UBND TP. TAM KỲ
PHÒNG GD VÀ ĐÀO TẠO

Đề chính thức

KỲ THI KHẢO SÁT HSG GIỎI LỚP 9 LẦN 2
NĂM HỌC 2023-2024

MÔN THI: TOÁN
Ngày 02 tháng 11 năm 2023
Thời gian: 120 phút(Không tính thời gian giao đề)

Câu 1. (4.0 điểm)
a) Tính giá trị của
$$P=\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}+\sqrt{12}\right)\cdot\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}-\sqrt{12}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}+\sqrt{12}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}-\sqrt{12}\right)$$

b) Cho các số thực $a>0,b>0$ thỏa mãn $\sqrt{2ab}=a-4b$. Tính $Q=\dfrac{\sqrt[3]{ab}\left(2024\sqrt[3]{a}-2023\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt{2ab}}$

Câu 2. (4.0 điểm)
a) Giải phương trình: $\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x}=3x^2-48x+194$

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $B(-1;2)$ và đường thẳng $(d_1): y=m^2x-m^4+2$ và $(d_2): y=\dfrac{m^2}{m^2+1}x+2$ (m là tham số thực khác 0). Gọi A là giao điểm của (d_1) và (d_2); hai điểm C,D lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và A lên trục hoành. Tìm tất cả các giá trị của m để diện tích $ABCD$ bằng $\dfrac{15}{2}$.

Câu 3. (4.0điểm)
a) Một số nguyên tố liên tiếp cách nhau 2 đơn vị được gọi là "**cặp số nguyên tố sinh đôi**". Chứng minh rằng một cặp số gồm hai số nguyên tố lớn hơn 5 sinh đôi bất kì đều có dạng $(6m-1,6m+1)$ với m là số nguyên dương.

b) Cho hai số nguyên dương a,b sao cho là số nguyên. Chứng minh rằng $|a-2b|$ là số chính phương.

Câu 4. (5.0 điểm) Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại A sao cho $R>R'$. Vẽ dây của đường AM của đường tròn (O) và dây AN của đường tròn (O') sao cho tam giác AMN vuông tại A. Gọi BC là một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (O) và (O') trong đó $B\in(O),C\in(O')$.

a) Chứng minh rằng $OM//O'N$.

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng MN,BC và OO' đồng quy.

c) Xác định vị trí các điểm M và N để tứ giác $MNO'O$ có diện tích lớn nhất và tìm diện tích lớn nhất đó.

Câu 5. (3 điểm)

Cho a,b,c là các số thực không âm, không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng:
$$\frac{a\sqrt{a^2+3bc}}{b+c}+\frac{b\sqrt{b^2+3ca}}{c+a}+\frac{c\sqrt{c^2+3ab}}{a+b}\geq a+b+c$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

………………………………….**HẾT**………………………………….

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu 1. (4.0 điểm) a) Tính giá trị của $P=\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}+\sqrt{12}\right)\cdot\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}-\sqrt{12}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}+\sqrt{12}\right)\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}-\sqrt{12}\right)$ b) Cho các số thực $a>0,b>0$ thỏa mãn $\sqrt{2ab}=a-4b$. Tính $Q=\dfrac{\sqrt[3]{ab}\left(2024\sqrt[3]{a}-2023\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt{2ab}}$		
	a) (1,5 điểm) Ta có: $P=\left[\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{12}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{12}\right)^2\right]$ $=\left(9+2\sqrt{10}\cdot\sqrt{11}\right)\left(9-2\sqrt{10}\cdot\sqrt{11}\right)$ $=9^2-\left(2\sqrt{10}\cdot\sqrt{11}\right)^2 81-440=-359$	
	b) (2,4 điểm) Ta có: $\sqrt{2ab}=a-4b\Leftrightarrow\sqrt{2ab}+2b=a-2b$ $\Leftrightarrow\sqrt{2b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{2b}\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2b}\right)$ Vì $a>0,b>0$ nên $\sqrt{a}+\sqrt{2b}>0$ Suy ra $\sqrt{2b}=\sqrt{a}-\sqrt{2b}\Leftrightarrow\sqrt{a}=2\sqrt{2b}\Leftrightarrow a=8b$ Thay $a=8b$ vào biểu thức Q ta được $Q=\dfrac{\sqrt[3]{8b^2}\left(2024\sqrt[3]{8b}-2023\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt{16y^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{b^2}\left(4048\sqrt[3]{b}-2023\sqrt[3]{b}\right)}{4b}$ $=\dfrac{2\sqrt[3]{b^2}\cdot2025\sqrt[3]{b}}{4b}=\dfrac{2\cdot2025b}{4b}=\dfrac{2025}{2}$	
Câu 2. (4.0 điểm) a) Giải phương trình: $\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x}=3x^2-48x+194$ b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $B(-1;2)$ và đường thẳng $(d_1): y=m^2x-m^4+2$ và $(d_2): y=\dfrac{m^2}{m^2+1}x+2$ (m là tham số thực khác 0). Gọi A là giao điểm của (d_1) và (d_2); hai điểm C,D lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và A lên trục hoành. Tìm tất cả các giá trị của m để diện tích $ABCD$ bằng $\dfrac{15}{2}$.		
	a) (2,0 điểm) Điều kiện: $7\le x\le9$ Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:	

$$\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x}=\sqrt{(x-7)\cdot 1}+\sqrt{(9-x)\cdot 1}\le\frac{(x-7)+1}{2}+\frac{(9-x)+1}{2}=2$$

(Đánh giá đúng ở mỗi căn thức được 0,5 điểm)

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x-7=1\\9-x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=8$

Mặt khác, ta có: $3x^2-48x+194=3(x-8)^2+2\ge 2$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $(x-8)^2=0\Leftrightarrow x=8$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=8$

Nếu vế trái của phương trình, thí sinh đánh giá bằng BĐT Cauchy-Schwarz thì vẫn cho điểm tương tự như trên.

$$\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x}\le\sqrt{(1+1)(x-7+9-x)}=2$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x-7}=\sqrt{9-x}\Leftrightarrow x=8$

b) (2,0 điểm)

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là

$$\frac{m^2}{m^2+1}x+2=m^2x-m^4+2\Leftrightarrow x=m^2+1$$

Suy ra $A(m^2+1;m^2+2)$

Vì C,D lần lượt là hình chiếu của B và A lên trục hoành nên ta có

$BC=2, AD=m^2+2, CD=m^2+2$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot(BC+AD)=\frac{1}{2}(m^2+2)(2+m^2+2)$$

$$=\frac{1}{2}(m^2+2)(m^2+4)=\frac{1}{2}(m^4+6m+8)$$

$$S_{ABCD}=\frac{15}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(m^4+6m^2+8)=\frac{15}{2}\Leftrightarrow m^4+6m^2-7=0$$

Giải phương trình trùng phương này, tìm được $m=\pm 1$

Câu 3. (4.0điểm)

a) Một số nguyên tố liên tiếp cách nhau 2 đơn vị được gọi là "**cặp số nguyên tố sinh đôi**". Chứng minh rằng một cặp số gồm hai số nguyên tố lớn hơn 5 sinh đôi bất kì đều có dạng $(6m-1,6m+1)$ với m là số nguyên dương.

b) Cho hai số nguyên dương a,b sao cho là số nguyên. Chứng minh rằng $|a-2b|$ là số chính phương.

a) (2,0 điểm)

Giả sử $(P,P+2)$ là một cặp số nguyên tố sinh đôi với $p>5$.

* Nếu p có dạng $6m+1$ (với $m\in\mathbb{Z}^+$) thì $p+2=3(2m+1)$ là hợp số. Nên mâu thuẫn.

* Nếu p có dạng $6m-1$ (với $m\in\mathbb{Z}^+$) thì $p+2=6m+1$.

Vậy ta hoàn thành chứng minh.

b) (2,0 điểm)

Do cho $\dfrac{a^2-4b+1}{(a-2b)(2b-1)}$ là số nguyên nên a^2-4b+1 chia hết cho

$(a-2b)(2b-1)$, tức là tồn tại số nguyên k sao cho

$a^2-4b+1=k(a-2b)(2b-1)$

Đẳng thức này tương đương với

$a^2-4b^2+4b^2-4b+1=k(a-2b)(2b-1)$

$\Leftrightarrow (2b-1)^2=(a-2b)\left[k(2b-1)-(a+2b)\right]$

Đặt $(a-2b,k(2b-1)-(a+2b))=d$. Khi đó

$$\begin{cases}(a-2b)\vdots d\\ \left[k(2b-1)-(a+2b)\right]\vdots d\\ (2b-1)\vdots d\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-2b)\vdots d\\ (a+2b)\vdots d\\ (2b-1)\vdots d\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4d\vdots d\\ (2b-1)\vdots d\end{cases}$$

Do $(2b-1)\vdots d$ và $2b-1$ là số lẻ nên d lẻ.

Mặt khác $\begin{cases}4b\vdots d\\ (2b-1)\vdots d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4b\vdots d\\ (4b-2)\vdots d\end{cases} \Rightarrow 2\vdots d$ nên $d=1$

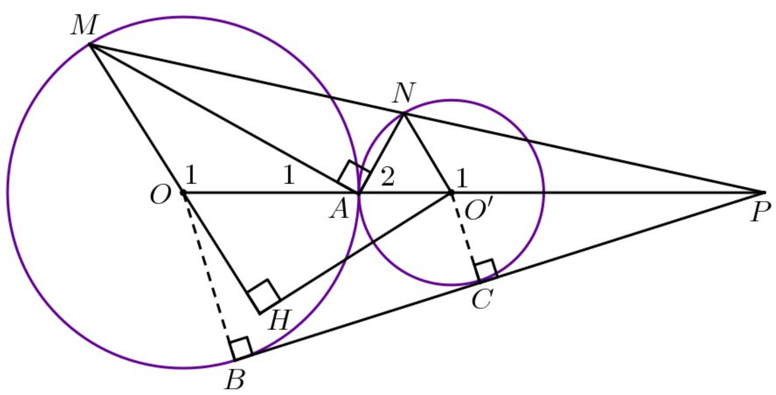
Vậy $|a-2b|$ là số chính phương.

Câu 4. (5.0 điểm) Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại A sao cho $R>R'$. Vẽ dây của đường AM của đường tròn (O) và dây AN của đường tròn (O') sao cho tam giác AMN vuông tại A. Gọi BC là một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (O) và (O') trong đó $B\in(O), C\in(O')$.

a) Chứng minh rằng $OM // O'N$.

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, BC và OO' đồng quy.

c) Xác định vị trí các điểm M và N để tứ giác $MNO'O$ có diện tích lớn nhất và tìm diện tích lớn nhất đó.



a) (1,5 điểm)

Ta có: $\widehat{O}_1=180^\circ-2\widehat{A}_1$ (do ΔOAM cân tại O).

$\widehat{O'}_1=2\widehat{A}_2=2\left(90^\circ-\widehat{A}_1\right)=180^\circ-2\widehat{A}_1$ (do $\Delta O'AN$ cân tại O' và $\widehat{A}_1+\widehat{A}_2=90^\circ$)

Do đó $\widehat{O}_1=\widehat{O'}_1$ hay $OM // O'N$

b) (1,5 điểm)

Gọi P là giao điểm của MN và OO'. Ta có: $\frac{PO'}{PO}=\frac{O'N}{OM}=\frac{R'}{R}$

Gọi P' là giao điểm của BC và OO'.

Vì $OB//O'C$ nên $\frac{P'O'}{P'O}=\frac{O'C}{OB}=\frac{R'}{R}$

Suy ra $\frac{PO'}{PO}=\frac{P'O'}{P'O}$. Do đó $P\equiv P'$.

Vậy ba đường thẳng MN, BC và OO' đồng quy.

c) (1,5 điểm)

Gọi H là hình chiếu của O' trên OM

Do $MNO'O$ là hình thang nên $S=\frac{(OM+O'N)\cdot O'H}{2}$

$S=\frac{R+R'}{2}\cdot O'H\le\frac{R+R'}{2}\cdot OO'=\frac{(R+R')^2}{2}$ (do $OO'=R+R'$)

Vậy tứ giác $MNO'O$ có diện tích lớn nhất là $\frac{(R+R')^2}{2}$ khi và chỉ khi $H\equiv O\Leftrightarrow OM\perp OO', O'N\perp OO'$.

Câu 5. (3 điểm)

Cho a,b,c là các số thực không âm, không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng:

$$\frac{a\sqrt{a^2+3bc}}{b+c}+\frac{b\sqrt{b^2+3ca}}{c+a}+\frac{c\sqrt{c^2+3ab}}{a+b}\ge a+b+c$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Áp dụng BĐT AM-GM ta có:

$$\frac{a\sqrt{a^2+3bc}}{b+c}=\frac{a(a^2+3bc)}{\sqrt{(b+c)^2(a^2+3bc)}}\ge\frac{2a(a^2+3bc)}{(b+c)^2+(a^2+3bc)}=\frac{2a^3+6abc}{S+5bc}$$

Trong đó $S=a^2+b^2+c^2$

Suy ra $\frac{2a^3+6abc}{S+5bc}-a\ge\frac{a^3+abc-a(b^2+c^2)}{S+5bc}$

Ta sẽ chứng minh BĐT $AX+BY+CZ=0$ trong đó

$A=\frac{1}{S+5bc}, B=\frac{1}{S+5ca}, C=\frac{1}{S+5ab}$

$X=a^3+abc-a(b^2+c^2), Y=b^3+abc-b(c^2+a^2)$,

$Z=c^3+abc-c(a^2+b^2)$

	Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó $A \ge B \ge C$; $X = a\left(a^2 - b^2\right) + ac(b - c) \ge 0$; $Z = c\left(c^2 - b^2\right) + ac(b - a) \le 0$ $X + Y + Z = a(a - b)(a - c) + b(b - a)(b - c) + c(c - a)(c - b)$ $= c(a - c) + (a - b)\left[a(a - c) - b(b - c)\right] \ge 0$ (Nếu có thí sinh nào ghi "áp dụng BĐT Schur" ta có: $X + Y + Z \ge 0$ mà không chứng minh dòng này vẫn cho đủ 0,5 điểm) Ta có: $AX + BY + CZ \ge BX + BY + BZ = B\left(X + Y + Z\right) \ge 0$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = 0, b = c$; $b = 0, c = a; c = 0, a = b$ (nếu thí sinh chỉ ghi đúng một phần nào đó trong mục này thì cho 0,25 điểm)	

-----------**Hết**-----------

<u>Chú ý</u>:

- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.

- Các trường hợp khác tổ chấm thống nhất phương án chấm.

UBND TP. TAM KỲ **PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**	**KỲ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI LỚP 9 LẦN 2** **NĂM HỌC 2023 - 2024** **MÔN TOÁN**
Đề chính thức	**Ngày 02 tháng 11 năm 2023** **Thời gian 120 phút**(*không kể thời gian phát đề*)

Câu 1. ***(4.0 điểm)***

a) Tính giá trị của $P = \left(\sqrt{10}+\sqrt{11}+\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}-\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}+\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}-\sqrt{12}\right)$.

b) Cho các số thực $a>0, b>0$ thỏa mãn $\sqrt{2ab} = a-4b$. Tính $Q = \dfrac{\sqrt[3]{ab}\left(2024\sqrt[3]{a}-2023\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt{2ab}}$.

Câu 2. ***(4.0 điểm)***

a) Giải phương trình: $\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x} = 3x^2-48x+194$.

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $B(-1;2)$ và hai đường thẳng $(d_1): y = m^2x - m^4 + 2$ và $(d_2): y = \dfrac{m^2}{m^2+1}x + 2$ (m là tham số thực khác 0). Gọi A là giao điểm của (d_1) và (d_2); hai điểm C, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và A lên trục hoành. Tìm tất cả các giá trị của m để diện tích $ABCD$ bằng $\dfrac{15}{2}$.

Câu 3. ***(4.0 điểm)***

a) Một cặp số nguyên tố liên tiếp cách nhau 2 đơn vị được gọi là **"cặp số nguyên tố sinh đôi"**. Chứng minh rằng một cặp số gồm hai số nguyên tố lớn hơn 5 sinh đôi bất kì đều có dạng $(6m-1, 6m+1)$ với m là số nguyên dương.

b) Cho hai số nguyên dương a, b sao cho $\dfrac{a^2-4b+1}{(a-2b)(2b-1)}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $|a-2b|$ là số chính phương.

Câu 4. ***(5.0 điểm)*** Cho hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R')$ tiếp xúc ngoài tại A sao cho $R>R'$. Vẽ dây AM của đường tròn (O) và dây AN của đường tròn (O') sao cho tam giác AMN vuông tại A. Gọi BC là một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (O) và (O') trong đó $B\in(O), C\in(O')$.

a) Chứng minh rằng $OM \parallel O'N$.

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, BC và OO' đồng quy.

c) Xác định vị trí các điểm M và N để tứ giác $MNO'O$ có diện tích lớn nhất và tìm diện tích lớn nhất đó.

Câu 5. ***(3.0 điểm)***
Cho a, b, c là các số thực không âm, không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{a\sqrt{a^2+3bc}}{b+c}+\frac{b\sqrt{b^2+3ca}}{c+a}+\frac{c\sqrt{c^2+3ab}}{a+b} \ge a+b+c.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

===Hết===

Lưu ý: Thí sinh không được phép sử dụng tài liệu. Giám thị không được gợi ý gì thêm.

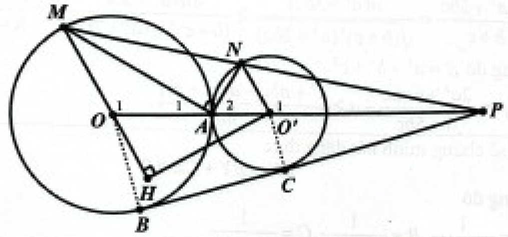
Họ và tên thí sinh...*Số báo danh*...............................

UBND THÀNH PHỐ TAM KỲ **PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**	**KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI LỚP 9-LẦN 2** **Năm học: 2023 – 2024** *Ngày 02 tháng 11 năm 2023* **Môn: TOÁN**

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm
1 (4.0 điểm)	**a) (1.5 điểm)** Ta có $P=\left[\left(\sqrt{10}+\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{12}\right)^2\right]\left[\left(\sqrt{10}-\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{12}\right)^2\right]$	0.5
	$=\left(9+2\sqrt{10}.\sqrt{11}\right)\left(9-2\sqrt{10}.\sqrt{11}\right)$	0.5
	$=9^2-\left(2\sqrt{10}.\sqrt{11}\right)^2=81-440=-359.$	0.5
	b) (2.5 điểm) Ta có $\sqrt{2ab}=a-4b\Leftrightarrow\sqrt{2ab}+2b=a-2b$ $\Leftrightarrow\sqrt{2b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{2b}\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2b}\right).$	0.5
	Vì $a>0,b>0$ nên $\sqrt{a}+\sqrt{2b}>0$.	0.5
	Suy ra $\sqrt{2b}=\sqrt{a}-\sqrt{2b}\Leftrightarrow\sqrt{a}=2\sqrt{2b}\Leftrightarrow a=8b$.	0.5
	Thay $a=8b$ vào biểu thức Q ta được $Q=\dfrac{\sqrt[3]{8b^2}.\left(2024\sqrt[3]{8b}-2023\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt{16b^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{b^2}\left(4048\sqrt[3]{b}-2023\sqrt[3]{b}\right)}{4b}$	0.5
	$=\dfrac{2\sqrt[3]{b^2}.2025\sqrt[3]{b}}{4b}=\dfrac{2.2025b}{4b}=\dfrac{2025}{2}.$	0.5
2 (4.0 điểm)	**a) (2.0 điểm)** Điều kiện: $7\le x\le 9$	0.25
	Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x}=\sqrt{(x-7).1}+\sqrt{(9-x).1}\le\dfrac{(x-7)+1}{2}+\dfrac{(9-x)+1}{2}=2.$ ***(Đánh giá đúng ở mỗi căn thức được 0.5 điểm)***	1.0
	Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x-7=1\\9-x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=8.$	0.25
	Mặt khác, ta có $3x^2-48x+194=3(x-8)^2+2\ge 2$.	0.25

	Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x-8)^2=0\Leftrightarrow x=8$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=8$.	0.25
	Nếu vế trái của phương trình, thí sinh đánh giá bằng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thì vẫn cho điểm tương tự như trên. $\sqrt{x-7}+\sqrt{9-x}\le\sqrt{(1+1)(x-7+9-x)}=2.$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x-7}=\sqrt{9-x}\Leftrightarrow x=8$.	
	b) (2.0 điểm) Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là $\dfrac{m^2}{m^2+1}x+2=m^2x-m^4+2\Leftrightarrow x=m^2+1.$ Suy ra $A(m^2+1;m^2+2)$.	0.5
	Vì C,D lần lượt là hình chiếu của B và A lên trục hoành nên ta có $BC=2,AD=m^2+2,CD=m^2+2.$	0.5
	$S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}.CD.(BC+AD)=\dfrac{1}{2}(m^2+2)(2+m^2+2)$ $=\dfrac{1}{2}(m^2+2)(m^2+4)=\dfrac{1}{2}(m^4+6m^2+8).$	0.5
	$S_{ABCD}=\dfrac{15}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}(m^4+6m^2+8)=\dfrac{15}{2}\Leftrightarrow m^4+6m^2-7=0.$ Giải phương trình trùng phương này, tìm được $m=\pm1$.	0.5
3 (4.0 điểm)	**a) (2.0 điểm)** Giả sử $(p,p+2)$ là một cặp số nguyên tố sinh đôi với $p>5$. • Nếu p có dạng $6m+1$ (với $m\in\mathbb{Z}^+$) thì $p+2=3(2m+1)$ là hợp số. Đây là điều mâu thuẫn.	1.0
	• Nếu p có dạng $6m-1$ (với $m\in\mathbb{Z}^+$) thì $p+2=6m+1$. Vậy ta hoàn thành chứng minh.	1.0
	b) (2.0 điểm) Do cho $\dfrac{a^2-4b+1}{(a-2b)(2b-1)}$ là số nguyên nên a^2-4b+1 chia hết cho $(a-2b)(2b-1)$, tức là tồn tại số nguyên k sao cho $a^2-4b+1=k(a-2b)(2b-1)$	0.5
	Đẳng thức này tương đương với $a^2-4b^2+4b^2-4b+1=k(a-2b)(2b-1)$ $\Leftrightarrow(2b-1)^2=(a-2b)[k(2b-1)-(a+2b)]$	0.5

	Đặt $(a-2b, k(2b-1)-(a+2b)) = d$. Khi đó $\begin{cases}(a-2b)\vdots d\\ [k(2b-1)-(a+2b)]\vdots d\\ (2b-1)\vdots d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(a-2b)\vdots d\\ (a+2b)\vdots d\\ (2b-1)\vdots d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4b\vdots d\\ (2b-1)\vdots d\end{cases}$	0.5
	Do $(2b-1)\vdots d$ và $2b-1$ là số lẻ nên d lẻ. Mặt khác $\begin{cases}4b\vdots d\\ (2b-1)\vdots d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4b\vdots d\\ (4b-2)\vdots d\end{cases} \Rightarrow 2\vdots d$ nên $d=1$. Vậy $\lvert a-2b\rvert$ là số chính phương.	0.5
4 ***(5.0 điểm)***	Vẽ hình đúng đến câu a) được ***0.5 điểm***  	0.5
	a) (1.5 điểm) Ta có $\widehat{O_1} = 180^0 - 2\widehat{A_1}$ (do tam giác OAM cân tại O).	0.5
	$\widehat{O'_1} = 2\widehat{A_2} = 2(90^0 - \widehat{A_1}) = 180^0 - 2\widehat{A_1}$ (do tam giác $O'AN$ cân tại O' và $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} = 90^0$).	0.5
	Do đó $\widehat{O_1} = \widehat{O'_1}$ hay $OM \,//\, O'N$.	0.5
	b) (1.5 điểm) Gọi P là giao điểm của MN và OO'. Ta có $$\frac{PO'}{PO} = \frac{O'N}{OM} = \frac{R'}{R}.$$	0.5
	Gọi P' là giao điểm của BC và OO'. Vì $OB \,//\, O'C$ nên $$\frac{P'O'}{P'O} = \frac{O'C}{OB} = \frac{R'}{R}.$$	0.5
	Suy ra $\frac{PO'}{PO} = \frac{P'O'}{P'O}$. Do đó $P = P'$. Vậy ba đường thẳng MN, BC và OO' đồng quy.	0.5

	c) (1.5 điểm) Gọi H là hình chiếu của O' trên OM. Do $MNO'O$ là hình thang nên $S = \frac{(OM + O'N).O'H}{2}$.	0.5
	$S = \frac{R+R'}{2}.O'H \le \frac{R+R'}{2}.OO' = \frac{(R+R')^2}{2}$ (do $OO' = R + R'$).	0.5
	Vậy tứ giác $MNO'O$ có diện tích lớn nhất là $\frac{(R+R')^2}{2}$ khi và chỉ khi $H \equiv O \Leftrightarrow OM \perp OO', O'N \perp OO'$.	0.5
5 ***(3.0 điểm)***	Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $$\frac{a\sqrt{a^2+3bc}}{b+c} = \frac{a(a^2+3bc)}{\sqrt{(b+c)^2(a^2+3bc)}} \ge \frac{2a(a^2+3bc)}{(b+c)^2+(a^2+3bc)} = \frac{2a^3+6abc}{S+5bc}$$ trong đó $S = a^2+b^2+c^2$. Suy ra $\frac{2a^3+6abc}{S+5bc} - a \ge \frac{a^3+abc-a(b^2+c^2)}{S+5bc}$.	0.5
	Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức $$AX + BY + CZ \ge 0$$ trong đó $A = \frac{1}{S+5bc}, B = \frac{1}{S+5ca}, C = \frac{1}{S+5ab}$ $X = a^3+abc-a(b^2+c^2), Y = b^3+abc-b(c^2+a^2), Z = c^3+abc-c(a^2+b^2)$	0.5
	Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó $A \ge B \ge C$; $X = a(a^2-b^2)+ac(b-c) \ge 0$; $Z = c(c^2-b^2)+ac(b-a) \le 0$.	0.5
	$X+Y+Z = a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)$ $= c(a-c)(b-c)+(a-b)[a(a-c)-b(b-c)] \ge 0$. ***(Nếu có thí sinh nào ghi "áp dụng bất đẳng thức Schur" ta có $X+Y+Z \ge 0$" mà không chứng minh dòng này vẫn cho đủ 0.5 điểm).***	0.5
	Ta có $AX + BY + CZ \ge BX + BY + BZ = B(X+Y+Z) \ge 0$.	0.5
	Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=0, b=c$; $b=0, c=a$; $c=0, a=b$. ***(Nếu thí sinh chỉ ghi đúng một phần nào đó trong mục này thì cho 0.25 điểm).***	0.5