hết ta xét bài toán sau đây.

Bài toán 1. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau luôn được thỏa mãn*

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca). \qquad (*)$$

LỜI GIẢI 1. Đặt $a = x + 1$, $b = y + 1$, $c = z + 1$, ta có x, y, $z > -1$. Thay vào, bất đẳng thức đã cho có thể được viết lại thành

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz \geq 0.$$

Vì $xy \cdot yz \cdot zx = x^2y^2z^2 \geq 0$ nên ít nhất một trong ba số xy, yz, zx phải không âm. Do tính đối xứng nên ta có thể giả sử $xy \geq 0$, khi đó sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta thu được

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz \geq 2xy + z^2 + 2xyz = 2xy(z + 1) + z^2 = 2xyc + z^2 \geq 0.$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

LỜI GIẢI 2. Theo nguyên lý Dirichlet, ta thấy rằng trong ba số a, b, c sẽ có hai số hoặc cùng ≥ 1 hoặc cùng ≤ 1. Giả sử hai số đó là a, b, khi đó

$$(a - 1)(b - 1) \geq 0.$$

Từ đây, bằng cách sử dụng hằng đẳng thức

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 - 2(ab + bc + ca) = (a - b)^2 + (c - 1)^2 + 2c(a - 1)(b - 1) \geq 0,$$

ta thu được ngay bất đẳng thức $(*)$. □

LỜI GIẢI 3. Ta sẽ sử dụng phương pháp dồn biến để chứng minh bài toán. Giả sử $c = \min\{a, b, c\}$ và đặt

$$f(a,\ b,\ c) = a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 - 2(ab + bc + ca),$$

ta có

$$f(a,\ b,\ c) - f\left(\sqrt{ab},\ \sqrt{ab},\ c\right) = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \left(a + b + 2\sqrt{ab} - 2c\right) \geq 0.$$

Do đó $f(a,\ b,\ c) \geq f\left(\sqrt{ab},\ \sqrt{ab},\ c\right)$. Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$f\left(\sqrt{ab},\ \sqrt{ab},\ c\right) \geq 0.$$

Thật vậy, nếu đặt $t = \sqrt{ab}$ thì ta có

$$f(t,\ t,\ c) = 2t^2 + c^2 + 2t^2c - 2(t^2 + 2tc) + 1 = (c-1)^2 + 2c(t-1)^2 \geq 0.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

LỜI GIẢI 4. Sử dụng lần lượt bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$2abc + 1 = abc + abc + 1 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq \frac{9abc}{a+b+c}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab + bc + ca).$$

Thực hiện phép khai triển trực tiếp, ta có bất đẳng thức tương đương với

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b),$$

đúng vì đây chính là bất đẳng thức Schur dạng bậc ba. □

Bất đẳng thức $(*)$ được Darij Grinberg đề xuất vào năm 2004. Mặc dù chỉ là một kết quả đơn giản nhưng bất đẳng thức này lại có nhiều ứng dụng trong việc chứng minh các bất đẳng thức ba biến. Sau đây, chúng ta sẽ đi vào xét các bài toán cụ thể để hiểu rõ vì sao chúng tôi lại nói như vậy.

Bài toán 2 (Moscow 2000)**.** *Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c \geq 2(ab + bc + ca).$$

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3 = 2abc + 1.$$

Vì thế để chứng minh bài toán, ta chỉ cần chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca).$$

Đây chính là bất đẳng thức $(*)$ nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Bài toán 3 (VMO 2006)**.** *Tìm hằng số k lớn nhất để bất đẳng thức*

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3k \geq (k+1)(a+b+c)$$

đúng với mọi a, b, c dương thỏa mãn $abc = 1$.

Lời giải. Cho $a = b = t$ $(t > 0,\ t \neq 1)$ và $c = \dfrac{1}{t^2}$, khi đó a, b, c là các số dương và $abc = 1$. Do đó, theo yêu cầu của bài toán ta phải có

$$\frac{2}{t^2} + t^4 + 3k \geq (k+1)\left(2t + \frac{1}{t^2}\right).$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{2}{t^2} + t^4 - 3 \geq (k+1)\left(2t + \frac{1}{t^2} - 3\right),$$

$$\frac{t^6 - 3t^2 + 2}{t^2} \geq \frac{(k+1)(2t^3 - 3t^2 + 1)}{t^2},$$

$$\frac{(t^2-1)^2(t^2+2)}{t^2} \geq \frac{(k+1)(t-1)^2(2t+1)}{t^2},$$

$$\frac{(t+1)^2(t^2+2)}{2t+1} \geq k+1, \quad \forall t > 0.$$

Cho $t \to 0^+$, ta được $2 \geq k+1$, suy ra $k \leq 1$. Ta sẽ chứng minh rằng 1 chính là hằng số cần tìm, tức là

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq 2(a+b+c).$$

Đặt $x = \dfrac{1}{a}$, $y = \dfrac{1}{b}$, $z = \dfrac{1}{c}$ thì ta có $xyz = 1$, $3 = 2xyz + 1$ và

$$a + b + c = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xyz}{x} + \frac{xyz}{y} + \frac{xyz}{z} = xy + yz + zx.$$

Do đó bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz + 1 \geq 2(xy + yz + zx),$$

hiển nhiên đúng theo $(*)$. Vậy ta có kết luận $k_{\max} = 1$. □

Bài toán 4 (Romania 2005). *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện*

$$(a+b)(b+c)(c+a) = 1.$$

Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca \leq \frac{3}{4}.$$

Lời giải. Đặt $x = a + b$, $y = b + c$, $z = c + a$ thì ta có $xyz = 1$ và

$$a = \frac{z + x - y}{2}, \quad b = \frac{x + y - z}{2}, \quad c = \frac{y + z - x}{2}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại như sau

$$\frac{z+x-y}{2} \cdot \frac{x+y-z}{2} + \frac{x+y-z}{2} \cdot \frac{y+z-x}{2} + \frac{y+z-x}{2} \cdot \frac{z+x-y}{2} \leq \frac{3}{4}.$$

Sau khi thu gọn, ta được

$$x^2+y^2+z^2+3 \geq 2(xy+yz+zx),$$

hay là

$$x^2+y^2+z^2+2xyz+1 \geq 2(xy+yz+zx).$$

Đây chính là bất đẳng thức $(*)$ nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$. □

Bài toán 5. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, ta đều có*

$$a^2+b^2+c^2+2abc+3 \geq (a+1)(b+1)(c+1).$$

LỜI GIẢI. Sau khi khai triển và rút gọn, ta có bất đẳng thức tương đương

$$a^2+b^2+c^2+abc+2 \geq ab+bc+ca+a+b+c,$$

hay là

$$2(a^2+b^2+c^2)+2abc+4 \geq 2(ab+bc+ca+a+b+c).$$

Theo $(*)$, ta có

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca).$$

Sử dụng đánh giá này, ta đưa được bài toán về chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c).$$

Bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức hiển nhiên đúng

$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \geq 0.$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Bài toán 6 (APMO 2004)**.** *Chứng minh rằng bất đẳng thức sau luôn được thỏa mãn với mọi số thực dương a, b, c*

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca).$$

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$a^2b^2c^2+3(a^2+b^2+c^2)+(a^2+b^2+c^2)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3)+2 \geq 9(ab+bc+ca).$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$3(a^2+b^2+c^2) = 3\left(\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+a^2}{2}\right) \geq 3(ab+bc+ca)$$

và

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3) = 2\left[(a^2b^2+1)+(b^2c^2+1)+(c^2a^2+1)\right] \geq 4(ab+bc+ca).$$

Từ đó bài toán được quy về chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2 \geq 2(ab+bc+ca). \qquad (**)$$

Bất đẳng thức này có thể được viết lại thành

$$\left[a^2+b^2+c^2+2abc+1-2(ab+bc+ca)\right]+(abc-1)^2 \geq 0,$$

hiển nhiên đúng theo $(*)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Nhận xét. Bài toán còn đúng cả trong trường hợp a, b, c là các số thực bất kỳ. Thật vậy, từ chứng minh trên ta thấy rằng

$$\begin{aligned}(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) &= (|a|^2+2)(|b|^2+2)(|c|^2+2) \geq 9(|a||b|+|b||c|+|c||a|)\\ &\geq 9(ab+bc+ca).\end{aligned}$$

Ngoài ra, bất đẳng thức trên còn có thể làm chặt lên thành

Bài toán 7 (Mở rộng APMO 2004)**.** *Chứng minh bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi số thực dương a, b, c*

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3(a+b+c)^2.$$

Lời giải. Tương tự như trên, ta cũng sử dụng phép khai triển trực tiếp và viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3)+2 \geq 6(ab+bc+ca).$$

Đến đây, ta cũng sử dụng bất đẳng thức AM-GM

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3) \geq 4(ab+bc+ca),$$

và đưa được bất đẳng thức về chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+a^2b^2c^2+2 \geq 2(ab+bc+ca).$$

Đây chính là bất đẳng thức $(**)$.

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. □

Bài toán 8. *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 3(a+b+c)^2+(abc-1)^2.$$

Lời giải. Sau khi khai triển và rút gọn, ta được bất đẳng thức tương đương

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3)+a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 6(ab+bc+ca).$$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3) \geq 4(ab+bc+ca).$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca).$$

Đây chính là bất đẳng thức $(*)$.

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Bài toán 9 (Iran 2002)**.** *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng*

$$a+b+c \le 3.$$

LỜI GIẢI. Từ giả thiết sử dụng bất đẳng thức (∗), ta có

$$\begin{aligned} 9 &= 2(a^2+b^2+c^2+abc)+1 = a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2+c^2+2abc+1) \\ &\ge a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2, \end{aligned}$$

từ đó suy ra

$$a+b+c \le 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Bài toán 10 (Hello IMO 2007)**.** *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta đều có*

$$2(a^2+b^2+c^2)+abc+8 \ge 5(a+b+c).$$

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a+b+c = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot(a+b+c) \le \frac{1}{6}\left[9+(a+b+c)^2\right].$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$12(a^2+b^2+c^2)+6abc+48 \ge 5\left[(a+b+c)^2+9\right].$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$7(a^2+b^2+c^2)+6abc+3 \ge 10(ab+bc+ca),$$

$$4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3\left[a^2+b^2+c^2+2abc+1-2(ab+bc+ca)\right] \ge 0,$$

đúng vì ta có $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$ (theo AM-GM) và

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \ge 2(ab+bc+ca) \text{ (theo (∗))}.$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Tài liệu tham khảo

[1] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo Bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Tri Thức, 2006.

[2] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Bất đẳng thức và những lời giải hay*, Nhà xuất bản Hà Nội, 2009.

[3] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Sử dụng phương pháp Cauchy-Schwarz để giải toán Bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm Hà Nội, 2010.

[4] `http://mathlinks.ro`

TỔ HỢP VÀ CÔNG THỨC C_k^2

Đặng Hoàng Linh
HS chuyên Toán khóa 2008 - 2011

Ví dụ 1. *Có* 80 *ủy ban tạo bởi* 1600 *ủy viên, mỗi ủy ban có đúng* 80 *ủy viên. Chứng minh rằng tồn tại hai ủy ban có ít nhất* 4 *ủy viên chung.*

Lời giải. Thay vì đếm số cặp ủy ban bất kỳ, ta đếm số "cặp" ủy ban mà mỗi ủy viên tham dự. Đánh số thứ tự các ủy viên 1, 2, ..., 1600, các ủy viên này lần lượt có số ủy ban tham gia là k_1, k_2, ..., k_{1600}. Có n ủy ban ($n = 80$), mỗi ủy ban có đúng 80 ủy viên nên $k_1 + k_2 + \cdots + k_{1600} = 80n$. Với mỗi ủy viên i, số cặp ủy ban mà ủy viên đó tham gia là $C_{k_i}^2$. Vậy tổng cộng có

$$\sum_{i=1}^{1600} C_{k_i}^2.$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh bài toán bằng phản chứng, giả sử mỗi cặp ủy ban có nhiều nhất 3 thành viên chung, nên có nhiều nhất $3C_n^2$ cặp ủy ban. Do đó, ta có

$$\sum_{i=1}^{1600} C_{k_i}^2 \le 3C_n^2.$$

Mặt khác, lại có

$$\sum_{i=1}^{1600} C_{k_i}^2 = \sum_{i=1}^{1600} \frac{k_i(k_i-1)}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{1600} k_i^2 - \sum_{i=1}^{1600} k_i}{2} \ge \frac{1}{2}\frac{\left(\sum_{i=1}^{1600} k_i\right)^2}{1600} - \frac{\sum_{i=1}^{1600} k_i}{2} = 2n^2 - 40n.$$

Từ đây ta có $2n^2 - 40n \le \frac{3}{2}n(n-1)$, suy ra $n \le 77$ (vô lý).

Vậy bài toán được giải quyết xong. $\square$

Ta nhận thấy nhiều bài toán thay vì đếm số phần tử thì ta đếm số cặp phần tử, đôi khi lại giúp ta giải được nhiều bài toán khó, ta thử bắt đầu bằng một bài toán khó hơn.

Ví dụ 2. *Một hội nghị sử dụng* 4 *ngôn ngữ chính thức. Biết với hai đại biểu bất kỳ luôn có một ngôn ngữ mà cả hai đều biết, chứng minh rằng có một ngôn ngữ được biết bởi ít nhất* 60% *đại biểu.*

Khi nhìn vào đề bài trên, có lẽ rất khó định hướng để giải, nhất là con số 60% khá mơ hồ. Nhưng ta thử quên đi cách đếm thông thường mà thử tìm số cặp phần tử của nó.

Lời giải. Nếu có một người nào đó chỉ biết 1 ngôn ngữ thì theo giả thiết ta suy ra được tất cả những người còn lại đều biết ngôn ngữ đó, và kết luận bài toán là hiển nhiên.

Giả sử tất cả đại biểu đều biết ít nhất 2 ngôn ngữ. Gọi số đại biểu là n và tập hợp A, B, C, D lần lượt là tập những người biết các ngôn ngữ I, II, III, IV. Số cặp những người biết ngôn ngữ A, B, C, D là C_A^2, C_B^2, C_C^2, C_D^2. Do một người biết ít nhất 2 ngôn ngữ, cho nên ta có bất đẳng thức sau

$$C_A^2 + C_B^2 + C_C^2 + C_D^2 \geq 2C_n^2.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$A(A-1) + B(B-1) + C(C-1) + D(D-1) \geq 2n(n-1),$$

$$\left(A - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(B - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(C - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(D - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 2n(n-1) + 1. \qquad (1)$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử A là tập lớn nhất trong các tập A, B, C, D. Khi đó, từ (1) ta có

$$\left(A - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{4}(2n^2 - 2n + 1).$$

Từ bất đẳng thức này dễ dàng chứng minh được $A > \frac{6}{10}n$ với mọi $n \geq 2$. □

Qua hai ví dụ trên, chắc hẳn các bạn đã thấy được sự hữu dụng của việc sử dụng công thức C_k^2 trong việc giải một số bài toán tổ hợp. Nhờ nó mà chúng ta có thể giải được cả một số bài toán chứng minh đẳng thức khá hóc búa như bài IMO 1998.

Ví dụ 3 (IMO 1998). *Trong một kỳ thi có m thí sinh và n giám khảo, trong đó n là một số lẻ. Cho biết mỗi thí sinh phải được chấm bởi tất cả giám khảo bởi hai giá trị "chấm đỗ" và "chấm hỏng". Giả sử rằng mỗi cặp giám khảo chỉ chấm nhiều nhất k thí sinh. Chứng minh rằng*

$$\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}.$$

LỜI GIẢI. Chúng ta đếm số cặp giám khảo chấm mỗi thí sinh. Xét thí sinh thứ i $(1 \leq i \leq m)$ được chấm đỗ bởi x_i giám khảo và bị chấm hỏng bởi y_i giám khảo. Rõ ràng $x_i + y_i = n$. Lúc đó số cặp giám khảo chấm thí sinh thứ i là

$$\begin{aligned} C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2 &= \frac{x_i(x_i-1)}{2} + \frac{y_i(y_i-1)}{2} = \frac{x_i^2 + y_i^2}{2} - \frac{x_i + y_i}{2} \\ &\geq \frac{1}{2}\frac{(x_i+y_i)^2}{2} - \frac{x_i+y_i}{2} = \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{1}{4}\left[(n-1)^2 - 1\right]. \end{aligned}$$

Vì n lẻ và $C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2$ là một số nguyên nên

$$C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2 \geq \frac{1}{4}(n-1)^2.$$

Ta có tất cả n giám khảo và mỗi cặp giám khảo chỉ chấm nhiều nhất nhất k thí sinh nên có nhiều nhất kC_n^2 cặp giám khảo. Vậy ta có bất đẳng thức

$$kC_n^2 \geq \sum_{i=1}^{m} (C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2) \geq \frac{1}{4}m(n-1)^2.$$

Từ đây suy ra $\dfrac{k}{m} \geq \dfrac{(n-1)^2}{4C_n^2}$, hay $\dfrac{k}{m} \geq \dfrac{n-1}{2n}$. Bài toán được chứng minh. □

Ví dụ 4 (Đề kiểm tra đội dự tuyển của Đại học Sư phạm)**.** *Cho n là số nguyên lớn hơn 1 và $P_1, P_2, \ldots, P_n$ là các tập con có hai phần tử và đôi một phân biệt của tập hợp $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ thỏa mãn tính chất: nếu $i \neq j$ mà $P_i \cap P_j$ khác rỗng thì tồn tại k để $P_k = \{i, j\}$. Chứng minh rằng với mỗi số $i \in S$ xuất hiện đúng hai lần trong các tập P_j với $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Lời giải. Gọi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lần lượt là số lần xuất hiện của $1, 2, \ldots, n$ trong các tập P_j với $j = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2n.$$

Tổng số các cặp P_i, P_j phân biệt mà giao của chúng khác rỗng là

$$\sum_{i=1}^{n} C_{x_i}^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\right) \geq n.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 2$ (đpcm). □

Sau đây là một số bài toán để luyện tập.

Bài tập 1 (Liên Xô 1965)**.** Một cuộc hội thảo có 40 cuộc họp, mỗi cuộc họp có 10 thành viên tham dự. Cho biết 2 thành viên bất kỳ chỉ cùng dự họp với nhau tối đa một lần, chứng minh cuộc hội thảo có nhiều hơn 60 thành viên.

Bài tập 2 (IMO 1989)**.** Cho n, k là hai số nguyên dương thỏa mãn $n \geq k$ và S là tập hợp gồm n điểm trong mặt phẳng có hai tính chất:

(a) Không có ba điểm nào của S thẳng hàng;

(b) Với mọi điểm $P \in S$ có không ít hơn k điểm của S cách đều P.

Chứng minh rằng $k < \dfrac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Bài tập 3. Cho một dãy số hữu hạn có n phần tử, số n được gọi là độ dài của dãy. Giả sử dãy số chỉ gồm toàn các chữ số 0 và 1, ta gọi khoảng cách giữa hai dãy là số các vị trí khác nhau ở hai dãy. Ví dụ 1101011 và 1011000 là hai dãy có độ dài 7 và có khoảng cách 4 vì có các vị trí số 2, số 3, số 6 và số 7 khác nhau. Bây giờ cho m dãy như trên. Giả sử hai dãy bất kỳ có khoảng cách nhỏ nhất d, chứng minh rằng

$$m \leq \frac{2d}{2d-n}.$$

Bài tập 4. Cho n điểm thẳng hàng $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geq 4)$. Đặt

$$M = \{A_iA_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Biết A_iA_j có độ dài nguyên với mọi $i \neq j$, chứng minh rằng có ít nhất $\dfrac{1}{6}|M|$ đoạn A_iA_j có độ dài chia hết cho 3.

Bài tập 5. Trong mặt phẳng cố định hệ tọa độ Oxy, chúng ta xét tập hợp R gồm những điểm với tọa độ (x, y), ở đây x, y là những số nguyên và $1 \leq x \leq 12$, $1 \leq y \leq 10$. Mỗi điểm được tô bằng một màu trắng, xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục tọa độ, mà đỉnh của nó là những điểm của R được sơn cùng một màu.

MỞ RỘNG TỪ MỘT BÀI TOÁN

Từ Nguyễn Thái Sơn
HS chuyên Toán khóa 2008 - 2011

Trong kỳ thi IMO lần thứ 29 năm 1987 có bài toán sau.

Bài toán 1. *Gọi $p_n(k)$ là số hoán vị của tập hơn $\{1, 2, \ldots, n\}$ có đúng k điểm cố định. Chứng minh rằng*

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = n!$$

Bài toán này có lời giải khá đơn giản với phương pháp đếm bằng hai cách. Ta cùng xem xét các lời giải sau.

Lời giải 1. Ta tính số các cặp (f, i) với f là hoán vị và i là điểm cố định bằng 2 cách.

- *Cách 1.* Xét f là hoán vị bảo tồn đúng k điểm, i là một trong các điểm cố định của f. Rõ ràng i có k cách chọn, còn số các hoán vị có k điểm cố định theo định nghĩa là $p_n(k)$ nên ta có số các cặp (f, i) là $\sum_{k=0}^{n} kp_n(k)$.
- *Cách 2.* Cố định một phần tử x. Với mỗi một giá trị x ta có $(n-1)!$ hoán vị nhận x làm điểm cố định, mà x có n cách chọn nên ta có tất cả $n!$ cặp (f, i) như thế.

Từ hai cách tính trên, ta suy ra $n! = \sum_{k=0}^{n} kp_n(k)$. Bài toán được chứng minh. □

Lời giải 2. Ta có đẳng thức sau

$$\sum_{k=0}^{n} p_n(k) = n! \tag{1}$$

Thật vậy, ta biết rằng tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ có tất cả $n!$ hoán vị, gồm các loại không bảo tồn bất kỳ một phần tử nào cho đến loại bảo tồn n phần tử, do đó ta có (1).

Mặt khác, ta cũng có hằng đẳng thức sau với mọi $k > 0$

$$kp_n(k) = np_{n-1}(k-1). \tag{2}$$

Thật vậy, ta đếm số các cặp (f, i) với f là hoán vị có đúng k điểm cố định và i là một trong các điểm đó, rõ ràng số các cặp là $kp_n(k)$. Mặt khác ta có thể cố định một giá trị tùy ý và tính số hoán vị bảo tồn đúng $k-1$ phần tử của $n-1$ phần tử còn lại, và như vậy số các cặp sẽ là $np_{n-1}(k-1)$. Từ đây ta có (2).

Từ (1) và (2) ta có

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = n\sum_{k=1}^{n} p_{n-1}(k-1) = n \cdot (n-1)! = n!$$

Bài toán được chứng minh. □

Thực chất hai cách giải trên cũng không quá khác nhau. Cách 1 có lẽ rất ngắn gọn nhưng ở cách 2, ta có mối liên hệ (2)

$$kp_n(k) = np_{n-1}(k-1).$$

Liên hệ này khiến ta nghĩ tại sao không thử tìm cách tính trực tiếp các số $p_n(k)$? Từ (2), ta có

$$\begin{aligned} p_n(k) &= \frac{n}{k}p_{n-1}(k-1) = \cdots = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}p_{n-k}(0) \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}p_{n-k}(0) = C_n^k p_{n-k}(0). \end{aligned} \tag{3}$$

Từ đây ta thu được các công thức (có thể xem như một bài toán mới)

$$\sum_{k=0}^{n} p_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p_{n-k}(0) = n!, \quad \sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p_{n-k}(0) = n!$$

Điều thú vị nhất là từ $p_n(k) = C_n^k p_{n-k}(0)$, ta có thể quy việc tính $p_n(k)$ về việc tính $p_n(0)$. Dường như khả năng tính $p_n(k)$ là có thể thực hiện được và đã đơn giản đi nhiều.

Giờ ta sẽ tìm cách tính $p_n(0)$. Một cách tự nhiên, ta tính vài giá trị đầu của $p_n(0)$:

- $p_1(0) = 0$;
- $p_2(0) = 1$;
- $p_3(0) = 2$;
- $p_4(0) = 9$;
- ...

Ta có các nhận xét: $9 = 3 \cdot (2+1)$, $2 = 1 \cdot (1+0)$, ... Vậy phải chăng

$$p_{n+1}(0) = n\left[p_n(0) + p_{n-1}(0)\right]?$$

Thực tế điều này đúng và chứng minh cũng rất dễ dàng. Xét $S = \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$. Ta tìm cách tính số hoán vị không có điểm cố định của S. Hoán vị này có thể được thành lập như sau: Đầu tiên lấy ra số $n+1$, có n cách đặt nó vào n vị trí $(1, 2, \ldots, n)$ để $f(n+1) \neq n+1$. Giả sử $n+1$ được đặt vào vị trí i ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$), ta cần xếp n số $\{1, 2, \ldots, n\}$ vào n vị trí $\{1, 2, \ldots, n+1\} \setminus \{i\}$.

Đặt $G = \{1, 2, \ldots, n+1\} \setminus \{i\}$. Nhận thấy rằng giữa G và $\{1, 2, \ldots, n\}$ có đúng $n-1$ số giống nhau, hai số khác nhau là ở G có $n+1$ và ở tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ có i. Ta có hai khả năng xảy ra khi xếp n số $\{1, 2, \ldots, n\}$ vào n vị trí $\{1, 2, \ldots, n+1\} \setminus \{i\}$.

- Nếu i xếp vào $n+1$ thì số các cách sắp xếp $n-1$ số còn lại chính là số các hoán vị không có điểm cố định của $n-1$ phần tử. Trường hợp này có $p_{n-1}(0)$ hoán vị.
- Nếu i không xếp vào $n+1$, ta coi i giống như $n+1$, như vậy số các hoán vị trong trường hợp này là $p_n(0)$.

Từ các lập luận trên, ta có

$$p_{n+1}(0) = n\left[p_n(0) + p_{n-1}(0)\right].$$

(Ví dụ, xét tập $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, ta cần tính $p_5(0)$. Giờ ta cần tìm một vị trí để đặt số 5, chẳng hạn

$$\underbrace{1}_{5} \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$$

Giờ ta sẽ xếp bốn số 1, 2, 3, 4 vào các vị trí 2, 3, 4, 5. Có hai khả năng.

- Nếu số 1 rơi vào vị trí 5 :

  $$\underbrace{1}_{5} \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \underbrace{5}_{1}$$

  Giờ ta phải xếp $\{2, 3, 4\}$ vào $\{2, 3, 4\}$ sao cho không có điểm cố định. Rõ ràng có $p_3(0)$ hoán vị sinh ra.
- Nếu số 1 không rơi vào vị trí 5, ta coi 1 "là" 5 và số hoán vị sinh ra là $p_4(0)$.

Do ban đầu 5 có 4 cách chọn vị trí nên ta có $p_5(0) = 4\left[p_4(0) + p_3(0)\right]$)

Vấn đề giờ đây rất rõ ràng, ta cần tìm công thức tổng quát của $p_n(0)$ với

$$\begin{cases} p_1(0) = 0, \ p_2(0) = 1 \\ p_{n+1}(0) = n\left[p_n(0) + p_{n-1}(0)\right] \end{cases}.$$

Để cho gọn, ta đặt $y_n = p_n(0)$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases} y_1 = 0, \ y_2 = 1 \\ y_{n+1} = n(y_n + y_{n-1}), \ \forall n \geq 2 \end{cases}. \tag{4}$$

Hệ thức liên hệ giữa y_{n+1}, y_n và y_{n-1} có thể viết lại thành

$$y_{n+1} - (n+1)y_n = -(y_n - ny_{n-1}).$$

Đặt $z_n = y_n - ny_{n-1}$, ta được $z_2 = y_2 - 2y_1 = 1$ và $z_{n+1} = -z_n$. Dễ dàng tìm được công thức tổng quát của z_n là $z_n = (-1)^n$, $\forall n \geq 2$, suy ra $y_n - ny_{n-1} = (-1)^n$, hay

$$y_n = ny_{n-1} + (-1)^n, \quad \forall n \geq 2.$$

Từ đây ta có (chú ý rằng $y_1 = 0$)

$$\begin{aligned} y_n &= ny_{n-1} + (-1)^n = n(n-1)y_{n-2} + n^1(-1)^{n-1} + (-1)^n \\ &= n(n-1)(n-2)y_{n-3} + 2!C_n^2(-1)^{n-2} + 1!C_n^1(-1)^{n-1} + 0!C_n^0(-1)^n \\ &= \cdots = n(n-1)\cdots(n-k)y_{n-k-1} + \sum_{i=0}^{n-k} i!C_n^i(-1)^{n-i} \\ &= n(n-1)\cdots(2)y_1 + \sum_{i=0}^{n-2} i!C_n^i(-1)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n-2} i!C_n^i(-1)^{n-i}. \end{aligned}$$

Như vậy, ta đã tính được $p_n(0)$, cụ thể là

$$p_n(0) = y_n = \sum_{i=0}^{n-2} i!C_n^i(-1)^{n-i}. \tag{5}$$

Liệu công thức này có rút gọn được hay không? Bản thân tôi vẫn chưa trả lời được câu hỏi này, hy vọng sẽ được trao đổi thêm với các bạn.

Bây giờ, quay trở lại bài toán của ta. Từ (3) ta có

$$p_n(k) = C_n^k p_{n-k}(0) = C_n^k \sum_{i=0}^{n-k-2} i!C_{n-k}^i(-1)^{n-k-i}. \tag{6}$$

Từ công thức (6) này, ta có thể tạo ra nhiều bài toán khá khó, ví dụ

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ C_n^k \sum_{i=0}^{n-k-2} \left[i!C_{n-k}^i(-1)^{n-k-i} \right] \right\} = n!$$

Tuy nhiên, những bài toán như thế này thường không tự nhiên và khá khó, điều mà ta quan tâm là ta thu được

$$\begin{cases} kp_n(k) = np_{n-1}(k-1) \\ p_n(k) = C_n^k p_{n-k}(0) \\ p_{n+1}(0) = n\left[p_n(0) + p_{n-1}(0)\right] \\ p_n(0) - np_{n-1}(0) = (-1)^n \end{cases}. \tag{7}$$

Để kết thúc bài viết, ta xem xét một ứng dụng của (7) trong toán sơ cấp.

Bài toán 2. *Cho $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Gọi x_n là số hoán vị có đúng một điểm cố định và y_n là số hoán vị không có điểm cố định nào của S. Chứng minh rằng*

$$|x_n - y_n| = 1.$$

LỜI GIẢI. Với các kết quả ở trên, bài toán này khá đơn giản. Ta có

$$x_n = p_n(1) = np_{n-1}(0) = ny_{n-1}$$

và

$$y_n = p_n(0) = np_{n-1}(0) + (-1)^n = ny_{n-1} + (-1)^n.$$

Từ đây suy ra $x_n - y_n = (-1)^n$, do đó hiển nhiên ta có $|x_n - y_n| = 1$ (đpcm).

Nếu không biết $p_n(0) = np_{n-1}(0) + (-1)^n$, ta cũng có thể giải bài toán như sau: Do

$$x_n - y_n = ny_{n-1} - (n-1)(y_{n-1} + y_{n-2}) = y_{n-1} - (n-1)y_{n-2} = -(x_{n-1} - y_{n-1})$$

nên $|x_n - y_n| = |x_{n-1} - y_{n-1}| = \cdots = |x_1 - y_1| = 1$. □

Công thức (7) nếu đi sâu tiếp tục, các bạn sẽ còn tìm thấy rất nhiều đẳng thức thú vị. Việc đào sâu vào một kết quả luôn tạo ra nhiều điều thú vị, xin chúc các bạn cũng sẽ tìm được nhiều điều thú vị cho riêng mình.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, Trần Nam Dũng, Vũ Đình Hòa, Đặng Huy Ruận, Đặng Hùng Thắng, *Chuyên đề chọn lọc Tổ hợp và Toán rời rạc*, Nhà xuất bản Giáo Dục, 2008.

[2] Titu Andreescu, Zuming Feng, *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*, Birkhauser, 2004.

[3] Titu Andreescu, Zuming Feng, *102 Combinatorial Problems: From the Training of the USA IMO Team*, Birkhauser, 2002.

[4] Gerald Berman, K. D. Fryer, *Introduction to Combinatorics*, Waterloo – Academic Press, 1972.

ỨNG DỤNG CỦA TOÁN HỌC TRONG VIỆC HIỂN THỊ CÁC ĐỐI TƯỢNG HÌNH ẢNH BẰNG MÁY VI TÍNH

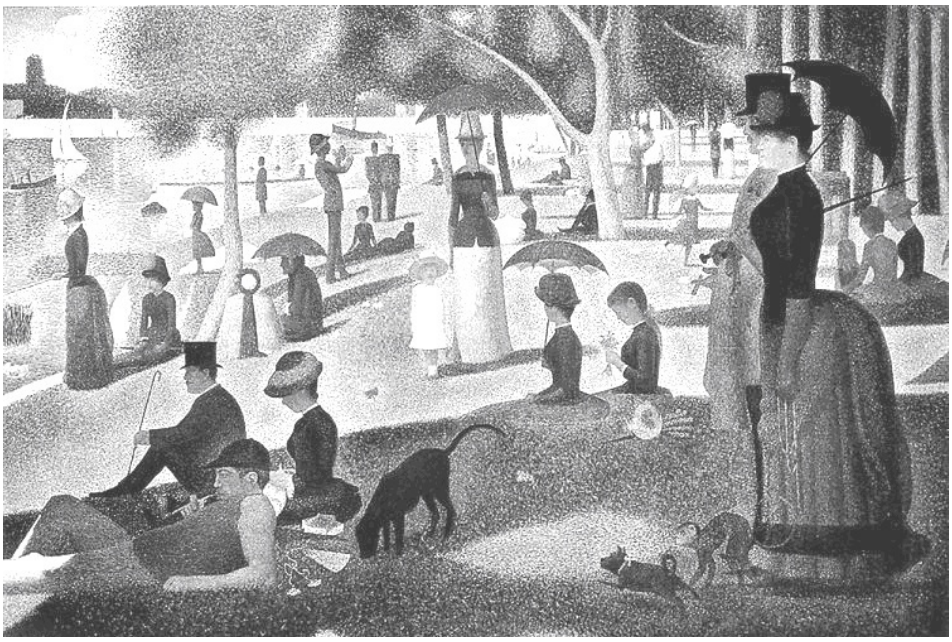
Phạm Mộng Bảo
SV Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh

Bằng máy vi tính chúng ta có thể thực hiện rất nhiều công việc với hình ảnh, và cuối cùng là thể hiện hình ảnh qua các bản in. Chắc hẳn bạn đã từng chiêm ngưỡng những bản in chất lượng cao có những hình ảnh sắc nét, độc đáo. Và có bao giờ bạn tự hỏi: *"Máy vi tính đã thể hiện các bản in đó như thế nào? Có bao nhiêu cách thể hiện như vậy? Cách nào là tối ưu?"*, trong bài viết này chúng ta cùng tìm hiểu về các vấn đề này.

Để tiện cho việc tìm hiểu, ta hạn chế các hình ảnh mà ta đề cập dưới đây là ảnh "trắng đen", nghĩa là không đề cập đến biến "màu sắc".

1 Phương pháp dùng hệ tọa độ

Có thể nói đây là phương pháp đơn giản nhất, nhằm gây niềm tin cho phương pháp này chúng ta cùng xem qua tác phẩm "Chiều chủ nhật trên đảo La grande Jatte" của Georges Seurat. Để thể hiện bức ảnh này Georges không dùng bút lông thông thường mà dùng vô số những chấm chấm nhỏ có màu sắc theo phong cách hội họa gọi là trường phái "chấm chấm" (pointillism). Bạn có thể nhìn thấy những chấm ấy nếu bạn đứng khá gần bức tranh, nhưng nếu bạn đi xa khỏi bức tranh thì các chấm ấy cuối cùng pha trộn lẫn nhau không còn phân biệt được nữa. Từ đó tạo nên bức hình mà bạn đang chiêm ngưỡng dưới đây.



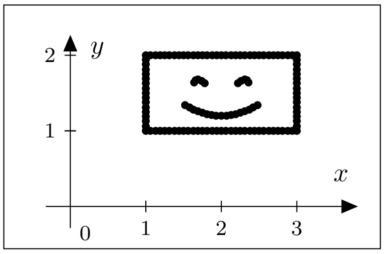
Hình 1. Chiều chủ nhật trên đảo La grande Jatte.

Hiệu quả của bức tranh "Chiều chủ nhật trên đảo La grande Jatte" có cơ sở Vật lý là sự "nhiễu xạ". Nhưng nói tóm lại là chỉ cần thể hiện những dấu chấm thích hợp, đủ nhiều, ở những nơi cần thiết là ta có thể thu được một hình ảnh không đến nỗi quá tầm thường như đã miêu tả. Vậy ra các kiến thức về hệ tọa độ Descartes rất hữu dụng trong phương pháp này. Và như vậy ta có thể xem rằng phương pháp này khiến máy tính có cách hiểu hình ảnh là một tập hợp các điểm có tọa độ (x, y) kiểu như tập A.

$A = \{(1, 1); (3, 1); (1, 2); (3, 2); (2, 2); (1.64, 1.64); (1.5, 2); (2.5, 2); (3, 1.5); (2, 1);$ $(1.5, 1); (2.5, 1); (2.75, 1); (2.25, 1); (1.75, 1); (1.25, 1); (1, 1.5); (1.74, 1.66); (1, 1.75);$ $(1, 1.25); (3, 1.75); (3, 1.25); (2.75, 2); (2.25, 2); (1.75, 2); (1.25, 2); (2, 1.2); (2.54, 1.34);$ $(1.52, 1.34); (2.3, 1.24); (1.75, 1.24); (1.87, 1.21); (1.63, 1.28); (1.58, 1.31); (1.69, 1.26);$ $(1.93, 1.2); (2.31, 1.26); (2.19, 1.22); (1, 1.88); (1, 1.63); (1, 1.38); (1, 1.13); (1.13, 1);$ $(1.38, 1); (1.63, 1); (1.88, 1); (1.13, 2); (1.38, 2); (1.63, 2); (1.88, 2); (1.06, 2); (1, 1.94);$ $(1, 1.81); (1, 1.69); (1, 1.56); (1, 1.44); (1, 1.31); (1, 1.19); (1, 1.06); (1.06, 1); (1.19, 1);$ $(1.31, 1); (1.44, 1); (1.56, 1); (1.69, 1); (1.81, 1); (2.25, 1.24); (1.81, 1.22); (2.22, 1.63);$ $(1.94, 1); (2.07, 1.2); (2.81, 2); (1.94, 2); (1.81, 2); (1.69, 2); (1.56, 2); (1.44, 2); (1.31, 2);$ $(1.19, 2); (2.36, 1.64); (1.69, 1.68); (1.78, 1.63); (1.66, 1.67); (2.06, 2); (2.13, 2); (2.19, 2);$ $(2.26, 1.66); (2.31, 1.68); (2.34, 1.67); (2.13, 1.21); (2.37, 1.28); (2.42, 1.31); (2.48, 1.34);$ $(2.38, 2); (2.44, 2); (2.31, 2); (2.63, 2); (2.56, 2); (2.69, 2); (2.88, 2); (2.94, 2); (3, 1.88);$ $(3, 1.81); (3, 1.94); (3, 1.63); (3, 1.56); (3, 1.69); (3, 1.38); (3, 1.13); (2.88, 1); (2.63, 1);$ $(2.38, 1); (2.13, 1); (2.06, 1); (2.19, 1); (2.31, 1); (2.44, 1); (2.56, 1); (2.69, 1); (2.81, 1);$ $(2.94, 1); (3, 1.06); (3, 1.19); (3, 1.31); (3, 1.44)\}.$

Bảng 1. Liệt kê các phần tử của tập hợp A.

Và hình 2 là cái mà tập A thể hiện được trong hệ trục tọa độ Descartes, với x là hoành độ, y là tung độ.



Hình 2. Hình vẽ minh họa tập hợp A.

Phương pháp này khá dễ hiểu nên chúng ta cũng chẳng cần phải giải thích dong dài, cái ta quan tâm ở đây là làm theo phương pháp này được cái lợi gì? Nhưng trước khi chúng ta tìm cho nó một nhận xét phù hợp, bạn đọc hãy tham khảo thêm một cách biểu diễn điểm trong một hệ tọa độ khác

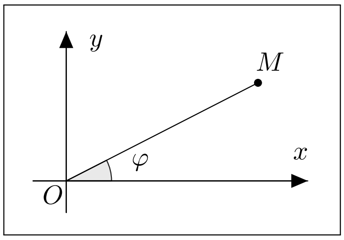
Hệ tọa độ độc cực

Định nghĩa 1. *Trong mặt phẳng chọn một điểm O cố định gọi là cực và một tia Ox gọi là tia cực. Vị trí của một điểm M trên mặt phẳng hoàn toàn xác định bởi hai đại lượng*

$$r = OM, \quad \varphi = \left(Ox, \overrightarrow{OM}\right),$$

trong đó r là bán kính vector và φ là góc cực của điểm M. (Chú ý rằng, φ là góc định hướng có chiều dương ngược với chiều quay của kim đồng hồ.)

Cặp (r, φ) được gọi là các tọa độ cực của điểm M. Để biểu diễn được tất cả các điểm của mặt phẳng, rõ ràng chỉ cần hạn chế $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Khi ấy, mỗi điểm M $(\equiv O)$ sẽ có một cặp (r, φ) tương ứng và mỗi cặp (r, φ) sẽ tương ứng với 1 điểm. Với góc O thì $r = 0$ và φ bất kỳ.



Hình 3. Hệ tọa độ độc cực.

Bây giờ lấy trục tọa độ Descartes sao cho gốc tọa độ trùng với cực và nửa dương của trục hoành trùng với trục cực (xem hình). Vậy ta có

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \text{hay ngược lại} \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}. \qquad (*)$$

Để từ $(*)$ xác định được góc φ, ta cần chọn φ sao cho $\sin\varphi$ cùng dấu với y.

Ví dụ, tọa độ của điểm M trong hệ tọa độ Descartes là $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Khi đó $r = 1$, $\tan\varphi = \sqrt{3}$, ta có hai góc

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{3} + \pi.$$

Ta chọn $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ vì $\sin\dfrac{\pi}{3} > 0$ cùng dấu với $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > 2$. Vậy $M : \left(1, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

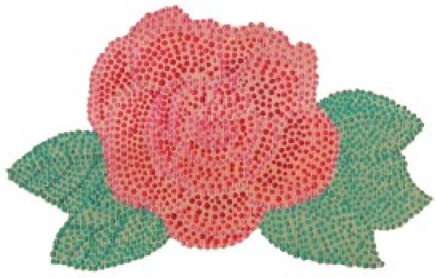
Thoạt nhìn đây chỉ là một hệ thống tọa độ khác mà thôi, tuy nhiên đây cũng là một hệ thống tọa độ mà các nhà lập trình phần mềm hay dùng, ta cũng nên tìm hiểu qua, từ đó nhìn tổng quan ta có một đánh giá mang tư tưởng "thuật toán" cho phương pháp này như sau

- *Ưu điểm:* dễ hiểu, trực quan, số lượng biến phải dùng rất ít, **2** biến vị trí (cho x, y), **1** biến màu sắc (nếu có).

- *Nhược điểm:* số lượng điểm cần phải dùng cho một đối tượng quá nhiều dẫn đến tốn dung lượng một cách đáng kể, và cũng vì thế mà muốn sửa chữa hình ảnh đó bạn hầu như mất phương hướng. Không thể phóng đại (zoom) lên nhiều lần nếu như bạn không muốn hình ảnh của mình trở nên vô nghĩa.

$\rightsquigarrow$ Vì lẽ đó mà phương pháp này thường dùng để mô tả các hình ảnh mà ta không cần quan tâm nhiều đến độ nét và chi tiết, nhiều phần mềm vẽ hình, xem ảnh hiện nay dùng phương pháp này.

Để cải tiến đáng kể việc phóng đại (zoom) của phương pháp dùng hệ tọa độ, người ta bắt đầu suy nghĩa đến dùng đồ thị hàm số, tuy nhiên lời khuyên là ta phải nhìn nhận một cách nghiêm túc sự liên tục của hàm số đó nếu như ta muốn đạt hiệu quả tốt nhất.



2 Phương pháp đồ thị

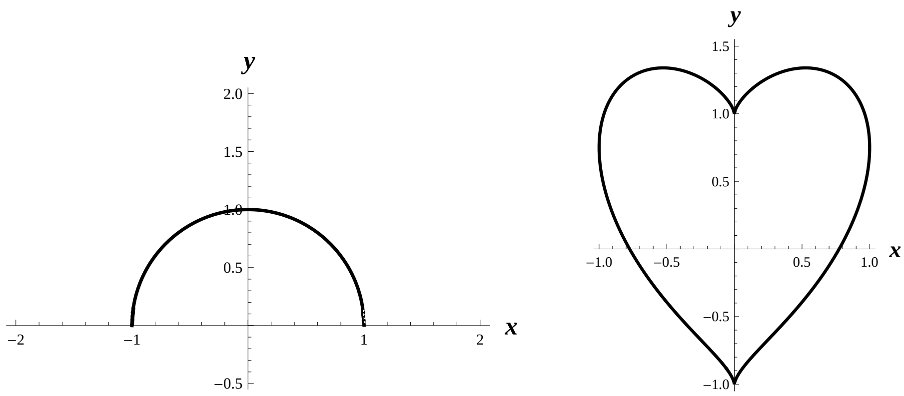
Ở đây ta không dùng đồ thị hàm số biểu diễn dưới dạng bảng giá trị kiểu như

x	-1	0	1	2	4
$f(x)$	3	3	-2	0	3

đơn giản là vì đồ thị của chúng cũng rời rạc, làm thế chẳng khác nào phương pháp hệ tọa độ cả. Cái mà ta cần tìm hiểu là các đồ thị của các hàm số kiểu như $y = \sqrt{1-x^2}$ hay đồ thị biểu diễn sự hợp thành của hai hàm số

$$\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{1-x^2} \\ y = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{1-x^2} \end{array}\right.$$

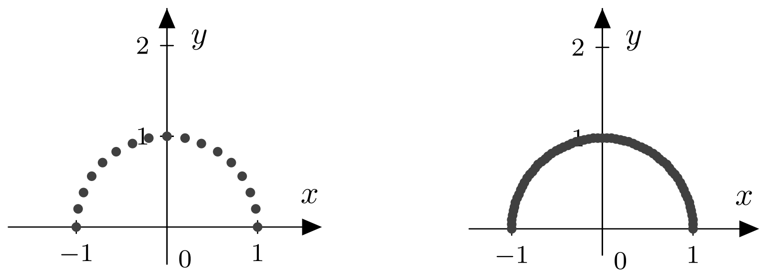
mà đồ thị của chúng ở hình 4 lần lượt là



Hình 4. Đồ thị miêu tả vài hàm số.

Từ đó ý tưởng nảy ra là ta sẽ làm sao cho máy vi tính hiểu được cách vẽ đồ thị hàm số, rồi để chúng vẽ những hình này cho ta.

Ban đầu việc làm này có hơi quá vô nghĩa, vì khi học ở các lớp THCS, ta biết rằng muốn vẽ được đồ thị của một hàm số nào đó, ta phải xác định được một số lượng điểm *đủ nhiều* để có thể nối chúng lại tạo thành một đồ thị, làm vậy chính là tạo điểm trong hệ tọa độ để vẽ hình (quay lại phương pháp hệ tọa độ) còn gì! Tuy nhiên cách làm này có khác là ta sẽ cụ thể được số lượng điểm (của một hình vẽ) cần vẽ chính xác ở đây với một *tỉ lệ phóng đại cho trước*. Ví dụ như để vẽ một đường tròn, thay vì tạo hình vẽ cho một tập hợp có số lượng điểm là B_1 (có các tọa độ rời rạc, xem chừng như vô ý thức), ta sẽ vẽ một hình cho bởi tập hợp là B_2 có số lượng điểm (phân biệt) tùy ý thích (ta cho trước) rải đều trên biến hoành độ (làm vầy để tránh việc điểm ảnh của hình vẽ chỉ ở một phần nhỏ của đồ thị, mà không trải dài khắp hình) và thỏa mãn điều kiện $y = \sqrt{1 - x^2}$ (xem hình 5), điều này thật sự là một ứng dụng triệt để của khái niệm hàm số liên tục (xem lại sách giáo khoa Đại số và Giải tích 11) qua việc liên hệ số ε với một *tỉ lệ phóng đại cho trước*, từ đó ta nhận thấy rằng cho dù có phóng đại cỡ nào đi nữa, ta vẫn có cảm giác đồ thị của chúng ta liền nét.



Hình 5. Đồ thị miêu tả tập B_1 và B_2 (56 điểm ảnh) trong tỉ lệ 1.2 : 1.

Một vấn đề phát sinh là hầu như không phải đối tượng hình ảnh nào của chúng ta đều được mô tả một cách trơn tru bởi một hàm số duy nhất cả, việc tham khảo qua các dạng hàm số có dạng khác là một điều nên làm chẳng hạn như

Hàm từng khúc

Thường được cho bởi biểu diễn hình thức như sau

$$y = \begin{cases} f_1(x) & \text{nếu } x \in D_1 \\ f_2(x) & \text{nếu } x \in D_2 \\ \cdots & \cdots \\ f_n(x) & \text{nếu } x \in D_n \end{cases}$$

trong đó f_i là hàm số xác định trên D_i và $\forall (i, j), \ulcorner i \neq j \Rightarrow D_i \cap D_j = \emptyset \lrcorner$ (hay là các miền D_i rời nhau). Đây là hàm số *không sơ cấp*, rất thường được sử dụng trong phương pháp này. Một đại diện cho loại hàm này chính là hàm

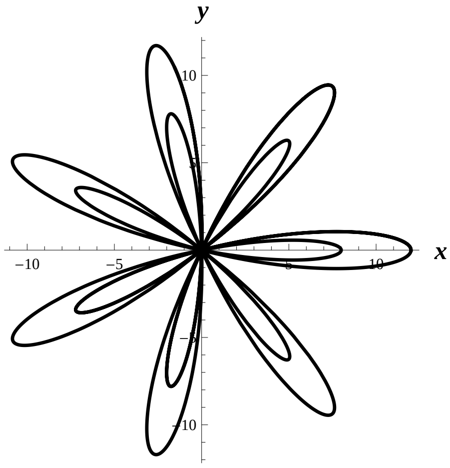
$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}.$$

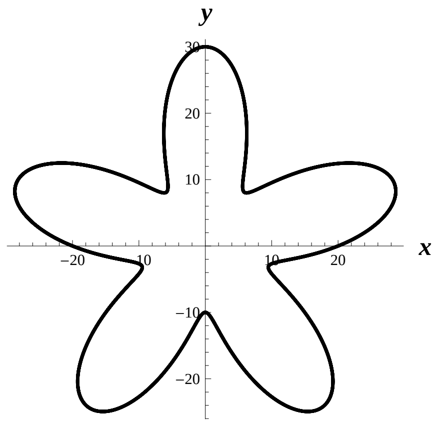
Ta phân tích hiệu quả của phương pháp này:

- *Ưu điểm:* trực quan, số lượng biến phải dùng tương đối ít (nhưng vẫn nhiều hơn phương pháp hệ tọa độ, do thêm các biến phân hoạch theo hoành độ), có thể chỉnh sửa được đối tượng trong hình ảnh bằng cách thay đổi hàm số của chúng, cho phép khả năng phóng đại hình ảnh.

- *Nhược điểm:* số lượng điểm cần phải dùng quá nhiều (biến thiên theo tỉ lệ phóng đại), khó mã hóa dữ liệu đầu vào cho phù hợp (khó tìm được hàm số phù hợp để vẽ đồ thị của chúng), thuật toán để thực hiện còn phức tạp.

⇝ Phương pháp này cải tiến được một số điểm so với phương pháp tọa độ, nhưng mặt khác nó cũng có những hạn chế riêng của mình. Các phần mềm Toán học hiện nay thường dùng phương pháp này để vẽ đồ thị (như *Geogebra* chẳng hạn[1]).



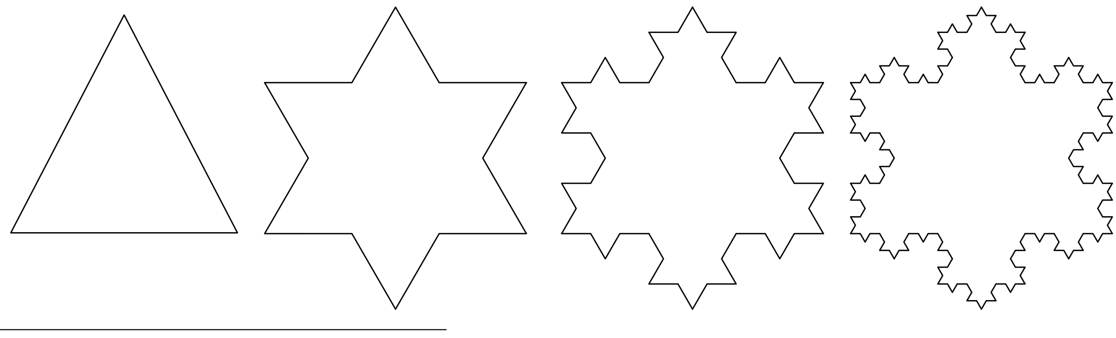


Hình 6. Đồ thị miêu tả hàm số $r = 2(1 + 5\cos 7\varphi)$ (hàm số theo tọa độ độc cực) và $\begin{cases} x = 10(2 + \sin 5t)\cos t \\ y = 10(2 + \sin 5t)\sin t \end{cases}$, $t \in [-10,\, 10]$ (hàm số $f(x,\, y) = 0$ theo tham số t).

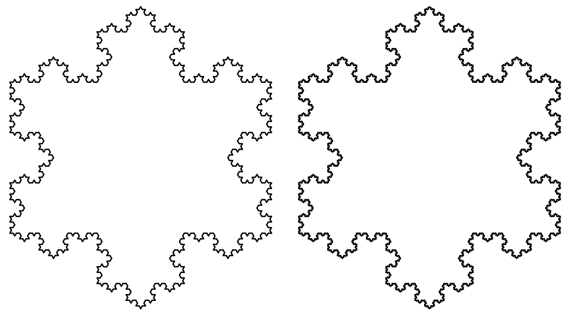
Phương pháp vừa cải tiến khiến ta có cái nhìn khá thiện cảm, tuy nhiên vấn đề được lộ rõ khi ta bắt đầu vẽ những hình không trơn tru, gồ ghề, gãy vỡ, đó cũng chính là lúc ta tìm đến một phương pháp mới, khá trừu tượng, nhưng đẹp đẽ, ...

3 Phương pháp tổ chức hình ảnh theo kiểu tự đồng dạng

Rời xa thế giới của Hình học Euclide một chút để đến với Hình học Fractal (xem định nghĩa và các vấn đề liên quan trong sách giáo khoa Toán 11). Ngồi ngẫm nghĩ lại mớ kiến thức về Hình học Fractal đã biết, bạn chắc hẳn sẽ rất thích thú với cách dựng hình cực kỳ đẹp mắt, mà hiệu quả đối với những hình gồ ghề, dị dạng nhưng công thức ban đầu lại vô cùng gọn gàng, như "bông tuyết Von Koch" (xem hình 7) chẳng hạn



[1]Chính vì thế mà trong thể chế dạy học phổ thông ở nước ta, phần mềm này không cho kết quả phù hợp hay nói nặng hơn là *vẽ sai*.



Hình 7. Bông tuyết Von Koch qua 5 lần tự đồng dạng.

Ta ngẫm lại thuật toán tí xíu: Lấy một tam giác đều có cạnh bằng 1, gọi là *hình ban đầu* K_0.

- *Bước 1.* Chia mỗi cạnh đang có ra ba đoạn bằng nhau và thay mỗi đoạn ở giữa bởi hai đoạn bằng nó sao cho chúng tạo với đoạn bỏ đi một tam giác đều về phía ngoài ta được bông tuyến K_1.
- *Bước 2.* Cứ tiếp tục lặp lại theo nguyên tắc: Từ bông tuyết K_n $(n \geq 0)$ để có bông tuyết K_{n+1}, ta chia mỗi cạnh của K_n thành ba đoạn bằng nhau và thay mỗi đoạn ở giữa bởi hai đoạn bằng nó, sao cho chúng tạo với mỗi đoạn bỏ đi một tam giác đều về phía ngoài.
- Quá trình trên lặp đi, lặp lại cho ta một dãy các bông tuyết $K_0, K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$

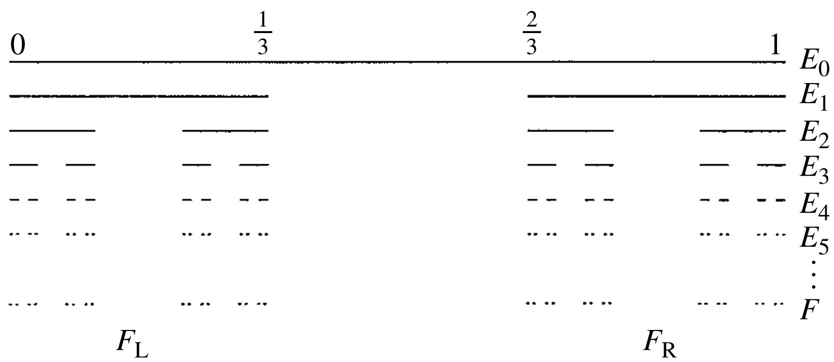
Và thế là ta đã có một hình ảnh không tồi chút nào. Nhưng làm thế nào để làm máy vi tính hiểu thuật toán dựng hình đẹp đẽ trên kia đây trên kia đây! Chúng ta hoàn toàn có thể làm được điều đó nhờ ý tưởng sau đây

Đám bụi Cantor

Định nghĩa 2.

- *Hình ban đầu E_0 là đoạn thẳng đơn vị* $[0, 1]$.
- *Quy tắc sinh: Chia đoạn thẳng* $[0, 1]$ *ra ba đoạn bằng nhau, rồi bỏ đoạn nhỏ ở chính giữa, được hình E_1.*
- *Lập lại quy tắc sinh đối với mọi đoạn thẳng của E_1, được $E_2, \ldots,$ cứ như thế tiếp tục đến vô tận (xem hình 8).*

Ta được một tập hợp gồm toàn những hạt bụi, có tổng chiều dài bằng 0, *không chứa bất cứ đoạn thẳng nào thuộc* $[0, 1]$ *dù là nhỏ bao nhiêu đi nữa, nhưng vẫn gồm vô hạn không đếm được các điểm, có thể cho* ***tương ứng*** $1 - 1$ *với toàn bộ đoạn thẳng* $[0, 1]$.



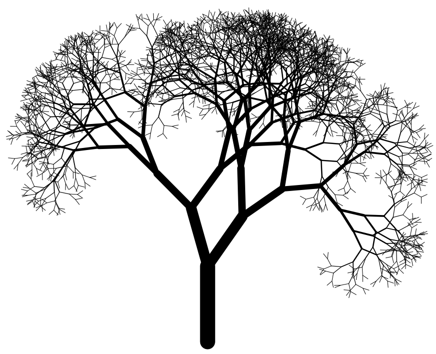
Hình 8. Đám bụi Cantor.

Ngoài định nghĩa hình ảnh trên ta còn có thể định nghĩa bằng Số học (người ta chứng minh được rằng hai định nghĩa này là tương đương) như là tập hợp tất cả các số được viết dưới dạng *phân số tam phân* $0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ (phân số trong hệ đếm tam phân) mà mỗi chữ số đều bằng 0 hoặc 2(không có chữ số 1).

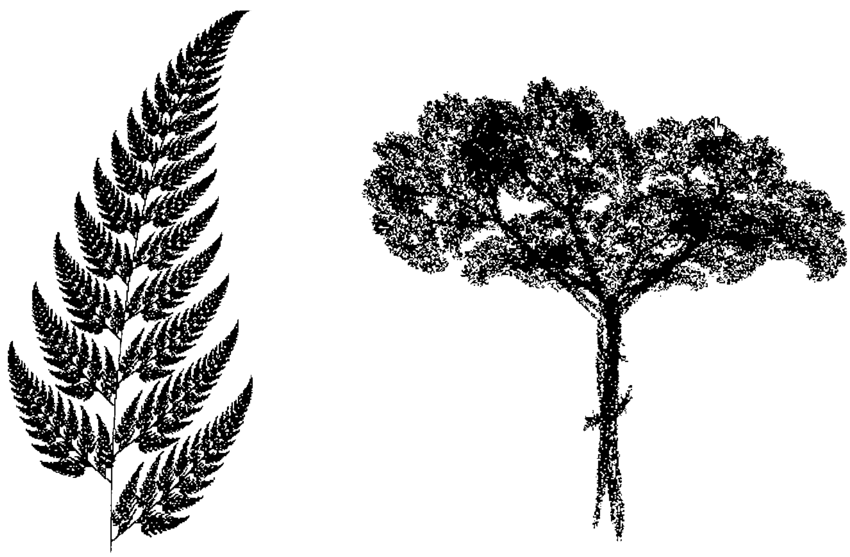
Tuy nhiên điều đáng quan tâm ở đây là tương ứng $1-1$, chính vì điều đẹp đẽ đó mà ta có định lý tổng quát như sau

Định lý 1 (Định lý cơ bản của đường Fractal)**.** *Mỗi Fractal đều là ảnh liên tục của tập Cantor, nghĩa là đối với mỗi Fractal đều tìm được một ánh xạ φ liên tục biến tập Cantor thành Fractal ấy. Theo nghĩa đó ta có thể nói tập Cantor là một Fractal "nguyên thủy".*

Định lý này cho phép ta có thể "số hóa" một Fractal bất kỳ. Và chính vì lẽ đó mà những hình ảnh có vẻ như trừu tượng, hỗn độn, vô trật tự (như hình đám mây, hình dãy núi, ngọn sóng, nhành cây, ...) lại mang một sự mã hóa vô cùng gọn gàng.



Hình 9. Cây San hô Fractal, có khởi đầu chỉ là một đoạn thẳng ở gốc.



Hình 10. Vài nhánh cây thông qua 6 phép biến đổi affine tự đồng dạng.

Đó là ý tưởng về phương pháp tổ chức hình ảnh theo kiểu tự đồng dạng, việc nhận xét phương pháp này hoàn toàn tùy thuộc vào bạn đọc (hãy liên tưởng đến ADN trong môn Sinh học di truyền), đại diện ưu tú cho phương pháp này là *kỹ thuật IFS (Iterated Function Scheme).*

4 Vài kết luận và hướng đi gợi mở

Trong bài viết này là sơ nét những phương pháp tiếp cận chính của Toán học, trong việc hiển thị các đối tượng hình ảnh bằng máy vi tính. Mỗi cách làm có một ưu nhược điểm riêng! Có thể sau khi đọc bài viết này bạn đọc sẽ tự đề ra những thuật toán, những phương pháp khác hay hơn cho vấn đề trên. Nhưng điều đáng lưu ý ở đây là *"Tại sao phải cần những hình ảnh quá chi tiết và có độ chính xác cao?"*, có vẻ như ta không quá cần thiết đến điều này. Thật khó để cho một câu trả lời chính xác, nhưng bạn hãy cứ tưởng tượng những gì sẽ diễn ra nếu như bạn có thể phóng đại một bức ảnh lên tỉ lệ tùy ý mà không làm giảm chất lượng ảnh.

- Có khả năng, bạn sẽ là người đầu tiên nhìn thấy được vật thể nhỏ nhất trong tự nhiên (nhỏ hơn cả hạt cơ bản).
- Có khả năng, bạn sẽ là người đầu tiên nhìn thấy một hành tinh khác, có sự sống (ngoài địa cầu ra) chỉ bằng một cái máy quay phim có sử dụng thuật toán ghi ảnh, ghi hình cho chính bạn tạo ra.

Điều đó chắc là có ý nghĩa quan trọng và đáng để lưu tâm đúng không bạn nhỉ?!

Tài liệu tham khảo

[1] Đỗ Công Khanh (chủ biên), *Toán cao cấp – Giải tích hàm một biến (Toán 1)*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh, 2006.

[2] Hoàng Chúng (chủ biên), *Tìm hiểu Fractal – Một hình học mới lạ*, Nhà xuất bản Giáo Dục, 2003.

[3] Kenneth Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Wiley Publishing House, 2004.

[4] `http://www.geogebra.org`

CẤP SỐ CỘNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM TRÊN $\mathbb{N}$

Nguyễn Trọng Tuấn

Trường Phổ thông Năng khiếu - Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh

Chúng ta đều biết dãy số $f_n = an + b$, ở đây a, $b \in \mathbb{N}$, là một cấp số cộng với công sai là a. Một hàm số cảm sinh ra một cấp số cộng nếu như nó có dạng tuyến tính. Theo cách tiếp cận này, có khá nhiều hàm trên $\mathbb{N}$ liên quan đến cấp số cộng. Một dấu hiệu để dự đoán hàm số f tuyến tính là bậc của các biến không vượt quá 1.

Bài viết sau đây trình bày những kỹ thuật cơ bản để giải phương trình hàm trên $\mathbb{N}$ liên quan đến cấp số cộng. Hy vọng rằng nó sẽ có ích cho các bạn học sinh chuyên Toán.

Bài toán 1. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(f(m) + f(n)\right) = m + n, \quad \forall m,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải. Dễ dàng chứng minh được f là hàm có tính chất đơn ánh. Giả sử m, n, p, q là 4 số nguyên dương thỏa mãn $m + n = p + q$. Khi đó

$$f\left(f(m) + f(n)\right) = f\left(f(p) + f(q)\right).$$

Do f là đơn ánh nên ta có

$$f(m) + f(n) = f(p) + f(q).$$

Từ đẳng thức trên suy ra

$$f(m+1) - f(m) = f(m) - f(m-1) = \cdots = f(3) - f(2) = f(2) - f(1).$$

Như thế, ta thấy dãy $\{f(m)\}$ là một cấp số cộng với số hạng đầu là $f(1)$ và công sai là $d = f(2) - f(1)$. Và như vậy, để xác định được $f(m)$ ta chỉ cần xác định $f(2)$ và $f(1)$. Ta có

$$f(m) = f(1) + \left[f(2) - f(1)\right](m-1), \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Thay biểu thức của $f(m)$ vào hệ thức đầu bài, ta được

$$f\left(2f(1) + (m-1)d + (n-1)d\right) = m + n,$$

hay

$$f(1) + \left[2f(1) + (m-1)d + (n-1)d - 1\right]d = m + n.$$

Suy ra $f(1) = d = 1$. Từ đó hàm số duy nhất cần tìm là $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. $\square$

Sử dụng kỹ thuật như trong bài toán 1 giúp chúng ta giải được nhiều phương trình hàm một cách ngắn gọn.

Bài toán 2. *Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f\left(f(m) + f(n) + f(p)\right) = m + n + p, \quad \forall m,\ n,\ p \in \mathbb{N}.$$

LỜI GIẢI. Dễ thấy rằng f đơn ánh. Cho $n = p$, ta có

$$f\left(f(m) + 2f(n)\right) = m + 2n.$$

Với mọi số tự nhiên m và $n > 0$, ta có $m + 2n = (m+2) + 2(n-1)$. Từ đó

$$f\left(f(m) + 2f(n)\right) = f\left(f(m+2) + 2f(n-1)\right).$$

Vì f đơn ánh nên $f(m) + 2f(n) = f(m+2) + 2f(n-1)$ hay

$$f(m+2) - f(m) = 2f(n) - 2f(n-1), \quad \forall m,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

Thay $n = m + 2$, ta có $f(m+2) - f(m) = 2f(m+2) - 2f(m+1)$. Do đó

$$f(m+2) - f(m+1) = f(m+1) - f(m), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Đẳng thức trên chứng tỏ $\{f(m)\}$ là cấp số cộng. Do đó $f(m) = am + b$ với $a,\ b \in \mathbb{N}$. Thay vào hệ thức ở đầu bài, ta được $f(am + b + an + b + ap + b) = m + n + p$ hay

$$a^2(m + n + p) + 3ab + b = m + n + p, \quad \forall m,\ n,\ p \in \mathbb{N}.$$

Suy ra $a = 1$, $b = 0$. Vậy hàm số cần tìm là $f(n) = n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ (thỏa mãn). □

Có nhiều hàm số thỏa mãn hệ thức $f\left(f(n)\right) = an + b$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nhưng lại không cảm sinh ra một cấp số cộng, nghĩa là dãy $\{f(n)\}$ không phải là cấp số cộng. Bài toán 3 sẽ đề cập về một hàm số như thế.

Bài toán 3. *Chứng minh rằng tồn tại duy nhất hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:*

(i) f tăng thực sự;

(ii) $f\left(f(n)\right) = 2n + 3$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Hơn nữa, dãy $f(n)$ không phải là cấp số cộng.

LỜI GIẢI. Chú ý rằng do f tăng thực sự nên với mọi $m,\ n \in \mathbb{N}^*$, $m > n$, ta luôn có

$$f(m) - f(n) \geq m - n. \tag{1}$$

Từ (1) suy ra $f\left(f(n+1)\right) - f\left(f(n)\right) \geq f(n+1) - f(n)$. Như thế

$$f(n+1) - f(n) \leq 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lại áp dụng (1) ta được $f(n) - n \leq f\left(f(n)\right) - f(n) = 2n + 3 - f(n)$. Do đó

$$f(n) \leq \frac{3n+3}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mặt khác, cũng từ (1) ta có

$$f(f(n)) - f(n) \le f\left(f\left(f(n)\right)\right) - f\left(f(n)\right),$$

suy ra $4n + 6 - f(n) \le 2f(n) + 3$ hay

$$f(n) \ge \frac{4n+3}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đó với mọi số nguyên dương n, ta có

$$\frac{4n+3}{3} \le f(n) \le \frac{3n+3}{2}. \tag{2}$$

Từ (2), ta có $f(1) = 3$, $f(2) = 4$ và $f(3) = f\left(f(1)\right) = 5$, $f(4) = f\left(f(2)\right) = 7$. Bây giờ, giả sử $f(n) < m < f(n+1)$ và không tồn tại k sao cho $f(k) = m$. Khi đó, ta có $f\left(f(n)\right) < f(m) < f\left(f(n+1)\right)$ hay $2n + 3 < f(m) < 2n + 5$. Vậy

$$f(m) = 2n + 4 = f\left(f(n)\right) + 1.$$

Từ đó, ta có thuật toán xây dựng hàm $f(n)$ như sau

- $f(1) = 3$. Ta có $f(3) = 5$ và từ đó $f(2) = 4$.
- Giả sử đã xác định được $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(k)$. Ta xác định $f(k+1)$ như sau
  - Nếu có m mà $f(m) = k + 1$ (số m là duy nhất) thì đặt $f(k+1) = 2m + 3$.
  - Nếu không có số m như thế thì đặt $f(k+1) = f(k) + 1$.

Từ đó ta có dãy $f(n)$ như sau

$$f(1) = 3, \quad f(2) = 4, \quad f(3) = 5, \quad f(4) = 7, \quad f(5) = 9, \quad f(6) = 10, \quad \ldots$$

Rõ ràng dãy $f(n)$ xác định duy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán và không phải là cấp số cộng. Bài toán được giải quyết xong. $\square$

Như vậy, nếu f tăng thực sự và thỏa mãn $f\left(f(n)\right) = an + b$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $\{f(n)\}$ chưa chắc là cấp số cộng hay nói cách khác, f có thể không có dạng tuyến tính. Do đó, nếu muốn có được dạng tuyến tính, ta cần phải bổ sung điều kiện cho hàm f. Một trong những điều kiện đó được nêu trong bài toán 4 sau đây.

Bài toán 4. *Tìm tất cả các hàm tăng thực sự $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện:*

(i) $f\left(f(n)\right) = 4n + 9$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$;

(ii) $f\left(f(n) + 1\right) = 4n + 11$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$.

LỜI GIẢI. Trước hết, dễ dàng chứng minh được các kết quả

$$f(4k+9) = 4f(k)+9, \quad f(4k+10) = 4f(k)+11.$$

Tương tự bài toán 3, ta có

$$f(n+1) - f(n) \leq 4, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Gọi k là số tự nhiên sao cho $f(k+1) - f(k) = M$ là số lớn nhất. Ta có

$$f\left(f\left(f(k+1)\right)\right) - f\left(f\left(f(k)\right)\right) = 4f(k+1) + 9 - 4f(k) - 9 = 4M.$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} f\left(f\left(f(k+1)\right)\right) - f\left(f\left(f(k)\right)\right) &= \left[f\left(f\left(f(k+1)\right)\right) - f\left(f\left(f(k+1)\right) - 1\right)\right] + \\ &\quad + \left[f\left(f\left(f(k+1)\right) - 1\right) - f\left(f\left(f(k+1)\right) - 2\right)\right] + \\ &\quad + \cdots + \left[f\left(f\left(f(k)\right) + 1\right) - f\left(f\left(f(k)\right)\right)\right] \\ &\leq \left[f(f(k+1)) - f(f(k))\right] M = 4M. \end{aligned}$$

Từ đó các tổng trong ngoặc vuông phải bằng nhau và bằng M. Đặc biệt ta có

$$M = f\left(f\left(f(k)\right) + 1\right) - f\left(f\left(f(k)\right)\right) = f(4k+10) - f(4k+9) = 2.$$

Chú ý rằng nếu $f(n+1) = f(n) + 1$ thì $f\left(f(n+1)\right) = f\left(f(n) + 1\right)$ hay

$$4(n+1) + 9 = 4n + 11 \text{ (mâu thuẫn).}$$

Vậy ta phải có $f(n+1) = f(n) + 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Như vậy $f(n) = 2n + b$. Thay biểu thức của $f(n)$ vào $f\left(f(n)\right) = 4n + 9$, ta có

$$2(2n+b) + b = 4n + 9,$$

do đó $b = 3$. Ta thấy $f(n) = 2n + 3$ cũng thỏa mãn hệ thức $f(f(n)+1) = 4n + 11$.

Vậy hàm số duy nhất cần tìm là $f(n) = 2n + 3$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. □

NHẬN XÉT. Nếu gọi k là số tự nhiên sao cho $f(k+1) - f(k) = m$ là số nhỏ nhất thì ta cũng dẫn đến kết quả $m = 2$. Bài toán sau đây sử dụng kỹ thuật của bài toán 4 để chứng minh dãy $\{f(n)\}$ là cấp số cộng bằng kết quả $M = m$.

Bài toán 5 (IMO 2009). *Cho $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ là dãy tăng nghiêm ngặt các số nguyên dương thỏa mãn: Các dãy con $s_{s_1}, s_{s_2}, \ldots, s_{s_n}, \ldots$ và $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, \ldots, s_{s_n+1}, \ldots$ là các cấp số cộng. Chứng minh rằng bản thân dãy $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ cũng là cấp số cộng.*

LỜI GIẢI. Để dễ xử lý, ta phát biểu bài toán dưới dạng tương đương: *Cho $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ là hàm tăng thực sự và thỏa mãn: Các dãy $\{f\left(f(n)\right)\}$ và $\{f\left(f(n)+1\right)\}$ là các cấp số cộng. Chứng minh rằng dãy $\{f(n)\}$ cũng là cấp số cộng.*

Từ giả thiết suy ra $f\left(f(n)\right) = an + b$ và $f\left(f(n)+1\right) = cn + d$ (ở đây a, b, c, d là những số nguyên dương). Ta có $f\left(f(n)\right) < f\left(f(n)+1\right) \leq f\left(f(n+1)\right)$, suy ra

$$an + b < cn + d \leq a(n+1) + b \text{ hay } a + \frac{b}{n} < c + \frac{d}{n} \leq a + \frac{a+b}{n}.$$

Bằng cách cho $n \to +\infty$, ta được $a = c$. Tóm lại ta có

$$f\left(f(n)\right) = an + b, \quad f\left(f(n)+1\right) = an + d, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Dễ dàng chứng minh được

$$f\left(f(an+b)\right) = af(n) + b, \quad f\left(f(an+b+1)\right) = af(n) + d.$$

Ta có $0 < f(n+1) - f(n) \leq a$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Gọi r, t lần lượt là các số tự nhiên sao cho $M = f(r+1) - f(r)$ lớn nhất và $m = f(t+1) - f(t)$ nhỏ nhất. Với kỹ thuật tương tự như bài toán 4, ta có

$$M = f\left(f\left(f(r)\right) + 1\right) - f\left(f\left(f(r)\right)\right) = f(ar+b+1) - f(ar+b) = d - b$$

và

$$m = f\left(f\left(f(t)\right) + 1\right) - f\left(f\left(f(t)\right)\right) = f(at+b+1) - f(at+b) = d - b.$$

Từ đó suy ra $M = m$. Suy ra $f(n+1) - f(n) = d - b$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có điều phải chứng minh. $\square$

SÁNG TẠO PHƯƠNG TRÌNH HÀM TỪ CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC

Lê Việt Hải - Đào Thái Hiệp
HS chuyên Toán khóa 2009 - 2012

Như ta đã biết, hàm số là một phần quan trọng của Toán học. Việc giải phương trình hàm (PTH) vì thế mà cũng được quan tâm. Trong bài viết này, nhóm tác giả muốn trình bày đến cho các bạn một cách sáng tạo phương trình hàm đơn giản, nhưng lại có rất nhiều điều đặc biệt và đôi lúc thực sự "hóc búa". Đó là việc đề xuất ra các bài phương trình hàm dựa trên các đẳng thức, hằng đẳng thức. Qua việc giải chúng, các bạn sẽ có thêm được kỹ năng giải toán, và thực sự, đây là một điều rất có ích.

Những bài phương trình hàm được trình bày trong bài viết này đã được nhóm tác giả tìm kiếm và chọn lọc, có những bài dễ và cũng có bài khó, nhưng mỗi bài đều có cái hay riêng của mình, việc phát hiện chúng và giải được chúng là một công việc thú vị mà các tác giả muốn chia sẻ với bạn đọc. Bài viết chắc chắn không tránh khỏi sai sót. Mong các bạn quan tâm xem xét, và liên hệ với các tác giả để được trao đổi nhiều hơn.

1 Bài toán "chìa khóa"

Những PTH được sáng tác từ hằng đẳng thức đều có ít nhất một hàm thoả là $f(x) = x$. Chính vì vậy, việc tìm ra những điểm chung giữa các bài PTH này là một điều quan trọng. Sau một thời gian xem xét kỹ, xin trình bày đến các bạn bài toán quen thuộc sau, có thể được áp dụng để giải rất nhiều bài PTH dạng này.

Bài toán 1. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}$$

trong các trường hợp sau

(a) $f(x)$ *là hàm liên tục;*

(b) $f(x)$ *là hàm đơn điệu;*

(c) $|f(x)| < M$, $\forall x \in [a,\ b]$;

(d) $f(x^2) = f^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

(e) $f(x^3) = f^3(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Cho $x = y = 0$, ta được $f(0) = 2f(0)$, suy ra $f(0) = 0$. Hơn nữa thay y bởi $-x$, ta được $f(0) = f(x) + f(-x)$, do đó $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, hay f là hàm lẻ.

Đặt $f(1) = c = \text{const}$. Khi đó ta có

$$c = f(1) = f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right).$$

Như vậy $nf\left(\frac{1}{n}\right) = c$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Từ đây xét $x = \frac{m}{n}$ với m, $n \in \mathbb{N}$ và $(m, n) = 1$, ta có

$$f(x) = f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = c \cdot \frac{m}{n}.$$

Như vậy $f(x) = cx$ với mọi số hữu tỉ dương x. Mặt khác do f là hàm lẻ và $f(0) = 0$ nên từ đây ta suy ra $f(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.

(a) *Nếu f là hàm liên tục:* Với mọi số vô tỉ x luôn tồn tại một dãy số hữu tỉ $\{x_n\}$ hội tụ về x. Như vậy, dựa vào tính liên tục của f, ta có

$$f(x) = \lim_{x_n \to x} f(x_n) = \lim_{x_n \to x} (cx_n) = cx.$$

Vậy $f(x) = x$ là hàm thoả.

(b) *Nếu f là hàm đơn điệu (ở đây các tác giả trình bày phần chứng minh cho f là hàm đơn điệu tăng. Trường hợp f là hàm đơn điệu giảm, bạn đọc có thể chứng minh tương tự.):* Trước hết, vì $f(x)$ đồng biến nên $c = f(1) \geq f(0) = 0$. Giả sử tồn tại x_0 là số vô tỉ sao cho $f(x_0) > cx_0$. Do x_0 là số vô tỉ nên dễ dàng suy ra được $f(x_0)$ và cx_0 đều là số vô tỉ. Khi đó tồn tại số hữu tỉ y sao cho

$$f(x_0) > cy > cx_0.$$

Tuy nhiên khi đó $f(x_0) > f(y)$ nên $x_0 > y > x_0$ (vô lý).

Chứng minh tương tự trong trường hợp $f(x_0) < cx_0$, ta cũng có điều vô lý. Mâu thuẫn này chứng tỏ $f(x_0) = cx_0$. Như vậy $f(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{R}$ là hàm thoả.

(c) *Nếu $|f(x)| < M$, $\forall x \in [a, b]$:* Ta sẽ chứng minh $f(x)$ cũng bị chặn trên $[0, b-a]$. Thật vậy, với $x \in [0, b-a]$ thì $x + a \in [a, b]$. Khi đó ta có $f(x+a) = f(x) + f(a)$, suy ra $f(x) = f(x+a) - f(a)$, như vậy $-2M < f(x) < 2M$, suy ra

$$|f(x)| < 2M.$$

Đặt $b - a = d > 0$, vậy $f(x)$ bị chặn trên $[0, d]$. Đặt $c = \frac{f(d)}{d}$, $g(x) = f(x) - cx$. Suy ra

$$g(x+y) = f(x+y) - c(x+y) = f(x) - cx + f(y) - cy = g(x) + g(y), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Hơn nữa $g(d) = f(d) - \frac{f(d)}{d} \cdot d = 0$. Vậy $g(x+d) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, do đó g là hàm tuần hoàn. Hơn nữa, $g(x) = f(x) - cx$ nên g cũng bị chặn trên $[0, d]$, cộng thêm tính tuần hoàn chu kỳ d của g, ta suy ra g bị chặn trên $\mathbb{R}$. Giả sử tồn tại x_0 sao cho $g(x_0) \neq 0$. Khi đó, ta có với mọi số tự nhiên n thì $g(nx_0) = ng(x_0)$ suy ra

$$|g(nx_0)| = n|g(x_0)|.$$

Do $g(x_0) \neq 0$ nên nếu chọn n đủ lớn ta có thể cho $n|g(x_0)|$ lớn tuỳ ý, suy ra $|g(nx_0)|$ lớn tuỳ ý, trái với điều kiện bị chặn của g. Vậy $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó, $f(x) = cx, \forall x \in \mathbb{R}$.

(d) *Nếu* $f(x^2) = f^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$*:* Từ giả thiết ta suy ra $f(x) \geq 0$ với mọi số thực không âm x. Khi đó, với mọi $x > y \geq 0$ thì

$$f(x) - f(y) = f(x - y) \geq 0.$$

Như vậy $f(x) \geq f(y)$, $f(x)$ là hàm không giảm. Áp dụng kết quả câu *(b)*, ta có

$$f(x) = cx, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay vào giả thiết ta tìm được $c = 0 \vee c = 1$. Như vậy, $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ là các hàm thoả.

(e) *Nếu* $f(x^3) = f^3(x), \forall x \in \mathbb{R}$*:* Ta có

$$[f(x) + f(y)]^3 = f^3(x + y) = f\left((x + y)^3\right) = f\left(x^3 + y^3 + 3xy(x + y)\right).$$

Từ đây suy ra $f^3(x) + f^3(y) + 3f(x)f(y)f(x + y) = f(x^3) + f(y^3) + 3f\left(xy(x + y)\right)$, hay

$$f(x)f(y)f(x + y) = f\left(xy(x + y)\right), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Do $f^3(x) = f(x^3), \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có $f^3(1) = f(1)$, suy ra $f(1) = 0 \vee f(1) = 1 \vee f(1) = -1$. Ta xét hai trường hợp sau.

- *Trường hợp 1.* $f(1) = 0$. Khi đó ta có

  $$f(x^2 + x) = f(x)f(1)f(x + 1) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

  Do $x^2 + x$ nhận mọi giá trị không bé hơn $-\dfrac{1}{4}$ nên ta suy ra $f(x) = 0, \forall x \geq -\dfrac{1}{4}$. Mặt khác ta lại có $f(x)$ là hàm lẻ nên $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Dễ thấy hàm này thoả.

- *Trường hợp 2.* $f(1) = 1 \vee f(1) = -1$. Khi đó, đặt $f(1) = c$, ta có

  $$f(x^2 + x) = f(x)f(1)f(x + 1),$$

  hay tương đương

  $$f(x^2) + f(x) = cf(x)\left[f(x) + c\right] = cf^2(x) + c^2 f(x) = cf^2(x) + f(x).$$

  Như vậy $f(x^2) = cf^2(x)$. Tùy vào $c = 1$ hay $c = -1$, và làm tương tự câu *(d)* ta suy ra hai hàm tương ứng thỏa là $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy với giả thiết *(e)*, ta có 3 hàm số thỏa mãn là $f(x) = 0$, $f(x) = x$ và $f(x) = -x$. □

NHẬN XÉT. Điều kiện (d) và (e) của bổ đề có thể thay đổi thành $f^n(x) = f(x^n), \forall x \in \mathbb{R}$ với n là số tự nhiên và $n > 1$. Ngoài ra, còn có một hướng tổng quát khác cho các điều kiện này như sau: *Cho đa thức $P(x)$ có bậc lớn hơn 1 thỏa $P\left(f(x)\right) = f\left(P(x)\right), \forall x \in \mathbb{R}$. Hãy tìm tất cả hàm f thỏa.*

2 Các bài toán áp dụng

Trước khi đi vào bàn luận các bài toán cụ thể, xin trình bày với các bạn một cách đơn giản để sáng tạo PTH từ hằng đẳng thức. Kể từ phần này ta quy ước $P(x,\, y)$ là phép thế một bộ $(x,\, y)$ vào phương trình hàm giả thiết của mỗi bài toán.

Chắc hẳn ai trong chúng ta cũng đều biết một vài hằng đẳng thức cơ bản, ví dụ như

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \quad (x+y)^3 = x^3 + 3xy(x+y) + y^3, \quad \ldots$$

Việc thay x bằng $f(x)$ hay $f\left(f(x)\right)$, hoặc đặc biệt hơn là $f(x+y) - y$, ... đã cho ra đời rất nhiều bài toán hay và khó. Tất cả các bài toán mà tác giả giới thiệu trong bài viết này đều được đề xuất từ chính việc "đơn giản" như thế. Và chúng ta hãy cùng nhau thưởng thức sự thú vị của những bài PTH dạng này.

Việc sáng tạo PTH không chỉ dựa trên các hằng đẳng thức đã biết, đôi khi xuất phát từ những điều "khá hiển nhiên", nhưng không vì thế mà mất đi tính thú vị, ta sẽ đến với hai bài toán sau

Bài toán 2 (IMC 2010). *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f(xy + x + y) = f(x) + f(y) + f(xy), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

LỜI GIẢI. Bài toán có một cách phát biểu đơn giản, nhưng không vì thế mà nó "dễ xơi". Ta cùng đến với cách giải sau đây.

Ta có $P(-x,\ x) : f(-x^2) = f(-x^2) + f(x) + f(-x)$, như vậy

$$f(x) + f(-x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta suy ra f là hàm lẻ.

Để ý rằng $xy+x+y = (x+1)(y+1)-1$. Một cách tự nhiên, ta lựa chọn các số có nhiều hơn hai cách phân tích để từ đẳng thức này ta tìm các bộ $(x,\, y)$ phù hợp để thay vào phương trình, qua đó hy vọng có được các đánh giá dẫn tới kết quả bài toán. Cũng từ ý tưởng này, ta nghĩ đến việc chứng minh $f(3x) = 3f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ như sau: Ta lần lượt có

- $P(x,\, 1) : f(2x+1) = 2f(x) + f(1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Như vậy, ta có $f(3) = 3f(1)$ và

$$f(2x-1) = 2f(x-1) + f(1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- $P(3,\, x^2-1) : f(4x^2-1) = f(3(x^2-1)) + f(3) + f(x^2-1).$ (1)

- Xét $P(1,\, 2x^2-1)$:

$$\begin{aligned} f(4x^2-1) &= 2f(2x^2-1) + f(1) = 2\left[2f(x^2-1) + f(1)\right] + f(1) \\ &= 4f(x^2-1) + 3f(1). \end{aligned} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$f\left(3(x^2-1)\right) = 3f(x^2-1).$$

Mặt khác, với mọi $x \geq 0$, luôn tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $x = a^2 - 1$. Như vậy $f(3x) = 3f(x)$, $\forall x \geq 0$. Do f là hàm lẻ, nên suy ra

$$f(3x) = 3f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bên cạnh đó ta cũng chứng minh được $f(x+1) = f(x) + f(1)$, $\forall x \geq 0$. Thật vậy,

- Xét $P(3, -x^2-1)$, ta có

$$\begin{aligned} f(-4x^2-1) &= f\left(-3(x^2+1)\right) + f(3) + f(-x^2-1) \\ &= 4f(x^2+1) + 3f(1), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

- Xét $P(1, -2x^2-1)$:

$$\begin{aligned} f(-4x^2-1) &= 2f(-2x^2-1) + f(1) = -2(2f(x^2) + f(1)) + f(1) \\ &= -4f(x^2) - f(1), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4}$$

Từ (3) và (4) ta suy ra $f(x^2+1) = f(x^2) + f(1)$. Vì $x^2 \geq 0$ nên

$$f(x+1) = f(x) + f(1), \quad \forall x \geq 0. \tag{5}$$

Đặt $f(1) = c$. Dựa vào (5), dễ dàng có được $f(n) = nc$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Quy ước n là một số tự nhiên > 0. Ta có $P(x, n) : f\left((n+1)x + n\right) = f(x) + f(n) + f(nx)$, suy ra

$$f\left((n+1)x\right) = f(x) + f(nx), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ điều trên, theo quy nạp, ta dễ dàng có $f(nx) = nf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(n) = nc$ và

$$f(x) = cx, \quad \forall x \in \mathbb{Q}^+.$$

Vì f là hàm liên tục và lẻ nên ta có $f(x) = cx$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Vậy đây là hàm thoả. □

Nhận xét 1. Cách giải trên dựa vào việc để ý giả thiết tính liên tục của hàm f, ta cố gắng chứng minh $f(x) = cx$ với mọi x hữu tỉ, để từ đó suy ra hàm thoả. Tất cả những phép thế trên đều xuất phát từ ý tưởng đó.

Nhận xét 2. PTH trên tương đương với PTH Cauchy, và đây là bài tập dành cho các bạn: *Cho hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chứng minh rằng*

$$f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y)$$

khi và chỉ khi $f(x+y) = f(x) + f(y)$ với mọi số thực x, y.

Trên thực tế, các tác giả đã tiếp cận bài toán đầu trước khi biết được kết quả trên.

Bài toán 3. *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f_{2009}(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

trong đó $f_n(x) = f\left(f\left(\ldots(f(x))\ldots\right)\right)$, n lần f.

LỜI GIẢI. Trước tiên ta chứng minh f là đơn ánh. Thật vậy, nếu $f(x_1) = f(x_2)$, ta có $f_{2009}(x_1) = f_{2009}(x_2)$ suy ra $x_1 = x_2$. Vậy f đơn ánh. Bây giờ ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề. *Nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vừa là hàm đơn ánh, vừa là hàm liên tục, thì f đơn điệu.*

Chứng minh. Vì f là đơn ánh, ta chứng minh nếu tồn tại $x < y$ sao cho $f(x) < f(y)$ thì f đồng biến (nếu với mọi $x < y$ mà $f(x) > f(y)$ thì hiển nhiên f nghịch biến). Giả sử f không đồng biến, tức là sẽ có ba trường hợp sau có thể xảy ra, tồn tại z sao cho

(1) $z < x < y$ và $f(z) > f(x)$, $f(x) < f(y)$;

(2) $x < y < z$ và $f(z) < f(y)$, $f(x) < f(y)$;

(3) $x < z < y$ và $[f(z) - f(x)]\,[f(z) - f(y)] > 0$.

Dễ thấy, ta chỉ cần chứng minh (1) sai. Chọn M sao cho $f(x) < M < \min\{f(y),\ f(z)\}$. Theo tính chất của hàm liên tục, tồn tại a sao cho $z < a < x$ và $f(a) = M$, đồng thời tồn tại b sao cho $x < b < y$ và $f(b) = M$. Suy ra $f(a) = f(b)$, suy ra $a = b$ do f đơn ánh, nhưng điều này không thể xảy ra vì $a < x < b$. Vậy ta có điều giả sử là sai, tóm lại f là hàm đơn điệu. □

Quay trở lại bài toán, ta sẽ chứng minh f là hàm đồng biến. Thật vậy, giả sử f nghịch biến, ta có với $x < y$ thì $f(x) > f(y)$. Suy ra

$$f_2(x) = f\left(f(x)\right) < f\left(f(y)\right) = f_2(y).$$

Cứ tiếp tục như thế, ta được $f_{2009}(x) > f_{2009}(y)$, suy ra $x > y$ (mâu thuẫn). Vậy f là hàm đồng biến. Bây giờ ta giả sử tồn tại x sao cho $f(x) > x$, khi đó $f_2(x) = f(f(x)) > f(x)$, ta suy ra ngay

$$x = f_{2009}(x) > f_{2008}(x) > \cdots > f_2(x) > f(x) > x \text{ (mâu thuẫn)}.$$

Tương tự với $f(x) < x$ cũng suy ra mâu thuẫn. Vậy $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. □

NHẬN XÉT. Với cách giải trên, ta dễ dàng giải quyết được bài toán nếu thay số 2009 bằng một số tự nhiên lẻ bất kỳ. Tuy nhiên, các bạn hãy thử suy nghĩ xem nếu thay 2009 bằng một số tự nhiên chẵn khác 0 thì kết quả sẽ như thế nào?

Qua các ví dụ trên, có thể thấy chúng đều có cách phát biểu đơn giản nhưng lời giải lại không hề đơn giản, chính điều đó đã làm nên sự thú vị cũng PTH dạng này.

Quay trở lại với dạng chính của PTH mà chúng ta đang xem xét, những bài toán sau đây một phần được trích ra từ các kỳ thi Olympic, một phần là của các tác giả sáng tác. Ta sẽ bắt đầu bằng hằng đẳng thức rất quen thuộc

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Bài toán 4. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f(x^n) - f(y^n) = [f(x) - f(y)]\,(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R},$$

trong đó n là một số tự nhiên bất kỳ và lớn hơn 1.

LỜI GIẢI. Trước hết ta thử giải bài toán trong từng trường hợp cụ thể của n. Qua đó, ta sẽ thấy rõ hướng đi cần phải làm khi giải quyết bài toán với các số n bất kỳ.

- *Trường hợp* $n = 2$. Phương trình hàm ban đầu lúc này trở thành

  $$f(x^2) - f(y^2) = [f(x) - f(y)]\,(x + y), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

  Ta không thể tính được $f(0)$, vì trên thực tế $f(x) = ax + b$ là một lớp hàm thỏa mãn yêu cầu bài toán, như vậy giá trị $f(0)$ là không cố định. Trong trường hợp này, ta sẽ đặt hàm số $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $g(x) = f(x) - f(0)$. Khi đó $g(0) = 0$, và ta cũng thu được phương trình hàm tương tự

  $$g(x^2) - g(y^2) = [g(x) - g(y)]\,(x + y), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

  Thay $y = 0$, ta có $g(x^2) = xg(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thay trở lại vào phương trình (1), ta có

  $$g(x)y = g(y)x, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

  Đến đây cho $y = 1$, ta có ngay $g(x) = xg(1) = ax$, và do đó

  $$f(x) = ax + f(0) = ax + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- *Trường hợp* $n = 3$. Đây là một bài toán trong đề thi của Moldova năm 2004

  $$f(x^3) - f(y^3) = [f(x) - f(y)]\,(x^2 + xy + y^2), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

  Cũng bằng lập luận tương tự như ở trường hợp $n = 2$, ta xét hàm số $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn $g(x) = f(x) - f(0)$. Khi đó $g(0) = 0$ và

  $$g(x^3) - g(y^3) = [g(x) - g(y)]\,(x^2 + xy + y^2), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

  Thay $y = 0$, ta có $g(x^3) = x^2 g(x)$. Thay trở lại vào phương trình (2), ta có

  $$(x + y)g(x)y = (x + y)g(y)x, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

  Ở đây, chúng ta không được quyền triệt tiêu $(x + y)$ ở hai vế của phương trình hàm trên, vì sau đó ta không thể so sánh được $g(x)y$ và $g(y)x$ với $x + y = 0$. Tuy vậy, ta vẫn có thể chứng minh được

  $$g(x)y = g(y)x, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

  Thật vậy, do $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ là một hàm thỏa nên ta có thể giả sử g không đồng nhất với 0. Khi đó, dễ dàng chứng minh được

  $$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Với mọi số thực x, y bất kỳ, luôn tồn tại số thực x_0 sao cho cả $x + x_0$ và $y + x_0$ đều khác không. Từ đó ta suy ra $g(x)x_0 = g(x_0)x$ và $g(y)x_0 = g(x_0)y$, do vậy

$$g(x)y = g(y)x, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Tương tự trường hợp $n = 2$, ta cũng chứng minh được $f(x) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$ là các hàm thoả đề.

- Trường hợp tổng quát xem như là bài tập cho các bạn. □

Bài toán trên giới thiệu cho chúng ta 1 phương pháp giải phương trình hàm đó là xét 1 hàm mới liên quan, từ đó suy ra các phương trình mới từ các phương trình hàm cũ, mà việc giải chúng dễ dàng hơn. Đồng thời cũng cho ta thấy rằng, không phải lúc nào ta cũng tính được $f(0)$ như mong muốn, vì vậy ta cần phải xử lý một cách linh hoạt hơn.

Tiếp theo là một bài thi trong đề IMO, bắt nguồn từ một đẳng thức rất quen thuộc, được dùng khá nhiều trong việc chứng minh bất đẳng thức

$$(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = (xa + yb)^2 + (xb - ya)^2.$$

Bài toán 5 (IMO 2002)**.** *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz), \quad \forall x,\ y,\ z,\ t \in \mathbb{R}.$$

LỜI GIẢI. Cho $x = y = z = t = 0$, ta được $4f^2(0) = 2f(0)$ suy ra $f(0) = 0 \vee f(0) = \dfrac{1}{2}$. Đến đây ta xét hai trường hợp.

- *Trường hợp* $f(0) = \dfrac{1}{2}$. Thay $z = y = t = 0$, ta có

$$\left[f(x) + \frac{1}{2}\right]\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

  Suy ra $f(x) = \dfrac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy hàm này thỏa.

- *Trường hợp* $f(0) = 0$. Thay $z = t = 0$, ta thu được

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

  Do vậy f nhân tính, suy ra $f(x^2) = f^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Điều này chứng tỏ f sẽ nhận giá trị không âm với mọi x không âm. Cho $x = 0$, $t = 1$, ta có

$$f(z)(f(y) + f(1)) = f(-z) + f(yz),$$

  suy ra $f(z) = f(-z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$. Như vậy f là hàm chẵn.

  Dễ thấy $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ là một hàm thỏa. Xét trường hợp f không đồng nhất với 0. Khi đó, ta chứng minh

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Giả sử $\exists x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_1 \neq x_2$ sao cho $f(x_1) = 0$, $f(x_2) \neq 0$. Vì f nhân tính nên

$$f(x_2) = f\left(\frac{x_2}{x_1} \cdot x_1\right) = f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) f(x_1) = 0 \text{ (mâu thuẫn).}$$

Như vậy $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Do đó, ta cũng sẽ có $f(x) > 0 \Leftrightarrow \forall x \neq 0$.

Xét mọi $x,\ y > 0$, cho $z = t = \sqrt{xy}$, ta thu được

$$[f(x) + f(\sqrt{xy})]\,[f(y) + f(\sqrt{xy})] = f\left(x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy}\right).$$

Mà do f nhân tính nên ta có

$$[f(x) + f(\sqrt{xy})]\,[f(y) + f(\sqrt{xy})] = f(\sqrt{xy})\left[f\left(\sqrt{x}\right) + f(\sqrt{y})\right]^2$$

và

$$f\left(x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy}\right) = f\left(\sqrt{xy}(x+y)\right) = f(\sqrt{xy})\, f(x+y).$$

Từ đó ta suy ra $f(x+y) = \left[f(\sqrt{x}) + f\left(\sqrt{y}\right)\right]^2$ hay

$$\sqrt{f(x+y)} = f\left(\sqrt{x}\right) + f(\sqrt{y}), \quad \forall x,\ y > 0.$$

Hơn nữa, do $f(x) = f^2(\sqrt{x})$ và $f(x) > 0$, $\forall x > 0$ nên ta có $\sqrt{f(x)} = f(\sqrt{x})$, $\forall x > 0$. Kết hợp với trên, ta được

$$\sqrt{f(x+y)} = \sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}, \quad \forall x,\ y > 0.$$

Đến đây ta xét hàm $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sao cho $\sqrt{f(x)} = g(x)$, $\forall x > 0$. Dễ dàng suy ra được g vừa là hàm nhân tính, vừa là hàm cộng tính. Khi đó, ta dễ dàng có $g(x) = x$, $\forall x > 0$, dẫn đến $f(x) = x^2$, $\forall x > 0$, mà f lại là hàm chẵn và $f(0) = 0$, ta sẽ có ngay hàm cần tìm là

$$f(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tóm lại, có 3 hàm thỏa phương trình đã cho là $f(x) = x^2$, $f(x) = 0$ và $f(x) = \dfrac{1}{2}$. □

NHẬN XÉT. Điểm nhấn của lời giải trên chính là việc suy ra được tính chẵn của hàm số f và tính không âm với các giá trị của biến không âm. Đây được coi là hai điều quan trọng, không chỉ đối với bài toán này, mà còn hữu dụng trong rất nhiều bài phương trình hàm khác. Ngoài ra, còn một điều đáng để để ý trong lời giải trên chính là phép thế $z = t = \sqrt{xy}$, điều này bắt nguồn từ việc ta muốn đơn giản hoá vế phải của phương trình hàm.

Việc ta dự đoán "khá chính xác" $f(x) = x^2$ là một hàm thỏa đã đưa ta đến việc xét hàm số $g(x) = \sqrt{f(x)}$, và thực sự điều này giúp ta giải quyết bài toán một cách khá dễ dàng. Đây cũng là một kinh nghiệm nhỏ, khi ta dự đoán một hàm nào đó thỏa phương trình hàm đã cho, ta có thể xét một hàm mới liên quan, mà việc giải hàm mới này "dễ dàng" hơn, từ đó suy ra hàm cần tìm.

Lời giải chính thức của bài toán trên dựa trên phương trình hàm sau

$$f(x-y)+f(x+y)=2\left[f(x)+f(y)\right], \quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}.$$

Đồng thời ta cũng có thể chứng minh được $f(x)$ là hàm đồng biến trên $[0,\,+\infty)$. Các bạn hãy thử giải phương trình hàm trên dựa trên ý tưởng này.

Chúng ta cùng qua một bài toán khác trong kỳ thi China MO, xuất phát từ hằng đẳng thức quen thuộc $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$. Điều đặc biệt là đề bài không yêu cầu ta tìm các hàm thỏa.

Bài toán 6 (China MO 1996)**.** *Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f(x^3+y^3)=(x+y)\left[f^2(x)-f(x)f(y)+f^2(y)\right], \quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f(1996x)=1996f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh rằng $f(nx)=nf(x)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$. Việc làm này sẽ mang lại cho bài toán một cái nhìn tổng quát hơn, đồng thời các bạn cũng không bị bối rối khi gặp con số 1996 hay một con số nào khác. Ta có

- $P(0,\,0): f(0)=0$.
- $P(x,\,0): f(x^3)=xf^2(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. (1)

Từ đây, ta suy ra ngay $f(x)\geq 0\ \forall x\geq 0$ và $f(x)\leq 0\ \forall x\leq 0$. Gọi

$$X=\left\{a \mid f(ax)=af(x),\ \forall x\in\mathbb{R}\right\}.$$

Ta sẽ chứng minh nếu $a\in X$ và $a>0$ thì $a+1\in X$. Thật vậy, giả sử

$$f(ax)=af(x), \quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Vì $f\left[(a+1)\cdot 0\right]=(a+1)f(0)=0$ nên ta xét $x\neq 0$. Xét $P\left(x,\ \sqrt[3]{a}x\right)$, ta có

$$f(x^3+ax^3)=\left(x+\sqrt[3]{a}x\right)\left[f^2(x)-f(x)f\left(\sqrt[3]{a}x\right)+f^2\left(\sqrt[3]{a}x\right)\right]. \tag{3}$$

Theo hệ thức (1) và (2), ta lại có

$$axf^2(x)=af(x^3)=f(ax^3)=f\left(\left(\sqrt[3]{a}x\right)^3\right)=\sqrt[3]{a}xf^2\left(\sqrt[3]{a}x\right),$$

hay tương đương

$$\sqrt[3]{a}x\left[\sqrt[3]{a}f(x)-f\left(\sqrt[3]{a}x\right)\right]\left[\sqrt[3]{a}f(x)+f\left(\sqrt[3]{a}x\right)\right]=0.$$

Do $a > 0$ nên x, $\sqrt[3]{a}x$ cùng dấu, suy ra $\sqrt[3]{a}f(x) + f\left(\sqrt[3]{a}x\right) \neq 0$. Từ đó, theo trên ta được

$$\sqrt[3]{a}f(x) = f\left(\sqrt[3]{a}x\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Sử dụng kết quả này, ta viết được (3) lại thành

$$\begin{aligned} f\left((a+1)x^3\right) &= x\left(1+\sqrt[3]{a}\right)\left[f^2(x) - f(x)\sqrt[3]{a}f(x) + \sqrt[3]{a^2}f^2(x)\right] \\ &= xf^2(x)\left(1+\sqrt[3]{a}\right)\left(1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right) = f(x^3)(a+1). \end{aligned}$$

Do mỗi số thực đều có căn bậc 3 nên ta suy ra

$$f\left((a+1)x\right) = (a+1)f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Vì $1 \in X$ nên $n \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy

$$f(nx) = nf(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cho $n = 1996$, ta có ngay kết quả bài toán. □

Nhận xét 1. Việc suy ra dấu của $f(x)$ từ hệ thức (1) là quan trọng, nó giúp ta triệt tiêu bình phương mà không cần xét dấu, đây cũng là một điều đáng lưu ý trong rất nhiều bài toán khác.

Nhận xét 2. Với đề bài tương tự, liệu có thể tìm được các hàm f thoả mãn không? Nếu không, cần phải thêm vào bài toán những điều kiện gì?

Những bài phương trình hàm ở trên là những bước khởi động cho những bài phương trình hàm sau đây, tất cả đều dựa trên hằng đẳng thức quen thuộc

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Tất cả những lời giải sắp được trình bày dưới đây đều có những ý tưởng "sử dụng lại", mà công việc của các bạn là tìm ra, hiểu và áp dụng chúng.

Bài toán sau được lấy trong đề China TST, có một chút "biến thể", là xuất phát từ

$$\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2}.$$

Bài toán 7 (China TST 2007)**.** *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ thoả mãn*

$$f(x) + f(y) + 2xyf(xy) = \frac{f(xy)}{f(x+y)}, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{Q}^+.$$

Lời giải. Việc hàm f không xác định tại $x = 0$ đã gây một chút khó khăn khi "dự đoán" hàm f là hàm gì. Trong những trường hợp này, ta thường hay thử tính các giá trị của f tại các giá trị đặc biệt nào đó, và thường là $f(1)$, $f(2)$, … (do ta đang làm việc trên tập các số hữu tỉ dương). Ta có

- $P(1,\,1): 4f(1) = \dfrac{f(1)}{f(2)}$, suy ra $f(2) = \dfrac{1}{4}$.
- $P(2,\,2): \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + 8f(4) = \dfrac{f(4)}{f(4)}$, suy ra $f(4) = \dfrac{1}{16}$.
- $P(1,\,2): f(1) + \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{1}{4f(3)}$. (1)
- $P(1,\,3): f(1) + f(3) + 6f(3) = \dfrac{f(3)}{f(4)} = 16f(3)$. (2)

Từ (1) và (2), ta dễ dàng giải ra được $f(1) = 1,\, f(3) = \dfrac{1}{9}$. Như vậy ta có một "dự đoán": hàm $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ là hàm thoả mãn yêu cầu bài toán. Trên thực tế, đây chính là kết quả cần tìm, và vì vậy vậy ta sẽ đi chứng minh

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{Q}^+.$$

Nên nhớ, ta đang làm trên tập hữu tỉ dương, bởi vậy cách tốt nhất là chứng minh trên tập số nguyên dương trước rồi suy ra trên tập hữu tỉ. Xét $P(x,\,1)$, ta có

$$f(x) + 1 + 2xf(x) = \frac{f(x)}{f(x+1)},$$

hay tương đương

$$\frac{1}{f(x)} + 2x + 1 = \frac{1}{f(x+1)}.$$

Từ đẳng thức này, ta có thể chứng minh bằng quy nạp rằng

$$f(n) = \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Thật vậy, dễ thấy khẳng định đúng với $n = 1$. Giả sử khẳng định đúng với $n = k > 1$, tức là $f(k) = \dfrac{1}{k^2}$. Khi đó với $n = k + 1$, ta có

$$\frac{1}{f(k+1)} = \frac{1}{f(k)} + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2,$$

từ đó suy ra $f(k+1) = \dfrac{1}{(k+1)^2}$. Như vậy khẳng định vẫn đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp ta có ngay khẳng định đúng với mọi số nguyên dương n.

Tiếp đến, ta cũng sẽ chứng minh khẳng định sau bằng quy nạp

$$f\left(nx\right) = \frac{f(x)}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{Q}^+.$$

Hiển nhiên $f(1 \cdot x) = f(x) = \dfrac{f(x)}{1^2}$ nên ta có khẳng định đúng với $n = 1$. Giả sử khẳng định đúng với $n = k > 1$, tức là

$$f(kx) = \frac{f(x)}{k^2}.$$

Khi đó với $n = k + 1$, ta có

- $P(x, k) : f(x) + \dfrac{1}{k^2} + 2xkf(xk) = \dfrac{f(xk)}{f(x+k)}$, suy ra $k^2 + 2xk + \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{f(x+k)}$.
- $P(x, 1) : \dfrac{1}{f(x)} + 2x + 1 = \dfrac{1}{f(x+1)}$, suy ra $\dfrac{1}{f(x+k)} + 2(x+k) + 1 = \dfrac{1}{f(x+k+1)}$.

Từ hai điều trên ta suy ra

$$\frac{1}{f(x+k+1)} = k^2 + 2xk + \frac{1}{f(x)} + 2(x+k) + 1.$$

Ta lại có $P(x, k+1) : f(x) + \dfrac{1}{(k+1)^2} + 2x(k+1)f\left(x(k+1)\right) = \dfrac{f\left(x(k+1)\right)}{f(x+k+1)}$, hay

$$\frac{f(x)}{f\left(x(k+1)\right)} + \frac{1}{(k+1)^2 f\left(x(k+1)\right)} + 2x(k+1) = \frac{1}{f(x+k+1)}.$$

Kết hợp với trên, ta được

$$\frac{f(x)}{f\left(x(k+1)\right)} + \frac{1}{(k+1)^2 f\left(x(k+1)\right)} + 2x(k+1) = k^2 + 2xk + \frac{1}{f(x)} + 2(x+k) + 1.$$

Từ đó

$$\frac{f(x)}{f\left(x(k+1)\right)} + \frac{1}{(k+1)^2 f\left(x(k+1)\right)} = (k+1)^2 + \frac{1}{f(x)}.$$

Với $g(x) = f\left(x(k+1)\right)$, coi đây là phương trình theo ẩn $f(x)$, ta dễ dàng giải ra được $f(x) = (k+1)^2 g(x)$. Như vậy

$$f\left(x(k+1)\right) = \frac{f(x)}{(k+1)^2}.$$

Khẳng định do đó vẫn đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp ta có khẳng định đúng với mọi số nguyên dương n.

Bây giờ, cho $x = \dfrac{m}{n}$ bất kỳ, trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$, ta có $f\left(n \cdot \dfrac{m}{n}\right) = \dfrac{f\left(\dfrac{m}{n}\right)}{n^2}$, từ đó

$$f(x) = f\left(\frac{m}{n}\right) = n^2 f(m) = \frac{n^2}{m^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Như vậy, hàm duy nhất thỏa phương trình hàm ban đầu là $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{Q}^+$. $\square$

Bài toán sau đây là một chút "sáng tạo" của các tác giả, dựa trên hoàn toàn đẳng thức $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, nhưng khi đi tìm lời giải, chúng tôi lại không ngờ nó khá "hóc búa", và thực sự bài toán này chứa đựng rất nhiều điều thú vị mà chúng ta cần học hỏi.

Bài toán 8. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f^2(x+y) = f(x^2) + 2f(x)f(y) + f(y^2), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Cho $x = y = 0$, ta có $f^2(0) = 2f(0) + 2f^2(0)$, suy ra $f(0) = 0 \vee f(0) = -2$. Như vậy, ta cần xét hai trường hợp sau.

- *Trường hợp* $f(0) = 0$. Cho $y = 0$, ta thu được $f^2(x) = f(x^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ta suy ra

  $$f(x) \geq 0, \quad \forall x \geq 0.$$

  Thay $f(x^2) = f^2(x)$ và $f(y^2) = f^2(y)$ vào phương trình ban đầu, ta được

  $$f^2(x+y) = [f(x) + f(y)]^2, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

  Thay $y = -x$, ta dễ dàng suy ra được f là hàm lẻ. Như vậy $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$ và $f(x) \leq 0$, $\forall x \leq 0$. Do đó, (1) sẽ tương đương với

  $$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R},\ xy \geq 0.$$

  Ta cần chứng minh f cộng tính ngay cả khi x, y trái dấu (hiển nhiên đúng khi một trong hai số bằng 0). Thật vậy, nếu x, y là hai số trái dấu, thì $x+y$ phải cùng dấu với $-x$ hoặc $-y$, suy ra $f(x+y) + f(-y) = f(x)$ hoặc $f(x+y) + f(-x) = f(y)$, Cả hai điều này kết hợp với tính lẻ của hàm f, ta đều thu được

  $$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

  Như vậy f là hàm cộng tính trên $\mathbb{R}$, kết hợp với $f(x^2) = f^2(x)$ ta suy ra $f(x) = 0$ và $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ là hai hàm thỏa.

- *Trường hợp* $f(0) = 2$. Khi đó ta có

  $$P(x, 0) : f^2(x) = f(x^2) - 4f(x) - 2.$$

  Từ đó $f(x^2) = f^2(x) + 4f(x) + 2$. Thay trở lại vào phương trình ban đầu, ta được

  $$\begin{aligned} f^2(x+y) &= f^2(x) + 4x + 2 + 2f(x)f(y) + f^2(y) + 4f(y) + 2 \\ &= [f(x) + f(y) + 2]^2, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.(2) \end{aligned} \tag{2}$$

  Bây giờ thay $y = -x$ ở phương trình (2), ta có

  $$[f(x) + f(-x) + 2]^2 = f^2(0) = 4. \tag{3}$$

  Đến đây, ta sẽ xét ba trường hợp sau

  - $f(x) + f(-x) + 2 = 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
  - $f(x) + f(-x) + 2 = -2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
  - $f(x) + f(-x) + 2 = 2$, $\forall x \in X$ và $f(x) + f(-x) + 2 = -2$, $\forall x \in Y$, trong đó X, Y là hai tập hợp sao cho $X \cup Y = \mathbb{R}$.

Giả sử tồn tại một số a sao cho $f(a) + f(-a) + 2 = 2$, hay $f(a) + f(-a) = 0$. Dễ thấy $a \neq 0$, và ta có thể giả sử $a > 0$. Gọi $F(x)$ là phép thế x vào (2). Ta có

- $F(-a) : f^2(a) = f\left((-a)^2\right) - 4f(-a) - 2$.
- $F(-a) : f^2(-a) = f\left((-a)^2\right) - 4f(-a) - 2 = f(a^2) - 4f(-a) - 2$.

Hơn nữa $f(a) = f^2(-a)$ do $f(a) + f(-a) = 0$, nên từ đó ta suy ra $f(a) = f(-a)$, như vậy $f(a) = f(-a) = 0$. Mặt khác, xét $F\left(\sqrt{a}\right)$, ta có

$$f^2\left(\sqrt{a}\right) = f(a) - 4f(\sqrt{a}) - 2 = -4f\left(\sqrt{a}\right) - 2,$$

hay

$$f^2\left(\sqrt{a}\right) + 4f\left(\sqrt{a}\right) + 2 = 0.$$

Coi $f\left(\sqrt{a}\right)$ là ẩn, ta giải được $f\left(\sqrt{a}\right) = \sqrt{2} - 2 \vee f\left(\sqrt{a}\right) = -\sqrt{2} - 2$. (4)

Ta tiếp tục xét các phép thế sau

- $F(a) : f^2(a) = f(a^2) - 4f(a) - 2$, suy ra $f(a^2) = 2$ (vì $f(a) = 0$).
- $P(a,\, a) : f^2(2a) = 2f(a^2) + 2 \cdot 0 \cdot 0 = 4$.
- $P(2a,\, -a) : 0 = f^2(2a - a) = f(4a^2) + 2f(2a)f(-a) + f(a^2) = f(4a^2) + 2$, suy ra $f(4a^2) = -2$.
- $P(2a,\, 2a) : f^2(4a) = 2f(4a^2) + 2f^2(2a) = 2(-2) + 2 \cdot 4 = 4$, suy ra
$$f(4a) = 2 \vee f(4a) = -2. \tag{5}$$
- $F\left(2\sqrt{a}\right) : f^2\left(2\sqrt{a}\right) = f(4a) - 4f\left(2\sqrt{a}\right) - 2$, suy ra
$$f^2\left(2\sqrt{a}\right) = -4f\left(2\sqrt{a}\right) \vee f^2\left(2\sqrt{a}\right) = -4f\left(2\sqrt{a}\right) - 4 \text{ (do (5))}.$$
Coi $f\left(2\sqrt{a}\right)$ là ẩn, ta giải được
$$f\left(2\sqrt{a}\right) = 0 \vee f\left(2\sqrt{a}\right) = -4 \vee f\left(2\sqrt{a}\right) = -2. \tag{6}$$

Tuy nhiên, ta lại có $P\left(\sqrt{a},\, \sqrt{a}\right) : f^2\left(2\sqrt{a}\right) = 2f(a) + 2f^2\left(\sqrt{a}\right)$, suy ra

$$f^2\left(2\sqrt{a}\right) = 2\left(\sqrt{2} - 2\right)^2 \vee f^2\left(2\sqrt{a}\right) = 2\left(\sqrt{2} + 2\right)^2 \text{ (do (4))}.$$

Kết hợp với (6), ta suy ra điều vô lý. Mâu thuẫn này chứng tỏ $f(x) + f(-x) + 2 \neq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, do đó $f(x) + f(-x) + 2 = -2$, hay

$$f(x) + f(-x) = -4, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bây giờ ta xét hàm $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $g(x) = f(x) + 2$. Khi đó ta có

$$g(x) + g(-x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Từ phương trình hàm ban đầu, ta thu được

$$[g(x+y)-2]^2 = g(x^2) + 2\,[g(x)-2]\,[g(y)-2] + g(y^2) - 4,$$

hay tương đương

$$g^2(x+y) - 4g(x+y) = g(x^2) + g(y^2) + 2g(x)g(y) - 4\,[g(x)+g(y)]\,. \qquad (8)$$

Lại có $f^2(x) = f(x^2) - 4f(x) - 2$ nên $[g(x)-2]^2 = g(x^2) - 2 - 4\,[g(x)-2] - 2$, hay

$$g^2(x) = g(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (9)$$

Thế $-x$ vào x và $-y$ vào y ở hệ thức (8), kết hợp với (7) và (9), ta có

$$g^2(-x-y) - 4g(-x-y) = g(x^2) + g(y^2) + 2g(-x)g(-y) - 4\,[g(-x)+g(-y)]\,.$$

Phương trình này tương đương với

$$g^2(x+y) + 4g(x+y) = g(x^2) + g(y^2) + 2g(x)g(y) + 4\,[g(x)+g(y)]\,, \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với (8), ta suy ra ngay

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với (9) và sử dụng kết quả "bài toán chìa khóa", ta suy ra

$$g(x) = x \vee g(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

do đó $f(x) = x - 2 \vee f(x) = -2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dễ dàng kiểm tra đây là hai hàm thoả.

Tóm lại, phương trình hàm ban đầu có 4 hàm thỏa là $f(x) = 0$, $f(x) = -2$, $f(x) = x$ và $f(x) = x - 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. □

Nhận xét. Có lẽ khi xem lời giải, ai cũng tự hỏi rằng là "Tại sao lại giải như thế ?". Nhưng nếu để ý kỹ, tác giả đã đi theo một hướng hoàn toàn tự nhiên:

Tính $f(0)$, đoán hàm $\to$ Thử trường hợp $\to$ Cố gắng áp dụng "bài toán chìa khóa".

Có thể thấy, lời giải trên hoàn toàn sơ cấp, và cả hai trường hợp đều sử dụng kết quả "bài toán chìa khóa" để tìm ra hàm thoả. Tuy rằng lời giải là vậy, nhưng rất mong bạn đọc gần xa sẽ quan tâm và cố gắng đi tìm lời giải khác.

Bây giờ chúng ta cùng đến với một bài toán khác, cũng dựa trên $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$, nhưng cũng rất thú vị như sau

Bài toán 9. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn*

$$f^2(x+y) = f(x^2) + 2f(xy) + f(y^2), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Ta có $P(0,\ 0) : f^2(0) = 4f(0)$, suy ra $f(0) = 0 \vee f(0) = 4$. Như vậy, ta cần xét hai trường hợp.

- *Trường hợp* $f(0) = 4$. Ta xét hai phép thế
  - $P(x,\,0) : f^2(x) = f(x^2) + 3f(0) = f(x^2) + 12,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
  - $P(-x,\,0) : f^2(-x) = f(x^2) + 3f(0) = f(x^2) + 12,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

  Vậy $f^2(x) = f^2(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Ta lại có $P(x,\,-x) : f^2(0) = 2f(x^2) + 2f(-x^2)$, hay $8 = f(x^2) + f(-x^2)$. Do vậy ta có

  $$8 = f(x) + f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

  Coi $f(x)$ và $f(-x)$ là hai ẩn, từ hai điều trên ta suy ra

  $$f(x) = f(-x) = 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

  Vậy $f(x) = 4,\ \forall x \in \mathbb{R}$ là một hàm thoả.

- *Trường hợp* $f(0) = 0$. Ta có

  $$P(x,\,0) : f^2(x) = f(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

  Suy ra $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Hơn nữa, $P(x,\,-x) : f^2(0) = 2f(x^2) + 2f(-x^2)$, hay $0 = f(x^2) + f(-x^2)$. Từ đây, ta có $0 = f(x) + f(-x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy f là hàm lẻ.

  Dễ thấy hàm $f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ là hàm thoả. Ta xét hàm f không đồng nhất với 0. Khi đó ta chứng minh

  $$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

  Giả sử tồn tại $x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}^*$, $x_1 \neq x_2$ sao cho $f(x_1) \neq 0$ và $f(x_2) = 0$. Do f là hàm lẻ nên ta giả sử $x_1,\, x_2 > 0$. Từ phương trình hàm ban đầu và hệ thức (1), ta được $f^2(x+y) \geq f^2(y),\ \forall x,\, y > 0$, suy ra

  $$f(x) \geq f(y), \quad \forall x > y > 0.$$

  Ta có $P(x_1,\, x_2) : f^2(2x_2) = 2f^2(x_2) + 2f^2(x_2) =, 0$ suy ra $f(2x_2) = 0$. Như vậy nếu $f(x_2) = 0$ thì $f(2x_2) = 0$. Khi đó dễ dàng có $f(2^n x_2) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Chọn n đủ lớn sao cho $2^n x_2 > x_1$. Khi đó ta có $0 = f(2^n x_2) \geq f(x_1) > 0$, vô lý. Vậy

  $$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

  Khi đó, từ hệ thức (1) suy ra $f^2(1) = f(1)$, suy ra $f(1) = 1$. Ta chứng minh

  $$f(nx) = nf(x), \quad \forall x > 0,\ n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

  Trước hết, ta sẽ chứng minh nếu $k \in \mathbb{N}$ thoả (2) thì $k+1$ cũng thoả (2). Thật vậy, xét phép thế $P(kx,\, x)$:

  $$\begin{aligned} f^2\left((k+1)x\right) &= f^2(kx) + 2f(kx^2) + f^2(x) = k^2 f^2(x) + 2kf^2(x) + f^2(x) \\ &= (k^2 + 2k + 1)f^2(x) = (k+1)^2 f^2(x), \quad \forall x > 0. \end{aligned}$$

Suy ra $f((k+1)x) = (k+1)f(x)$, $\forall x > 0$. Vì 1 thoả (2) nên mọi $n \in \mathbb{N}^*$ cũng thoả (2). Do f là hàm lẻ, ta suy ra

$$f(nx) = nf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Từ đây ta dễ dàng có $f(q) = q$, $\forall q \in \mathbb{Q}$. Bằng cách làm tương tự ở "bài toán chìa khóa", sử dụng 2 điều sau

- f là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- $f(q) = q$, $\forall q \in \mathbb{Q}$.

Ta suy ra $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dễ thấy đây là hàm thoả.

Tóm lại, PTH ban đầu có 3 hàm thoả là $f(x) = 0,\ f(x) = 4$ và $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. □

NHẬN XÉT. Việc dự đoán hàm thỏa ở bài này là khá dễ dàng. Tuy nhiên ở trường hợp 2 (tức $f(0) = 0$), có 1 điều thú vị là ta không suy ra f cộng tính, nhưng lại có tính chất của hàm cộng tính, đó là $f(nx) = nf(x)$, và từ đó suy ra kết quả bài toán. Qua đó, cho ta được một kinh nghiệm, nếu không suy ra "tính chất" nào đó của hàm f thì hãy thử đi tìm những tính chất khác có mối quan hệ mật thiết với "tính chất" mà mình cần.

Đây cũng là một ví dụ, cho thấy được sự hiệu quả từ việc chứng minh trên tập $\mathbb{N}$, dẫn đến tập $\mathbb{Q}$ và kết luận ở tập $\mathbb{R}$. Xin giới thiệu bài toán tổng quát, đây xem như là bài tập dành cho các bạn: *Với $n > 1$, tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f^2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^2) + 2 \sum_{1 \le j < k \le n} f(x_j x_k), \quad \forall x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in \mathbb{R}.$$

3 Tổng kết và bài tập đề nghị

Bài viết đến đây là kết thúc. Các tác giả đã cố gắng trình bày những điều thú vị nhất về PTH dạng này đến bạn đọc, nhưng chắc chắn thế là chưa đủ. Mong rằng qua bài viết này, các bạn sẽ có thêm niềm yêu thích ở môn Toán nói chung và PTH nói riêng. Sau đây là một số bài tập cho các bạn rèn luyện.

Bài tập 1. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(x)f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$, $\forall x \neq 0$.

Bài tập 2 (IMO 1992)**.** Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f\left(x^2 + f(y)\right) = y + f^2(x), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 3. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f\left(x^2 + f(y) - y\right) = f^2(x), \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 4. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn

$$f^2(x-y)=f(x^2)-2f(x)f(y)+f(y^2),\quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}.$$

Bài tập 5. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn

$$f\left(2x+f(y)\right)=f(2x)+xf(2y)+f\left(f(y)\right),\quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}.$$

Bài tập 6. Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn

$$f\left(x-f(y)\right)=f(x)+xf(y)+f\left(f(y)\right)-1,\quad \forall x,\ y\in\mathbb{R}.$$

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN NĂM HỌC 2010 - 2011

Bài 1.

(a) Cho a, b, c là các số thực thoả mãn điều kiện $a + b + c = a^3 + b^3 + c^3 = 0$. Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có ít nhất một số bằng 0.

(1 điểm)

(b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 3 & (1) \\ xy + yz + zx = -1 & (2) \\ x^3 + y^3 + z^3 + 6 = 3(x^2 + y^2 + z^2) & (3) \end{cases}$$

(1 điểm)

Lời giải. **(a)** Từ $a + b + c = 0$ suy ra $c = -(a + b)$. Từ đó ta có

$$0 = a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a + b)^3 = -3a^2b - 3ab^2 = -3ab(a + b) = 3abc.$$

Vậy $abc = 0$, suy ra một trong ba số a, b, c phải bằng 0 (đpcm).

(b) *Cách 1.* Đặt $x = a + 1$, $y = b + 1$, $z = c + 1$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$a + b + c = 0.$$

Thay vào (2) với chú ý $a + b + c = 0$, ta được

$$ab + bc + ca = -4. \tag{4}$$

Thay vào (3) với chú ý $a + b + c = 0$, ta được

$$a^3 + b^3 + c^3 = 0.$$

Áp dụng *câu (a)*, ta suy ra 1 trong ba số a, b, c bằng 0. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 0$. Khi đó $b = -c$ và thay vào (4) ta tìm được $b = \pm 2$. Từ đây tìm được x, y, z.

Kết luận: Phương trình có nghiệm $(1, -1, 3)$ và các hoán vị (6 nghiệm).

Cách 2. Từ phương trình (1) và phương trình (2) ta suy ra

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 11.$$

Thay vào phương trình (3), ta được

$$x^3 + y^3 + z^3 = 27. \tag{5}$$

Từ (1) và (5) ta suy ra

$$0 = (x+y+z)^3 - (x^3+y^3+z^3) = 3(x+y)(y+z)(z+x).$$

Từ đó suy ra trong ba số x, y, z có hai số có tổng bằng 0. Không mất tính tổng quát, giả sử $x+y=0$. Từ (1) suy ra $z=3$. Thay vào phương trình (2), ta tìm được $x=-1$, $y=1$ hoặc $x=1$, $y=-1$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm $(1, -1, 3)$ và các hoán vị (6 nghiệm). □

Bài 2.

(a) Giải phương trình
$$(2x-1)^2 = 12\sqrt{x^2-x-2}+1.$$
(1 điểm)

(b) Cho tam giác ABC vuông tại A và có diện tích bằng 2. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức
$$2 \le BC \le \sqrt{2}(AB+AC-1).$$
(1 điểm)

Lời giải. **(a)** Điều kiện $x^2-x-2 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -1 \vee x \ge 2$. Ta biến đổi phương trình về dạng

$$(2x-1)^2 = 12\sqrt{x^2-x-2}+1 \Leftrightarrow 4x^2-4x+1 = 12\sqrt{x^2-x-2}+1$$
$$\Leftrightarrow x^2-x = 3\sqrt{x^2-x-2}.$$

Đặt $t=\sqrt{x^2-x-2} \ge 0$ thì $t^2 = x^2-x-2$. Thay vào phương trình, ta được

$$t^2+2-3t=0 \Leftrightarrow t=1 \vee t=2.$$

- Với $t=1$, ta được $x^2-x-3=0$, suy ra $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.
- Với $t=2$, ta được $x^2-x-6=0$, suy ra $x=-2$, $x=3$.

Các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là $x=-2$, $x=3$, $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

(b) Đặt $AB=c$, $AC=b$ thì theo điều kiện đề bài, ta có $ab=2$. Ngoài ra, theo định lý Pythagore, ta có
$$BC=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Vế thứ nhất của bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\sqrt{2ab} \le \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow a^2+b^2 \ge 2ab$$
$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0 \text{ (đúng, ở đây có thể dùng bất đẳng thức AM-GM).}$$

Vế thứ hai của bất đẳng thức có thể viết lại thành

$$\sqrt{a^2+b^2}+2 \le \sqrt{2}(a+b) \Leftrightarrow a^2+b^2+4\sqrt{a^2+b^2}+4 \le 2(a^2+b^2+2ab)$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2-4\sqrt{a^2+b^2}+4 \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2+b^2}-2\right)^2 \ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Bài toán được giải quyết hoàn toàn. □

Bài 3.

(a) Hãy chỉ ra một bộ 4 số nguyên dương phân biệt mà tổng ba số bất kỳ trong chúng là một số nguyên tố.

(0.5 điểm)

(b) Chứng minh rằng không tồn tại 5 số nguyên dương phân biệt sao cho tổng ba số bất kỳ trong chúng là một số nguyên tố.

(1 điểm)

Lời giải. **(a)** Có thể chỉ ra bộ (1, 3, 7, 9).

(b) Do các số nguyên dương là phân biệt nên tổng ba số bất kỳ lớn hơn 3. Ta chứng minh một trong các tổng đó chia hết cho 3, từ đó không thể là số nguyên tố, suy ra đpcm. Xét số dư trong phép chia các số này cho 3.

- Nếu các số dư 0, 1, 2 đều xuất hiện thì ta lấy ba số tương ứng, ta sẽ được 3 số có tổng chia hết cho 3.
- Nếu có 1 số dư nào đó không xuất hiện thì có 5 số và chỉ có nhiều nhất 2 số dư, suy ra tồn tại 3 số có cùng số dư. Ba số này sẽ có tổng chia hết cho 3.

Bài toán được giải quyết. □

Bài 4.

Cho trường tròn tâm O, bán kính R và dây cung BC có độ dài $BC = R\sqrt{3}$. A là một điểm thay đổi trên cung lớn BC. Gọi E là điểm đối xứng của B qua AC và F là điểm đối xứng của C qua AB. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF cắt nhau tại K $(K \neq A)$.

(a) Chứng minh K luôn thuộc một đường tròn cố định.

(1 điểm)

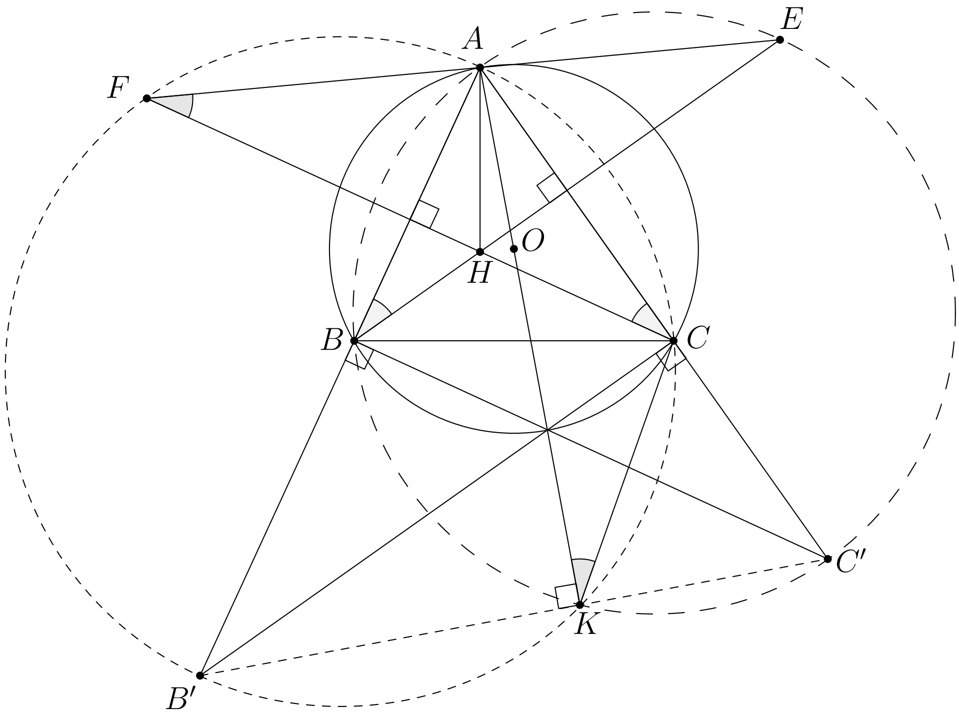
(b) Xác định vị trí của điểm A để tam giác KBC có diện tích lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó theo R.

(1 điểm)

(c) Gọi H là giao điểm của BE và CF. Chứng minh tam giác ABH đồng dạng với tam giácAKC và đường thẳng AK luôn đi qua một điểm cố định.

(1 điểm)

LỜI GIẢI.



(a) Ta có $\angle AKC = \angle AFC$ (cùng chắn cung AC). Mặt khác $\angle AFC = \angle FCA$ (do F đối xứng C qua AB) và $\angle FCA = 90° - A$, nên ta có $\angle AKC = 90° - A$.

Hoàn toàn tương tự, ta có $\angle AKB = 90° - A$. Suy ra $\angle BKC = 180° - 2A$. Suy ra K luôn thuộc cung chứa góc nhìn đoạn BC dưới góc $180° - 2A$.

(b) Tam giác KBC có đáy $BC = R\sqrt{3}$ không đổi và K nằm trên cung chứa góc $180° - 2A$ nên diện tích tam giác KBC lớn nhất khi K là điểm giữa K_0 của cung chứa góc, tức là tam giác KBC cân tại K. Khi đó A chính là trung điểm cung lớn BC.

Để tính giá trị lớn nhất của diện tích tam giác K_0BC, ta chú ý rằng vì $BC = R\sqrt{3}$ nên $A = 60°$. Suy ra $\angle BKC = 180° - 2A = 60°$. Suy ra tam giác K_0BC là tam giác đều có cạnh $BC = R\sqrt{3}$. Vậy diện tích lớn nhất bằng $\dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

(c) Kéo dài AC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại C'. Khi đó AC' là đường kính. Tương tự, kéo dài AB cắt đường tròn ngoại tiếp ACF tại B' thì AB' là đường kính. Suy ra AK, $B'C$, $C'B$ là các đường cao trong tam giác $AB'C'$. Suy ra tứ giác $B'BCC'$ nội tiếp và $\angle AC'B' = \angle ABC$. Ta có

$$\angle BAH = 90° - \angle ABC = 90° - \angle AC'B' = \angle KAC' = \angle KAC.$$

Mặt khác theo chứng minh ở *phần (a)*, ta đã có

$$\angle AKC = \angle FCA = \angle ABH.$$

Từ đây suy ra tam giác ABH đồng dạng với tam giác AKC.

Vì $\angle BAH = \angle KAC$ nên theo một tính chất quen thuộc trong tam giác, ta có AK đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác ABC (đpcm). □

Bài 5.

Trong một giải bóng đá có 12 đội tham dự, thi đấu vòng tròn một lượt (hai đội bất kỳ thi đấu với nhau đúng một trận).

(a) Chứng minh rằng sau 4 vòng đấu (mỗi đội thi đấu đúng 4 trận) luôn tìm được ba đội bóng đôi một chưa thi đấu với nhau.

(1 điểm)

(b) Khẳng định trên còn đúng không nếu các đội đã thi đấu 5 trận?

(0.5 điểm)

Lời giải. **(a)** Xét một đội bóng A bất kỳ. Sau 4 vòng đấu, A chưa đấu với 7 đội bóng. Gọi S là tập hợp tất cả các đội bóng chưa đấu với A. Xét một đội bóng B thuộc S. Do B mới đấu 4 trận nên B thi đấu nhiều nhất với 4 đội bóng thuộc S. Suy ra B chưa thi đấu với ít nhất 2 đội bóng thuộc S. Giả sử B chưa thi đấu với C thuộc S. Khi đó A, B, C đôi một chưa thi đấu với nhau (đpcm).

(b) Kết luận là *không*. Ta chia 12 đội thành 2 nhóm, mỗi nhóm 6 đội. Cho các đội thi đấu vòng tròn trong nhóm thì sau năm vòng, 2 đội bất kỳ thuộc 1 nhóm đều đã thi đấu với nhau. Lấy 3 đội bóng bất kỳ, theo nguyên lý Dirichlet có hai đội cùng 1 nhóm, và vì vậy các đội này đã thi đấu với nhau. Suy ra không tồn tại 3 đội bóng đôi một chưa thi đấu với nhau. □

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN NĂM HỌC 2008 - 2009

Ngày thứ nhất, 21/11/2008

Bài 1.

(a) Chứng minh tồn tại số n chẵn, $n > 2008$ sao cho $2009n - 49$ là số chính phương.

(b) Chứng minh không tồn tại số nguyên m sao cho $2009m - 147$ là số chính phương.

LỜI GIẢI. Chú ý rằng $2009 = 49 \cdot 41 = 7^2 \cdot 41$ nên yêu cầu của bài toán tương đương với việc chứng minh

(a) Tồn tại số n chẵn, $n > 2008$ sao cho $41n - 1$ là số chính phương.

(b) Không tồn tại số nguyên m sao cho $41m - 3$ là số chính phương.

(a) Trước hết ta đi tìm một số a sao cho $a^2 + 1$ chia hết cho 41. Điều này có thể thực hiện được bằng cách thử tuần tự. Ta dễ dàng tìm được $a = 9$ thoả mãn.

Từ đây, ta thấy các số $(82k + 9)^2 + 1$ là số chẵn và chia hết cho 41. Bây giờ chỉ cần chọn

$$n = \frac{(82k + 9)^2 + 1}{41}$$

với k đủ lớn là ta tìm được số n thoả mãn điều kiện đề bài.

(b) Giả sử tồn tại m sao cho $41m - 3 = a^2$. Khi đó ta có $-3 \equiv a^2 \pmod{41}$. Từ đó theo định lý nhỏ Fermat

$$(-3)^{20} \equiv a^{40} \equiv 1 \pmod{41}. \tag{1}$$

Nhưng mặt khác ta lại có $(-3)^4 \equiv -1 \pmod{41}$, suy ra

$$(-3)^{20} \equiv (-1)^5 = -1 \pmod{41}. \tag{2}$$

Do (1) và (2) mâu thuẫn với nhau nên điều giả sử ở trên là sai. Vậy không tồn tại số nguyên m sao cho $41m - 3$ là số chính phương. □

Bài 2.

Cho số nguyên dương n. Có bao nhiêu số chia hết cho 3, có n chữ số và các chữ số đều thuộc $\{3, 4, 5, 6\}$?

LỜI GIẢI. Bài toán này có ba cách giải như sau.

Cách 1. Gọi A_n tập hợp các số có n chữ số lập từ các chữ số $\{3, 4, 5, 6\}$ và chia hết cho 3, và B_n là tập hợp các số có n chữ số lập từ các chữ số $\{3, 4, 5, 6\}$ và không chia hết cho 3. Ta cần tìm $a_n = |A_n|$.

Đặt $b_n = |B_n|$. Ta thấy rằng một số thuộc A_{n+1} có thể thu được (và chỉ có thể thu được) bằng hai cách sau đây:

(1) Lấy một số thuộc A_n rồi thêm 3 hoặc 6 vào phía sau (cả hai đều được).

(2) Lấy một số thuộc B_n rồi thêm hoặc 4, hoặc 5 vào phía sau, hơn nữa, chỉ có duy nhất 1 cách thêm.

Từ đây suy ra
$$a_{n+1} = 2a_n + b_n. \tag{1}$$
Lý luận hoàn toàn tương tự với B_{n+1}, ta được
$$b_{n+1} = 2a_n + 3b_n. \tag{2}$$
Rút $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ (và $b_{n+1} = a_{n+2} - 2a_{n+1}$) từ (1) và thay vào (2), ta có
$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2a_n + 3(a_{n+1} - 2a_n).$$
Sau khi thu gọn, ta được
$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 4a_n = 0. \tag{3}$$
Giải phương trình sai phân (3) với điều kiện $a_1 = 2$ (có hai số là 3, 6), $a_2 = 6$ (có các số 33, 66, 36, 63, 45, 54), ta được $a_n = \dfrac{4^n+2}{3}$.

Cách 2. Lý luận tương tự như trên nhưng chú ý rằng, do số tất cả các số có n chữ số lập từ $\{3, 4, 5, 6\}$, theo quy tắc nhân, bằng 4^n nên ta có $b_n = 4^n - a_n$. Và như vậy có thể thu được công thức truy hồi $a_{n+1} = 2a_n + 4^n - a_n$. Từ đó
$$a_n = 4^{n-1} + a_{n-1} = 4^{n-1} + 4^{n-2} + a_{n-2} = \cdots = 4^{n-1} + \cdots + 4 + a_1 = \frac{4^n-1}{3} + 1 = \frac{4^n+2}{3}.$$

Cách 3. Chú ý là một số tự nhiên chia hết cho 3 khi và chỉ khi tổng các chữ số của nó chia hết cho 3. Do vậy số các số có n chữ số lập từ $\{3, 4, 5, 6\}$ và chia hết cho 3 (mà ta gọi là a_n) bằng tổng các hệ số của x^{3k} trong khai triển của đa thức
$$F(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n.$$
Gọi ε là một nghiệm của phương trình $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ thì $\varepsilon^3 = 1$. Từ đây dễ dàng chứng minh được rằng $\varepsilon^{2k} + \varepsilon^k + 1 = 0$ nếu k không chia hết cho 3 và $= 3$ nếu k chia hết cho 3. Từ đây ta suy ra
$$F(1) + F(\varepsilon) + F(\varepsilon^2) = 3a_n.$$
Nhưng $F(1) = 4^n$, $F(\varepsilon) = F(\varepsilon^2) = 1$ nên ta suy ra $a_n = \dfrac{4^n+2}{3}$. □

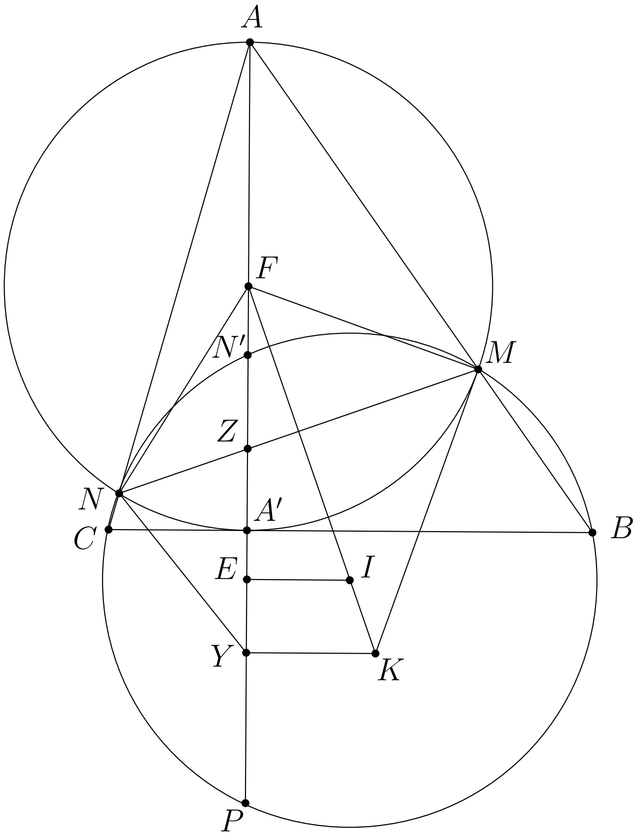
Bài 3.

Cho tam giác ABC có A cố định và B, C thay đổi trên một đường thẳng d cố định sao cho nếu gọi A' là hình chiếu của A lên d thì $\overline{A'B} \cdot \overline{A'C}$ âm và không đổi. Gọi M là hình chiếu của A' lên AB.

(a) Chứng minh rằng tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM thuộc một đường thẳng cố định.

(b) Gọi N là hình chiếu của A' lên AC, K là giao điểm của các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'MN$ tại M và N. Chứng minh rằng K thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải.



(a) Đặt $\overline{A'B} \cdot \overline{A'C} = -k^2$, $k > 0$, $(I,\, R) = (BMN)$. Từ I hạ IE vuông góc với AA'. Gọi N', P lần lượt là giao điểm của $(I,\, R)$ và AA'. Ta có

$$\overline{AM} \cdot \overline{AB} = \overline{AN'} \cdot \overline{AP} = AA'^2.$$

Do $\overline{AN'} = \overline{AA'} + \overline{A'N'}$ và $\overline{AP} = \overline{AA'} + \overline{A'P}$ nên

$$(\overline{AA'} + \overline{A'N'})(\overline{AA'} + \overline{A'P'}) = AA'^2.$$

Thu gọn lại, ta được

$$\overline{AA'}(\overline{A'N'} + \overline{A'P'}) = -\overline{A'N'} \cdot \overline{A'P}.$$

Mà $\overline{A'N'} \cdot \overline{A'P} = -k^2$ nên từ trên ta có $\overline{AA'}(\overline{A'N'} + \overline{A'P'}) = k^2$, từ đó suy ra

$$2\overline{A'E} = \frac{k^2}{\overline{AA'}}.$$

Suy ra E cố định. Vậy I chạy trên đường thẳng qua E vuông góc AA' cố định.

(b) Gọi F là trung điểm của AA', ta có F là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ANA'M$. Gọi Z là giao điểm của MN và AA', ta có

$$\overline{ZA} \cdot \overline{ZA'} = \overline{ZM} \cdot \overline{ZN'} = -k^2.$$

Suy ra Z cố định.

Bây giờ, từ K hạ KY vuông góc với AA'. Ta có F, M, N, K, Y cùng nằm trên một đường tròn, suy ra

$$\overline{ZF} \cdot \overline{ZY} = \overline{ZM} \cdot \overline{ZN'} = -k^2.$$

Từ đây dễ thấy Y cố định. Vậy K di động trên đường thẳng qua Y và vuông góc AA' cố định. □

Bài 4.

Cho đa thức $f(x) = x^2 + ax + b$. Biết phương trình $f(f(x)) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 và $x_1 + x_2 = -1$. Chứng minh rằng $b \leq -\dfrac{1}{4}$.

LỜI GIẢI. Từ điều kiện đề bài suy ra phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt c, d và x_1, x_2, x_3, x_4 là các nghiệm của cặp phương trình $f(x) = c$, $f(x) = d$. Ta xét các trường hợp.

- x_1, x_2 là nghiệm của cùng một phương trình, chẳng hạn phương trình $f(x) = c$.
- x_1, x_2 là nghiệm của hai phương trình khác nhau, chẳng hạn $f(x_1) = c$, $f(x_2) = d$.

Trong trường hợp thứ nhất, áp dụng định lý Viette ta suy ra $a = 1$ và do c là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ ta có

$$c^2 + c + b = 0.$$

Phương trình $f(x) = c \Leftrightarrow x^2 + x + b - c = 0$ có hai nghiệm phân biệt suy ra

$$\Delta = 1 - 4(b - c) > 0.$$

Tương tự $1 - 4(b - d) > 0$, suy ra $2 + 4(c + d) > 8b$. Nhưng $c + d = -1$ nên ta được

$$b < -\frac{1}{4}.$$

Xét trường hợp thứ hai. Trong trường hợp này ta có

$$x_1^2 + ax_1 + b = c, \quad x_2^2 + ax_2 + b = d.$$

Cộng hai đẳng thức này vế theo vế, với chú ý rằng $c + d = -a$ và $x_1 + x_2 = -1$, ta được

$$x_1^2 + x_2^2 + 2b = 0.$$

Suy ra $b = -\dfrac{(x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}{4} \leq -\dfrac{1}{4}$. □

Ngày thứ hai, 22/11/2008

Bài 5.

Giả sử $P(x) = (x+1)^p(x-3)^q = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$, trong đó p, q là các số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu $a_1 = a_2$ thì $3n$ là một số chính phương.

LỜI GIẢI. Ta có

$$P(x) = (x+1)^p(x-3)^q = (x^p + C_p^1x^{p-1} + C_p^2x^{p-2} + \cdots)(x^q - 3C_q^1x^{q-1} + 9C_q^2x^{q-2} + \cdots).$$

Từ đó suy ra

$$a_1 = C_p^1 - 3C_q^1, \quad a_2 = C_p^2 + 9C_q^2 - 3C_p^1C_q^1.$$

Như vậy đẳng thức $a_1 = a_2$ tương đương với

$$p - 3q = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{9q(q-1)}{2} - 3pq,$$

$$2p - 6q = p^2 - p + 9q^2 - 9q - 6pq,$$

$$3(p+q) = (p+3q)^2,$$

$$3n = (p+3q)^2.$$

Đẳng thức cuối cùng chứng tỏ $3n$ là một số chính phương (đpcm). □

Bài 6.

(a) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$$

(b) Chứng minh rằng tồn tại các số thực dương a, b, c sao cho

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} + \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abc} < 2.$$

LỜI GIẢI. **(a)** Xin nêu ra hai cách chứng minh cho bất đẳng thức này.

Cách 1. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Khi đó, với chú ý rằng $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} &= 1 + \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{ab+bc+ca} \geq 1 + \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{ab+bc+ca+c^2}\\ &= \frac{a^2+b^2+2c^2}{ab+bc+ca+c^2} = \frac{a^2+b^2+2c^2}{(a+c)(b+c)}.\end{aligned}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a^2+b^2+2c^2}{(a+c)(b+c)}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 2.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$(a^2+b^2+2c^2)(a+b)+8abc\geq 2(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc),$$

$$a^3+b^3+a^2b+b^2a+2c^2a+2c^2b+8abc\geq 2(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc),$$

$$a^3+b^3+4abc\geq a^2b+b^2a+2a^2c+2b^2c,$$

$$(a-b)^2(a+b-2c)\geq 0.$$

Do $c=\min\{a,\, b,\, c\}$ nên bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng.

Phép chứng minh hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Cách 2. Sử dụng phương pháp SOS. Ta viết lại bất đẳng thức như sau.

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}-1\geq 1-\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Do $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=\dfrac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$ và

$$(a+b)(b+c)(c+a)-8abc=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2,$$

nên bất đẳng thức trên có thể viết lại dưới dạng

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq 0,$$

trong đó

$$S_a=\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{2a}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

$$S_b=\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{2b}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

$$S_c=\frac{1}{ab+bc+ca}-\frac{2c}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c$. Khi đó ta dễ thấy $S_a\leq S_b\leq S_c$. Lại có

$$S_a+S_b=\frac{2}{ab+bc+ca}-\frac{2}{(a+c)(b+c)}=\frac{2c^2}{(a+c)(b+c)(ab+bc+ca)}>0,$$

nên $2S_b\geq S_a+S_b>0$, suy ra $S_c\geq S_b\geq 0$.

Từ đây với chú ý rằng $(a-c)^2\geq (b-c)^2$, ta được

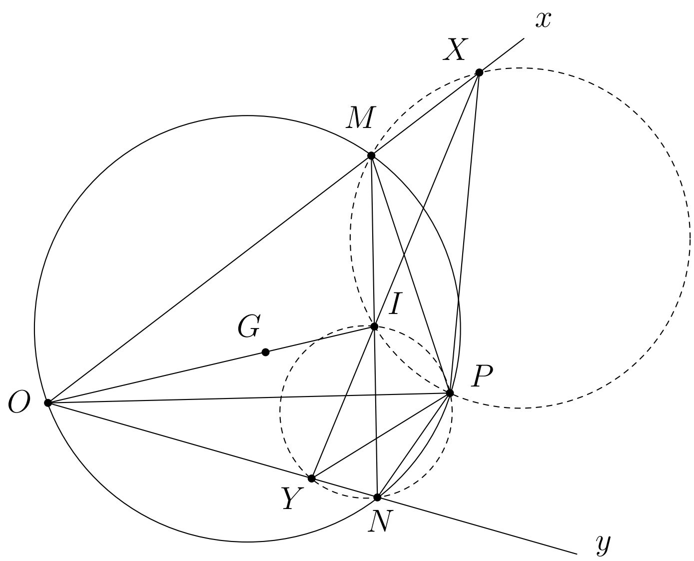
$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq S_a(b-c)^2+S_b(b-c)^2=(S_a+S_b)(b-c)^2\geq 0.$$

(b) Kiểm tra trực tiếp, dễ thấy bộ số $(a,\, b,\, c)=(2,\, 1,\, 1)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. $\square$

Bài 7.

Cho góc Oxy và một điểm P bên trong nó. γ là một đường tròn thay đổi nhưng luôn đi qua O và P, γ cắt các tia Ox, Oy tại M, N. Tìm quỹ tích trọng tâm G và trực tâm H của tam giác OMN.

Lời giải. **(a)** *Quỹ tích trọng tâm G của tam giác OMN.*



Gọi I là trung điểm của MN, ta có $\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OI}$ nên G là ảnh của I qua phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{2}{3}$. Từ đây suy ra

$$\{G\} = V_O^{\frac{2}{3}}(\{I\}),$$

tức quỹ tích G luôn là ảnh của quỹ tích I qua phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{2}{3}$. Ta đưa bài toán về tìm quỹ tích I.

Phần thuận. Gọi X là giao điểm thứ hai của (IPM) và Ox, Y là giao điểm thứ hai của (IPN) và OY. Ta có

$$\begin{aligned}(IX,\ IP) &\equiv (MX,\ MP)\ (I,\ M,\ X,\ P \text{ đồng viên})\\ &\equiv (MO,\ MP)\\ &\equiv (NO,\ NP)\ (O,\ P,\ M,\ N \text{ đồng viên})\\ &\equiv (NY,\ NP)\\ &\equiv (IY,\ IP)\ (I,\ N,\ Y,\ P \text{ đồng viên}).\end{aligned}$$

Suy ra $(IX,\ IY) \equiv 0 \pmod{\pi}$. Vậy X, Y, I thẳng hàng.

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned}(XY,\ XP) &\equiv (XI,\ XP)\\ &\equiv (MI,\ MP)\ (I,\ M,\ X,\ P \text{ đồng viên})\\ &\equiv (Oy,\ OP)\ (O,\ P,\ M,\ N \text{ đồng viên}),\end{aligned}$$

nên $(XY,\ XP)$ không đổi. Tương tự, ta cũng có $(YX,\ YP)$ không đổi. Mà P cố định nên X, Y cố định. Vậy I thuộc đường thẳng XY cố định.

Phần đảo. Lấy $X \in Ox$, $Y \in Oy$ sao cho

$$(XY,\ XP) \equiv (Oy,\ OP) \pmod{\pi},$$
$$(YX,\ YP) \equiv (Ox,\ OP) \pmod{\pi}$$

và lấy $I \in XY$. Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại $M \in Ox$, $N \in Oy$ sao cho đường tròn (OMN) đi qua P.

Thật vậy, gọi M là giao điểm thứ hai của (IXP) và Ox, N là giao điểm thứ hai của (IYP) và Oy. Ta có

$$\begin{aligned}(MX,\ MP) &\equiv (IX,\ IP)\ (I,\, M,\, X,\, P \text{ đồng viên})\\ &\equiv (IY,\ IP)\ (\text{Do } I \in XY)\\ &\equiv (NY,\ NP)\ (I,\, N,\, Y,\, P \text{ đồng viên}).\end{aligned}$$

Do đó O, M, P, N đồng viên. Từ đây suy ra (OMN) đi qua P.

Kết luận. Quỹ tích I là đường thẳng XY, trong đó X, Y dựng bởi

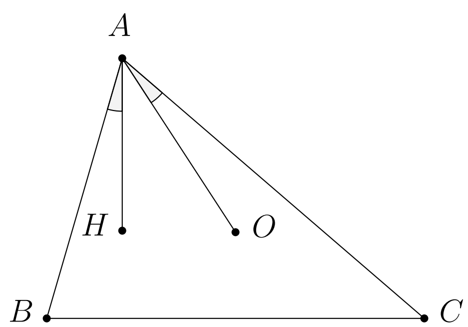
$$(XY,\ XP) \equiv (Oy,\ OP) \pmod{\pi},$$
$$(YX,\ YP) \equiv (Ox,\ OP) \pmod{\pi}.$$

(b) *Quỹ tích trực tâm H của tam giác OMN.*

Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề. *Cho tam giác ABC có góc $\angle BAC = \alpha$ không đổi, O là tâm đường tròn ngoại tiếp và H là trực tâm tam giác. Khi đó ta có $\dfrac{HA}{OA}$ không đổi và $\angle HAB = \angle OAC$.*

Chứng minh.

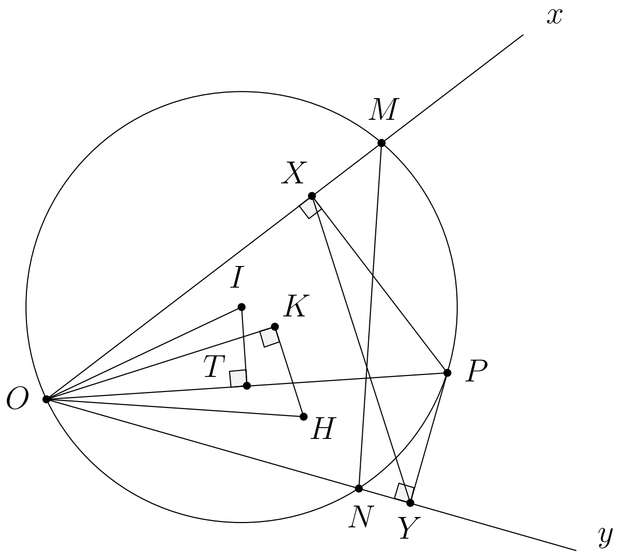


Xét các trường hợp $\angle BAC = \alpha < 90°$, $\angle BAC = \alpha = 90°$, $\angle BAC = \alpha > 90°$, ta luôn có $\angle HAB = \angle OAC$ và $HA = 2R|\cos A|$, nên

$$\frac{HA}{OA} = 2|\cos A| = \text{const}.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Bây giờ ta sẽ đi tìm quỹ tích trực tâm H của tam giác OMN.



Phần thuận. Gọi

- T là trung điểm của OP.
- X, Y là hình chiếu của P lên Ox, Oy.
- K là trực tâm tam giác OXY.
- I là tâm đường tròn (OMN).

Theo bổ đề ta có T, K là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm tam giác OXY nên

$$\frac{OK}{OT} = 2|\cos\angle xOy|, \quad \angle KOy = \angle TOx. \tag{1}$$

Tương tự, do I, H là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm tam giác OMN nên

$$\frac{OH}{OI} = 2|\cos\angle xOy|, \quad \angle IOy = \angle HOx. \tag{2}$$

Từ (1) và (2), ta có $\dfrac{OK}{OT} = \dfrac{OH}{OI}$ và $\angle IOT = \angle HOK$, suy ra

$$\triangle IOT \sim \triangle HOK.$$

Mặt khác, vì I là tâm đường tròn $(OMNP)$ và T là trung điểm của OP nên $IT \perp OP$ hay $\angle ITO = 90°$. Kết hợp với trên, ta có

$$\angle HKO = 90°.$$

Vậy H thuộc đường thẳng qua K vuông góc với OK (chú ý K cố định).

Phần đảo. Lấy H thuộc đường thẳng qua K vuông góc với OK, trong đó K là trực tâm tam giác OXY và X, Y là hình chiếu của P lên Ox, Oy. Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại $M \in Ox$, $N \in Oy$ sao cho (OMN) đi qua P và $\triangle OMN$ nhận H làm trực tâm.

Thật vậy, gọi T là trung điểm của OP và dựng $\triangle OTI \sim \triangle OKH$. Ta có

$$\angle OTI = \angle OKH = 90^\circ, \tag{3}$$

$$\angle IOT = \angle HOK. \tag{4}$$

Từ (3) suy ra I nằm trên trung trực của OP. Do đó nếu vẽ (I, IO) thì đường tròn này đi qua P và cắt Ox, Oy tại M, N. Ta có K, T là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OXY nên $\angle KOy = \angle TOx$. Kết hợp với (4), ta được

$$\angle IOy = \angle HOx.$$

Lại có $\triangle OTI \sim \triangle OKH$ nên $\dfrac{OH}{OI} = \dfrac{OT}{OK} = 2|\cos \angle xOy|$. Kết hợp với trên, ta suy ra H là trực tâm tam giác OMN.

Kết luận. Quỹ tích trực tâm tam giác OMN là đường thẳng qua K vuông góc với OK, trong đó K là trực tâm tam giác OXY và X, Y là hình chiếu của P lên Ox, Oy. □

Bài 8.

Với mỗi số nguyên dương n, gọi $S(n)$ là tổng các chữ số của n.

(a) Chứng minh rằng các số $n = 999$ và $n = 2999$ không thể biểu diễn được dưới dạng $a + b$ với $S(a) = S(b)$.

(b) Chứng minh rằng với mọi số $999 < n < 2999$, ta đều biểu diễn được dưới dạng $a + b$ với $S(a) = S(b)$.

LỜI GIẢI. **(a)** Chú ý rằng nếu $a + b = 999$ thì do phép cộng trên không có nhớ nên

$$S(a) + S(b) = S(999) = 27.$$

Như vậy không thể có $S(a) = S(b)$, do 27 là số lẻ. Lý luận tương tự đối với 2999.

(b) Trước hết ta chứng minh rằng nếu $999 < n < 2999$ thì tồn tại số tự nhiên k sao cho $S(k) + S(n - k)$ là một số chẵn. Thật vậy, nếu $S(n)$ là số chẵn thì ta chọn $k = 0$. Nếu $S(n)$ lẻ, giả sử $n = ba_2a_1a_0$, trong đó $b = 1$ hoặc 2. Do $999 < n < 2999$ và $n \neq 1999$ (do $S(n)$ lẻ) nên tồn tại i sao cho $a_i < 9$. Chọn i lớn nhất thoả mãn điều kiện này. Khi đó chọn $k = 10^i(a_i + 1)$ thì $S(k) = a_i + 1$ còn $S(n - k) = S(n) - a_i - 1 + 9$ (phép trừ có nhớ tạo ra số 9 ở vị trí a_i và giảm đi 1 đơn vị ở vị trí trước đó). Từ đó suy ra $S(k) + S(n - k) = a_i + 1 + S(n) - a_i - 1 + 9 = S(n) + 9$ chẵn do $S(n)$ lẻ.

Bây giờ giả sử ta đã tìm được k sao cho $S(k) + S(n - k)$ là số chẵn. Khi đó, đặt

$$k = a_3a_2a_1a_0, \quad n - k = b_3b_2b_1b_0.$$

Do $S(k) + S(n - k)$ chẵn nên số các chỉ số i sao cho $a_i + b_i$ lẻ là chẵn. Với 1 cặp chỉ số (i, j) sao cho $a_i + b_i = 2k_i + 1$, $a_j + b_j = 2k_j + 1$ lẻ, ta đổi $a_i \to a'_i = k_i + 1$, $b'_i = k_i$, $a'_j = k_j$, $b'_j = k_j + 1$. Với các chỉ số i sao cho $a_i + b_i = 2k_i$ ta đổi $a_i \to a'_i = b'_i = k_i$. Khi đó dễ dàng nhận thấy rằng $a'_3a'_2a'_1a'_0 + b'_3b'_2b'_1b'_0 = a_3a_2a_1a_0 + b_3b_2b_1b_0 = n$ và

$$S(a'_3a'_2a'_1a'_0) = S(b'_3b'_2b'_1b'_0),$$

và ta có điều phải chứng minh. □

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN NĂM HỌC 2009 - 2010

Ngày thứ nhất, 23/11/2009

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện đa thức

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$$

có ít nhất một nghiệm thực. Hãy xác định tất cả các bộ $(a,\ b,\ c)$ như thế sao cho tổng $a^2 + b^2 + c^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

LỜI GIẢI. Gọi x_0 là một nghiệm của $P(x)$ (dễ thấy $x_0 \neq 0$). Do $P(x_0) = 0$ nên ta có

$$-(x_0^4 + 1) = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$(x_0^4 + 1)^2 = (ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x_0^6 + x_0^4 + x_0^2).$$

Đặt $t = x_0^2 > 0$ thì từ trên suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(t^2+1)^2}{t^3 + t^2 + t} = \frac{(t^2+1)^2}{t(t^2+t+1)}.$$

Mà theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$t \leq \frac{t^2+1}{2}, \quad t^2 + t + 1 \leq t^2 + \frac{t^2+1}{2} = \frac{3}{2}(t^2+1).$$

Do đó $\dfrac{(t^2+1)^2}{t(t^2+t+1)} \geq \dfrac{4}{3}$, suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + 1 = 0 \\ x_0^2 = 1 \\ \dfrac{a}{x_0^3} = \dfrac{b}{x_0^2} = \dfrac{c}{x_0} \end{cases}.$$

Giải hệ này ta tìm được $a = b = c = -\dfrac{2}{3}$ hoặc $a = -b = c = \dfrac{2}{3}$. □

Bài 2.

Cho n là một số nguyên dương và tập hợp $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$. Một tập con của A được gọi là *tốt* nếu nó gồm đúng hai phần tử x, y sao cho $|x - y| \in \{1, n\}$. Tìm số các tập hợp $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ thỏa mãn A_i là tập con *tốt* của A với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ và

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A.$$

LỜI GIẢI. Gọi u_n $(n = 1, 2, \ldots)$ là số các tập hợp $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài đồng thời hai phần tử n và $n + 1$ không đi cùng nhau trong bất cứ tập A_i nào. Ta chia các số $1, 2, \ldots, 2n$ vào một bảng $2 \times n$ như sau

1	2	$\ldots$	n
$n+1$	$n+2$	$\ldots$	$2n$

Thế thì mỗi cách chọn được liệt kê trong u_n tương ứng với một cách chọn từ bảng trên các cặp gồm hai số ở cùng một cột hoặc hai số liên tiếp nhau trên cùng một hàng. Xét u_{n+1}, vì phần tử $2(n + 1)$ chỉ có thể đi cùng với $n + 1$ hoặc $2n + 1$ trong cùng một tập A_i nào đó nên ta xét hai khả năng như sau.

- $2(n + 1)$ và $n + 1$ cùng thuộc một tập A_i, giả sử đó là A_{n+1}.

1	2	$\ldots$	$n+1$
$n+2$	$n+3$	$\ldots$	$2(n+1)$

  Lúc này, mỗi cách chọn một bộ $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ ứng với một cách chọn các cặp số gồm các số ở cùng một cột hoặc ở cạnh nhau trong cùng một hàng từ một bảng $2 \times n$. Theo định nghĩa của ta số cách chọn như thế là u_n. Vậy trong trường hợp này có u_n cách chọn.

- $2(n + 1)$ và $2n + 1$ cùng thuộc một tập A_i, giả sử đó là A_{n+1}.

1	2	$\ldots$	n	$n+1$
$n+2$	$n+3$	$\ldots$	$2n+1$	$2(n+1)$

  Ta thấy $n + 1$ chỉ có thể đi cùng với $2(n + 1)$ (trường hợp $n + 1$ đi cùng với $n + 2$ không được xét trong u_{n+1}) nhưng $2(n + 1)$ đã đi cùng với $2n + 1$ nên $n + 1$ phải đi cùng với n trong cùng một tập A_i nào đó, giả sử là A_n. Đến đây, sử dụng lý luận như trường hợp trên ta thấy số cách chọn các tập $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$ là u_{n-1}.

Vậy theo quy tắc cộng thì $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Mặt khác, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ nên ta có thể dễ dàng tìm được công thức của u_n là

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Bây giờ ta xét trường hợp sinh ra bộ $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ có n và $n + 1$ đi cùng trong một tập A_i nào đó.

1	2	...	n
$n+1$	$n+2$	...	$2n$

Rõ ràng 1 chỉ có thể đi cùng với 2 hoặc $n+1$ nhưng $n+1$ đã đi cùng n nên 1 chỉ có thể đi cùng với 2. Tiếp theo, $n+2$ có thể đi cùng với 2, $n+1$ hay $n+3$ nhưng 2 đã đi với 1 còn $n+1$ đã đi với n nên $n+2$ phải đi với $n+3$. Tiếp tục, 3 có thể đi cùng 2, 4 hay $n+3$ nhưng 2 đã đi với 1 còn $n+3$ đã đi với $n+2$ nên 3 phải đi với 4. Tiếp tục lý luận như trên, ta suy ra A_i phải có dạng $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, ..., $\{n-2, n-1\}$, $\{n, n+1\}$, $\{n+1, n+2\}$, ..., $\{2n-1, 2n\}$. Từ đó suy ra, trường hợp này chỉ cho ta duy nhất một bộ $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ nếu n lẻ và không cho bộ nào nếu n chẵn.

Tóm lại, số các bộ $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$$\begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ 1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] & \text{nếu } n \text{ lẻ và } n > 1 \end{cases}.$$

Bài toán được giải quyết xong. □

Bài 3.

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

(1) f tăng ngặt trên $\mathbb{N}^*$;

(2) $f(f(n)) = 4n + 9$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

(3) $f(f(n) - n) = 2n + 9$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

LỜI GIẢI. Vì f làm hàm tăng và $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ nên

$$f(a) - f(b) \geq a - b, \quad \forall a,\ b \in \mathbb{N}^*,\ a > b.$$

Từ (3), ta có

$$\begin{aligned} 2 = 2(n+1) + 9 - (2n+9) &= f(f(n+1) - (n+1)) - f(f(n) - n) \\ &\geq f(n+1) - (n+1) - [f(n) - n] = f(n+1) - f(n) - 1. \end{aligned}$$

Suy ra $f(n+1) - f(n) \leq 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, tức là $f(n+1) - f(n) \in \{1, 2, 3\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(n+1) - f(n) = 1$ thì

  $$f(n+1) - (n+1) = f(n) - n,$$

  suy ra $2(n+1) + 9 = f(f(n+1) - (n+1)) = f(f(n) - n) = 2n + 9$, vô lý.

- Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $f(n+1) - f(n) = 3$ thì
$$f(n+1) - (n+1) = f(n) - n + 2.$$
Ta lại có
$$f\left(f(n+1) - (n+1)\right) - f\left(f(n) - n\right) = 2,$$
nên nếu $f(n) > n$ thì ta đặt $t = f(n) - n$, sẽ có $t \in \mathbb{N}^*$, hơn nữa $f(t+2) = f(t) + 2$, mà f tăng nên $f(t+1) - f(t) = 1$, mâu thuẫn. Vậy nên $f(n) \leq n$, song vì f tăng nên $f(n) \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, dẫn đến $f(n) = n$. Nhưng từ đây ta lại có
$$n = f(n) = f\left(f(n)\right) = 4n + 9,$$
suy ra $n = -3$, vô lý.

Vậy nên $f(n+1) - f(n) \notin \{1, 3\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và vì thế
$$f(n+1) - f(n) = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
Do đó $f(n) = 2n + k$ với k nguyên nào đó. Thay vào $f(f(n)) = 4n + 9$ ta có $k = 3$.
Vậy $f(n) = 2n + 3$ là hàm số duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài. □

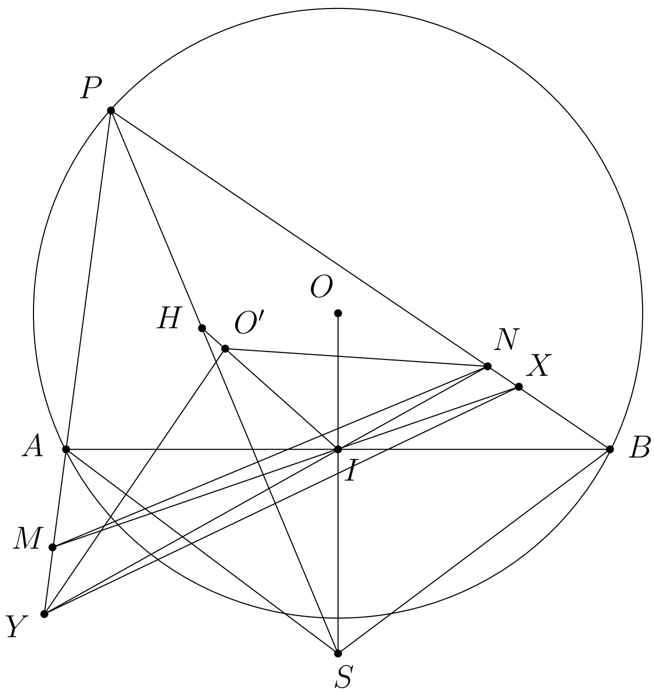
Bài 4.

Cho đường tròn (O) cố định và AB là một dây cố định khác đường kính của (O). Gọi I là trung điểm của AB. P là một điểm di động trên cung lớn AB của (O). Các điểm M, N lần lượt thuộc các tia PA, PB sao cho $\angle PMI = \angle PNI = \angle APB$.

(a) Chứng minh rằng đường cao từ P của tam giác PMN đi qua một điểm cố định.

(b) Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác PMN đi qua một điểm cố định.

LỜI GIẢI.



(a) Ký hiệu $X \equiv MI \cap PB$, $Y \equiv NI \cap PA$. Ta có $\angle PMI = \angle PNI = \angle APB$ nên các tam giác PMX và PNY cân tại X, Y. Từ đó suy ra

$$\angle PXM = \angle PYN = 180^\circ - 2\angle APB,$$

suy ra M, N, X, Y đồng viên. Gọi S là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB thì S cố định. Ta có $\angle ISB = 180^\circ - \angle AOB = 180^\circ - 2\angle APB = \angle PXM$ và tương tự $\angle ISA = \angle PYN$. Suy ra I, S, X, B đồng viên và I, S, Y, A cũng đồng viên. Suy ra

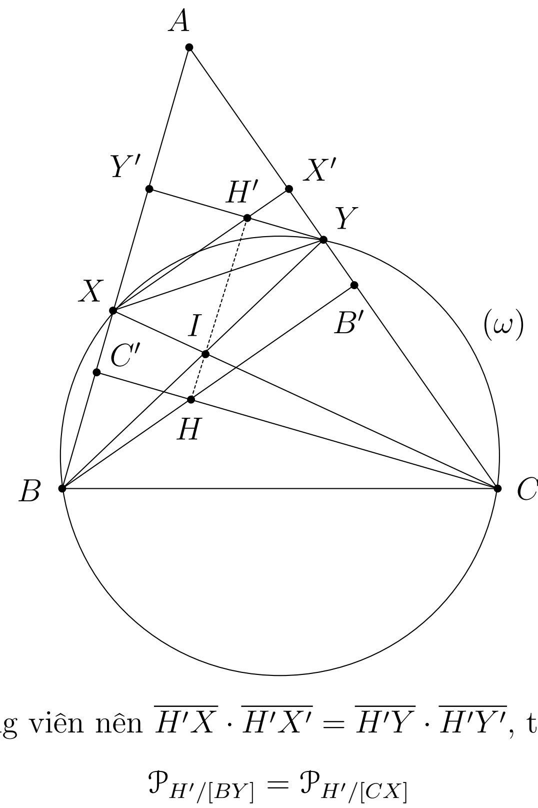
$$\angle SXB = \angle SYA = \angle SIB = 90^\circ,$$

suy ra IS là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác PXY. Mặt khác M, N, X, Y đồng viên nên MN và XY đối song với nhau trong $\angle APB$, suy ra $IS \perp MN$. Nói cách khác, đường cao từ P của tam giác PMN đi qua điểm S cố định (đpcm).

(b) Trước hết ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề. *Cho tam giác ABC và một đường tròn (ω) đi qua hai điểm B, C và cắt lại các cạnh AB, AC tại X, Y. Gọi XX', YY' là các đường cao của tam giác AXY và BB', CC' là các đường cao của tam giác ABC, H, H' là trực tâm của tam giác ABC và tam giác AXY. Ký hiệu $I \equiv BY \cap CX$. Khi đó H, I, H' thẳng hàng.*

Chứng minh.



Ta có X, Y, X', Y' đồng viên nên $\overline{H'X} \cdot \overline{H'X'} = \overline{H'Y} \cdot \overline{H'Y'}$, tức là

$$\mathcal{P}_{H'/[BY]} = \mathcal{P}_{H'/[CX]}$$

(ở đây ta dùng ký hiệu $[UV]$ để chỉ đường tròn đường kính UV). Ta có B, C, B', C' đồng viên nên $\overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{HC} \cdot \overline{HC'}$, tức là

$$\mathcal{P}_{H/[BY]} = \mathcal{P}_{H/[CX]}.$$

Cuối cùng B, C, X, Y đồng viên nên $\overline{IB} \cdot \overline{IY} = \overline{IC} \cdot \overline{IX}$, tức là

$$\mathcal{P}_{I/[BY]} = \mathcal{P}_{I/[CX]}.$$

Suy ra H, I, H' thẳng hàng vì cùng thuộc trục đẳng phương của $[BY]$ và $[CX]$. □

Vào bài, gọi H, O' lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác PMN. Ta có $O'P = O'M$ và $XP = XM$ nên XO' là đường trung trực của PM, suy ra

$$XO' \perp PY.$$

Tương tự ta cũng có

$$YO' \perp PX.$$

Vậy nên O' cũng chính là trực tâm của tam giác PXY. Áp dụng bổ đề cho tam giác PXY với $(\omega) \equiv (MNXY)$ thì ta có O', H, $I \equiv YN \cap MX$ thẳng hàng. Nói cách khác, đường thẳng Euler $O'H$ của tam giác PMN đi qua điểm I cố định (đpcm). □

Ngày thứ hai, 24/11/2009

Bài 5.

Cho a, b, c là các số thực dương. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} ax - aby + \dfrac{1}{xy} = bc^2 \\ abz - bc^2x + \dfrac{1}{zx} = a \\ bc^2y - az + \dfrac{1}{yz} = ab \end{cases}.$$

Lời giải. Đặt $(m, n, p) := (a, ab, bc^2)$, thế thì $m, n, p > 0$. Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} mx - ny + \dfrac{1}{xy} = p \\ nz - px + \dfrac{1}{zx} = m \\ py - mz + \dfrac{1}{yz} = n \end{cases} \Leftrightarrow (*) \begin{cases} mx - ny - p = -\dfrac{1}{xy} \\ -m + nz - px = -\dfrac{1}{zx} \\ -mz - n + py = -\dfrac{1}{yz} \end{cases}.$$

Xem $(*)$ là hệ phương trình tuyến tính ẩn (m, n, p), ta có

$$D = \begin{vmatrix} x & -y & -1 \\ -1 & z & -x \\ -z & -1 & y \end{vmatrix} = xyz - xyz - 1 - x^2 - y^2 - z^2 = -(1 + x^2 + y^2 + z^2) \neq 0$$

và

$$D_m = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{xy} & -y & -1 \\ -\dfrac{1}{zx} & z & -x \\ -\dfrac{1}{yz} & -1 & y \end{vmatrix} = -\frac{z}{x} - \frac{x}{z} - \frac{y^2}{zx} - \frac{1}{zx} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y} = -\frac{1 + x^2 + y^2 + z^2}{zx}.$$

Tính toán tương tự như D_m, ta cũng có

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -\dfrac{1}{xy} & -1 \\ -1 & -\dfrac{1}{zx} & -x \\ -z & -\dfrac{1}{yz} & y \end{vmatrix} = -\frac{1+x^2+y^2+z^2}{yz},$$

$$D_p = \begin{vmatrix} x & -y & -\dfrac{1}{xy} \\ -1 & z & -\dfrac{1}{zx} \\ -z & -1 & -\dfrac{1}{yz} \end{vmatrix} = -\frac{1+x^2+y^2+z^2}{xy}.$$

Từ đó suy ra

$$(m,\ n,\ p) = \left(\frac{D_m}{D},\ \frac{D_n}{D},\ \frac{D_p}{D}\right) = \left(\frac{1}{zx},\ \frac{1}{yz},\ \frac{1}{xy}\right).$$

Thay $(m,\ n,\ p) = (a,\ ab,\ bc^2)$, ta được

$$xy = \frac{1}{bc^2}, \quad yz = \frac{1}{ab}, \quad zx = \frac{1}{a}.$$

Nhân ba phương trình trên lại theo vế rồi lấy căn bậc hai, ta có $xyz = \pm\dfrac{1}{abc}$.

- Với $xyz = \dfrac{1}{abc}$, ta có $xyz = \dfrac{z}{bc^2} = \dfrac{x}{ab} = \dfrac{y}{a}$. Từ đó suy ra $x = \dfrac{1}{c}$, $y = \dfrac{1}{bc}$, $z = \dfrac{c}{a}$.
- Với $xyz = -\dfrac{1}{abc}$, ta có $xyz = \dfrac{z}{bc^2} = \dfrac{x}{ab} = \dfrac{y}{a}$. Do đó $x = -\dfrac{1}{c}$, $y = -\dfrac{1}{bc}$, $z = -\dfrac{c}{a}$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x,\ y,\ z)$ là $\left(\dfrac{1}{c},\ \dfrac{1}{bc},\ \dfrac{c}{a}\right)$ và $\left(-\dfrac{1}{c},\ -\dfrac{1}{bc},\ -\dfrac{c}{a}\right)$. □

Bài 6.

Cho dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n - 2)^2, \quad \forall n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Ký hiệu $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ Tìm tất cả các giá trị của a để $\{S_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $S_{n+1} - S_n = (S_n - 2)^2$. Vậy nên dãy $\{S_n\}$ thực ra là được xác định như sau

$$S_1 = a, \quad S_{n+1} = f(S_n) = S_n^2 - 3S_n + 4.$$

Ta có $S_{n+1} - S_n = (S_n - 2)^2 \geq 0$ nên $\{S_n\}$ là dãy không giảm. Mặt khác,

$$f'(x) = 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

x	$-\infty$	1	$3/2$	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$2 \searrow$	$7/4 \nearrow$	$2 \nearrow$	$+\infty$

Xét các trường hợp của a, ta thấy

- Nếu $a > 2$. Giả sử $\{S_n\}$ có giới hạn L thì ta phải có $L = f(L)$ nên $L \in \{1, 2\}$, song vì $\{S_n\}$ không giảm nên $L \geq a > 2$, mâu thuẫn. Vậy nếu $a > 2$ thì $\{S_n\}$ không hội tụ.
- Nếu $a < 1$ thì từ bảng biến thiên suy ra $S_2 = f(a) > 2$, quay về trường hợp 1 ta cũng có $\{S_n\}$ không hội tụ.
- Nếu $1 \leq a \leq 2$ thì từ bảng biến thiên ta có $\frac{7}{4} \leq S_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ đó, $\{S_n\}$ không giảm và bị chặn trên nên $\{S_n\}$ hội tụ.

Vậy các giá tị cần tìm của a là $a \in [1,\ 2]$. □

Bài 7.

Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình $x^2 + y^2 + x + y = kxy$ có nghiệm nguyên dương x, y.

LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y$. Xét giá trị k sao cho phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương. Trong các nghiệm ấy, ta gọi (x_0, y_0) là nghiệm sao cho $x_0 \geq y_0 > 0$ và x_0 nhỏ nhất. Xét tam thức

$$f(x) = x^2 - (ky_0 - 1)x + y_0^2 + y_0,$$

ta có $f(x_0) = 0$ và theo định lý Viette thì $f(x)$ còn có một nghiệm $x_0' = ky_0 - 1 - x_0$. Nhưng theo cách chọn (x_0, y_0) của ta thì $x_0' \geq x_0 \geq y_0$ nên y_0 nằm ngoài khoảng hai nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$ có hệ số cao nhất là số dương. Từ đó $f(y_0) \geq 0$. Do $f(y_0) = 2y_0^2 + 2y_0 - ky_0^2$ nên ta có

$$k \leq 2 + \frac{2}{y_0} \leq 4 \text{ (vì } y_0 \geq 1).$$

Suy ra $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

- Nếu $k = 1$ thì phương trình có dạng $x^2 + y^2 + x + y = xy$, tương đương với

$$\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + x + y = 0 \text{ (vô lý vì } x,\ y > 0).$$

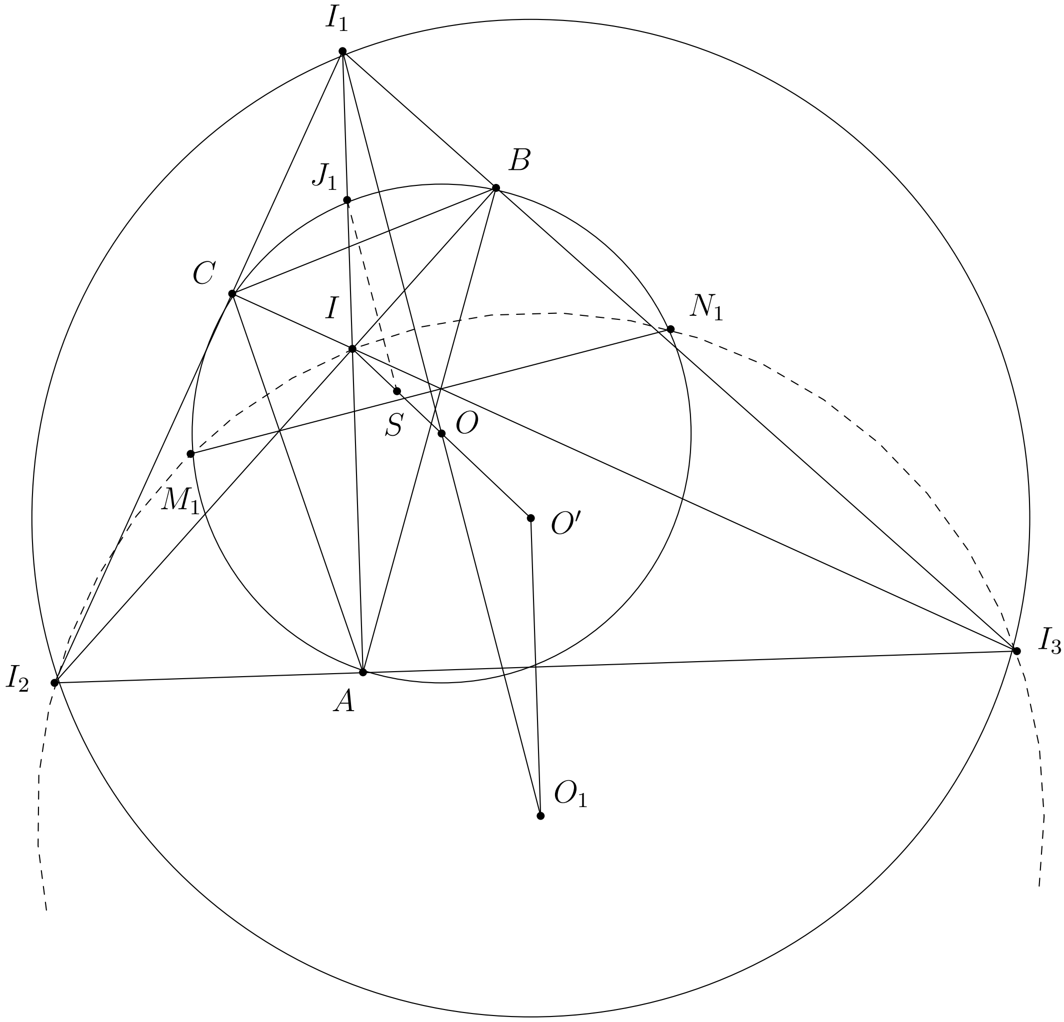
- Nếu $k = 2$ thì phương trình có dạng $x^2 + y^2 + x + y = 2xy$, tương đương với
$$(x - y)^2 + x + y = 0 \text{ (vô lý vì } x,\, y > 0).$$
- Nếu $k = 3$ thì phương trình có nghiệm $(x,\, y) = (2,\, 2)$.
- Nếu $k = 4$ thì phương trình có nghiệm $(x,\, y) = (1,\, 1)$.

Vậy các giá trị cần tìm của k là $k = 3$ và $k = 4$. □

Bài 8.

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Ký hiệu I, I_1, I_2, I_3 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và tâm các đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C của tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác II_2I_3 cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại hai điểm M_1, N_1. AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại J_1. Ký hiệu d_1 là đường thẳng đi qua J_1 và vuông góc với M_1N_1. Các đường thẳng d_2, d_3 được định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng d_1, d_2, d_3 đồng quy.

LỜI GIẢI.



Gọi (O') là đường tròn ngoại tiếp tam giác $I_1I_2I_3$ và (O_1) là đường tròn ngoại tiếp tam giác II_2I_3. Ta có $AI \perp I_2I_3$, $BI \perp I_3I_1$ nên I là trực tâm của tam giác $I_1I_2I_3$ và (O) là đường tròn Euler của tam giác $I_1I_2I_3$ nên O là trung điểm của IO'. Mà

$$\angle I_2O_1I_3 = 2(180^\circ - \angle I_2II_3) = 2\angle I_2I_1I_3 = \angle I_2O'I_3,$$

nên O' đối xứng với O_1 qua I_2I_3, suy ra $\overrightarrow{O'O_1} = \overrightarrow{I_1I}$, tức là AIO_1O' là hình bình hành. Mà O là trung điểm của IO' nên O cũng là trung điểm của I_1O_1. Hơn nữa $OO_1 \perp M_1N_1$ (đường nối tâm vuông góc với dây chung) nên $I_1O \perp M_1N_1$.

Mặt khác, J_1 là trung điểm của II_1 (đường tròn Euler đi qua trung điểm của đoạn thẳng nối trực tâm của tam giác với đỉnh của tam giác ấy) nên phép vị tự

$$V_I^{\frac{1}{2}} : I_1O_1 \to d_1.$$

Suy ra d_1 đi qua trung điểm S của OI. Lý luận tương tự thì d_2, d_3 cũng đi qua trung điểm S của OI. Vậy ta có d_1, d_2, d_3 đồng quy tại trung điểm S của OI (đpcm). $\square$

MỘT SỐ ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN

Là học sinh chuyên Toán chắc hẳn các bạn luôn muốn tìm cho mình những thử thách thật khó khăn và tìm cách vượt qua chúng. Đó là dịp để các bạn kiểm tra lại những kiến thức mình học được cũng như khả năng sáng tạo của bản thân, và qua đó biết được năng lực mình đến đâu. Các cuộc thi Olympic Toán được tổ chức ra nhằm mục đích như thế. Và ở đây, chúng tôi xin được trích ra một vài đề thi Olympic Toán thú vị trong hai năm gần đây. Các bạn hãy cùng thử sức với chúng nhé!

CUỘC THI OLYMPIC TOÁN MANG TÊN LEONARD EULER (24 - 27/3/2009)

Ngày thi thứ nhất

Bài 1.

Bộ tộc của Mumbo và Jumbo sống bên cạnh một bờ sông. Có một lần hai người dân bộ lạc phải chạy gấp đến bộ tộc bên cạnh để đưa tin: Mumbo trẻ khỏe và Jumbo thông thái. Mumbo chạy với vận tốc 11km/h đến trại bè gần nhất và đi bè đến bộ tộc bên cạnh. Còn Jumbo không vội vàng mà đi bộ với vận tốc 6km/h đến một trại bè khác và đi bè đến bộ tộc bên cạnh. Kết quả là Jumbo đến sớm hơn Mumbo.

Biết rằng dòng sông thẳng, các bè di chuyển với vận tốc của dòng sông và vận tốc này không đổi trên toàn tuyến sông và là một số nguyên không nhỏ hơn 6km/h. Hãy tìm giá trị lớn nhất có thể của vận tốc này.

Bài 2.

Phải chăng với mọi n nguyên dương lớn hơn 2009, từ các phân số

$$\frac{1}{n},\quad \frac{2}{n-1},\quad \frac{3}{n-2},\quad \ldots,\quad \frac{n-1}{2},\quad \frac{n}{1}$$

luôn chọn được hai cặp phân số có tổng bằng nhau?

Bài 3.

Cho tam giác ABC cân tại B. Điểm D nằm trong tam giác ABC sao cho góc ADC gấp đôi góc ABC. Chứng minh rằng hai lần khoảng cách từ B đến phân giác ngoài góc D của tam giác ADC bằng $AD + DC$.

Bài 4.

Ở đất nước Leonardia mọi con đường đều có một chiều. Mỗi con đường nối hai thành phố và không đi qua các thành phố khác. Bộ thống kê tính cho mỗi thành phố tổng số dân của các thành phố mà từ đó có đường đi đến thành phố đang tính và tính tổng số dân của các thành phố mà từ thành phố đang tính có đường đi tới. Chứng minh rằng có ít nhất một thành phố mà số thứ nhất không nhỏ hơn số thứ hai.

Ngày thi thứ hai

Bài 1.

Tồn tại hay không một cách thay 6 số nguyên liên tiếp vào các dấu "$*$" để được một đẳng thức đúng

$$BSCNN(*,\ *,\ *) - BSCNN(*,\ *,\ *) = 2009?$$

Bài 2.

Trong tứ giác $ABCD$ ta có $AB = BD$, $\angle ABD = \angle DBC$. Trên đường chéo BD tồn tại điểm K sao cho $BK = BC$. Chứng minh rằng $\angle KAD = \angle KCD$.

Bài 3.

Trên bàn có 10 đống hạt dẻ với số lượng là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 hạt dẻ. Hai người luân phiên nhau bốc hạt dẻ, mỗi lần bốc 1 hạt cho đến khi còn lại 3 hạt dẻ thì dừng. Nếu đây là 3 hạt dẻ thuộc 3 đống khác nhau thì người đi sau thắng. Trong trường hợp ngược lại người đi trước thắng. Hỏi ai là người có chiến thuật thắng, cho dù đối thủ của anh ta chơi thế nào?

Bài 4.

Trên một băng giấy vô hạn ta viết các số liền nhau. Đầu tiên là số 1 và các số sau bằng số trước cộng với chữ số khác 0 nhỏ nhất của số đứng trước. Hãy tìm số chữ số của số đứng ở vị trí $9 \cdot 1000^{1000}$.

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN TRUNG ÂU 2010

Phần A. Đề thi cá nhân

Bài 1.

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + (y + 1)f(x) + (x + 1)f(y),$$

với mọi $x,\ y \in \mathbb{R}$.

Bài 2.

Tất cả các ước dương của số nguyên dương N được viết lên một bảng đen. Hai người chơi A và B tiến hành một trò chơi luân phiên như sau: Ở lượt đầu tiên, A xóa đi số N. Nếu số cuối cùng được xóa là d thì người chơi tiếp theo phải xóa một ước số của d hoặc một bội số của d. Người nào không xóa được nữa sẽ thua. Xác định tất cả các giá trị của N sao cho A luôn có cách thắng mà không phụ thuộc vào B.

Bài 3.

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp có E nằm trên đường chéo AC thỏa mãn $AD = AE$, $CB = CE$. Gọi M là tâm đường tròn ngoại tiếp k của tam giác BDE. Đường tròn k cắt đường thẳng AC tại E và F. Chứng minh rằng FM, AD, BC đồng quy.

Bài 4.

Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn hai điều kiện sau

(a) n phải có ít nhất 4 ước nguyên dương khác nhau.

(b) Với hai ước a, b bất kỳ của n thỏa mãn $1 < a < b < n$, thì $(b-a) \mid n$.

Phần B. Đề thi đồng đội

Bài 1.

Cho ba dãy tăng thực sự gồm các số nguyên dương

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\quad b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\quad c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots$$

Biết rằng mỗi số nguyên dương thuộc về đúng một trong ba dãy nêu trên. Đồng thời, với mỗi số nguyên dương n, các điều kiện sau đây được thỏa mãn.

(a) $c_{a_n} = b_n + 1$.

(b) $a_{n+1} > b_n$.

(c) $c_{n+1}c_n - (n+1)c_{n+1} - nc_n$ là số chẵn.

Tính a_{2010}, b_{2010}, c_{2010}.

Bài 2.

Tìm hằng số C_n lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$,

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 + C_n(a_1 - a_n)^2.$$

Bài 3.

Tại mỗi đỉnh của n-giác đều có đặt một pháo đài. Tại cùng một thời điểm, mỗi pháo đài bắn vào một trong hai pháo đài gần nó nhất và trúng đích. Ta gọi *kết quả bắn* là tập hợp các pháo đài bị bắn trúng (chú ý không phân biệt pháo đài bị bắn một hay hai lần). Gọi $P(n)$ là số lượng có thể của *kết quả bắn*. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $k \geq 3$, ta có $P(k)$ và $P(k+1)$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 4.

Cho n là một số nguyên dương. Một hình vuông $ABCD$ được chia thành n^2 hình vuông đơn vị. Mỗi hình vuông đơn vị lại được chia đôi thành hai tam giác bởi đường chéo song

song với cạnh BD. Ta tô màu đỏ một số đỉnh của các hình vuông đơn vị sao cho mỗi tam giác trong $2n^2$ tam giác con nêu trên có ít nhất một đỉnh được tô màu đỏ. Tìm số nhỏ nhất các đỉnh được tô màu đỏ.

Bài 5.

Đường tròn nội tiếp của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA và AB lần lượt tại D, E và F. Gọi K là điểm đối xứng với D qua tâm đường tròn nội tiếp. DE cắt FK tại S. Chứng minh rằng AS song song với BC.

Bài 6.

Cho các điểm A, B, C, D, E thỏa mãn $ABCD$ là tứ giác nội tiếp và $ABDE$ là hình bình hành. Các đường chéo AC và BD cắt nhau tại S, các tia AB và DC cắt nhau tại F. Chứng minh rằng $\angle AFS = \angle ECD$.

Bài 7.

Với mỗi số tự nhiên n, ta gọi a_n là số nguyên dương có biễu diễn thập phân là

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

Chứng minh rằng $\dfrac{a_n}{3}$ luôn có thể biểu diễn thành tổng của hai số lập phương nhưng không thể biểu diễn thành tổng của hai số chính phương.

Bài 8.

Cho $n \in \mathbb{N}^*$, n không là lũy thừa của 2. Chứng minh tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho

(a) m là tích của hai số nguyên dương liên tiếp.

(b) Biễu diễn thập phân của m gồm hai phần giống nhau, mỗi phần có đúng n chữ số.

ĐỀ KIỂM TRA SỐ 1 (10/10/2010)
(CÂU LẠC BỘ TOÁN HỌC)

Bài 1.

Trên một hòn đảo, một cư dân bất kỳ hoặc toàn nói thật, hoặc toàn nói dối. Alice và Bob là cư dân hòn đảo này. Alice nói "Đúng một trong hai chúng tôi nói dối". Bob nói "Alice đã nói thật". Hãy xác định xem ai là người nói thật, ai là người nói dối.

Bài 2.

Có 8 vật có trọng lượng là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 nhưng một vật bị mất, còn 7 vật còn lại được xếp thành một dãy tăng dần theo trọng lượng. Hãy dùng 3 lần cân bàn (có thể kiểm tra được hai nhóm vật có trọng lượng bằng nhau hay không) để xác định xem vật bị mất có trọng lượng bao nhiêu.

Bài 3.

Chứng minh rằng tổng bình phương của 24 số nguyên tố có ba chữ số bất kỳ đều chia hết cho 24.

Bài 4.

Hai số nguyên tố p và q được gọi là *hai số nguyên tố sánh đôi* nếu $q = p + 2$. Chứng minh rằng nếu p và q là hai số nguyên tố sánh đôi thì $p^q + q^p$ chia hết cho $p + q$.

Bài 5.

Dãy số Fibonacci là dãy số xác định bởi $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 2$ ta có

$$|F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1}| = 1.$$