ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT

1. Các tính chất.

• Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

• Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

• Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt cùng thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

• Có bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

• Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa. Vậy thì: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng .

• Trên mỗi mặt phẳng các, kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

2. Các cách xác định một mặt phẳng

• Ba điểm không thẳng hàng thuộc mặt phẳng. (mp(ABC), (ABC))

• Một điểm và một đường thẳng không đi qua điểm đó thuộc mặt phẳng. (mp(A,d))

• Hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng. (mp(a, b))

3. Các quy tắc vẽ hình, biểu diễn của hình không gian

• Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.

• Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.

• Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.

• Đường nhìn thấy vẽ nét liền, đường bị che khuất vẽ nét đứt.

4. Hình chóp và hình tứ diện.

a) Hình chóp.

Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Lấy điểm S nằm ngoài (α).

Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ được gọi là hình chóp, kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.

Ta gọi S là đỉnh, đa giác $A_1A_2...A_n$ là đáy, các đoạn $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ là các cạnh bên, $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$ là các cạnh đáy, các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ là các mặt bên…

b) Hình Tứ diện

Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ABD, ACD và (BCD) được gọi là tứ diện $ABCD$.

B - BÀI TẬP

Câu 1: Cho 2 đường thẳng a, b cắt nhau và không đi qua điểm A. *Xác định được nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng bởi a, b và A ?*

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Có 3 mặt phẳng gồm $(a,b),(A,a),(B,b)$.

Câu 2: Cho tứ giác lồi $ABCD$ và điểm S không thuộc mp (ABCD). *Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng xác định bởi các điểm A, B, C, D, S ?*

A. 5 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 8

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Có $C_4^2 + 1 = 7$ mặt phẳng.

Câu 3: Cho bốn điểm không đồng phẳng, ta có thể xác định được nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ bốn điểm đã cho ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Hướng dẫn giải:

Chọn **C.**

Do bốn điểm không đồng phẳng nên không tồn tại bộ ba điểm thẳng hàng trong số bốn điểm đó. Cứ ba điểm không thẳng hàng xác định một mặt phẳng nên số mặt phẳng phân biệt có thể lập được từ bốn điểm đã cho là $C_4^3 = 4$.

Câu 4: Trong mp(α), cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Điểm $S \notin mp(\alpha)$. Có mấy mặt phẳng tạo bởi S và hai trong số bốn điểm nói trên?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 8.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Điểm S cùng với hai trong số bốn điểm A, B, C, D tạo thành một mặt phẳng, từ bốn điểm ta có 6 cách chọn ra hai điểm, nên có tất cả 6 mặt phẳng tạo bởi S và hai trong số bốn điểm nói trên.

Câu 5: Trong mặt phẳng (α) cho tứ giác $ABCD$, điểm $E \notin (\alpha)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi ba trong năm điểm A, B, C, D, E?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Điểm E và 2 điểm bất kì trong 4 điểm A, B, C, D tạo thành 6 mặt phẳng, bốn điểm A, B, C, D tạo thành 1 mặt phẳng.

Vậy có tất cả 7 mặt phẳng.

Câu 6: Cho năm điểm A, B, C, D, E trong đó không có bốn điểm nào ở trên cùng một mặt phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi ba trong số năm điểm đã cho?

A. 10. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 14.

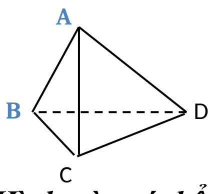
Hướng dẫn giải:

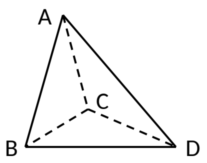
Chọn A.

Cứ chọn ra ba điểm trong số năm điểm A, B, C, D, E ta sẽ có một mặt phẳng. Từ năm điểm ta có 10 cách chọn ra ba điểm bất kỳ trong số năm điểm đã cho, nên có 10 phẳng tạo bởi ba trong số năm điểm đã cho.

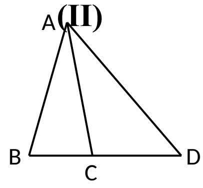
Câu 7: Trong các hình sau :

(I)

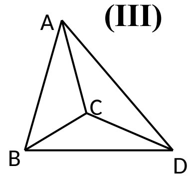




(IV)



(II)



(III)

Hình nào có thể là hình biểu diễn của một hình tứ diện ? (Chọn Câu đúng nhất)

A. (I). **B. (I), (II).** **C. (I), (II), (III).** **D. (I), (II), (III), (IV).**

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Hình (III) sai vì đó là hình phẳng.

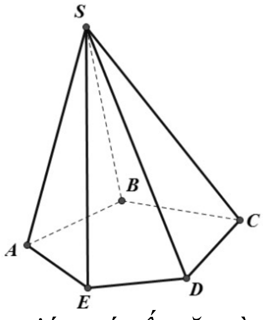
Câu 8: *Một hình chóp có đáy là ngũ giác có số mặt và số cạnh là :*

A. 5 mặt, 5 cạnh. **B.** 6 mặt, 5 cạnh. **C.** 6 mặt, 10 cạnh. **D.** 5 mặt, 10 cạnh.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Hình chóp ngũ giác có 5 mặt bên + 1 mặt đáy. 5 cạnh bên và 5 cạnh đáy.



Câu 9: *Một hình chóp cụt có đáy là một n giác, có số mặt và số cạnh là :*

A. $n+2$ mặt, $2n$ cạnh. **B.** $n+2$ mặt, $3n$ cạnh.

C. $n+2$ mặt, n cạnh. **D.** n mặt, $3n$ cạnh.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Lấy ví dụ hình chóp cụt tam giác ($n=3$) có 5 mặt và 9 cạnh ⇒ đáp án **B.**

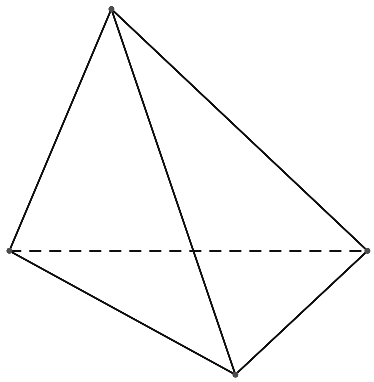
Câu 10: Trong các hình chóp, hình chóp có ít cạnh nhất có số cạnh là bao nhiêu?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Hình tứ diện là hình chóp có số cạnh ít nhất.



Câu 11: Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau?

A. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có vô số điểm chung khác nữa.

B. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

C. Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

D. Nếu ba điểm phân biệt M,N,P cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì chúng thẳng hàng.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có thể trùng nhau. Khi đó, chúng có vô số đường thẳng chung ⇒ **B** sai.

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG

Phương pháp 1
Cơ sở của phương pháp tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) cần thực hiện:
- Bước 1: Tìm hai điểm chung A và B của (α) và (β).
- Bước 2: Đường thẳng AB là giao tuyến cần tìm ($AB=(\alpha)\cap(\beta)$).

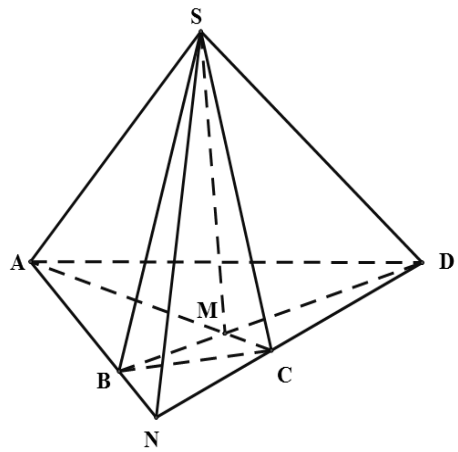
Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AC\cap BD=M$ và $AB\cap CD=N$. Giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD) là đường thẳng

A. SN. **B.** SC. **C.** SB. **D.** SM.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD) là đường thẳng SM.



Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AC\cap BD=M$ và $AB\cap CD=N$. Giao tuyến của mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD) là đường thẳng

A. SN. **B.** SA. **C.** MN. **D.** SM.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $(AB//CD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.

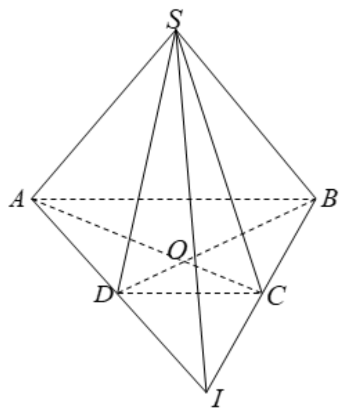
B. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).

C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của $ABCD$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



- Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên (SAB), (SBC), (SCD), (SAD) nên A đúng.
- S, O là hai điểm chung của (SAC) và (SBD) nên B đúng.
- S, I là hai điểm chung của (SAD) và (SBC) nên C đúng.
- Giao tuyến của (SAB) và (SAD) là SA, rõ ràng SA không thể là đường trung bình của hình thang $ABCD$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi O là một điểm bên trong tam giác BCD và M là một điểm trên đoạn AO. Gọi I, J là hai điểm trên cạnh BC, BD. Giả sử IJ cắt CD tại K, BO cắt IJ tại E và cắt CD tại H, ME cắt AH tại F. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MIJ) và (ACD) là đường thẳng:

A. KM. **B.** AK. **C.** MF. **D.** KF.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Do K là giao điểm của IJ và CD nên

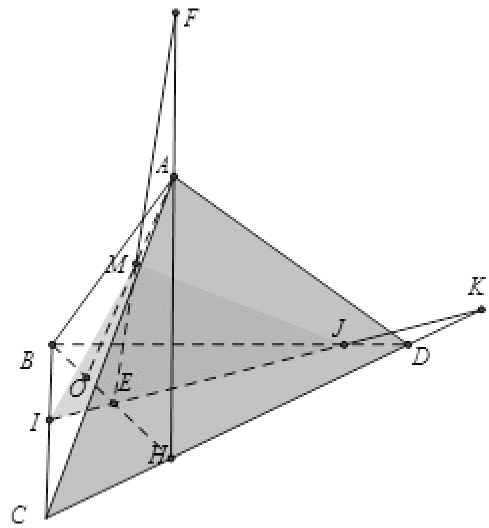
$K \in (MIJ) \cap (ACD)$ (1)

Ta có F là giao điểm của ME và AH

Mà $AH \subset (ACD)$, $ME \subset (MIJ)$ nên

$F \in (MIJ) \cap (ACD)$ (2)

Từ (1) và (2) có $(MIJ) \cap (ACD) = KF$



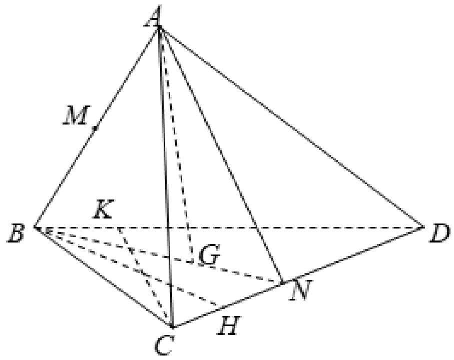
Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$. G là trọng tâm tam giác BCD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (GAB) là:

A. AM, M là trung điểm AB. **B.** AN, N là trung điểm CD.

C. AH, H là hình chiếu của B trên CD. **D.** AK, K là hình chiếu của C trên BD.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



A là điểm chung thứ nhất của (ACD) và (GAB)

G là trọng tâm tam giác BCD, N là trung điểm CD nên $N \in BG$ nên N là điểm chung thứ hai của (ACD) và (GAB). Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (GAB) là AN.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I là trung điểm của SD, J là điểm trên SC và không trùng trung điểm SC. Giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (AIJ) là:

A. AK, K là giao điểm IJ và BC. **B.** AH, H là giao điểm IJ và AB.

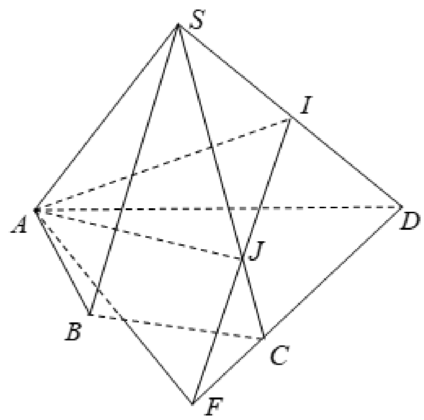
C. AG, G là giao điểm IJ và AD. **D.** AF, F là giao điểm IJ và CD.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

A là điểm chung thứ nhất của $(ABCD)$ và (AIJ)

IJ và CD cắt nhau tại F, còn IJ không cắt BC, AD, AB nên F là điểm chung thứ hai của $(ABCD)$ và (AIJ). Vậy giao tuyến của $(ABCD)$ và (AIJ)là AF.



Câu 7: phẳng (MBD) và (ABN) là:

A. MN. **B.** AM.

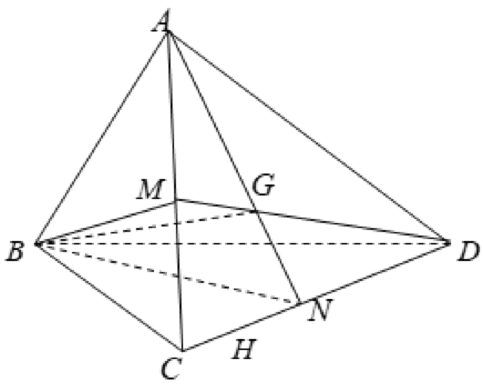
C. BG, G là trọng tâm tam giác ACD. **D.** AH, H là trực tâm tam giác ACD.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

B là điểm chung thứ nhất của (MBD) và (ABN).

G là trọng tâm tam giác ACD nên $G \in AN, G \in DM$ do đó G là điểm chung thứ hai của (MBD) và (ABN). Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (MBD) và (ABN) là BG.



Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là:

A. SD. **B.** SO, O là tâm hình bình hành $ABCD$.

C. SG, G là trung điểm AB. **D.** SF, F là trung điểm CD.

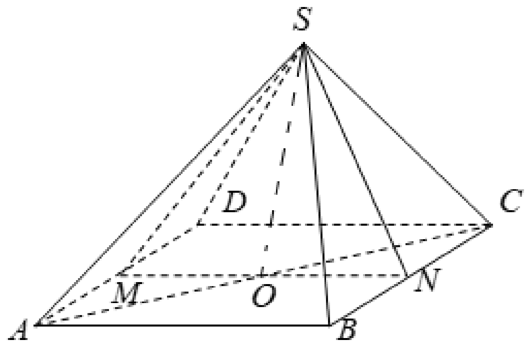
Hướng dẫn giải:

Chọn B.

S là điểm chung thứ nhất của (SMN) và (SAC).

O là giao điểm của AC và MN nên $O \in AC, O \in MN$ do đó O là điểm chung thứ hai của (SMN) và (SAC).

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là SO.



Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SA và SB. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $IJCD$ là hình thang.

B. $(SAB) \cap (IBC) = IB$.

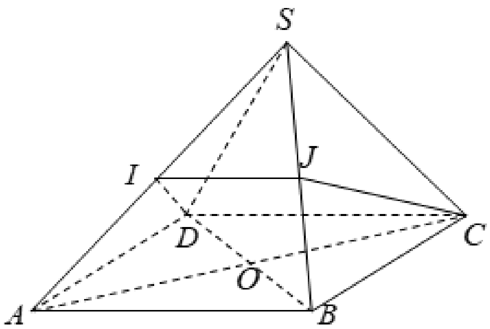
C. $(SBD) \cap (JCD) = JD$.

D. $(IAC) \cap (JBD) = AO$, O là tâm hình bình hành $ABCD$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có $(IAC) \equiv (SAC)$ và $(JBD) \equiv (SBD)$. Mà $(SAC) \cap (SBD) = SO$ trong đó O là tâm hình bình hành $ABCD$.



Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $(AD€BC)$. Gọi M là trung điểm CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là:

A. SI, I là giao điểm AC và BM.

B. SJ, J là giao điểm AM và BD.

C. SO, O là giao điểm AC và BD.

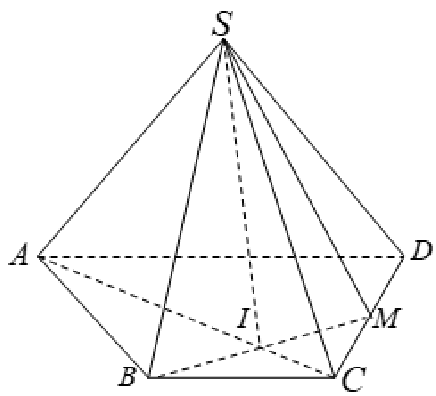
D. SP, P là giao điểm AB và CD.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

S là điểm chung thứ nhất của (MSB) và (SAC).

I là giao điểm của AC và BM nên $I \in AC$, $I \in BM$ do đó I là điểm chung thứ hai của (MSB) và (SAC). Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là SI.



Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$. G là trọng tâm tam giác BCD, M là trung điểm CD, I là điểm trên đoạn thẳng AG, BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $AM = (ACD) \cap (ABG)$.

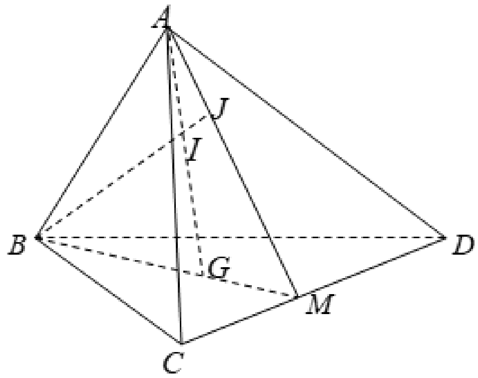
B. A, J, M thẳng hàng.

C. J là trung điểm AM.

D. $DJ = (ACD) \cap (BDJ)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



Ta có $A \in (ACD) \cap (ABG)$,

$\begin{cases} M \in BG \\ M \in CD \end{cases} \Rightarrow M \in (ACD) \cap (ABG)$ nên

$AM = (ACD) \cap (ABG)$.

Nên $AM = (ACD) \cap (ABG)$ vậy A đúng.

A, J, M cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt $(ACD), (ABG)$ nên A, J, M thẳng hàng, vậy B đúng.

Vì I là điểm tùy ý trên AG nên J không phải lúc nào cũng là trung điểm của AM.

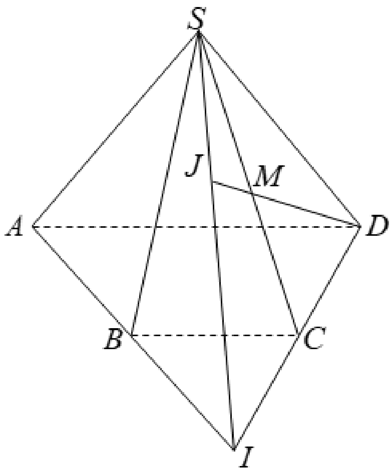
Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $AD // BC$. Gọi I là giao điểm của AB và DC, M là trung điểm SC. DM cắt mặt phẳng (SAB) tại J. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. S, I, J thẳng hàng. **B.** $DM \subset mp(SCI)$.

C. $JM \subset mp(SAB)$. **D.** $SI = (SAB) \cap (SCD)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.



- S, I, J thẳng hàng vì ba điểm cùng thuộc hai mp (SAB) và (SCD) nên A đúng.
- $M \in SC \Rightarrow M \in (SCI)$ nên $DM \subset mp(SCI)$ vậy B đúng.
- $M \notin (SAB)$ nên $JM \not\subset mp(SAB)$ vậy C sai.
- Hiển nhiên D đúng theo giải thích A.

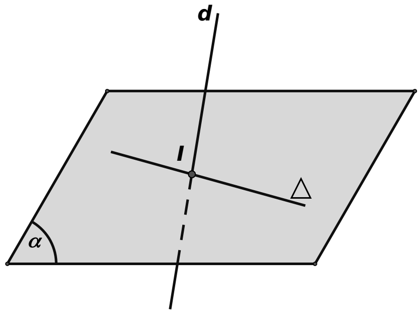
DẠNG 2: XÁC ĐỊNH GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

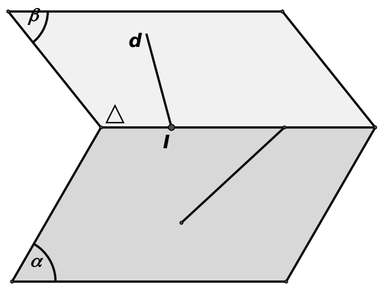
Phương pháp

Cơ sở của phương pháp tìm giao điểm I của đường thẳng d và mặt phẳng (α) là xét hai khả năng xảy ra:

- Trường hợp 1: (α) chứa đường thẳng Δ và Δ cắt đường thẳng d tại I.

  Khi đó: $I = d \cap \Delta \Rightarrow I = d \cap (\alpha)$





- Trường hợp 2: (α) không chứa đường thẳng nào cắt d.

  + Tìm $(\beta) \supset d$ và $(\alpha) \cap (\beta) = \Delta$;

  + Tìm $I = d \cap \Delta$;

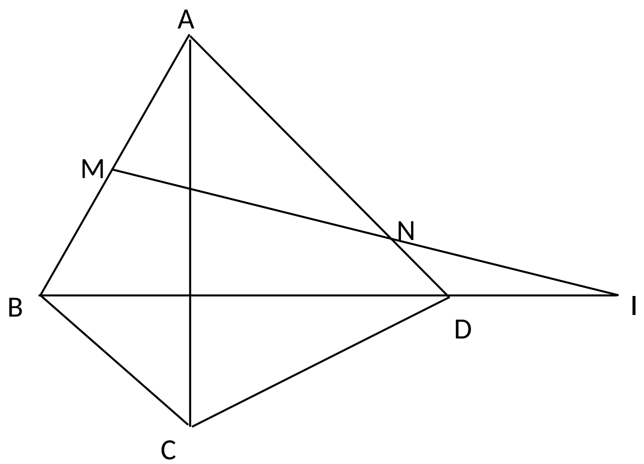
  $\Rightarrow I = d \cap (\alpha)$.

Câu 1: Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên AB, AD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho MN cắt BD tại I. *Điểm I không thuộc mặt phẳng nào sao đây:*

A. (BCD). **B.** (ABD). **C.** (CMN). **D.** (ACD).

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



$I \in BD \Rightarrow I \in (BCD), (ABD)$

$I \in MN \Rightarrow I \in (CMN)$

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ có các cạnh đối diện không song song với nhau và M là một điểm trên cạnh SA.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng SB với mặt phẳng (MCD).

A. Điểm H, trong đó $E = AB \cap CD$, $H = SA \cap EM$

B. Điểm N, trong đó $E = AB \cap CD$, $N = SB \cap EM$

C. Điểm F, trong đó $E = AB \cap CD$, $F = SC \cap EM$

D. Điểm T, trong đó $E = AB \cap CD$, $T = SD \cap EM$

b) Tìm giao điểm của đường thẳng MC và mặt phẳng (SBD).

A. Điểm H, trong đó $I = AC \cap BD$, $H = MA \cap SI$
B. Điểm F, trong đó $I = AC \cap BD$, $F = MD \cap SI$
C. Điểm K, trong đó $I = AC \cap BD$, $K = MC \cap SI$
D. Điểm V, trong đó $I = AC \cap BD$, $V = MB \cap SI$

Hướng dẫn giải:

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = AB \cap CD$.

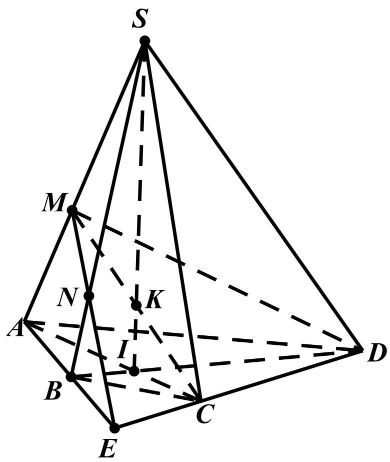
Trong (SAB) gọi.

Ta có $N \in EM \subset (MCD) \Rightarrow N \in (MCD)$ và $N \in SB$ nên $N = SB \cap (MCD)$.

b) Trong $(ABCD)$ gọi $I = AC \cap BD$.

Trong (SAC) gọi $K = MC \cap SI$.

Ta có $K \in SI \subset (SBD)$ và $K \in MC$ nên $K = MC \cap (SBD)$.



Câu 3: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, M là một điểm trên cạnh SC, N là trên cạnh BC. Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN).

A. Điểm K, trong đó $K = IJ \cap SD$, $I = SO \cap AM$, $O = AC \cap BD, J = AN \cap BD$
B. Điểm H, trong đó $H = IJ \cap SA$, $I = SO \cap AM$, $O = AC \cap BD, J = AN \cap BD$
C. Điểm V, trong đó $V = IJ \cap SB$, $I = SO \cap AM$, $O = AC \cap BD, J = AN \cap BD$
D. Điểm P, trong đó $P = IJ \cap SC$, $I = SO \cap AM$, $O = AC \cap BD, J = AN \cap BD$

Hướng dẫn giải:

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap BD, J = AN \cap BD$.

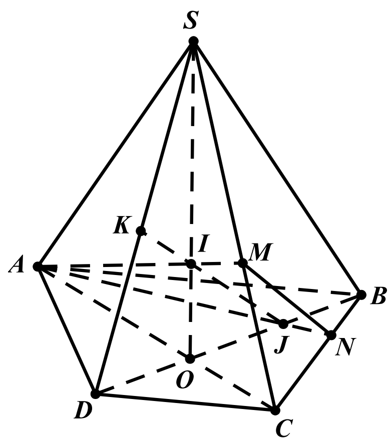
Trong (SAC) gọi $I = SO \cap AM$ và $K = IJ \cap SD$.

Ta có $I \in AM \subset (AMN), J \in AN \subset (AMN)$

$\Rightarrow IJ \subset (AMN)$.

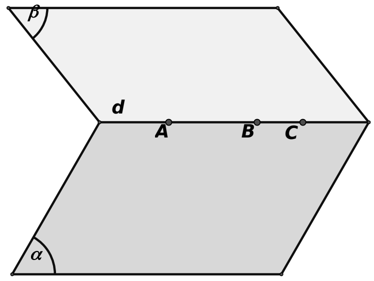
Do đó $K \in IJ \subset (AMN) \Rightarrow K \in (AMN)$.

Vậy $K = SD \cap (AMN)$



DẠNG 3: BA ĐIỂM THẲNG HÀNG, BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY TRONG KHÔNG GIAN

a) Để chứng minh ba điểm (hay nhiều điểm) thẳng hàng ta chứng minh chúng là điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt, khi đó chúng nằm trên đường thẳng giao tuyên của hai mặt phẳng nên thẳng hàng.

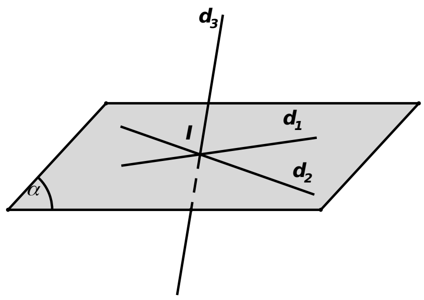


tức là:

- Tìm $d=(\alpha)\cap(\beta)$;
- Chỉ ra (chứng minh) d đi qua ba điểm A,B,C $\Rightarrow$ A,B,C thẳng hàng.

Hoặc chứng minh đường thẳng AB đi qua C $\Rightarrow$ A,B,C thẳng hàng.

b) Để chứng minh ba đường thẳng đồng qui ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng thuộc đường đường thẳng còn lại.



Phương pháp 1

Cơ sở của phương pháp này là ta cần chứng minh đường thẳng thứ nhất qua giao điểm của hai đường thẳng còn lại.

- Bước 1: Tìm $I=d_1\cap d_2$.
- Bước 2: Chứng minh d_3 đi qua I.

$\Rightarrow$ d_1,d_2,d_3 đồng quy tại I.

Phương pháp 2

Cơ sở của phương pháp là ta cần chứng minh chúng đôi một cắt nhau và dôi một ở trong ba mặt phẳng phân biệt.

- Bước 1: Xác định

$$\begin{cases} d_1,d_2\subset(\alpha);\ d_1\cap d_2=I_1 \\ d_2,d_3\subset(\beta);\ d_2\cap d_3=I_2 \\ d_3,d_1\subset(\gamma);\ d_3\cap d_1=I_3 \end{cases}$$ trong đó (α), (β), (γ) phân biệt

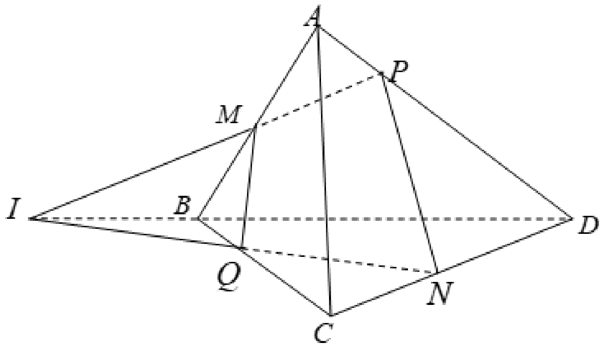
- Bước 2: Kết luận d_1,d_2,d_3 đồng quy tại $I\equiv I_1\equiv I_2\equiv I_3$.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD và BC lần lượt tại P, Q. Biết MP cắt NQ tại I. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. I, A, C. **B.** I, B, D. **C.** I, A, B. **D.** I, C, D.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.



Ta có MP cắt NQ tại I

$\Rightarrow \begin{cases} I \in MP \\ I \in NQ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (ABD) \\ I \in (CBD) \end{cases}$.

$\Rightarrow I \in (ABD) \cap (CBD)$.

$\Rightarrow I \in BD$.

Vậy I, B, D thẳng hàng.

Câu 2: Cho tứ diện $SABC$. Trên SA, SB và SC lấy các điểm D, E và F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K.Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Ba điểm B, J, K thẳng hàng

B. Ba điểm I, J, K thẳng hàng

C. Ba điểm I, J, K không thẳng hàng

D. Ba điểm I, J, C thẳng hàng

Hướng dẫn giải:

Ta có

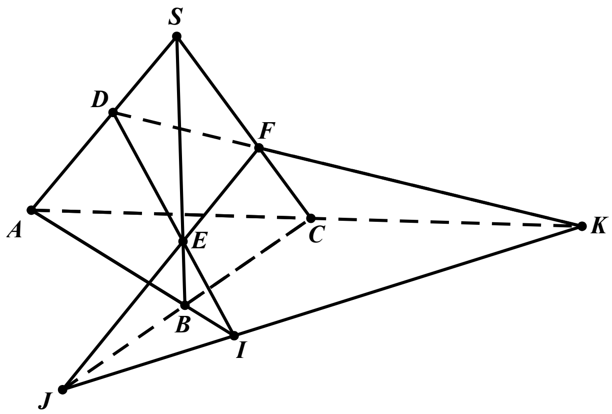
$I = DE \cap AB, DE \subset (DEF) \Rightarrow I \in (DEF)$;

$AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC)$ (1).Tương tự

$J = EF \cap BC$

$\Rightarrow \begin{cases} J \in EF \in (DEF) \\ J \in BC \subset (ABC) \end{cases}$ (2) $K = DF \cap AC$

$\Rightarrow \begin{cases} K \in DF \subset (DEF) \\ K \in AC \subset (ABC) \end{cases}$ (3)Từ (1),(2) và (3) ta có I, J, K là điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (DEF) nên chúng thẳng hàng.



Câu 3: Cho tứ diện $SABC$ có D, E lần lượt là trung điểm của AC, BC và G là trọng tâm của tam giác ABC. Mặt phẳng (α) đi qua AC cắt SE, SB lần lượt tại M, N. Một mặt phẳng (β) đi qua BC cắt SD, SA tương ứng tại P và Q.

a) Gọi $I = AM \cap DN, J = BP \cap EQ$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Bốn điểm S, I, J, G thẳng hàng. **B.** Bốn điểm S, I, J, G không thẳng hàng.

C. Ba điểm P, I, J thẳng hàng. **D.** Bốn điểm I, J, Q thẳng hàng.

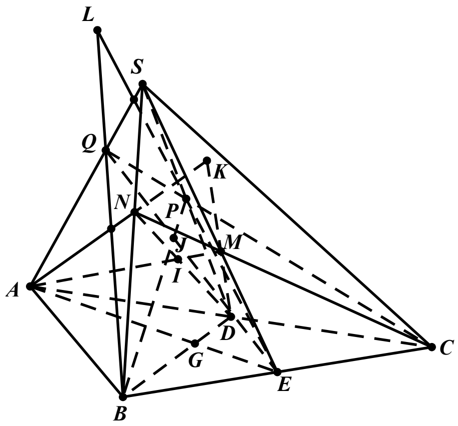
b) Giả sử $K = AN \cap DM, L = BQ \cap EP$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Ba điểm S, K, L thẳng hàng. **B.** Ba điểm S, K, L không thẳng hàng

C. Ba điểm B, K, L thẳng hàng **D.** Ba điểm C, K, L thẳng hàng

Hướng dẫn giải:

a) Ta có $S \in (SAE) \cap (SBD)$, (1)



$$G = AE \cap BD \Rightarrow \begin{cases} G \in AE \subset (SAE) \\ G \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G \in (SAE) \\ G \in (SBD) \end{cases} \quad (2)$$

$$I = AM \cap DN \Rightarrow \begin{cases} I \in DN \subset (SBD) \\ I \in AM \subset (SAE) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (SBD) \\ I \in (SAE) \end{cases} \quad (3)$$

$$J = BP \cap EQ \Rightarrow \begin{cases} J \in BP \subset (SBD) \\ J \in EQ \subset (SAE) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J \in (SBD) \\ J \in (SAE) \end{cases} \quad (4)$$

Từ (1),(2),(3) và (4) ta có S, I, J, G là điểm chung của hai mặt phẳng (SBD) và (SAE) nên chúng thẳng hàng.

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tưng ứng tại các điểm M, N, P, Q. Khẳng định nào đúng?

A. Các đường thẳng MP, NQ, SO đồng qui.
B. Các đường thẳng MP, NQ, SO chéo nhau.
C. Các đường thẳng MP, NQ, SO song song.
D. Các đường thẳng MP, NQ, SO trùng nhau.

Hướng dẫn giải:

Trong mặt phẳng $(MNPQ)$ gọi $I = MP \cap NQ$.

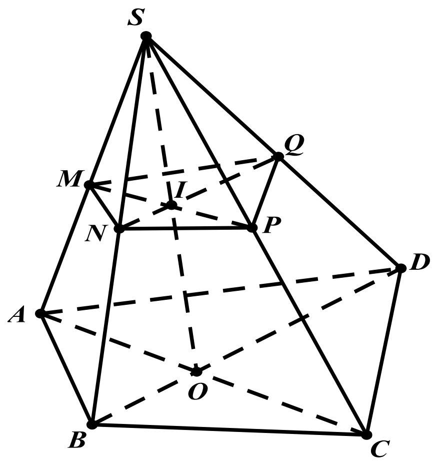
Ta sẽ chứng minh $I \in SO$.

Dễ thấy $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

$$\begin{cases} I \in MP \subset (SAC) \\ I \in NQ \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in (SAC) \\ I \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in SO$$

Vậy MP, NQ, SO đồng qui tại I.



Câu 5: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng a. Trong (P) lấy hai điểm A, B nhưng không thuộc a và S là một điểm không thuộc (P). Các đường thẳng SA, SB cắt (Q) tương ứng tại các điểm C, D. Gọi E là giao điểm của AB và a.Khẳng định nào đúng?

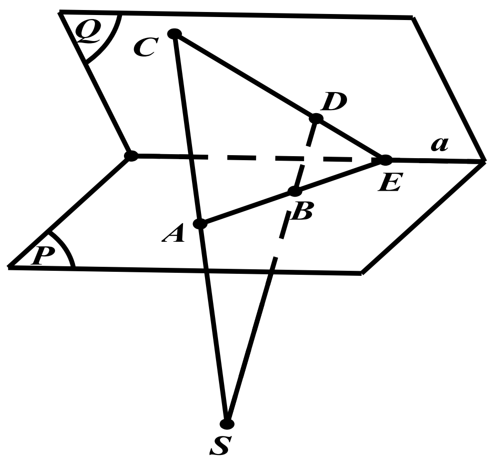
A. AB, CD và a đồng qui.
B. AB, CD và a chéo nhau.
C. AB, CD và a song song nhau.
D. AB, CD và a trùng nhau

Hướng dẫn giải:

Trước tiên ta có $S \notin AB$ vì ngược lại thì $S \in AB \subset (P) \Rightarrow S \in (P)$ (mâu thuẫn giả thiết) do đó S, A, B không thẳng hàng, vì vậy ta có mặt phẳng (SAB).

Do $C = SA \cap (Q) \Rightarrow \begin{cases} C \in SA \subset (SAB) \\ C \in (Q) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} C \in (SAB) \\ C \in (Q) \end{cases} \quad (1)$$



Tương tự $D = SB \cap (Q) \Rightarrow \begin{cases} D \in SB \subset (SAB) \\ D \in (Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D \in (SAB) \\ D \in (Q) \end{cases} \quad (2)$

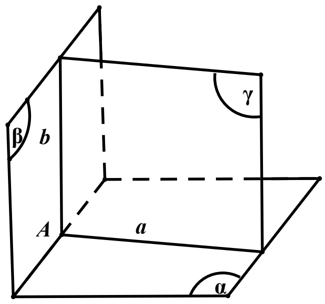
Từ (1) và (2) suy ra $CD = (SAB) \cap (Q)$.

Mà $E = AB \cap a \Rightarrow \begin{cases} E \in AB \subset (SAB) \\ E \in a \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E \in (SAB) \\ E \in (Q) \end{cases} \Rightarrow E \in CD$.

Vậy AB, CD và a đồng qui đồng qui tại E.

DẠNG 4: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN CỦA MỘT MẶT PHẲNG VỚI HÌNH CHÓP.

Phương pháp:
Để xác định thiết diện của hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ cắt bởi mặt phẳng (α), ta tìm giao điểm của mặt phẳng (α) với các đường thẳng chứa các cạnh của hình chóp. Thiết diện là đa giác có đỉnh là các giao điểm của (α) với hình chóp (và mỗi cạnh của thiết diện phải là một đoạn giao tuyến với một mặt của hình chóp)
Trong phần này chúng ta chỉ xét thiết diện của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.
Lưu ý: Điểm chung của hai mặt phẳng (α)và (β)thường được tìm như sau :



Tìm hai đường thẳng a, b lần lượt thuộc (α)và (β), đồng thời chúng cùng nằm trong mặt phẳng (γ) nào đó; giao điểm $M = a \cap b$ chính là điểm chung của (α)và (β).

Câu 1: Cho $ABCD$ là một tứ giác lồi. Hình nào sau đây không thể là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$?
A. Tam giác. **B.** Tứ giác. **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

Hướng dẫn giải:
Chọn D.
Hình chóp $S.ABCD$ có 5 mặt nên thiết diện của hình chóp có tối đa 5 cạnh. Vậy thiết diện không thể là lục giác.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Thiết diện của mặt phẳng (α) tuỳ ý với hình chóp không thể là:
A. Lục giác. **B.** Ngũ giác. **C.** Tứ giác. **D.** Tam giác.

Hướng dẫn giải:
Chọn A.
Thiết diện của mặt phẳng với hình chóp là đa giác được tạo bởi các giao tuyến của mặt phẳng đó với mỗi mặt của hình chóp.
Hai mặt phẳng bất kì có nhiều nhất một giao tuyến.
Hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có 5 mặt nên thiết diện của (α) với $S.ABCD$ có không qua 5 cạnh, không thể là hình lục giác 6 cạnh.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và điểm M ở trên cạnh SB . Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp theo thiết diện là
A. tam giác. **B.** hình thang. **C.** hình bình hành. **D.** hình chữ nhật.

Hướng dẫn giải:
Chọn B.

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình thang với AD là đáy lớn và P là một điểm trên cạnh SD .
a) Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (PAB) là hình gì?
A. Tam giác **B.** Tứ giác **C.** Hình thang **D.** Hình bình hành

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP) là hình gì?

A. Ngũ giác **B.** Tứ giác **C.** Hình thang **D.** Hình bình hành

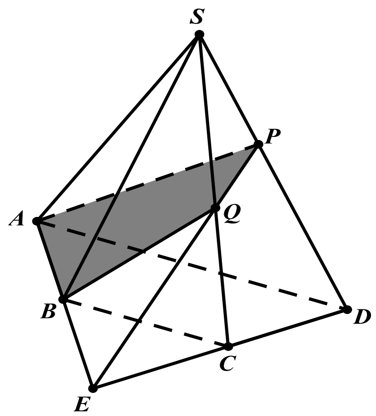
Hướng dẫn giải:

a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = AB \cap CD$.

Trong mặt phẳng (SCD) gọi $Q = SC \cap EP$.

Ta có $E \in AB$ nên $EP \subset (ABP) \Rightarrow Q \in (ABP)$, do đó $Q = SC \cap (ABP)$.

Thiết diện là tứ giác $ABQP$.



b)Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi F, G lần lượt là các giao điểm của MN với AD và CD

Trong mặt phẳng (SAD) gọi $H = SA \cap FP$

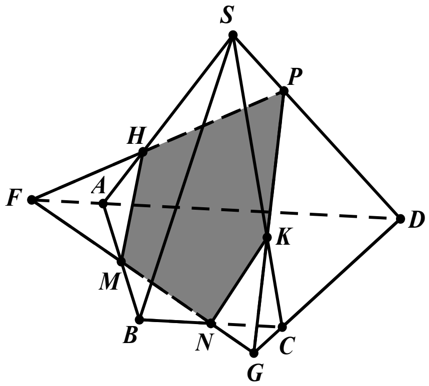
Trong mặt phẳng (SCD) gọi $K = SC \cap PG$.

Ta có $F \in MN \Rightarrow F \in (MNP)$,

$\Rightarrow FP \subset (MNP) \Rightarrow H \in (MNP)$

Vậy $\begin{cases} H \in SA \\ H \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow H = SA \cap (MNP)$ Tương tự $K = SC \cap (MNP)$.

Thiết diện là ngũ giác $MNKPH$.



Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$. Điểm C' nằm trên cạnh SC.

Thiết diện của hình chóp với mp (ABC') là một đa giác có bao nhiêu cạnh?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Xét (ABA') và (SCD) có

$\begin{cases} A' \in SC, SC \subset (SCD) \\ A' \in (ABA') \end{cases} \Rightarrow A'$ là điểm chung 1.

Gọi $I = AB \cap CD$

Có $\begin{cases} I \in AB, AB \subset (ABA') \\ I \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow I$ là điểm chung 2.

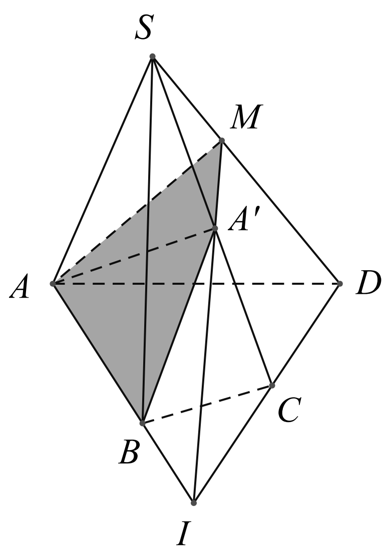
$\Rightarrow (ABA') \cap (SCD) = IA'$

Gọi $M = IA' \cap SD$.

Có

$(ABA') \cap (SCD) = A'M$

$(ABA') \cap (SAD) = AM$



$(ABA')\cap(ABCD)=AB$

$(ABA')\cap(SBC)=BA'$

Thiết diện là tứ giác $ABA'M$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là:

A. Tam giác IBC.

B. Hình thang $IJCB$ (J là trung điểm SD).

C. Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm SB).

D. Tứ giác $IBCD$.

Hướng dẫn giải:

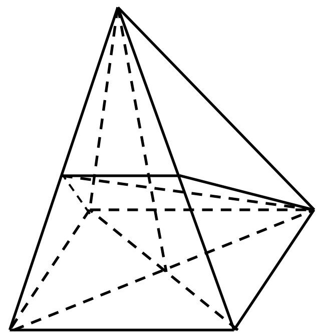
Chọn B.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, G là giao điểm của CI và SO.

Khi đó G là trọng tâm tam giác SAC. Suy ra G là trọng tâm tam giác SBD.

Gọi $J=BG\cap SD$. Khi đó J là trung điểm SD.

Do đó thiết điện của hình chóp cắt bởi (IBC) là hình thang $IJCB$ (J là trung điểm SD).



Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành tâm O. Gọi M,N,P là ba điểm trên các cạnh AD,CD,SO. Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) là hình gì?

A. Ngũ giác **B.** Tứ giác **C.** Hình thang **D.** Hình bình hành

Hướng dẫn giải:

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi E,K,F lần lượt là giao điểm của MN với DA,DB,DC.

Trong mặt phẳng (SDB) gọi $H=KP\cap SB$

Trong mặt phẳng (SAB) gọi $T=EH\cap SA$

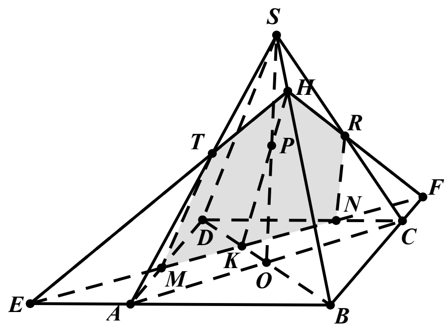
Trong mặt phẳng (SBC) gọi $R=FH\cap SC$.

Ta có $\begin{cases}E\in MN\\H\in KP\end{cases}\Rightarrow EH\subset(MNP)$,

$\begin{cases}T\in SA\\T\in EH\subset(MNP)\end{cases}\Rightarrow T=SA\cap(MNP)$.

Lí luận tương tự ta có $R=SC\cap(MNP)$.

Thiết diện là ngũ giác $MNRHT$.



Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$, M và N lần lượt là trung điểm AB và AC. Mặt phẳng (α) qua MN cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là đa giác (T). Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A. (T) là hình chữ nhật.

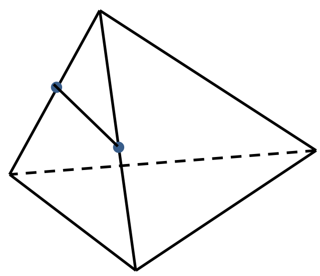
B. (T) là tam giác.

C. (T) là hình thoi.

D. (T) là tam giác hoặc hình thang hoặc hình bình hành.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.



(α) qua MN cắt AD ta được thiết diện là một tam giác.

(α) qua MN cắt hai cạnh BD và CD ta được thiết diện là một hình thang.

Đặc biệt khi mặt phẳng này đi qua trung điểm của BD và CD, ta được thiết diện là một hình bình hành.

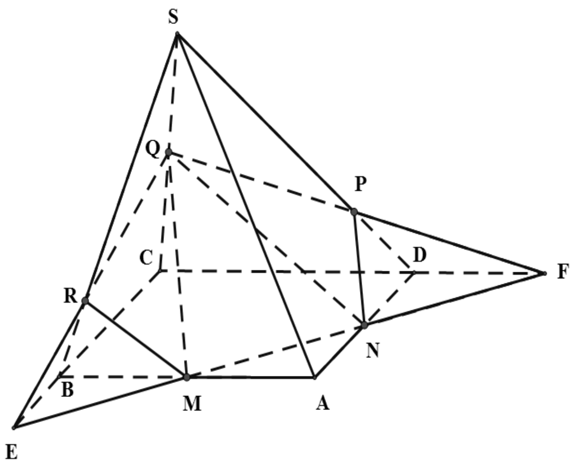
Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, AD, SC.$ Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNQ) là đa giác có bao nhiêu cạnh ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNQ) là ngũ giác $MNPQR.$ Đa giác này có 5 cạnh.



Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a) (SAC) và (SBD)

A. SC | **B.** SB

C. SO trong đó $O = AC \cap BD$ | **D.** $\{S\}$

b) (SAC) và (MBD)

A. SM | **B.** MB

C. OM trong đó $O = AC \cap BD$ | **D.** SD

c) (MBC) và (SAD)

A. SM | **B.** FM trong đó $F = BC \cap AD$

C. SO trong $O = AC \cap BD$ | **D.** SD

d) (SAB) và (SCD)

A. SE trong đó $E = AB \cap CD$ | **B.** FM trong đó $F = BC \cap AD$

C. SO trong $O = AC \cap BD$ | **D.** SD

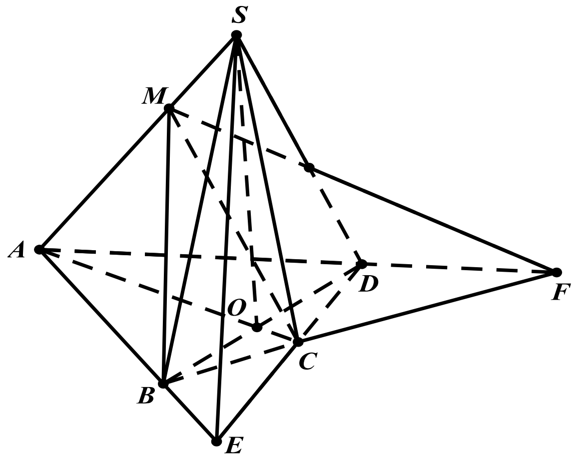
Hướng dẫn giải:

a) Gọi $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow \begin{cases} O\in AC\subset(SAC) \\ O\in BD\subset(SBD) \end{cases}$ Lại có $S\in(SAC)\cap(SBD)$

$\Rightarrow O\in(SAC)\cap(SBD)$

$\Rightarrow SO=(SAC)\cap(SBD)$.



b) $O=AC\cap BD$

$\Rightarrow \begin{cases} O\in AC\subset(SAC) \\ O\in BD\subset(MBD) \end{cases}$

$\Rightarrow O\in(SAC)\cap(MBD)$.

Và $M\in(SAC)\cap(MBD)\Rightarrow OM=(SAC)\cap(MBD)$.

c) Trong $(ABCD)$ gọi

$F=BC\cap AD\Rightarrow \begin{cases} F\in BC\subset(MBC) \\ F\in AD\subset(SAD) \end{cases}\Rightarrow F\in(MBC)\cap(SA$

Và $M\in(MBC)\cap(SAD)\Rightarrow FM=(MBC)\cap(SAD)$

d) Trong $(ABCD)$ gọi $E=AB\cap CD$, ta có

$SE=(SAB)\cap(SCD)$.

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$, O là một điểm thuộc miền trong tam giác BCD, M là điểm trên đoạn AO

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MCD) với các mặt phẳng (ABC).

A. PC trong đó $P=DC\cap AN$, $N=DO\cap BC$
B. PC trong đó $P=DM\cap AN$, $N=DA\cap BC$
C. PC trong đó $P=DM\cap AB$, $N=DO\cap BC$
D. PC trong đó $P=DM\cap AN$, $N=DO\cap BC$

b) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MCD) với các mặt phẳng (ABD).

A. DR trong đó $R=CM\cap AQ$, $Q=CA\cap BD$
B. DR trong đó $R=CB\cap AQ$, $Q=CO\cap BD$
C. DR trong đó $R=CM\cap AQ$, $Q=CO\cap BA$
D. DR trong đó $R=CM\cap AQ$, $Q=CO\cap BD$

c) Gọi I,J là các điểm tương ứng trên các cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IJM) và (ACD).

A. FG trong đó $F=IJ\cap CD$, $G=KM\cap AE$, $K=BE\cap IA$, $E=BO\cap CD$
B. FG trong đó $F=IA\cap CD$, $G=KM\cap AE$, $K=BA\cap IJ$, $E=BO\cap CD$
C. FG trong đó $F=IJ\cap CD$, $G=KM\cap AE$, $K=BA\cap IJ$, $E=BO\cap CD$
D. FG trong đó $F=IJ\cap CD$, $G=KM\cap AE$, $K=BE\cap IJ$, $E=BO\cap CD$

Hướng dẫn giải:

a) Trong (BCD) gọi $N = DO \cap BC$, trong (ADN) gọi $P = DM \cap AN$

$\Rightarrow \begin{cases} P \in DM \subset (CDM) \\ P \in AN \subset (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow P \in (CDM) \cap (ABC)$

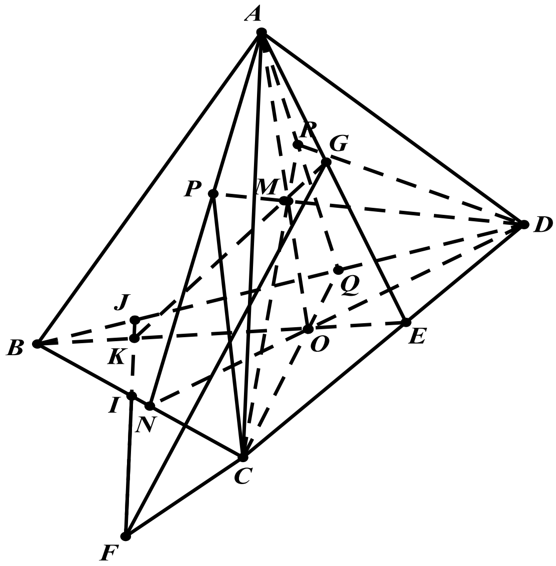
Lại có

$C \in (CDM) \cap (ABC) \Rightarrow PC = (CDM) \cap (ABC)$.

b)Tương tự, trong (BCD) gọi $Q = CO \cap BD$, trong (ACQ)gọi $R = CM \cap AQ$

$\Rightarrow \begin{cases} R \in CM \subset (CDM) \\ R \in AQ \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow R \in (CDM) \cap (ABD)$

D là điểm chung thứ hai của (MCD) và (ABD) nên $DR = (CDM) \cap (ABD)$.



c) Trong (BCD) gọi $E = BO \cap CD, F = IJ \cap CD$, $K = BE \cap IJ$; trong (ABE) gọi $G = KM \cap AE$.

Có $\begin{cases} F \in IJ \subset (IJM) \\ F \in CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow F \in (IJM) \cap (ACD)$, $\begin{cases} G \in KM \subset (IJM) \\ G \in AE \subset (ACD) \end{cases}$